

Лабораторная работа №6

Задача об эпидемии. Вариант 39

Абдуллина Ляйсан Раисовна, НПИБд-01-21

Содержание

Цель работы	4
Задачи	5
Теоретическое введение	6
Выполнение лабораторной работы	8
Условие варианта 39	8
Julia	8
OpenModelica	10
Анализ и сравнение результатов	11
Выводы	12
Список литературы	13

Список иллюстраций

1	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, $I(0) \leq I^*$	9
2	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, $I(0) > I^*$	10
3	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, $I(0) \leq I^*$	10
4	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, $I(0) > I^*$	11

Цель работы

Решить задачу об эпидемии.

Задачи

1. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\begin{aligned} dS/dt = \\ \{ -aS, \text{ если } I(t) > I^* \\ 0, \text{ если } I(t) < I^* \} \quad (1) \end{aligned}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\begin{aligned} dl/dt = \{ -aS - bI, \text{ если } I(t) > I^* \\ -bI, \text{ если } I(t) < I^* \} \quad (2) \end{aligned}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни) $dR/dt = bI$ (3)

Постоянные пропорциональности a, b , - это коэффициенты заболеваемости и выздо-

ровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0)=0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(t) \leq I^*$ и $I(t) \geq I^*$

Выполнение лабораторной работы

Условие варианта 39

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N=12\ 800$) в момент начала эпидемии ($t=0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0)=180$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0)=58$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0)=N-I(0)-R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае: 1) если $I(0) \leq I^*$ 2) если $I(0) > I^*$

Julia

```
Код для  $I(0) \leq I^*$ :  
using DifferentialEquations using Plots  
N = 12800 I0 = 180 R0 = 58 S0 = N - I0 - R0 a = 0.4 b = 0.32  
function ode_fn(du, u, p, t) S, I, R = u du[1] = 0 du[2] = -bu[2] du[3] = bI  
end  
v0 = [S0, I0, R0] tspan = (0.0, 60.0) prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan) sol = solve(prob,  
dtmax=0.05) S = [u[1] for u in sol.u] I = [u[2] for u in sol.u] R = [u[3] for u in sol.u] T = [t for t  
in sol.t]  
plt = plot(dpi=600, legend = :topright) plot!(plt, T, S, label = "Восприимчивые особи"  
,color=:green) plot!(plt, T, I, label = "Инфицированные особи" ,color=:red) plot!(plt, T, R,
```



```
label = "Особи с иммунитетом",color=:blue) savefig(plt,"lab6_1_jl.png")
```

Получим следующий график (Рис.1):

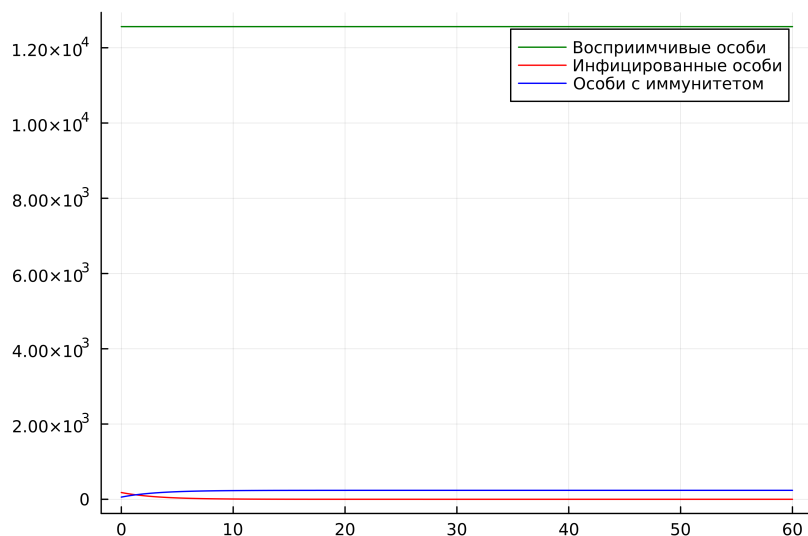


Рис. 1: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, $I(0) \leq I^*$

Код для $I(0) > I^*$:

```
using DifferentialEquations using Plots
N = 12800 I0 = 180 R0 = 58 S0 = N - I0 - R0 a = 0.4 b = 0.1
function ode_fn(du, u, p, t) S, I, R = u du[1] = -a*u[1] du[2] = a*u[1] - b*u[2] du[3] = b*I
end
v0 = [S0, I0, R0] tspan = (0.0, 120.0) prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan) sol = solve(prob,
dtmax=0.05) S = [u[1] for u in sol.u] I = [u[2] for u in sol.u] R = [u[3] for u in sol.u] T = [t for t
in sol.t]
plt = plot(dpi=600, legend = :topright) plot!(plt, T, S, label = "Восприимчивые особи"
,color=:green) plot!(plt, T, I, label = "Инфицированные особи",color=:red) plot!(plt, T, R,
label = "Особи с иммунитетом",color=:blue) savefig(plt,"lab6_2_jl.png")
```

Получим следующий график (Рис.2):

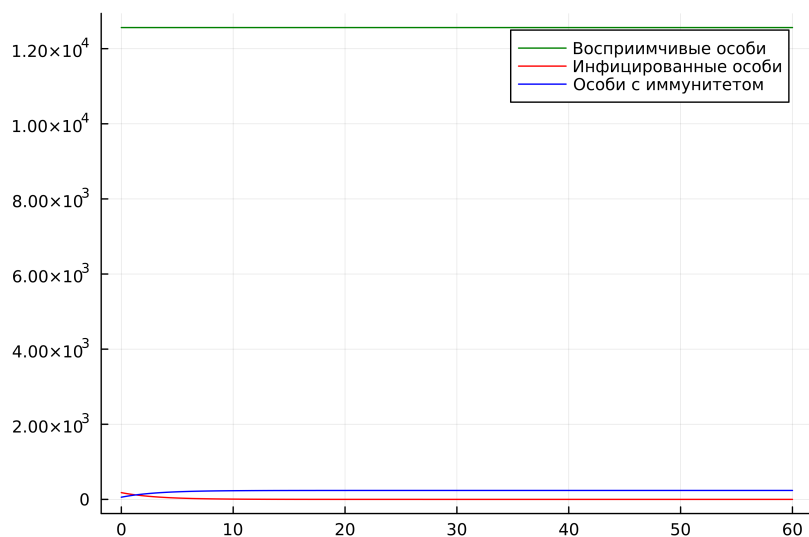


Рис. 2: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, $I(0) > I^*$

OpenModelica

Код для нестационарного состояния системы:

```
model lab6_1_mod Real N = 12800; Real I; Real R; Real S; Real a = 0.4; Real b = 0.34;
initial equation I = 180; R = 58; S = N - I - R; equation der(S) = 0; der(I) = -b * I; der(R) = b*I;
end lab6_1_mod;
```

Получим следующий график (Рис.3):

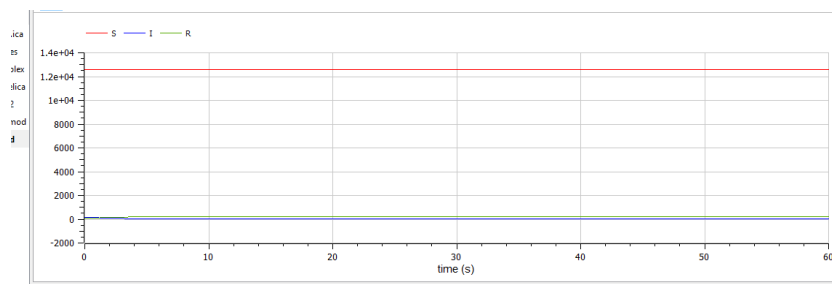


Рис. 3: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, $I(0) \leq I^*$

Код для стационарного состояния системы:

```

model lab6_2_mod Real N = 12800; Real I; Real R; Real S; Real a = 0.4; Real b = 0.1; initial
equation I = 180; R = 58; S = N - I - R; equation der(S) = -aS; der(I) = aS - bI; der(R) = bI;
end lab6_2_mod;

```

Получим следующий график (Рис.4):

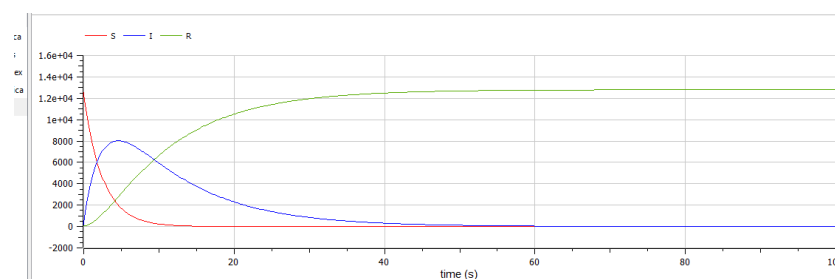


Рис. 4: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае, $I(0) > I^*$

Анализ и сравнение результатов

В ходе выполнения лабораторной работы были построены графики изменения числа особей в каждой из трех групп при заданных начальных условиях на языках Julia и с помощью ПО Open Modelica. Результаты графиков совпадают (не учитывая разности в масштабах).

Выводы

Мы решили задачу об эпидемии. и выполнили все поставленне перед нами задачи.

Список литературы

1. Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
2. Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
3. Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>