2.1 试问四进制、八进制脉冲所含信息量是二进制脉冲的多少倍？

解：

四进制脉冲可以表示 4 个不同的消息，例如：{0, 1, 2, 3}

八进制脉冲可以表示 8 个不同的消息，例如：{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

二进制脉冲可以表示 2 个不同的消息，例如：{0, 1}

假设每个消息的发出都是等概率的，则：

四进制脉冲的平均信息量 $H(X_1)=\log n=\log 4=2\ bit/symbol$

八进制脉冲的平均信息量 $H(X_2)=\log n=\log 8=3\ bit/symbol$

二进制脉冲的平均信息量 $H(X_0)=\log n=\log 2=1\ bit/symbol$

所以：

四进制、八进制脉冲所含信息量分别是二进制脉冲信息量的 2 倍和 3 倍。

2.2 居住某地区的女孩子有 25%是大学生，在女大学生中有 75%是身高 160 厘米以上的，而女孩子中身高 160 厘米以上的占总数的一半。假如我们得知“身高 160 厘米以上的某女孩是大学生”的消息，问获得多少信息量？

解：

设随机变量 X 代表女孩子学历

X	x_1（是大学生）	x_2（不是大学生）
$P(X)$	0.25	0.75

设随机变量 Y 代表女孩子身高

Y	y_1（身高>160cm）	y_2（身高<160cm）
$P(Y)$	0.5	0.5

已知：在女大学生中有 75%是身高 160 厘米以上的

即：$p(y_1/x_1)=0.75\ bit$

求：身高 160 厘米以上的某女孩是大学生的信息量

即：$I(x_1/y_1)=-\log p(x_1/y_1)=-\log\frac{p(x_1)p(y_1/x_1)}{p(y_1)}=-\log\frac{0.25\times 0.75}{0.5}=1.415\ bit$

2.3 一副充分洗乱了的牌（含 52 张牌），试问

(1) 任一特定排列所给出的信息量是多少？

(2) 若从中抽取 13 张牌，所给出的点数都不相同能得到多少信息量？

解：

(1) 52 张牌共有 52！种排列方式，假设每种排列方式出现是等概率的则所给出的信息量是：

$$p(x_i)=\frac{1}{52!}$$

$$I(x_i)=-\log p(x_i)=\log 52!=225.581\ bit$$

(2) 52 张牌共有 4 种花色、13 种点数，抽取 13 张点数不同的牌的概率如下：

$$p(x_i)=\frac{4^{13}}{C_{52}^{13}}$$

$$I(x_i)=-\log p(x_i)=-\log\frac{4^{13}}{C_{52}^{13}}=13.208\ bit$$

2.4 设离散无记忆信源$\begin{bmatrix}X\\P(X)\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_1=0 & x_2=1 & x_3=2 & x_4=3\\3/8 & 1/4 & 1/4 & 1/8\end{Bmatrix}$，其发出的信息为

(202120130213001203210110321010021032011223210)，求

(1) 此消息的自信息量是多少？

(2) 此消息中平均每符号携带的信息量是多少？

解：

(1) 此消息总共有 14 个 0、13 个 1、12 个 2、6 个 3，因此此消息发出的概率是：

$$p=\left(\frac{3}{8}\right)^{14}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{25}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{6}$$

此消息的信息量是：$I=-\log p=87.811\ bit$

(2) 此消息中平均每符号携带的信息量是：$I/n=87.811/45=1.951\ bit$

2.5 从大量统计资料知道，男性中红绿色盲的发病率为 7%，女性发病率为 0.5%，如果你问一位男士："你是否是色盲？"他的回答可能是"是"，可能是"否"，问这两个回答中各含多少信息量，平均每个回答中含有多少信息量？如果问一位女士，则答案中含有的平均自信息量是多少？

解：

男士：

$$p(x_Y)=7\%$$
$$I(x_Y)=-\log p(x_Y)=-\log 0.07=3.837\ bit$$
$$p(x_N)=93\%$$
$$I(x_N)=-\log p(x_N)=-\log 0.93=0.105\ bit$$
$$H(X)=-\sum_{i}^{2}p(x_i)\log p(x_i)=-(0.07\log 0.07+0.93\log 0.93)=0.366\ bit/symbol$$

女士：

$$H(X)=-\sum_{i}^{2}p(x_i)\log p(x_i)=-(0.005\log 0.005+0.995\log 0.995)=0.045\ bit/symbol$$

2.6 设信源$\begin{bmatrix}X\\P(X)\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6\\0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.16 & 0.17\end{Bmatrix}$，求这个信源的熵，并解释为什么

$H(X)>\log 6$ 不满足信源熵的极值性。

解：

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -\sum_{i}^{6} p(x_i)\log p(x_i) \\
&= -(0.2\log 0.2 + 0.19\log 0.19 + 0.18\log 0.18 + 0.17\log 0.17 + 0.16\log 0.16 + 0.17\log 0.17) \\
&= 2.657\ bit/symbol
\end{aligned}
$$

$$H(X) > \log_2 6 = 2.585$$

不满足极值性的原因是$\sum_{i}^{6} p(x_i) = 1.07 > 1$。

2.7 证明：$H(X_3/X_1X_2) \leqslant H(X_3/X_1)$，并说明当$X_1$, X_2, X_3是马氏链时等式成立。

证明：

$$
\begin{aligned}
& H(X_3/X_1X_2) - H(X_3/X_1) \\
&= -\sum_{i1}\sum_{i2}\sum_{i3} p(x_{i1}x_{i2}x_{i3})\log p(x_{i3}/x_{i1}x_{i2}) + \sum_{i1}\sum_{i3} p(x_{i1}x_{i3})\log p(x_{i3}/x_{i1}) \\
&= -\sum_{i1}\sum_{i2}\sum_{i3} p(x_{i1}x_{i2}x_{i3})\log p(x_{i3}/x_{i1}x_{i2}) + \sum_{i1}\sum_{i2}\sum_{i3} p(x_{i1}x_{i2}x_{i3})\log p(x_{i3}/x_{i1}) \\
&= \sum_{i1}\sum_{i2}\sum_{i3} p(x_{i1}x_{i2}x_{i3})\log \frac{p(x_{i3}/x_{i1})}{p(x_{i3}/x_{i1}x_{i2})} \\
&\le \sum_{i1}\sum_{i2}\sum_{i3} p(x_{i1}x_{i2}x_{i3})\left(\frac{p(x_{i3}/x_{i1})}{p(x_{i3}/x_{i1}x_{i2})} - 1\right)\log_2 e \\
&= \left(\sum_{i1}\sum_{i2}\sum_{i3} p(x_{i1}x_{i2})p(x_{i3}/x_{i1}) - \sum_{i1}\sum_{i2}\sum_{i3} p(x_{i1}x_{i2}x_{i3})\right)\log_2 e \\
&= \left(\sum_{i1}\sum_{i2} p(x_{i1}x_{i2})\left[\sum_{i3} p(x_{i3}/x_{i1})\right] - 1\right)\log_2 e \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore H(X_3/X_1X_2) \le H(X_3/X_1)$$

$$
\begin{aligned}
& 当\frac{p(x_{i3}/x_{i1})}{p(x_{i3}/x_{i1}x_{i2})} - 1 = 0时等式成立 \\
& \Rightarrow p(x_{i3}/x_{i1}) = p(x_{i3}/x_{i1}x_{i2}) \\
& \Rightarrow p(x_{i1}x_{i2})p(x_{i3}/x_{i1}) = p(x_{i3}/x_{i1}x_{i2})p(x_{i1}x_{i2}) \\
& \Rightarrow p(x_{i1})p(x_{i2}/x_{i1})p(x_{i3}/x_{i1}) = p(x_{i1}x_{i2}x_{i3}) \\
& \Rightarrow p(x_{i2}/x_{i1})p(x_{i3}/x_{i1}) = p(x_{i2}x_{i3}/x_{i1}) \\
& \therefore 等式成立的条件是X_1, X_2, X_3是马\_氏链
\end{aligned}
$$

2.8 证明：$H(X_1X_2 \ldots X_n) \leqslant H(X_1) + H(X_2) + \cdots + H(X_n)$。

证明：

$$
\begin{aligned}
& H(X_1X_2...X_n) = H(X_1) + H(X_2/X_1) + H(X_3/X_1X_2) + ... + H(X_n/X_1X_2...X_{n-1}) \\
& I(X_2;X_1) \ge 0 \qquad \Rightarrow H(X_2) \ge H(X_2/X_1) \\
& I(X_3;X_1X_2) \ge 0 \qquad \Rightarrow H(X_3) \ge H(X_3/X_1X_2) \\
& ...
\end{aligned}
$$

$$I(X_N;X_1X_2...X_{n-1})\ge 0 \qquad \Rightarrow H(X_N)\ge H(X_N/X_1X_2...X_{n-1})$$

$$\therefore H(X_1X_2...X_n)\le H(X_1)+H(X_2)+H(X_3)+...+H(X_n)$$

2.9 设有一个信源，它产生 0，1 序列的信息。它在任意时间而且不论以前发生过什么符号，均按 P(0) = 0.4，P(1) = 0.6 的概率发出符号。

(1) 试问这个信源是否是平稳的？

(2) 试计算 $H(X^2)$，$H(X_3/X_1X_2)$ 及 H_∞；

(3) 试计算 $H(X^4)$ 并写出 X^4 信源中可能有的所有符号。

解：

(1)

这个信源是平稳无记忆信源。因为有这些词语：“它在任意时间而且不论以前发生过什么符号……”

(2)

$$H(X^2)=2H(X)=-2\times(0.4\log 0.4+0.6\log 0.6)=1.942\ bit/symbol$$
$$H(X_3/X_1X_2)=H(X_3)=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)=-(0.4\log 0.4+0.6\log 0.6)=0.971\ bit/symbol$$
$$H_\infty=\lim_{N->\infty}H(X_N/X_1X_2...X_{N-1})=H(X_N)=0.971\ bit/symbol$$

(3)

$$H(X^4)=4H(X)=-4\times(0.4\log 0.4+0.6\log 0.6)=3.884\ bit/symbol$$

X^4 的所有符号：

0000 0001 0010 0011

0100 0101 0110 0111

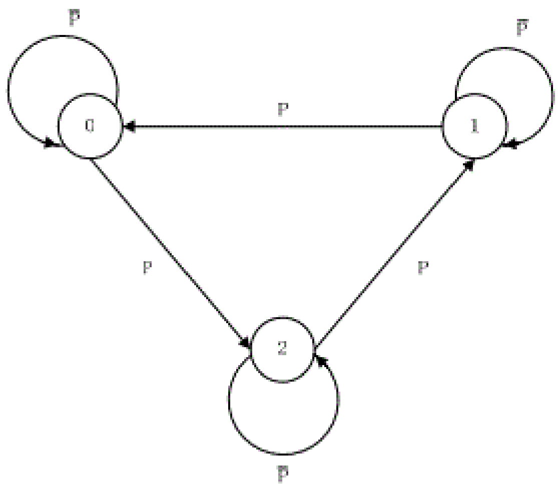
1000 1001 1010 1011

1100 1101 1110 1111

2.10 一阶马尔可夫信源的状态图如下图所示。信源 X 的符号集为 {0，1，2}。

(1) 求平稳后信源的概率分布；

(2) 求信源的熵 H_∞。



解：

(1)

$$\begin{cases} p(e_1) = p(e_1)p(e_1/e_1) + p(e_2)p(e_1/e_2) \\ p(e_2) = p(e_2)p(e_2/e_2) + p(e_3)p(e_2/e_3) \\ p(e_3) = p(e_3)p(e_3/e_3) + p(e_1)p(e_3/e_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(e_1) = \overline{p} \cdot p(e_1) + p \cdot p(e_2) \\ p(e_2) = \overline{p} \cdot p(e_2) + p \cdot p(e_3) \\ p(e_3) = \overline{p} \cdot p(e_3) + p \cdot p(e_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) \\ p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(e_1) = 1/3 \\ p(e_2) = 1/3 \\ p(e_3) = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(x_1) = p(e_1)p(x_1/e_1) + p(e_2)p(x_1/e_2) = \overline{p} \cdot p(e_1) + p \cdot p(e_2) = (\overline{p} + p)/3 = 1/3 \\ p(x_2) = p(e_2)p(x_2/e_2) + p(e_3)p(x_2/e_3) = \overline{p} \cdot p(e_2) + p \cdot p(e_3) = (\overline{p} + p)/3 = 1/3 \\ p(x_3) = p(e_3)p(x_3/e_3) + p(e_1)p(x_3/e_1) = \overline{p} \cdot p(e_3) + p \cdot p(e_1) = (\overline{p} + p)/3 = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{Bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} H_\infty &= -\sum_i^3 \sum_j^3 p(e_i)p(e_j/e_i)\log p(e_j/e_i) \\ &= -\Big[\frac{1}{3}p(e_1/e_1)\log p(e_1/e_1) + \frac{1}{3}p(e_2/e_1)\log p(e_2/e_1) + \frac{1}{3}p(e_3/e_1)\log p(e_3/e_1) \\ &\quad + \frac{1}{3}p(e_1/e_2)\log p(e_1/e_2) + \frac{1}{3}p(e_2/e_2)\log p(e_2/e_2) + \frac{1}{3}p(e_3/e_2)\log p(e_3/e_2) \\ &\quad + \frac{1}{3}p(e_1/e_3)\log p(e_1/e_3) + \frac{1}{3}p(e_2/e_3)\log p(e_2/e_3) + \frac{1}{3}p(e_3/e_3)\log p(e_3/e_3)\Big] \\ &= -\Big[\frac{1}{3} \cdot \overline{p} \cdot \log \overline{p} + \frac{1}{3} \cdot p\log p + \frac{1}{3} \cdot p \cdot \log p + \frac{1}{3} \cdot \overline{p} \cdot \log \overline{p} + \frac{1}{3} \cdot p \cdot \log p + \frac{1}{3} \cdot \overline{p} \cdot \log \overline{p}\Big] \\ &= -(\overline{p} \cdot \log \overline{p} + p \cdot \log p)\ bit/symbol \end{aligned}$$

2.11 黑白气象传真图的消息只有黑色和白色两种，即信源 *X*={黑，白}。设黑色出现的概率为 *P(黑)* = 0.3，白色出现的概率为 *P(白)* = 0.7。

(1) 假设图上黑白消息出现前后没有关联，求熵 *H(X)*；

(2) 假设消息前后有关联，其依赖关系为*P(白/白)* = 0.9，*P(黑/白)* = 0.1，*P(白/黑)* = 0.2，*P(黑/黑)* = 0.8，求此一阶马尔可夫信源的熵$H_2(X)$；

(3) 分别求上述两种信源的剩余度，比较*H(X)*和$H_2(X)$的大小，并说明其物理含义。

解：

(1)

$$H(X) = -\sum_i p(x_i)\log p(x_i) = -(0.3\log 0.3 + 0.7\log 0.7) = 0.881\ bit/symbol$$

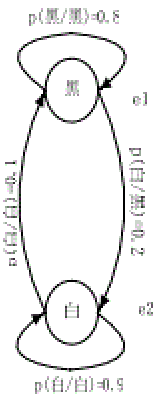
(2)

$$\begin{cases} p(e_1) = p(e_1)p(e_1/e_1) + p(e_2)p(e_1/e_2) \\ p(e_2) = p(e_2)p(e_2/e_2) + p(e_1)p(e_2/e_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(e_1) = 0.8p(e_1) + 0.1p(e_2) \\ p(e_2) = 0.9p(e_2) + 0.2p(e_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(e_2) = 2p(e_1) \\ p(e_1) + p(e_2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(e_1) = 1/3 \\ p(e_2) = 2/3 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} H_\infty &= -\sum_i \sum_j p(e_i)p(e_j/e_i)\log p(e_j/e_i) \\ &= -\left(\frac{1}{3}\times 0.8\log 0.8 + \frac{1}{3}\times 0.2\log 0.2 + \frac{2}{3}\times 0.1\log 0.1 + \frac{2}{3}\times 0.9\log 0.9\right) \\ &= 0.553\ bit/symbol \end{aligned}$$

(3)

$$\eta_1 = \frac{H_0 - H_\infty}{H_0} = \frac{\log 2 - 0.881}{\log 2} = 11.9\%$$

$$\eta_1 = \frac{H_0 - H_\infty}{H_0} = \frac{\log 2 - 0.553}{\log 2} = 44.7\%$$

$H(X) > H_2(X)$

表示的物理含义是：无记忆信源的不确定度大与有记忆信源的不确定度，有记忆信源的结构化信息较多，能够进行较大程度的压缩。

2.12 同时掷出两个正常的骰子，也就是各面呈现的概率都为 1/6，求：

(1) “3 和 5 同时出现”这事件的自信息；

(2) “两个 1 同时出现”这事件的自信息；

(3) 两个点数的各种组合（无序）对的熵和平均信息量；

(4) 两个点数之和（即 2，3，…，12 构成的子集）的熵；

(5) 两个点数中至少有一个是 1 的自信息量。

解：

(1)

$$p(x_i) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$I(x_i) = -\log p(x_i) = -\log\frac{1}{18} = 4.170\ bit$$

(2)

$$p(x_i) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$I(x_i) = -\log p(x_i) = -\log\frac{1}{36} = 5.170\ bit$$

(3)

两个点数的排列如下：

11　12　13　14　15　16

21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

共有 21 种组合：

其中 11，22，33，44，55，66 的概率是 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

其他 15 个组合的概率是 $2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

$$H(X)=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)=-\left(6\times\frac{1}{36}\log\frac{1}{36}+15\times\frac{1}{18}\log\frac{1}{18}\right)=4.337\ bit/symbol$$

(4)

参考上面的两个点数的排列，可以得出两个点数求和的概率分布如下：

$$\begin{bmatrix}X\\P(X)\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}H(X)&=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)\\&=-\left(2\times\frac{1}{36}\log\frac{1}{36}+2\times\frac{1}{18}\log\frac{1}{18}+2\times\frac{1}{12}\log\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{9}\log\frac{1}{9}+2\times\frac{5}{36}\log\frac{5}{36}+\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}\right)\\&=3.274\ bit/symbol\end{aligned}$$

(5)

$$p(x_i)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 11=\frac{11}{36}$$

$$I(x_i)=-\log p(x_i)=-\log\frac{11}{36}=1.710\ bit$$

2.13 某一无记忆信源的符号集为{0, 1}，已知 $P(0)$ = 1/4，$P(1)$ = 3/4。

(1) 求符号的平均熵；

(2) 有 100 个符号构成的序列，求某一特定序列（例如有 m 个“0”和（100 − m）个“1”）的自信息量的表达式；

(3) 计算(2)中序列的熵。

解：

(1)

$$H(X)=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)=-\left(\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}\right)=0.811\ bit/symbol$$

(2)

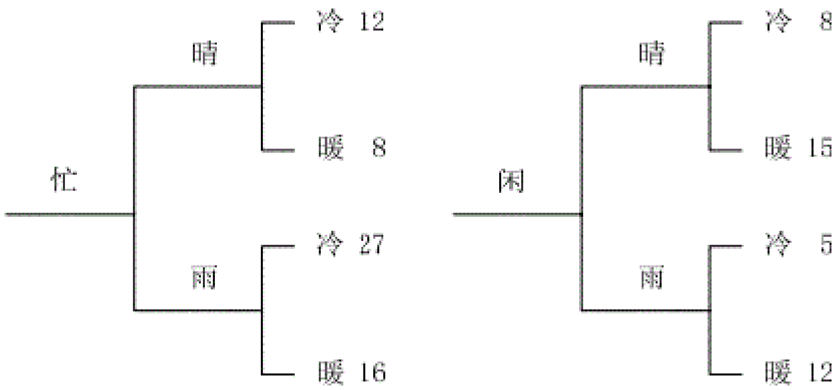
$$p(x_i)=\left(\frac{1}{4}\right)^m\times\left(\frac{3}{4}\right)^{100-m}=\frac{3^{100-m}}{4^{100}}$$

$$I(x_i)=-\log p(x_i)=-\log\frac{3^{100-m}}{4^{100}}=41.5+1.585m\ bit$$

(3)

$$H(X^{100})=100H(X)=100\times 0.811=81.1\ bit/symbol$$

2.14 对某城市进行交通忙闲的调查，并把天气分成晴雨两种状态，气温分成冷暖两个状态，调查结果得联合出现的相对频度如下：



若把这些频度看作概率测度，求：

(1) 忙闲的无条件熵；

(2) 天气状态和气温状态已知时忙闲的条件熵；

(3) 从天气状态和气温状态获得的关于忙闲的信息。

解：

(1)

根据忙闲的频率，得到忙闲的概率分布如下：

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} x_1\text{忙} & x_2\text{闲} \\ \frac{63}{103} & \frac{40}{103} \end{Bmatrix}$$

$$H(X)=-\sum_{i}^{2}p(x_i)\log p(x_i)=-\left(\frac{63}{103}\log\frac{63}{103}+\frac{40}{103}\log\frac{40}{103}\right)=0.964\ bit/symbol$$

(2)

设忙闲为随机变量 X，天气状态为随机变量 Y，气温状态为随机变量 Z

$$\begin{aligned}H(XYZ)&=-\sum_i\sum_j\sum_k p(x_iy_jz_k)\log p(x_iy_jz_k)\\&=-\left(\frac{12}{103}\log\frac{12}{103}+\frac{8}{103}\log\frac{8}{103}+\frac{27}{103}\log\frac{27}{103}+\frac{16}{103}\log\frac{16}{103}\right.\\&\qquad\left.+\frac{8}{103}\log\frac{8}{103}+\frac{15}{103}\log\frac{15}{103}+\frac{5}{103}\log\frac{5}{103}+\frac{12}{103}\log\frac{12}{103}\right)\\&=2.836\ bit/symbol\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(YZ)&=-\sum_j\sum_k p(y_jz_k)\log p(y_jz_k)\\&=-\left(\frac{20}{103}\log\frac{20}{103}+\frac{23}{103}\log\frac{23}{103}+\frac{32}{103}\log\frac{32}{103}+\frac{28}{103}\log\frac{28}{103}\right)\\&=1.977\ bit/symbol\end{aligned}$$

$$H(X/YZ)=H(XYZ)-H(YZ)=2.836-1.977=0.859\ bit/symbol$$

(3)

$$I(X;YZ)=H(X)-H(X/YZ)=0.964-0.859=0.159\ bit/symbol$$

2.15 有两个二元随机变量 X 和 Y，它们的联合概率为

Y \ X	$x_1=0$	$x_2=1$
$y_1=0$	1/8	3/8
$y_2=1$	3/8	1/8

并定义另一随机变量 $Z = XY$（一般乘积），试计算：

(1) $H(X)$，$H(Y)$，$H(Z)$，$H(XZ)$，$H(YZ)$和 $H(XYZ)$；

(2) $H(X/Y)$，$H(Y/X)$，$H(X/Z)$，$H(Z/X)$，$H(Y/Z)$，$H(Z/Y)$，$H(X/YZ)$，$H(Y/XZ)$和 $H(Z/XY)$；

(3) $I(X;Y)$，$I(X;Z)$，$I(Y;Z)$，$I(X;Y/Z)$，$I(Y;Z/X)$和 $I(X;Z/Y)$。

解：

(1)

$$p(x_1)=p(x_1y_1)+p(x_1y_2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$p(x_2)=p(x_2y_1)+p(x_2y_2)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$H(X)=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)=1\ bit/symbol$$

$$p(y_1)=p(x_1y_1)+p(x_2y_1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$p(y_2)=p(x_1y_2)+p(x_2y_2)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$H(Y)=-\sum_j p(y_j)\log p(y_j)=1\ bit/symbol$$

$Z=XY$ 的概率分布如下：

$$\begin{bmatrix} Z \\ P(Z) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} z_1=0 & z_2=1 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

$$H(Z)=-\sum_k^2 p(z_k)=-\left(\frac{7}{8}\log\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right)=0.544\ bit/symbol$$

$$p(x_1)=p(x_1z_1)+p(x_1z_2)$$
$$p(x_1z_2)=0$$
$$p(x_1z_1)=p(x_1)=0.5$$
$$p(z_1)=p(x_1z_1)+p(x_2z_1)$$
$$p(x_2z_1)=p(z_1)-p(x_1z_1)=\frac{7}{8}-0.5=\frac{3}{8}$$
$$p(z_2)=p(x_1z_2)+p(x_2z_2)$$
$$p(x_2z_2)=p(z_2)=\frac{1}{8}$$

$$H(XZ)=-\sum_i\sum_k p(x_iz_k)\log p(x_iz_k)=-\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right)=1.406\ bit/symbol$$

$$p(y_1) = p(y_1z_1) + p(y_1z_2)$$
$$p(y_1z_2) = 0$$
$$p(y_1z_1) = p(y_1) = 0.5$$
$$p(z_1) = p(y_1z_1) + p(y_2z_1)$$
$$p(y_2z_1) = p(z_1) - p(y_1z_1) = \frac{7}{8} - 0.5 = \frac{3}{8}$$
$$p(z_2) = p(y_1z_2) + p(y_2z_2)$$
$$p(y_2z_2) = p(z_2) = \frac{1}{8}$$
$$H(YZ) = -\sum_j \sum_k p(y_jz_k) \log p(y_jz_k) = -\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) = 1.406 \ bit/symbol$$
$$p(x_1y_1z_2) = 0$$
$$p(x_1y_2z_2) = 0$$
$$p(x_2y_1z_2) = 0$$
$$p(x_1y_1z_1) + p(x_1y_1z_2) = p(x_1y_1)$$
$$p(x_1y_1z_1) = p(x_1y_1) = 1/8$$
$$p(x_1y_2z_1) + p(x_1y_1z_1) = p(x_1z_1)$$
$$p(x_1y_2z_1) = p(x_1z_1) - p(x_1y_1z_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$
$$p(x_2y_1z_1) + p(x_2y_1z_2) = p(x_2y_1)$$
$$p(x_2y_1z_1) = p(x_2y_1) = \frac{3}{8}$$
$$p(x_2y_2z_1) = 0$$
$$p(x_2y_2z_1) + p(x_2y_2z_2) = p(x_2y_2)$$
$$p(x_2y_2z_2) = p(x_2y_2) = \frac{1}{8}$$
$$\begin{aligned} H(XYZ) &= -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k) \log_2 p(x_iy_jz_k) \\ &= -\left(\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) = 1.811 \ bit/symbol \end{aligned}$$

(2)

$$H(XY) = -\sum_i \sum_j p(x_iy_j) \log_2 p(x_iy_j) == -\left(\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) = 1.811 \ bit/symbol$$
$$H(X/Y) = H(XY) - H(Y) = 1.811 - 1 = 0.811 \ bit/symbol$$
$$H(Y/X) = H(XY) - H(X) = 1.811 - 1 = 0.811 \ bit/symbol$$
$$H(X/Z) = H(XZ) - H(Z) = 1.406 - 0.544 = 0.862 \ bit/symbol$$
$$H(Z/X) = H(XZ) - H(X) = 1.406 - 1 = 0.406 \ bit/symbol$$
$$H(Y/Z) = H(YZ) - H(Z) = 1.406 - 0.544 = 0.862 \ bit/symbol$$
$$H(Z/Y) = H(YZ) - H(Y) = 1.406 - 1 = 0.406 \ bit/symbol$$
$$H(X/YZ) = H(XYZ) - H(YZ) = 1.811 - 1.406 = 0.405 \ bit/symbol$$
$$H(Y/XZ) = H(XYZ) - H(XZ) = 1.811 - 1.406 = 0.405 \ bit/symbol$$
$$H(Z/XY) = H(XYZ) - H(XY) = 1.811 - 1.811 = 0 \ bit/symbol$$

(3)

$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 1 - 0.811 = 0.189 \ bit/symbol$
$I(X;Z) = H(X) - H(X/Z) = 1 - 0.862 = 0.138 \ bit/symbol$
$I(Y;Z) = H(Y) - H(Y/Z) = 1 - 0.862 = 0.138 \ bit/symbol$
$I(X;Y/Z) = H(X/Z) - H(X/YZ) = 0.862 - 0.405 = 0.457 \ bit/symbol$
$I(Y;Z/X) = H(Y/X) - H(Y/XZ) = 0.862 - 0.405 = 0.457 \ bit/symbol$
$I(X;Z/Y) = H(X/Y) - H(X/YZ) = 0.811 - 0.405 = 0.406 \ bit/symbol$

2.16 有两个随机变量 X 和 Y，其和为 $Z = X + Y$（一般加法），若 X 和 Y 相互独立，求证：$H(X) \leqslant H(Z)$，$H(Y) \leqslant H(Z)$。

证明：

$\because Z = X + Y$

$$\therefore p(z_k / x_i) = p(z_k - x_i) = \begin{cases} p(y_j) & (z_k - x_i) \in Y \\ 0 & (z_k - x_i) \notin Y \end{cases}$$

$$H(Z/X) = -\sum_i \sum_k p(x_i z_k) \log p(z_k/x_i) = -\sum_i p(x_i) \left[\sum_k p(z_k/x_i) \log p(z_k/x_i) \right]$$

$$= -\sum_i p(x_i) \left[\sum_j p(y_j) \log_2 p(y_j) \right] = H(Y)$$

$\because H(Z) \ge H(Z/X)$

$\therefore H(Z) \ge H(Y)$

同理可得 $H(Z) \ge H(X)$。

2.17 给定声音样值X的概率密度为拉普拉斯分布 $p(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|}, -\infty < x < +\infty$，求 $H_c(X)$，并证明它小于同样方差的正态变量的连续熵。

解：

$$H_c(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\log p(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\log \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx$$
$$= -\log\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\log e^{-\lambda|x|}dx$$
$$= \log\frac{2}{\lambda} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}\log e^{-\lambda|x|}dx$$
$$= \log\frac{2}{\lambda} - \int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log e^{-\lambda x}dx$$

其中：

$$\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\log e^{-\lambda x}dx$$
$$= \int_0^{+\infty}\log e^{-\lambda x}d\left(e^{-\lambda x}\right)$$
$$= e^{-\lambda x}\log_2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}d\left(\log e^{-\lambda x}\right) = -\left(e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}\right)\log_2 e = \log_2 e$$
$$\therefore H_c(X) = \log\frac{2}{\lambda} + \log_2 e = \log\frac{2e}{\lambda}\quad bit/symbol$$

$$m = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\cdot xdx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}xdx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}xdx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}xdx$$
$$\because \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}xdx = \int_{+\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda(-y)}(-y)d(-y) = \int_{+\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda y}ydy = -\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda y}ydy$$
$$\therefore m = -\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}xdx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}xdx = 0$$

$$\sigma^2 = E\left[(x-m)^2\right] = E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\cdot x^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}x^2dx = \int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}x^2dx$$
$$= -\int_0^{+\infty}x^2de^{-\lambda x} = -\left(e^{-\lambda x}x^2\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx^2\right) = \int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx^2 = 2\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}xdx$$
$$= -\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}xde^{-\lambda x} = -\frac{2}{\lambda}\left(e^{-\lambda x}x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\therefore H_c(X_{正态}) = \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2 = \log\frac{2}{\lambda}\sqrt{\pi e} > H_c(X) = \log\frac{2e}{\lambda}$$

2.18 连续随机变量 *X* 和 *Y* 的联合概率密度为：$p(x,y) = \begin{cases}\frac{1}{\pi r^2} & x^2+y^2\le r^2 \\ 0 & 其他\end{cases}$，求 *H(X)*, *H(Y)*, *H(XYZ)* 和 *I(X;Y)*。

（提示：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log_2 \sin xdx = -\frac{\pi}{2}\log_2 2$）

解：

$$p(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} p(xy)dy=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\ \ (-r\le x\le r)$$

$$\begin{aligned}
H_c(X)&=-\int_{-r}^{r} p(x)\log p(x)dx\\
&=-\int_{-r}^{r} p(x)\log\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}dx\\
&=-\int_{-r}^{r} p(x)\log\frac{2}{\pi r^2}dx-\int_{-r}^{r} p(x)\log\sqrt{r^2-x^2}dx\\
&=\log\frac{\pi r^2}{2}-\int_{-r}^{r} p(x)\log\sqrt{r^2-x^2}dx\\
&=\log\frac{\pi r^2}{2}-\log r+1-\frac{1}{2}\log_2 e\\
&=\log_2 \pi r-\frac{1}{2}\log_2 e\ \ bit/symbol
\end{aligned}$$

其中：

$$\int_{-r}^{r} p(x)\log\sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$=\int_{-r}^{r}\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\log\sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$=\frac{4}{\pi r^2}\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\log\sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$\underline{\underline{令x=r\cos\theta}}\frac{4}{\pi r^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\sin\theta\log r\sin\theta d(r\cos\theta)$$

$$=-\frac{4}{\pi r^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r^2\sin^2\theta\log r\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\log r\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\log r d\theta+\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi}\log r\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta+\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\log\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\log r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{2}{\pi}\log r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\theta d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\log r-\frac{1}{\pi}\log r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\sin 2\theta+\frac{2}{\pi}(-\frac{\pi}{2}\log_2 2)-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\log r-1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\log r-1+\frac{1}{2}\log_2 e$$

其中：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\theta d\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\sin 2\theta\log\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\log\sin\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos\theta\frac{\cos\theta\log_2 e}{\sin\theta}d\theta$$

$$=-\frac{2}{\pi}\log_2 e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=-\frac{2}{\pi}\log_2 e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=-\frac{1}{\pi}\log_2 e\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{1}{\pi}\log_2 e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\log_2 e-\frac{1}{2\pi}\log_2 e\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\log_2 e$$

$$p(y)=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}p(xy)dx=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{1}{\pi r^2}dx=\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}\quad(-r\le y\le r)$$

$$p(y)=p(x)$$

$$H_C(Y)=H_C(X)=\log_2\pi r-\frac{1}{2}\log_2 e\quad bit/symbol$$

$$H_c(XY)=-\iint_R p(xy)\log p(xy)dxdy$$

$$=-\iint_R p(xy)\log\frac{1}{\pi r^2}dxdy$$

$$=\log\pi r^2\iint_R p(xy)dxdy$$

$$=\log_2\pi r^2\quad bit/symbol$$

$$I_c(X;Y)=H_c(X)+H_c(Y)-H_c(XY)$$

$$=2\log_2\pi r-\log_2 e-\log\pi r^2$$

$$=\log_2\pi-\log_2 e\quad bit/symbol$$

2.19 每帧电视图像可以认为是由 3×10^5个像素组成的，所有像素均是独立变化，且每像素又取 128 个不同的亮度电平，并设亮度电平是等概出现，问每帧图像含有多少信息量？若有一个广播员，在约 10000 个汉字中选出 1000 个汉字来口述此电视图像，试问广播员描述此图像所广播的信息量是多少（假设汉字字汇是等概率分布，并彼此无依赖）？若要恰当的描述此图像，广播员在口述中至少需要多少汉字？

解：

1)

$$H(X)=\log n=\log 128=7\quad bit/symbol$$

$$H(X^N)=NH(X)=3\times10^5\times7=2.1\times10^6\quad bit/symbol$$

2)

$$H(X)=\log n=\log 10000=13.288\quad bit/symbol$$

$$H(X^N)=NH(X)=1000\times13.288=13288\quad bit/symbol$$

3)

$$N=\frac{H(X^N)}{H(X)}=\frac{2.1\times10^6}{13.288}=158037$$

2.20 设 $X=X_1X_2...X_N$ 是平稳离散有记忆信源，试证明：

$H(X_1X_2...X_N)=H(X_1)+H(X_2/X_1)+H(X_3/X_1X_2)+...+H(X_N/X_1X_2...X_{N-1})$。

证明：

$$\begin{aligned}
&H(X_1X_2...X_N)\\
&=-\sum_{i_1}\sum_{i_2}...\sum_{i_N}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N})\log p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N})\\
&=-\sum_{i_1}\sum_{i_2}...\sum_{i_N}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N})\log p(x_{i_1})p(x_{i_2}/x_{i_1})...p(x_{i_N}/x_{i_1}...x_{i_{N-1}})\\
&=-\sum_{i_1}\left[\sum_{i_2}...\sum_{i_N}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N})\right]\log p(x_{i_1})-\sum_{i_1}\sum_{i_2}\left[...\sum_{i_N}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N})\right]\log p(x_{i_2}/x_{i_1})\\
&\quad ...-\sum_{i_1}\sum_{i_2}...\sum_{i_N}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N})\log p(x_{i_N}/x_{i_1}...x_{i_{N-1}})\\
&=-\sum_{i_1}p(x_{i_1})\log p(x_{i_1})-\sum_{i_1}\sum_{i_2}p(x_{i_1}x_{i_2})\log p(x_{i_2}/x_{i_1})\\
&\quad ...-\sum_{i_1}\sum_{i_2}...\sum_{i_N}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N})\log p(x_{i_N}/x_{i_1}...x_{i_{N-1}})\\
&=H(X_1)+H(X_2/X_1)+H(X_3/X_1X_2)+...+H(X_N/X_1X_2...X_{N-1})
\end{aligned}$$

2.21 设 $X=X_1X_2...X_N$ 是 N维高斯分布的连续信源，且 X_1, X_2, …, X_N的方差分别是 $\sigma_1^2,\sigma_2^2,...,\sigma_N^2$，它们之间的相关系数 $\rho(X_iX_j)=0(i,j=1,2...,N,i\neq j)$。试证明：$N$维高斯分布的连续信源熵

$$H_c(X)=H_c(X_1X_2...X_N)=\frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\log 2\pi e\sigma_i^2$$

证明：

相关系数 $\rho(x_ix_j)=0 \quad (i,j=1,2,...,N，\ i\neq j)$，说明 $X_1X_2...X_N$ 是相互独立的。

$$\therefore H_c(X)=H_c(X_1X_2...X_N)=H_c(X_1)+H_c(X_2)+...+H_c(X_N)$$

$$\because H_c(X_i)=\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_i^2$$

$$\begin{aligned}\therefore H_c(X)&=H_c(X_1)+H_c(X_2)+...+H_c(X_N)\\&=\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_1^2+\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_2^2+...+\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_N^2\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log 2\pi e\sigma_i^2\end{aligned}$$

2.22 设有一连续随机变量，其概率密度函数 $p(x)=\begin{cases}bx^2 & 0\le x\le a\\ 0 & 其他\end{cases}$

(1) 试求信源*X*的熵$H_c(X)$；
(2) 试求$Y = X + A \ (A > 0)$的熵$H_c(Y)$；
(3) 试求$Y = 2X$的熵$H_c(Y)$。

解：

1)

$$\begin{aligned}H_c(X)&=-\int_R f(x)\log f(x)dx=-\int_R f(x)\log bx^2dx\\&=-\log b\cdot\int_R f(x)dx-\int_R f(x)\log x^2dx\\&=-\log b-2b\int_R x^2\log xdx\\&=-\log b-\frac{2ba^3}{9}\log\frac{a^3}{e}\end{aligned}$$

$$\because F_X(x)=\frac{bx^3}{3},F_X(a)=\frac{ba^3}{3}=1$$

$$\therefore H_c(X)=-\log b-\frac{2}{3}\cdot\log\frac{a^3}{e}\quad bit/symbol$$

2)

$$\because 0\le x\le a\Rightarrow 0\le y-A\le a$$

$$\therefore A\le y\le a+A$$

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\le y)=P(X+A\le y)=P(X\le y-A)\\&=\int_A^{y-A}bx^2dx=\frac{b}{3}(y-A)^3\end{aligned}$$

$$f(y)=F'(y)=b(y-A)^2$$

$$\begin{aligned}H_c(Y)&=-\int_R f(y)\log f(y)dy=-\int_R f(y)\log b(y-A)^2dy\\&=-\log b\cdot\int_R f(y)dy-\int_R f(y)\log(y-A)^2dy\\&=-\log b-2b\int_R(y-A)^2\log(y-A)d(y-A)\end{aligned}$$

$$= -\log b - \frac{2ba^3}{9}\log\frac{a^3}{e} \;\; bit/symbol$$

$$\because F_Y(y) = \frac{b}{3}(y-A)^3, F_Y(a+A) = \frac{ba^3}{3} = 1$$

$$\therefore H_c(Y) = -\log b - \frac{2}{3}\cdot\log\frac{a^3}{e} \;\; bit/symbol$$

3)

$$\because 0 \le x \le a \Rightarrow 0 \le \frac{y}{2} \le a$$

$$\therefore 0 \le y \le 2a$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X \le y) = P(X \le \frac{y}{2})$$

$$= \int_0^{\frac{y}{2}} bx^2 dx = \frac{b}{24}y^3$$

$$f(y) = F'(y) = \frac{b}{8}y^2$$

$$H_c(Y) = -\int_R f(y)\log f(y)dy = -\int_R f(y)\log\frac{b}{8}y^2 dy$$

$$= -\log\frac{b}{8}\cdot\int_R f(y)dy - \int_R f(y)\log y^2 dy$$

$$= -\log\frac{b}{8} - \frac{b}{4}\int_R y^2\log y dy$$

$$= -\log\frac{b}{8} - \frac{2ba^3}{9}\log\frac{8a^3}{e}$$

$$= -\log b - \frac{2ba^3}{9}\log\frac{a^3}{e} + \frac{9-2ba^3}{3}$$

$$\because F_Y(y) = \frac{b}{24}y^3, F_Y(2a) = \frac{ba^3}{3} = 1$$

$$\therefore H_c(Y) = -\log b - \frac{2}{3}\cdot\log\frac{a^3}{e} + 1 \;\; bit/symbol$$

3.1 设信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.6 & 0.4 \end{Bmatrix}$通过一干扰信道，接收符号为 Y = { y1, y2 }，信道转移矩阵为$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$，求：

(1) 信源 X 中事件 x_1 和事件 x_2 分别包含的自信息量；
(2) 收到消息 y_j $(j=1, 2)$ 后，获得的关于 x_i $(i=1, 2)$ 的信息量；
(3) 信源 X 和信宿 Y 的信息熵；
(4) 信道疑义度 $H(X/Y)$ 和噪声熵 $H(Y/X)$；
(5) 接收到信息 Y 后获得的平均互信息量。

解：

1)

$$I(x_1) = -\log_2 p(x_1) = -\log_2 0.6 = 0.737 \quad bit$$
$$I(x_2) = -\log_2 p(x_2) = -\log_2 0.4 = 1.322 \quad bit$$

2)

$$p(y_1) = p(x_1)p(y_1/x_1) + p(x_2)p(y_1/x_2) = 0.6\times\frac{5}{6} + 0.4\times\frac{1}{4} = 0.6$$
$$p(y_2) = p(x_1)p(y_2/x_1) + p(x_2)p(y_2/x_2) = 0.6\times\frac{1}{6} + 0.4\times\frac{3}{4} = 0.4$$
$$I(x_1;y_1) = \log_2\frac{p(y_1/x_1)}{p(y_1)} = \log_2\frac{5/6}{0.6} = 0.474 \quad bit$$
$$I(x_1;y_2) = \log_2\frac{p(y_2/x_1)}{p(y_2)} = \log_2\frac{1/6}{0.4} = -1.263 \quad bit$$
$$I(x_2;y_1) = \log_2\frac{p(y_1/x_2)}{p(y_1)} = \log_2\frac{1/4}{0.6} = -1.263 \quad bit$$
$$I(x_2;y_2) = \log_2\frac{p(y_2/x_2)}{p(y_2)} = \log_2\frac{3/4}{0.4} = 0.907 \quad bit$$

3)

$$H(X) = -\sum_i p(x_i)\log p(x_i) = -(0.6\log 0.6 + 0.4\log 0.4)\log_2 10 = 0.971 \quad bit/symbol$$
$$H(Y) = -\sum_j p(y_j)\log p(y_j) = -(0.6\log 0.6 + 0.4\log 0.4)\log_2 10 = 0.971 \quad bit/symbol$$

4)

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -\sum_i\sum_j p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i) \\ &= -(0.6\times\frac{5}{6}\log\frac{5}{6} + 0.6\times\frac{1}{6}\log\frac{1}{6} + 0.4\times\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + 0.4\times\frac{3}{4}\log\frac{3}{4})\times\log_2 10 \\ &= 0.715 \quad bit/symbol \end{aligned}$$

$$\because H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$$
$$\begin{aligned} \therefore H(X/Y) &= H(X) + H(Y/X) - H(Y) \\ &= 0.971 + 0.715 - 0.971 = 0.715 \quad bit/symbol \end{aligned}$$

5)

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=0.971-0.715=0.256 \quad bit/symbol$$

3.2 设二元对称信道的传递矩阵为$\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

(1) 若 $P(0)=3/4$，$P(1)=1/4$，求 $H(X)$，$H(X/Y)$，$H(Y/X)$和 $I(X;Y)$；

(2) 求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布；

解：

1)

$$H(X)=-\sum_i p(x_i)=-(\frac{3}{4}\times\log_2\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\log_2\frac{1}{4})=0.811 \quad bit/symbol$$

$$\begin{aligned}H(Y/X)&=-\sum_i\sum_j p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)\\&=-(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3})\times\log_2 10\\&=0.918 \quad bit/symbol\end{aligned}$$

$$p(y_1)=p(x_1y_1)+p(x_2y_1)=p(x_1)p(y_1/x_1)+p(x_2)p(y_1/x_2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=0.5833$$

$$p(y_2)=p(x_1y_2)+p(x_2y_2)=p(x_1)p(y_2/x_1)+p(x_2)p(y_2/x_2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=0.4167$$

$$H(Y)=-\sum_j p(y_j)=-(0.5833\times\log_2 0.5833+0.4167\times\log_2 0.4167)=0.980 \quad bit/symbol$$

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$H(X/Y)=H(X)-H(Y)+H(Y/X)=0.811-0.980+0.918=0.749 \quad bit/symbol$$

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)==0.811-0.749=0.062 \quad bit/symbol$$

2)

$$C=\max I(X;Y)=\log_2 m-H_{mi}=\log_2 2+(\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3})\times\log_2 10=0.082 \quad bit/symbol$$

$$p(x_i)=\frac{1}{2}$$

3.3 设有一批电阻，按阻值分 70%是 2KΩ，30%是 5 KΩ；按瓦分 64%是 0.125W，其余是 0.25W。现已知 2 KΩ阻值的电阻中 80%是 0.125W，问通过测量阻值可以得到的关于瓦数的平均信息量是多少？

解：

对本题建立数学模型如下：

$$\begin{bmatrix}X\text{阻值}\\P(X)\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_1=2\text{K}\Omega & x_2=5\text{K}\Omega\\ 0.7 & 0.3\end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}Y\text{瓦数}\\P(Y)\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}y_1=1/8 & y_2=1/4\\ 0.64 & 0.36\end{Bmatrix}$$

$$p(y_1/x_1)=0.8,\ p(y_2/x_1)=0.2$$

求：$I(X;Y)$

以下是求解过程：

$$p(x_1y_1) = p(x_1)p(y_1/x_1) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$$
$$p(x_1y_2) = p(x_1)p(y_2/x_1) = 0.7 \times 0.2 = 0.14$$
$$\because p(y_1) = p(x_1y_1) + p(x_2y_1)$$
$$\therefore p(x_2y_1) = p(y_1) - p(x_1y_1) = 0.64 - 0.56 = 0.08$$
$$\because p(y_2) = p(x_1y_2) + p(x_2y_2)$$
$$\therefore p(x_2y_2) = p(y_2) - p(x_1y_2) = 0.36 - 0.14 = 0.22$$
$$H(X) = -\sum_i p(x_i) = -(0.7 \times \log_2 0.7 + 0.3 \times \log_2 0.3) = 0.881 \quad bit/symbol$$
$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) = -(0.64 \times \log_2 0.64 + 0.36 \times \log_2 0.36) = 0.943 \quad bit/symbol$$
$$\begin{aligned} H(XY) &= -\sum_i \sum_j p(x_iy_j)\log p(x_iy_j) \\ &= -(0.56 \times \log_2 0.56 + 0.14 \times \log_2 0.14 + 0.08 \times \log_2 0.08 + 0.22 \times \log_2 0.22) \\ &= 1.638 \quad bit/symbol \end{aligned}$$
$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY) = 0.881 + 0.943 - 1.638 = 0.186 \quad bit/symbol$$

3.4 若 X, Y, Z 是三个随机变量，试证明

(1) $I(X;YZ) = I(X;Y) + I(X;Z/Y) = I(X;Z) + I(X;Y/Z)$；

证明：

$$\begin{aligned} I(X;YZ) &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_jz_k)}{p(x_i)} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_jz_k)p(x_i/y_j)}{p(x_i)p(x_i/y_j)} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} + \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_jz_k)}{p(x_i/y_j)} \\ &= I(X;Y) + I(X;Z/Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(X;YZ) &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_jz_k)}{p(x_i)} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_jz_k)p(x_i/z_k)}{p(x_i)p(x_i/z_k)} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/z_k)}{p(x_i)} + \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_jz_k)}{p(x_i/z_k)} \\ &= I(X;Z) + I(X;Y/Z) \end{aligned}$$

(2) $I(X;Y/Z) = I(Y;X/Z) = H(X/Z) - H(X/YZ)$；

证明：

$$\begin{aligned} I(X;Y/Z) &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_jz_k)}{p(x_i/z_k)} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_i/y_jz_k)p(y_jz_k)}{p(x_i/z_k)p(y_jz_k)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log \frac{p(x_i y_j z_k)}{p(x_i / z_k) p(z_k) p(y_j / z_k)} \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log \frac{p(x_i y_j z_k)}{p(x_i z_k) p(y_j / z_k)} \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log \frac{p(x_i y_j z_k)}{p(x_i z_k) p(y_j / z_k)} \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log \frac{p(y_j / x_i z_k)}{p(y_j / z_k)} \\
&= I(Y; X / Z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I(X;Y/Z) &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log \frac{p(x_i / y_j z_k)}{p(x_i / z_k)} \\
&= -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log p(x_i / z_k) + \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log p(x_i / y_j z_k) \\
&= -\sum_i \sum_k \left[\sum_j p(x_i y_j z_k) \right] \log p(x_i / z_k) - H(X / YZ) \\
&= -\sum_i \sum_k p(x_i z_k) \log p(x_i / z_k) - H(X / YZ) \\
&= H(X / Z) - H(X / YZ)
\end{aligned}
$$

(3) $I(X;Y/Z) \geqslant 0$，当且仅当 $(X,\ Y,\ Z)$是马氏链时等式成立。

证明：

$$
\because I(X;Y/Z) = \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log \frac{p(x_i / y_j z_k)}{p(x_i / z_k)}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore -I(X;Y/Z) &= \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log \frac{p(x_i / z_k)}{p(x_i / y_j z_k)} \\
&\le \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \left(\frac{p(x_i / z_k)}{p(x_i / y_j z_k)} - 1 \right) \log_2 e \\
&= \left(\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \frac{p(x_i / z_k)}{p(x_i / y_j z_k)} - \sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \right) \log_2 e \\
&= \left(\sum_i \left[\sum_j \sum_k p(y_j z_k) \right] p(x_i / z_k) - 1 \right) \log_2 e \\
&= \left(\sum_i p(x_i / z_k) - 1 \right) \log_2 e \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore I(X;Y/Z) \ge 0
$$

当 $\dfrac{p(x_i / z_k)}{p(x_i / y_j z_k)} - 1 = 0$ 时等式成立

$$\Rightarrow p(x_i/z_k) = p(x_i/y_jz_k)$$

$$\Rightarrow p(y_jz_k)p(x_i/z_k) = p(x_i/y_jz_k)p(y_jz_k)$$

$$\Rightarrow p(z_k)p(y_j/z_k)p(x_i/z_k) = p(x_iy_jz_k)$$

$$\Rightarrow p(y_j/z_k)p(x_i/z_k) = p(x_iy_jz_k)/p(z_k)$$

$$\Rightarrow p(y_j/z_k)p(x_i/z_k) = p(x_iy_j/z_k)$$

所以等式成立的条件是 X, Y, Z 是马氏链

3.5 若三个随机变量，有如下关系：$Z = X + Y$，其中 X 和 Y 相互独立，试证明：

(1) $I(X;Z) = H(Z) - H(Y)$；

(2) $I(XY;Z) = H(Z)$；

(3) $I(X;YZ) = H(X)$；

(4) $I(Y;Z/X) = H(Y)$；

(5) $I(X;Y/Z) = H(X/Z) = H(Y/Z)$。

解：

1)

$$\because Z = X + Y$$

$$\therefore p(z_k/x_i) = p(z_k - x_i) = \begin{cases} p(y_j) & (z_k - x_i) \in Y \\ 0 & (z_k - x_i) \notin Y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(Z/X) &= -\sum_i \sum_k p(x_iz_k)\log_2 p(z_k/x_i) \\ &= -\sum_i p(x_i)\left[\sum_k p(z_k/x_i)\log_2 p(z_k/x_i)\right] \\ &= -\sum_i p(x_i)\left[\sum_j p(y_j)\log_2 p(y_j)\right] \\ &= H(Y) \end{aligned}$$

$$\therefore I(X;Z) = H(Z) - H(Z/X) = H(Z) - H(Y)$$

2)

$$\because Z = X + Y$$

$$\therefore p(z_k/x_iy_j) = \begin{cases} 1 & (x_i + y_j) = z_k \\ 0 & (x_i + y_j) \neq z_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(Z/XY) &= -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_iy_jz_k)\log_2 p(z_k/x_iy_j) \\ &= -\sum_i \sum_j p(x_iy_j)\left[\sum_k p(z_k/x_iy_j)\log_2 p(z_k/x_iy_j)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore I(XY;Z) = H(Z) - H(Z/XY) = H(Z) - 0 = H(Z)$$

3)

$\because Z = X + Y$

$$\therefore p(x_i / y_j z_k) = \begin{cases} 1 & x_i = z_k - y_j \\ 0 & x_i \neq z_k - y_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(X/YZ) &= -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log_2 p(x_i / y_j z_k) \\ &= -\sum_j \sum_k p(y_j z_k) \left[\sum_i p(x_i / y_j z_k) \log_2 p(x_i / y_j z_k) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore I(X;YZ) = H(X) - H(X/YZ) = H(X) - 0 = H(X)$

4)

$\because Z = X + Y$

$$\therefore p(y_j / x_i z_k) = \begin{cases} 1 & y_j = z_k - x_i \\ 0 & y_j \neq z_k - x_i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(Y/XZ) &= -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log_2 p(y_j / x_i z_k) \\ &= -\sum_i \sum_k p(x_i z_k) \left[\sum_j p(y_j / x_i z_k) \log_2 p(y_j / x_i z_k) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore I(Y;Z/X) = H(Y/X) - H(Y/XZ) = H(Y) - 0 = H(Y)$

5)

$\because Z = X + Y$

$$\therefore p(x_i / y_j z_k) = \begin{cases} 1 & x_i = z_k - y_j \\ 0 & x_i \neq z_k - y_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(X/YZ) &= -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log_2 p(x_i / y_j z_k) \\ &= -\sum_j \sum_k p(y_j z_k) \left[\sum_i p(x_i / y_j z_k) \log_2 p(x_i / y_j z_k) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore I(X;Y/Z) = H(X/Z) - H(X/YZ) = H(X/Z) - 0 = H(X/Z)$

$\because Z = X + Y$

$$\therefore p(y_j / x_i z_k) = \begin{cases} 1 & y_j = z_k - x_i \\ 0 & y_j \neq z_k - x_i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(Y/XZ) &= -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log_2 p(y_j / x_i z_k) \\ &= -\sum_i \sum_k p(x_i z_k) \left[\sum_j p(y_j / x_i z_k) \log_2 p(y_j / x_i z_k) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore I(X;Y/Z) = H(Y/Z) - H(Y/XZ) = H(Y/Z) - 0 = H(Y/Z)$

3.6 有一个二元对称信道，其信道矩阵为$\begin{bmatrix}0.98 & 0.02\\0.02 & 0.98\end{bmatrix}$。设该信源以 1500 二元符号/秒的速度传输输入符号。现有一消息序列共有 14000 个二元符号，并设 $P(0) = P(1) = 1/2$，问从消息传输的角度来考虑，10 秒钟内能否将这消息序列无失真的传递完？

解：

信道容量计算如下：

$$C = \max I(X;Y) = \max[H(Y) - H(Y/X)] = H_{\max}(Y) - H_{mi}$$
$$= \log_2 2 + (0.98 \times \log_2 0.98 + 0.02 \times \log_2 0.02)$$
$$= 0.859 \quad bit/symbol$$

也就是说每输入一个信道符号，接收到的信息量是 0.859 比特。已知信源输入 1500 二元符号/秒，那么每秒钟接收到的信息量是：

$$I_1 = 1500 symbol/s \times 0.859 bit/symbol = 1288 \quad bit/s$$

现在需要传送的符号序列有 140000 个二元符号，并设 $P(0) = P(1) = 1/2$，可以计算出这个符号序列的信息量是

$$I = 14000 \times (0.5 \times \log_2 0.5 + 0.5 \times \log_2 0.5)$$
$$= 14000 \quad bit$$

要求 10 秒钟传完，也就是说每秒钟传输的信息量是 1400bit/s，超过了信道每秒钟传输的能力（1288 bit/s）。所以 10 秒内不能将消息序列无失真的传递完。

3.7 求下列各离散信道的容量（其条件概率 $P(Y/X)$如下：）

（1）Z 信道　（2）可抹信道　（3）非对称信道　（4）准对称信道

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ s & 1-s\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1-s_1-s_2 & s_1 & s_2\\ s_2 & s_1 & 1-s_1-s_2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

解：

1) Z 信道

这个信道是个一般信道，利用一般信道的计算方法：

a. 由公式$\sum_j p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i) = \sum_j p(y_j/x_i)\beta_j$，求 β_j

$$\begin{cases}1 \times \log_2 1 = \beta_1\\ s\log_2 s + (1-s)\log_2(1-s) = s\beta_1 + (1-s)\beta_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_1 = 0\\ \beta_2 = \dfrac{s}{1-s}\log_2 s + \log_2(1-s) = \log_2\left[(1-s)s^{\frac{s}{1-s}}\right]\end{cases}$$

b. 由公式$C = \log_2\left(\sum_j 2^{\beta_j}\right)$，求 C

$$C = \log_2\left(\sum_j 2^{\beta_j}\right) = \log_2\left[1 + (1-s)s^{\frac{s}{1-s}}\right] \quad bit/symbol$$

c. 由公式 $p(y_j)=2^{\beta_j-C}$，求 $p(y_j)$

$$p(y_1)=2^{\beta_1-C}=\frac{1}{1+(1-s)s^{\frac{s}{1-s}}}$$

$$p(y_2)=2^{\beta_2-C}=\frac{(1-s)s^{\frac{s}{1-s}}}{1+(1-s)s^{\frac{s}{1-s}}}$$

d. 由公式 $p(y_j)=\sum_i p(x_i)p(y_j/x_i)$，求 $p(x_i)$

由方程组：

$$\begin{cases}p(y_1)=p(x_1)+p(x_2)s\\ p(y_2)=p(x_2)(1-s)\end{cases}$$

解得

$$p(x_1)=\frac{1-s^{\frac{s}{1-s}}}{1+(1-s)s^{\frac{s}{1-s}}}$$

$$p(x_2)=\frac{s^{\frac{s}{1-s}}}{1+(1-s)s^{\frac{s}{1-s}}}$$

因为 s 是条件转移概率，所以 $0\le s\le 1$，从而有 $p(x_1)$，$p(x_2)\ge 0$，保证了 C 的存在。

2) 可抹信道

可抹信道是一个准对称信道，把信道矩阵分解成两个子矩阵如下：

$$M_1=\begin{bmatrix}1-s_1-s_2 & s_2\\ s_2 & 1-s_1-s_2\end{bmatrix},M_2=\begin{bmatrix}s_1\\ s_1\end{bmatrix}$$

$$C=\max I(X;Y)=-\sum_{k=1}^{s}m_k\overline{p}(y_k)\log_2\overline{p}(y_k)-H_{mi}$$

$$\begin{cases}p(y_1)=p(x_1)p(y_1/x_1)+p(x_2)p(y_1/x_2)=(1-s_1-s_2)/2+s_2/2=(1-s_1)/2\\ p(y_2)=p(x_1)p(y_2/x_1)+p(x_2)p(y_2/x_2)=s_2/2+(1-s_1-s_2)/2=(1-s_1)/2\\ p(y_3)=p(x_1)p(y_3/x_1)+p(x_2)p(y_3/x_2)=s_1/2+s_1/2=s_1\end{cases}$$

$$\overline{p}(y_k)=\frac{\sum\limits_{p(y_j)\in M_k}p(y_j)}{m_k}$$

$$\overline{p}(y_1)=\frac{\sum\limits_{p(y_j)\in M_1}p(y_j)}{m_1}=\frac{p(y_1)+p(y_2)}{2}=(1-s_1)/2$$

$$\overline{p}(y_2)=\frac{\sum\limits_{p(y_j)\in M_2}p(y_j)}{m_2}=\frac{p(y_3)}{1}=s_1$$

$$C=-\sum_{k=1}^{2}m_k\overline{p}(y_k)\log_2\overline{p}(y_k)-H_{mi}$$

$$=-(2\times\frac{1-s_1}{2}\times\log_2\frac{1-s_1}{2}+s_1\log_2 s_1)+\left[(1-s_1-s_2)\log_2(1-s_1-s_2)+s_2\log_2 s_2+s_1\log_2 s_1\right]$$

$$=-(1-s_1)\log_2\frac{1-s_1}{2}+(1-s_1-s_2)\log_2(1-s_1-s_2)+s_2\log_2 s_2 \quad bit/symbol$$

3) 非对称信道

这个信道是个一般信道，利用一般信道的计算方法

a. 由公式 $\sum_j p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i)=\sum_j p(y_j/x_i)\beta_j$ ，求 β_j

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2\\ \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\beta_1+\frac{3}{4}\beta_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_1=-1.3775\\ \beta_2=-0.6225\end{cases}$$

b. 由公式 $C=\log_2\left(\sum_j 2^{\beta_j}\right)$，求 C

$$C=\log_2\left(\sum_j 2^{\beta_j}\right)=\log_2\left[2^{-1.3775}+2^{-0.6225}\right]=0.049 \quad bit/symbol$$

c. 由公式 $p(y_j)=2^{\beta_j-C}$ ，求 $p(y_j)$

$$p(y_1)=2^{\beta_1-C}=2^{-1.3775-0.049}=0.327$$
$$p(y_2)=2^{\beta_2-C}=2^{-0.6225-0.049}=0.628$$

d. 由公式 $p(y_j)=\sum_i p(x_i)p(y_j/x_i)$，求 $p(x_i)$

由方程组：

$$\begin{cases}0.372=\frac{1}{2}p(x_1)+\frac{1}{4}p(x_2)\\ 0.628=\frac{1}{2}p(x_1)+\frac{3}{4}p(x_2)\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}p(x_1)=0.488\\ p(x_2)=0.512\end{cases}$$

$p(x_1)$，$p(x_2)\geq 0$，保证了 C 的存在。

(4) 准对称信道

把信道矩阵分解成三个子矩阵如下：

$$M_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix},M_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix},M_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$C=\max I(X;Y)=-\sum_{k=1}^{s}m_k\overline{p}(y_k)\log_2\overline{p}(y_k)-H_{mi}$$

$$\begin{cases}p(y_1)=p(x_1)p(y_1/x_1)+p(x_2)p(y_1/x_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\\p(y_2)=p(x_1)p(y_2/x_1)+p(x_2)p(y_2/x_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\\p(y_3)=p(x_1)p(y_3/x_1)+p(x_2)p(y_3/x_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\\p(y_4)=p(x_1)p(y_4/x_1)+p(x_2)p(y_4/x_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$\overline{p}(y_k)=\frac{\sum_{p(y_j)\in M_k}p(y_j)}{m_k}$$

$$\overline{p}(y_1)=\frac{\sum_{p(y_j)\in M_1}p(y_j)}{m_1}=\frac{p(y_1)+p(y_2)}{2}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)/2=\frac{1}{4}$$

$$\overline{p}(y_2)=\frac{\sum_{p(y_j)\in M_2}p(y_j)}{m_2}=\frac{p(y_3)}{1}=\frac{1}{3}$$

$$\overline{p}(y_3)=\frac{\sum_{p(y_j)\in M_3}p(y_j)}{m_3}=\frac{p(y_4)}{1}=\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}C&=-\sum_{k=1}^{3}m_k\overline{p}(y_k)\log_2\overline{p}(y_k)-H_{mi}\\&=-(2\times\frac{1}{4}\times\log_2\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6})+\left[\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}\right]\\&=0.041\quad bit/symbol\end{aligned}$$

3.8 已知一个高斯信道，输入信噪比（比率）为 3。频带为 3kHz，求最大可能传输的消息率。若信噪比提高到 15，理论上传送同样的信息率所需的频带为多少？

解：

$$C_t=W\log\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right)=3000\times\log_2(1+3)=6000\quad bit/s$$

$$W=\frac{C_t}{\log\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right)}=\frac{6000}{\log_2(1+15)}=1500\quad Hz$$

3.9 有二址接入信道，输入 X_1，X_2和输出 Y 的条件概率 $P(Y/X_1X_2)$如下表（$\varepsilon < 1/2$），求容量界限。

Y \ X_1X_2	0	1
00	1-ε	ε
01	1/2	1/2
10	1/2	1/2
11	ε	1-ε

3.10 有一离散广播信道，其条件概率为 $p(y/x_1x_2x_3)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left\{\frac{(y-x_1-x_2-x_3)^2}{2\sigma^2}\right\}}$ 试计算其容量界限（已知 $E\left[X_l^2\right]=\sigma_l^2, l=1,2,3$）。

3.11 已知离散信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{Bmatrix}$，某信道的信道矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$ 试求：

(1) “输入 x_3，输出 y_2”的概率；
(2) “输出 y_4”的概率；
(3) “收到 y_3 的条件下推测输入 x_2”的概率 。

解：

1)

$$p(x_3y_2)=p(x_3)p(y_2/x_3)=0.2\times 0.2=0.04$$

2)

$$\begin{aligned} p(y_4) &= p(x_1)p(y_4/x_1)+p(x_2)p(y_4/x_2)+p(x_3)p(y_4/x_3)+p(x_4)p(y_4/x_4) \\ &= 0.1\times 0.4+0.3\times 0.1+0.2\times 0.2+0.4\times 0.2=0.19 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} p(y_3) &= p(x_1)p(y_3/x_1)+p(x_2)p(y_3/x_2)+p(x_3)p(y_3/x_3)+p(x_4)p(y_3/x_4) \\ &= 0.1\times 0.1+0.3\times 0.1+0.2\times 0.1+0.4\times 0.4=0.22 \end{aligned}$$

$$p(x_2/y_3)=\frac{p(x_2)p(y_3/x_2)}{p(y_3)}=\frac{0.3\times 0.1}{0.22}=0.136$$

3.12 证明信道疑义度 H(X/Y) = 0 的充分条件是信道矩阵[P]中每列有一个且只有一个非零元素。

证明：

[P]每列有一个且只有一个非零元素 =〉 H(X/Y) = 0

取[P]的第 j 列，设 $p(y_j/x_k)\neq 0$ 而其他 $p(y_j/x_i)=0 \quad (i\neq k,\ i=1,2,...,n)$

$$p(x_k/y_j)=\frac{p(x_ky_j)}{p(y_j)}=\frac{p(x_k)p(y_j/x_k)}{\sum_i p(x_i)p(y_j/x_i)}=\frac{p(x_k)p(y_j/x_k)}{p(x_k)p(y_j/x_k)}=1$$

$$p(x_i/y_j)=\frac{p(x_iy_j)}{p(y_j)}=\frac{p(x_i)p(y_j/x_i)}{p(y_j)}=\frac{0}{p(y_j)}=0 \qquad (i\neq k)$$

$$\therefore p(x_i/y_j)=\begin{cases}0 & p(y_j/x_i)=0\\ 1 & p(y_j/x_i)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}H(X/Y)&=-\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log p(x_i/y_j)\\&=-\sum_j p(y_j)\left[\sum_i p(x_i/y_j)\log p(x_i/y_j)\right]\\&=0\ \ bit/symbol\end{aligned}$$

3.13 试证明：当信道每输入一个 X 值，相应有几个 Y 值输出，且不同的 X 值所对应的 Y 值不相互重合时，有 H(Y) – H(X) = H(Y/X)。

证明：

信道每输入一个 X 值，相应有几个 Y 值输出，且不同的 X 值所对应的 Y 值不相互重合。这种信道描述的信道转移矩阵[P]的特点是每列有一个且只有一个非零元素。

取[P]的第 j 列，设 $p(y_j/x_k)\neq 0$ 而其他 $p(y_j/x_i)=0 \quad (i\neq k,\ i=1,2,...,n)$

$$p(x_k/y_j)=\frac{p(x_ky_j)}{p(y_j)}=\frac{p(x_k)p(y_j/x_k)}{\sum_i p(x_i)p(y_j/x_i)}=\frac{p(x_k)p(y_j/x_k)}{p(x_k)p(y_j/x_k)}=1$$

$$p(x_i/y_j)=\frac{p(x_iy_j)}{p(y_j)}=\frac{p(x_i)p(y_j/x_i)}{p(y_j)}=\frac{0}{p(y_j)}=0 \qquad (i\neq k)$$

$$\therefore p(x_i/y_j)=\begin{cases}0 & p(y_j/x_i)=0\\ 1 & p(y_j/x_i)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}H(X/Y)&=-\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log p(x_i/y_j)\\&=-\sum_j p(y_j)\left[\sum_i p(x_i/y_j)\log p(x_i/y_j)\right]\\&=0\ \ bit/symbol\end{aligned}$$

$$\because I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$\therefore H(Y/X)=H(Y)-H(X)+H(X/Y)=H(Y)-H(X)$$

3.14 试求以下各信道矩阵代表的信道的容量：

(1) $[P]=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$ (2) $[P]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(3) [P] = $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$

解：

1)

这个信道是一一对应的无干扰信道

$$C = \log_2 n = \log_2 4 = 2 \quad bit/symbol$$

2)

这个信道是归并的无干扰信道

$$C = \log_2 m = \log_2 3 = 1.585 \quad bit/symbol$$

3)

这个信道是扩展的无干扰信道

$$C = \log_2 n = \log_2 3 = 1.585 \quad bit/symbol$$

3.15 设二进制对称信道是无记忆信道，信道矩阵为$\begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix}$，其中：$p > 0$，$\bar{p} < 1$，$p + \bar{p} = 1$，$\bar{p} >> p$。试写出 N = 3 次扩展无记忆信道的信道矩阵[P]。

解：

$$[P] = \begin{array}{c} \\ 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{p}^3 & \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} & p^2 \bar{p} & p^3 \\ \bar{p}^2 p & \bar{p}^3 & p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & p^3 & p^2 \bar{p} \\ \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p & \bar{p}^3 & \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p & p^3 & \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} \\ p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p & \bar{p}^3 & p^3 & p^2 \bar{p} & p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p \\ \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} & p^2 \bar{p} & p^3 & \bar{p}^3 & \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} \\ p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & p^3 & p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & \bar{p}^3 & \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p \\ p^2 \bar{p} & p^3 & \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} & \bar{p}^3 & \bar{p}^2 p \\ p^3 & p^2 \bar{p} & p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & p^2 \bar{p} & \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p & \bar{p}^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3.16 设信源 X 的 N 次扩展信源 $X = X_1X_2\ldots X_N$通过信道{X, P(Y/X), Y}的输出序列为 $Y = Y_1Y_2\ldots Y_N$。试证明：

(1) 当信源为无记忆信源时，即 X_1, X_2, …, X_N之间统计独立时，有$\sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k) \le I(X;Y)$；

(2) 当信道无记忆时，有$\sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k) \ge I(X;Y)$；

(3) 当信源、信道为无记忆时，有$\sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k) = I(X^N;Y^N) = NI(X;Y)$；

(4) 用熵的概念解释以上三种结果。

证明：

1)

$$I(X^N;Y^N)=H(X^N)-H(X^N/Y^N)$$

$$\begin{aligned}H(X^N)&=H(X_1)+H(X_2/X_1)+...+H(X_N/X_1...X_{N-1})\\&=H(X_1)+H(X_2)+...+H(X_N)\end{aligned}$$

$$H(X^N/Y^N)=H(X_1/Y^N)+H(X_2/Y^NX_1)+...+H(X_N/Y^NX_1...X_{N-1})$$

$$\begin{aligned}\therefore I(X^N;Y^N)&=\left[H(X_1)+H(X_2)+...+H(X_N)\right]-\left[H(X_1/Y^N)+H(X_2/Y^NX_1)+...+H(X_N/Y^NX_1...X_{N-1})\right]\\&=\left[H(X_1)-H(X_1/Y^N)\right]+\left[H(X_2)-H(X_2/Y^NX_1)\right]+...+\left[H(X_N)-H(X_N/Y^NX_1...X_{N-1})\right]\\&=\sum_{k=1}^{N}\left[H(X_k)-H(X_k/Y^NX_1...X_{k-1})\right]\end{aligned}$$

$$\because H(X_k/Y^NX_1...X_{k-1})\le H(X_k/Y_k)$$

$$\therefore \left[H(X_k)-H(X_k/Y^NX_1...X_{k-1})\right]\ge\left[H(X_k)-H(X_k/Y_k)\right]=I(X_k;Y_k)$$

$$\therefore I(X^N;Y^N)\ge\sum_{k=1}^{N}I(X_k;Y_k)$$

2)

$$I(X^N;Y^N)=H(Y^N)-H(Y^N/X^N)$$

$$H(Y^N)=H(Y_1)+H(Y_2/Y_1)+...+H(Y_N/Y_1...Y_{N-1})$$

$$\begin{aligned}H(Y^N/X^N)&=-\sum_{i}^{n^N}\sum_{j}^{m^N}p(a_ib_j)\log p(b_j/a_i)\\&=-\sum_{i_1}^{n}...\sum_{i_N}^{n}\sum_{j_1}^{m}...\sum_{j_N}^{m}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N}y_{j_1}y_{j_2}...y_{j_N})\log p(y_{j_1}y_{j_2}...y_{j_N}/x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N})\\&=-\sum_{i_1}^{n}...\sum_{i_N}^{n}\sum_{j_1}^{m}...\sum_{j_N}^{m}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N}y_{j_1}y_{j_2}...y_{j_N})\log p(y_{j_1}/x_{i_1})p(y_{j_2}/x_{i_2})...p(y_{j_N}/x_{i_N})\\&=-\sum_{i_1}^{n}...\sum_{i_N}^{n}\sum_{j_1}^{m}...\sum_{j_N}^{m}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N}y_{j_1}y_{j_2}...y_{j_N})\log p(y_{j_1}/x_{i_1})\\&\quad-\sum_{i_1}^{n}...\sum_{i_N}^{n}\sum_{j_1}^{m}...\sum_{j_N}^{m}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N}y_{j_1}y_{j_2}...y_{j_N})\log p(y_{j_2}/x_{i_2})\\&\quad...\\&\quad-\sum_{i_1}^{n}...\sum_{i_N}^{n}\sum_{j_1}^{m}...\sum_{j_N}^{m}p(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N}y_{j_1}y_{j_2}...y_{j_N})\log p(y_{j_N}/x_{i_N})\\&=H(Y_1/X_1)+H(Y_2/X_2)+...+H(Y_N/X_N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore I(X^N;Y^N)&=\left[H(Y_1)+H(Y_2/Y_1)+...+H(Y_N/Y_1...Y_{N-1})\right]-\left[H(Y_1/X_1)+H(Y_2/X_2)+...+H(Y_N/X_N)\right]\\&=\left[H(Y_1)-H(Y_1/X_1)\right]+\left[H(Y_2/Y_1)-H(Y_2/X_2)\right]+...+\left[H(Y_N/Y_1...Y_{N-1})-H(Y_N/X_N)\right]\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left[H(Y_k/Y_1 \dots Y_{k-1}) - H(Y_k/X_k)\right]$$

$$\because H(Y_k/Y_1 \dots Y_{k-1}) \le H(Y_k)$$

$$\therefore \left[H(Y_k/Y_1 \dots Y_{k-1}) - H(Y_k/X_k)\right] \le \left[H(Y_k) - H(Y_k/X_k)\right] = I(X_k;Y_k)$$

$$\therefore I(X^N;Y^N) \le \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

3)

如果信源、信道都是无记忆的。上面证明的两个不等式应同时满足，即：

$$I(X^N;Y^N) \ge \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

$$I(X^N;Y^N) \le \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

必然推出，$I(X^N;Y^N) \equiv \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$，而如果 X^N, Y^N 是平稳分布，即 $X_1 = X_2 = \dots = X_N = X$，

$Y_1 = Y_2 = \dots = Y_N = Y$，那么 $I(X^N;Y^N) \equiv \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k) = NI(X_k;Y_k)$。

4)

流经信道的信息量也是信宿收到的信息量，它等于信源信息的不确定度减去由信道干扰造成的不确定度。

当信源无记忆、信道有记忆时，对应于本题的第一种情况。信源是无记忆的，信源的不确定度等于 N 倍的单符号信源不确定度，信道是有记忆的，信道干扰造成的不确定度小于 N 倍单符号信道的不确定度。因此，这两部分的差值平均互信息量大于 N 倍的单符号平均互信息量。

当信源有记忆、信道无记忆时，对应于本题的第二种情况。信源是有记忆的，信源的不确定度小于 N 倍的单符号信源不确定度，信道是无记忆的，信道干扰造成的不确定度等于 N 倍单符号信道的不确定度。因此，这两部分的差值平均互信息量小于 N 倍的单符号平均互信息量。

当信源无记忆、信道无记忆时，对应于本题的第三种情况。信源是无记忆的，信源的不确定度等于 N 倍的单符号信源不确定度，信道是无记忆的，信道干扰造成的不确定度等于 N 倍单符号信道的不确定度。因此，这两部分的差值平均互信息量等于 N 倍的单符号平均互信息量。

3.17 设高斯加性信道，输入、输出和噪声随机变量 X, Y, N 之间的关系为 Y = X + N，且 $E[N^2] = \sigma^2$。试证明：当信源 X 是均值 E[X] = 0，方差为 σ_X^2 的高斯随机变量时，信道容量达其容量 C，且 $C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma^2}\right)$。

证明：

$$C = \max I(X;Y) = \max[H(Y) - H(Y/X)]$$

$$p(xy) = p(x, n = y - x)\left|J\left(\frac{X,n}{X,Y}\right)\right|$$

$$\because X = X, n = Y - X$$

$$\therefore J\left(\frac{X,n}{X,Y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial X} & \frac{\partial n}{\partial X} \\ \frac{\partial X}{\partial Y} & \frac{\partial n}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore p(xy) = p(xn)$$

$$\therefore p(x)p(y/x) = p(x)p(n)$$

$$\therefore p(y/x) = p(n)$$

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -\iint_{X,Y} p(xy)\log p(y/x)dxdy \\ &= -\iint_{X,n} p(xn)|J|\log p(n)\frac{1}{|J|}dxdn \\ &= -\int_X p(x)dx\int_n p(n)\log p(n)dn \\ &= -\int_n p(n)\log p(n)dn \\ &= H(n) \end{aligned}$$

$$\therefore C = \max I(X;Y) = H(Y)_{\max} - H(n)$$

根据概率论中的结论：n 是正态分布，X 是正态分布，则 Y = X + n 也是正态分布，而且$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_n^2$。

所以$H(Y)_{\max} = \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_Y^2$，前提是$\sigma_Y^2$取最大值，也就是说$\sigma_X^2$取最大值。因为当 X 是均值为零的正态分布时，$H(X)_{\max} = \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_X^2$，所以这是满足$H(Y)_{\max} = \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_Y^2$的前提条件。

$$\begin{aligned} \therefore C &= \max I(X;Y) \\ &= H(Y)_{\max} - H(n) \\ &= \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_Y^2 - \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_n^2 \\ &= \frac{1}{2}\log 2\pi e(\sigma_X^2 + \sigma_n^2) - \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma_n^2 \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_n^2}\right) \end{aligned}$$

3.18 设加性高斯白噪声信道中，信道带宽 3kHz，又设{(信号功率+噪声功率)/噪声功率}=10dB。试计算该信道的最大信息传输速率 C_t。

解：

$$C_t = W\log\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right)$$

$$\frac{P_X + P_N}{P_N} = 10$$

$$C_t = W\log\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right) = 3000\times\log_2 10 = 9966 \quad bit/s$$

3.19 在图片传输中，每帧约有 2.25×10^6 个像素，为了能很好地重现图像，能分 16 个亮度电平，并假设亮度电平等概分布。试计算每分钟传送一帧图片所需信道的带宽（信噪功率比为 30dB）。

解：

$$H = \log_2 n = \log_2 16 = 4 \quad bit/symbol$$

$$I = NH = 2.25\times10^6\times4 = 9\times10^6 \quad bit$$

$$=10$$

$$C_t = \frac{I}{t} = \frac{9\times10^6}{60} = 1.5\times10^5 \quad bit/s$$

$$C_t = W\log\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right)$$

$$W = \frac{C_t}{\log\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right)} = \frac{1.5\times10^5}{\log_2(1+1000)} = 15049 \quad Hz$$

3.20 设电话信号的信息率 5.6×10^4 比特/秒，在一个噪声功率谱为 $N_0= 5\times10^{-6}$ mW/Hz、限频 F、限输入功率 P 的高斯信道中传送，若 F=4kHz，问无差错传输所需的最小功率 P 是多少瓦？若 F→∞，则 P 是多少瓦？

解：

$$C_t = W\log\left(1+\frac{P_X}{WN_0}\right)$$

$$P_X = WN_0\left(2^{\frac{C_t}{W}}-1\right) = 4000\times5\times10^{-9}\times\left(2^{\frac{5.6\times10^4}{4000}}-1\right) = 0.328 \quad W$$

$$F\to\infty$$

$$C_t = \frac{P_X}{N_0}\log_2 e$$

$$P_X = \frac{C_t N_0}{\log_2 e} = \frac{5.6\times10^4\times5\times10^{-9}}{\log_2 2.71828} = 1.94\times10^{-4} \quad W$$

4.1 一个四元对称信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{Bmatrix}$，接收符号 Y = {0, 1, 2, 3}，其失真矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求 D_{max} 和 D_{min} 及信源的 $R(D)$ 函数，并画出其曲线（取 4 至 5 个点）。

解：

$$D_{\max} = \min D_j = \min_j \sum_i p(x_i) d(x_i, y_j) = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 0 = \frac{3}{4}$$

$$D_{\min} = \sum_i p(x_i) \min_j d(x_i, y_j) = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 = 0$$

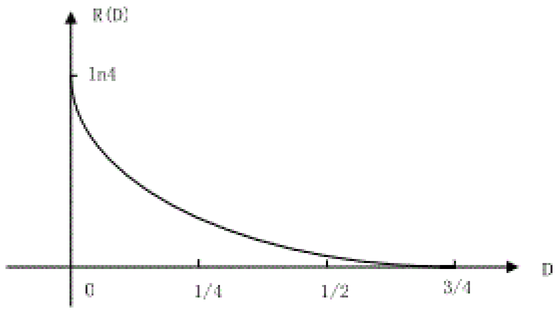
因为 n 元等概信源率失真函数：

$$R(D) = \ln n + \frac{D}{a}\ln\frac{\frac{D}{a}}{n-1} + \left(1-\frac{D}{a}\right)\ln\left(1-\frac{D}{a}\right)$$

其中 $a=1, n=4$, 所以率失真函数为：

$$R(D) = \ln 4 + D\ln\frac{D}{3} + (1-D)\ln(1-D)$$

函数曲线：



其中：

$$D = 0, R(0) = \ln 4 \ \ nat/symbol$$

$$D = \frac{1}{4}, R(D) = \ln 4 - \frac{1}{2}\ln\frac{16}{3} \ \ nat/symbol$$

$$D = \frac{1}{2}, R(D) = \ln 4 - \frac{1}{2}\ln 12 \ \ nat/symbol$$

$$D = \frac{3}{4}, R(D) = 0 \ \ nat/symbol$$

4.2 若某无记忆信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{Bmatrix}$，接收符号 $Y = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$，其失真矩阵 $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$求信源的最大失真度和最小失真度，并求选择何种信道可达到该 D_{max} 和 D_{min} 的失真度。

4.3 某二元信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix}$其失真矩阵为 $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$求这信源的 D_{max} 和 D_{min} 和 $R(D)$

函数。

解：

$$D_{\max} = \min D_j = \min_j \sum_i p(x_i) d(x_i, y_j) = \frac{1}{2} \times a + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{a}{2}$$

$$D_{\min} = \sum_i p(x_i) \min_j d(x_i, y_j) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

因为二元等概信源率失真函数：

$$R(D) = \ln n - H\left(\frac{D}{a}\right)$$

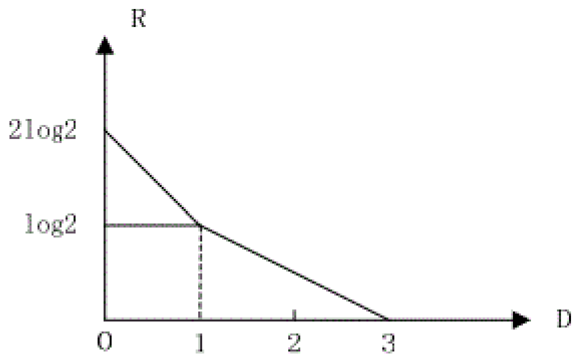
其中 $n = 2$, 所以率失真函数为：

$$R(D) = \ln 2 - \left[\frac{D}{a}\ln\frac{D}{a} + \left(1 - \frac{D}{a}\right)\ln\left(1 - \frac{D}{a}\right)\right]$$

4.4 已知信源 $X = \{0, 1\}$，信宿 $Y = \{0, 1, 2\}$。设信源输入符号为等概率分布，而且失真函数 $D = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求信源的率失真函数 $R(D)$。

4.5 设信源 $X = \{0, 1, 2, 3\}$，信宿 $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。且信源为无记忆、等概率分布。失真函数定义为

$$d(x_i, y_j) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i = 0,1 \text{且} j = 4 \\ 1 & i = 2,3 \text{且} j = 5 \\ \infty & \text{其他} \end{cases}$$ 证明率失真函数 $R(D)$如图所示。



4.6 设信源 $X = \{0, 1, 2\}$，相应的概率分布 $p(0) = p(1) = 0.4$，$p(2) = 0.2$。且失真函数为

$$d(x_i, y_j) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 0,1,2)$$

(1) 求此信源的 $R(D)$；

(2) 若此信源用容量为 C 的信道传递，请画出信道容量 C 和其最小误码率 P_k 之间的曲线关系。

4.7 设 $0 < \alpha, \beta < 1, \alpha + \beta = 1$。试证明：$\alpha R(D') + \beta R(D'') \geq R(\alpha D' + \beta D'')$

4.8 试证明对于离散无记忆 N 次扩展信源，有 $R_N(D) = NR(D)$。其中 N 为任意正整数，$D \geq D_{min}$。

4.9 设某地区的“晴天”概率 p(晴) = 5/6，“雨天”概率 p(雨) = 1/6，把“晴天”预报为“雨天”，把“雨天”预报为“晴天”造成的损失为 a 元。又设该地区的天气预报系统把“晴天”预报为“晴天”，“雨天”预报为“雨天”的概率均为 0.9；把把“晴天”预报为“雨天”，把“雨天”预报为“晴天”的概率均为 0.1。试计算这种预报系统的信息价值率 v（元/比特）。

4.10 设离散无记忆信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{Bmatrix}$其失真度为汉明失真度。

(1) 求 D_{min}和 $R(D_{min})$，并写出相应试验信道的信道矩阵；
(2) 求 D_{max}和 $R(D_{max})$，并写出相应试验信道的信道矩阵；
(3) 若允许平均失真度 $D = 1/3$，试问信源的每一个信源符号平均最少有几个二进制符号表示？

解：

$$D_{\min} = \sum_i p(x_i) \min_j d(x_i, y_j) = \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 0 = 0$$

$$p(y_j / x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(n-1)e^{sa}}, i = j \\ \dfrac{e^{sa}}{1+(n-1)e^{sa}}, i \neq j \end{cases}$$

4.11 设信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \\ p & 1-p \end{Bmatrix}$（$p < 0.5$），其失真度为汉明失真度，试问当允许平均失真度 $D = 0.5p$ 时，每一信源符号平均最少需要几个二进制符号表示？

解：

因为二元信源率失真函数：

$$R(D) = H(p) - H\left(\frac{D}{a}\right)$$

其中 $a = 1$（汉明失真），所以二元信源率失真函数为：

$$R(D) = H(p) - H(D)$$

当 $D = \dfrac{p}{2}$ 时

$$R\left(\frac{p}{2}\right) = H(p) - H\left(\frac{p}{2}\right) = -[p\ln p + (1-p)\ln(1-p)] + \left[\frac{p}{2}\ln\frac{p}{2} + \left(1-\frac{p}{2}\right)\ln\left(1-\frac{p}{2}\right)\right] \ nat/symbol$$

5.1 设信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.1 & 0.01 \end{Bmatrix}$

(1) 求信源熵 $H(X)$；
(2) 编二进制香农码；
(3) 计算平均码长和编码效率。

解：

(1)

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{7} p(x_i)\log_2 p(x_i)$$
$$= -(0.2\times\log_2 0.2 + 0.19\times\log_2 0.19 + 0.18\times\log_2 0.18 + 0.17\times\log_2 0.17$$
$$+ 0.15\times\log_2 0.15 + 0.1\times\log_2 0.1 + 0.01\times\log_2 0.01)$$
$$= 2.609\ \ bit/symbol$$

(2)

x_i	$p(x_i)$	$p_a(x_i)$	k_i	码字
x_1	0.2	0	3	000
x_2	0.19	0.2	3	001
x_3	0.18	0.39	3	011
x_4	0.17	0.57	3	100
x_5	0.15	0.74	3	101
x_6	0.1	0.89	4	1110
x_7	0.01	0.99	7	1111110

(3)

$$\overline{K} = \sum_i k_i p(x_i) = 3\times0.2 + 3\times0.19 + 3\times0.18 + 3\times0.17 + 3\times0.15 + 4\times0.1 + 7\times0.01$$
$$= 3.14$$
$$\eta = \frac{H(X)}{R} = \frac{H(X)}{\overline{K}} = \frac{2.609}{3.14} = 83.1\%$$

5.2 对信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.1 & 0.01 \end{Bmatrix}$编二进制费诺码，计算编码效率。

解：

<table>
<tr><th>x_i</th><th>$p(x_i)$</th><th colspan="4">编码</th><th>码字</th><th>k_i</th></tr>
<tr><td>x_1</td><td>0.2</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td colspan="2"></td><td>00</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0.19</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td></td><td>010</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>0.18</td><td>1</td><td></td><td>011</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x_4</td><td>0.17</td><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td colspan="2"></td><td>10</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x_5</td><td>0.15</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td><td>110</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x_6</td><td>0.1</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1110</td><td>4</td></tr>
<tr><td>x_7</td><td>0.01</td><td>1</td><td>1111</td><td>4</td></tr>
</table>

$$\overline{K} = \sum_i k_i p(x_i) = 2\times0.2 + 3\times0.19 + 3\times0.18 + 2\times0.17 + 3\times0.15 + 4\times0.1 + 4\times0.01$$
$$= 2.74$$
$$\eta = \frac{H(X)}{R} = \frac{H(X)}{\overline{K}} = \frac{2.609}{2.74} = 95.2\%$$

5.3 对信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.2 & 0.19 & 0.18 & 0.17 & 0.15 & 0.1 & 0.01 \end{Bmatrix}$编二进制和三进制哈夫曼码，计算各自的平均码长和编码效率。

解：

二进制哈夫曼码：

x_i	$p(x_i)$	编码						码字	k_i
s_6							1		
s_5						0.61	0		
s_4					0.39		1		
s_3				0.35		0			
s_2			0.26			1			
x_1	0.2				0			10	2
x_2	0.19				1			11	2
x_3	0.18			0				000	3
x_4	0.17			1				001	3
x_5	0.15		0					010	3
s_1		0.11	1						
x_6	0.1	0						0110	4
x_7	0.01	1						0111	4

$$\overline{K} = \sum_i k_i p(x_i) = 2\times0.2 + 2\times0.19 + 3\times0.18 + 3\times0.17 + 3\times0.15 + 4\times0.1 + 4\times0.01$$

$$= 2.72$$

$$\eta = \frac{H(X)}{R} = \frac{H(X)}{\overline{K}} = \frac{2.609}{2.72} = 95.9\%$$

三进制哈夫曼码：

x_i	$p(x_i)$	编码			码字	k_i
s_3				1		
s_2			0.54	0		
s_1		0.26		1		
x_1	0.2			2	2	1
x_2	0.19		0		00	2
x_3	0.18		1		01	2
x_4	0.17		2		02	2
x_5	0.15	0			10	2
x_6	0.1	1			11	2
x_7	0.01	2			12	2

$$\overline{K} = \sum_i k_i p(x_i) = 1\times0.2 + 2\times(0.19 + 0.18 + 0.17 + 0.15 + 0.1 + 0.01)$$

$$= 1.8$$

$$\eta = \frac{H(X)}{R} = \frac{H(X)}{\frac{\overline{K}}{L}\log_2 m} = \frac{2.609}{1.8\times\log_2 3} = 91.4\%$$

5.4 设信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{128} & \frac{1}{128} \end{Bmatrix}$

(1) 求信源熵 $H(X)$；
(2) 编二进制香农码和二进制费诺码；
(3) 计算二进制香农码和二进制费诺码的平均码长和编码效率；
(4) 编三进制费诺码；
(5) 计算三进制费诺码的平均码长和编码效率；

解：

(1)

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{8} p(x_i)\log_2 p(x_i)$$

$$= \frac{1}{2}\times\log_2 2 + \frac{1}{4}\times\log_2 4 + \frac{1}{8}\times\log_2 8 + \frac{1}{16}\times\log_2 16 + \frac{1}{32}\times\log_2 32 + \frac{1}{64}\times\log_2 64 + \frac{1}{128}\times\log_2 128 + \frac{1}{128}\times\log$$

$$= 1.984 \ bit/symbol$$

(2)

二进制香农码：

x_i	$p(x_i)$	$p_a(x_i)$	k_i	码字
x_1	0.5	0	1	0
x_2	0.25	0.5	2	10
x_3	0.125	0.75	3	110
x_4	0.0625	0.875	4	1110
x_5	0.03125	0.9375	5	11110
x_6	0.015625	0.96875	6	111110
x_7	0.0078125	0.984375	7	1111110
x_8	0.0078125	0.9921875	7	1111111

二进制费诺码：

<table>
<tr><th>xi</th><th>p(xi)</th><th colspan="7">编码</th><th>码字</th><th>ki</th></tr>
<tr><td>x1</td><td>0.5</td><td>0</td><td colspan="6"></td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x2</td><td>0.25</td><td rowspan="7">1</td><td>0</td><td colspan="5"></td><td>10</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x3</td><td>0.125</td><td rowspan="6">1</td><td>0</td><td colspan="4"></td><td>110</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x4</td><td>0.0625</td><td rowspan="5">1</td><td>0</td><td colspan="3"></td><td>1110</td><td>4</td></tr>
<tr><td>x5</td><td>0.03125</td><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td colspan="2"></td><td>11110</td><td>5</td></tr>
<tr><td>x6</td><td>0.015625</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td><td>111110</td><td>6</td></tr>
<tr><td>x7</td><td>0.0078125</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1111110</td><td>7</td></tr>
<tr><td>x8</td><td>0.0078125</td><td>1</td><td>1111111</td><td>7</td></tr>
</table>

(3)

香农编码效率：

$$\overline{K} = \sum_i k_i p(x_i) = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{16}\times 4 + \frac{1}{32}\times 5 + \frac{1}{64}\times 6 + \frac{1}{128}\times 7 + \frac{1}{128}\times 7$$

$$= 1.984$$

$$\eta = \frac{H(X)}{R} = \frac{H(X)}{\overline{K}} = \frac{1.984}{1.984} = 100\%$$

费诺编码效率：

$$\overline{K}=\sum_i k_i p(x_i)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 3+\frac{1}{16}\times 4+\frac{1}{32}\times 5+\frac{1}{64}\times 6+\frac{1}{128}\times 7+\frac{1}{128}\times 7$$

$=1.984$

$$\eta=\frac{H(X)}{R}=\frac{H(X)}{\overline{K}}=\frac{1.984}{1.984}=100\%$$

(4)

<table>
<tr><td>x_i</td><td>$p(x_i)$</td><td colspan="4">编码</td><td>码字</td><td>k_i</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>0.5</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0.25</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>0.125</td><td rowspan="6">2</td><td>0</td><td></td><td></td><td>20</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x_4</td><td>0.0625</td><td>1</td><td></td><td></td><td>21</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x_5</td><td>0.03125</td><td rowspan="4">2</td><td>0</td><td></td><td>220</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x_6</td><td>0.015625</td><td>1</td><td></td><td>221</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x_7</td><td>0.0078125</td><td rowspan="2">2</td><td>0</td><td>2220</td><td>4</td></tr>
<tr><td>x_8</td><td>0.0078125</td><td>1</td><td>2221</td><td>4</td></tr>
</table>

(5)

$$\overline{K}=\sum_i k_i p(x_i)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{8}\times 2+\frac{1}{16}\times 2+\frac{1}{32}\times 3+\frac{1}{64}\times 3+\frac{1}{128}\times 4+\frac{1}{128}\times 4$$

$=1.328$

$$\eta=\frac{H(X)}{R}=\frac{H(X)}{\overline{K}\cdot\log_2 m}=\frac{1.984}{1.328\times\log_2 3}=94.3\%$$

5.5 设无记忆二进制信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0.9 & 0.1 \end{Bmatrix}$

先把信源序列编成数字 0，1，2，……，8，再替换成二进制变长码字，如下表所示。

(1) 验证码字的可分离性；

(2) 求对应于一个数字的信源序列的平均长度 $\overline{K_1}$；

(3) 求对应于一个码字的信源序列的平均长度 $\overline{K_2}$；

(4) 计算 $\frac{\overline{K_2}}{\overline{K_1}}$，并计算编码效率；

(5) 若用 4 位信源符号合起来编成二进制哈夫曼码，求它的平均码长 $\overline{K}$，并计算编码效率。

序列	数字	二元码字
1	0	1000
01	1	1001
001	3	1010
0001	3	1011
00001	4	1100
000001	5	1101
0000001	6	1110

00000001	7	1111
00000000	8	0

5.6 有二元平稳马氏链，已知 $p(0/0) = 0.8$，$p(1/1) = 0.7$，求它的符号熵。用三个符号合成一个来编写二进制哈夫曼码，求新符号的平均码字长度和编码效率。

5.7 对题 5.6 的信源进行游程编码。若“0”游程长度的截至值为 16，“1”游程长度的截至值为 8，求编码效率。

5.8 选择帧长 $N = 64$

(1) 对 0010000000000000000000000000000001000000000000000000000000000000 遍 L-D 码；

(2) 对 1000010000101100000000010010000101001000000001110000010000000010 遍 L-D 码再译码；

(3) 对 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 遍 L-D 码；

(4) 对 10100011010111000110001110100110000111101100101000110101011010010 遍 L-D 码；

(5) 对上述结果进行讨论。