

## Решение системы линейных уравнений

Дана система из  $n$  линейных уравнений с  $m$  неизвестными,  $n$  и  $m \geq 1$ , например ( $m=2$ ,  $n=2$ ):

$$3 \cdot x + 2 \cdot x - 16 / (1+7) \cdot y = 11$$

$$x + 2 \cdot y = 7$$

Коэффициентами при переменных уравнения могут быть как числа, так и составленные из них арифметические выражения (с использованием операций умножения, сложения, вычитания, деления и круглых скобок).

Необходимо составить рефал-программу, решающую эту систему *методом исключения переменных*.

В общем случае решение системы включает в себя следующие шаги:

1) Все уравнения системы преобразуются к каноническому виду:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + \dots + d = 0$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – числа.

2) В одном из уравнений некоторая переменная выражается через другие переменные:

$$x = -(b \cdot y + c \cdot z + \dots + d) / a = -b/a \cdot y - c/a \cdot z - \dots - d/a.$$

3) Полученное для этой переменной выражение подставляется в остальные уравнения системы вместо всех вхождений указанной переменной.

В результате выполнения этих трёх шагов получается формула для вычисления значения одной из переменных системы по значениям других переменных, а также новая равносильная система уравнений, содержащая на одно уравнение и на одну переменную меньше, чем предыдущая. Далее шаги 1-3 повторяются для этой новой системы уравнений, и так продолжается до тех пор, пока не останется одно уравнение или пока не обнаружится противоречие.

Противоречие (неверное равенство) возникает, когда система не имеет решения (например, в ходе преобразований получено уравнение  $6 - 4 = 0$ ). В этом случае рефал-программа должна в качестве ответа выдать сообщение

Система уравнений не имеет решения

Если в ходе преобразований одно из уравнений превратилось в тождество ( $0=0$ ), то исходная система уравнений была избыточна, а это уравнение можно исключить из решаемой системы.

Если в ходе преобразований системы получено одно уравнение с одной переменной, то из этого уравнения вычисляется значение этой переменной. Значения остальных переменных вычисляются по полученным в ходе преобразований формулам. В этом случае рефал-программа должна выдать решение системы уравнений в виде строк вида *имя\_переменной=значение*, например, для системы уравнений, приведённой выше в качестве примера, ответом будет:

$$x=3$$

$$y=2$$

Если же в результате преобразований системы уравнений остаётся одно уравнение, но оно содержит более одной переменной (например,  $x+y+2=0$ ), то это означает, что исходная система имеет бесконечное множество решений. В этом случае рефал-программа должна вывести на печать имена *свободных* переменных (которые могут принимать любые значения) и формулы для вычисления остальных переменных системы по значениям этих свободных переменных. Например, для заданной системы уравнений:

$$x+2*y-z=2$$

$$2*x-y+3*z=-6$$

рефал-программа может выдать результат в виде:

$$x=-z-2$$

$$y=z+2$$

$z$  – свободная переменная

### **Методические указания к вариантам**

Во всех вариантах рекомендуется выделить следующие предварительные этапы обработки исходных символьных выражений – *лексический* и *синтаксический* анализ.

Задача лексического анализа – выделение лексем исходного выражения и, возможно, перевод их во внутреннее представление, в котором:

- числовые константы (последовательности цифр) преобразованы в символы-цифры или макроцифры;
- имена переменных (последовательности букв и цифр, начинающиеся с буквы) заключены в структурные скобки или преобразованы в символ-метки;
- имена функций ( $\sin$ ,  $\cos$  и др. в варианте дифференцирования выражения) или служебные имена ( $\text{begin}$ ,  $\text{end}$ ,  $\text{case}$ ,  $\text{integer}$  и др. в вариантах интерпретации и трансляции паскаль-программы) преобразованы в соответствующие символы-метки ( $/\sin/$ ,  $/\cos/$ ,  $/\text{begin}/$  и т.п.);
- знаки операций, состоящие из нескольких символов, заменены на соответствующие им символы-метки (например, в варианте вычисления выражения языка C: знаки операции  $++$  можно заменить на символ-метку  $/pp/$ , а знаки  $*=$  на символ-метку  $/mulassign/$ );
- унарные знаки  $+$  и  $-$  заменены на другие символы – для того, чтобы отличать их от знаков бинарных операций  $+$  и  $-$ .

Основная задача синтаксического анализа – выявление структуры обрабатываемого выражения и перевод его во *внутреннее представление*, удобное для дальнейших преобразований. Для этого:

- необходимо заменить в исходном выражении символы круглых скобок на структурные скобки;

- в варианте вычисления выражения языка С в ходе расстановки структурных скобок целесообразно считать знаки тернарной операции ? и : особым видом парных скобок и заменить каждую пару таких символов на пару структурных скобок и символов-меток, например, /question/ и /two-spot/, или же заключить в структурные скобки каждую пару символов ?: вместе со стоящим между ними выражением;
- в вариантах интерпретации и трансляции паскаль-программы после замены обычных круглых скобок на структурные следует зафиксировать вложенность операторов паскаль-программы расстановкой структурных скобок вокруг фрагментов операторов, начинающихся и заканчивающихся соответственно символами-метками /begin/ и /end/, /then/ и /else/, /case/ и /endcase/, /repeat/ и /until/ (введёнными на этапе лексического анализа).

Таким образом, в ходе лексического и синтаксического анализа входное символьное выражение будет преобразовано во внутреннее представление, упрощающее его последующую обработку (дифференцирование, вычисление, интерпретацию, трансляцию и т.п. – в зависимости от варианта задания).

Для хранения значений переменных в ходе вычислений целесообразно использовать копилку.