第六讲　线性代数应用实验

- 矩阵相关命令
- 线性方程组求解
- 特征值问题
- 超定方程求解

矩阵相关命令

1、实现矩阵A初等行变换命令：

(1)交换A的第i行与第j 行：

A([i，j]，:) = A([j，i]，:)

(2)将A的第i行乘以数k：

A(i，:) = k*A(i，:)

(3)将A的第j行的k倍加到第i行上：

A(i，:) = A(i，:) + k*A(j，:)

2、矩阵A的秩、迹：rank(A)、trace(A)

3、矩阵化为最简行阶梯形矩阵：
rref(A)

4、向量a与b的内[外]积：
dot(a,b)　cross(a,b)

5、向量(矩阵)的范数：
norm(A)　norm(A,2)　norm(A,inf)

6、矩阵的行列式：det(A)

7、矩阵的逆：inv(A) 或 A^-1

8、矩阵左除、右除：\ /

(1)逆矩阵左(右)乘　A\(/A)

(2)$AX=b$　　$X=A\backslash b$

例　$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$$A\backslash B=\begin{bmatrix}0.25 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix} \qquad A/B=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

线性方程组求解 $AX = b$

或 A\b

或 linsolve(A,b)

或求解一般代数方程(组)命令 solve

solve(eqn1,eqn2,…,eqnN,var1,var2,…,varN)

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$$

```
syms a
linsolve([a,1;3,-2],[2;1])
```

```
syms a x1 x2
[x1,x2]=solve(a*x1+x2==2,3*x1-2*x2==1,x1,x2)
```

x1 =5/(2*a + 3)　　x2 =-(a - 6)/(2*a + 3)

例 Hilbert矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix}$，向量$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}11/6\\ 13/12\\ 47/60\end{bmatrix}$，

求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^{3}$和 $\boldsymbol{A}$ 的行列式。

```
A = hilb(3);
b = [11/6;13/12;47/60];
A^-1      % inv(A)
A^3
c = det(A)
A\b
```

A为方阵

注意和.^区别

克莱姆法则

若 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$，则

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

问题1：减肥食谱

下表是该食谱中的3种食物以及100克每种食物成分含有某些营养素的数量。如果用这三种食物作为每天的主要食物，那么它们的用量应各取多少才能全面准确地实现这个营养要求?

营养	每100克食物所含营养（g）			减肥所要求的每日营养量
	脱脂牛奶	大豆面粉	乳清	
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	74	45
脂肪	0	7	1.1	3

分析：以100克为一个单位，为了保证减肥所要求的每日营养量，设每日需食用的脱脂牛奶x_1个单位，大豆面粉x_2个单位，乳清x_3个单位，则由所给条件得

$$\begin{cases} 36x_1 + 51x_2 + 13x_3 = 33 \\ 52x_1 + 34x_2 + 74x_3 = 45 \\ 7x_2 + 1.1x_3 = 3 \end{cases}$$

```
A=[36 51 13; 52 34 74; 0 7 1.1];
b=[33;45;3];
x=A\b
```

```
x = 0.2772
    0.3919
    0.2332
```

即为了保证减肥所要求的每日营养量，每日需食用脱脂牛奶27.72克，大豆面粉39.19克，乳清23.32克。

问题2：小行星轨道

以太阳为坐标原点观察小行星，测得坐标数据

x	4.5596	5.0816	5.5546	5.9636	6.2756
y	0.8145	1.3685	1.9895	2.6925	3.5265

开普勒和行星运动定律

约翰·开普勒(1571年～1630)以数学的和谐性探索宇宙,继哥白尼之后第一个站出来捍卫太阳中心说。

第一定律：行星在通过太阳的平面内沿椭圆轨道运行,太阳位于椭圆的一个焦点上。

第二定律：在椭圆轨道上运行的行星速度不是常数，而是在相等时间内，行星与太阳的连线所扫过的面积相等。

椭圆二次曲线方程

$$a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + 2a_4x + 2a_5y + 1 = 0$$

$$a_1x_1^2 + 2a_2x_1y_1 + a_3y_1^2 + 2a_4x_1 + 2a_5y_1 = -1$$

$$a_1x_2^2 + 2a_2x_2y_2 + a_3y_2^2 + 2a_4x_2 + 2a_5y_2 = -1$$

$$a_1x_3^2 + 2a_2x_3y_3 + a_3y_3^2 + 2a_4x_3 + 2a_5y_3 = -1$$

$$a_1x_4^2 + 2a_2x_4y_4 + a_3y_4^2 + 2a_4x_4 + 2a_5y_4 = -1$$

$$a_1x_5^2 + 2a_2x_5y_5 + a_3y_5^2 + 2a_4x_5 + 2a_5y_5 = -1$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^2 & 2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_1^2 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{x}_2^2 & 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{y}_2^2 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{x}_3^2 & 2\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3 & \boldsymbol{y}_3^2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{y}_3 \\ \boldsymbol{x}_4^2 & 2\boldsymbol{x}_4\boldsymbol{y}_4 & \boldsymbol{y}_4^2 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{y}_4 \\ \boldsymbol{x}_5^2 & 2\boldsymbol{x}_5\boldsymbol{y}_5 & \boldsymbol{y}_5 & \boldsymbol{x}_5 & \boldsymbol{y}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \\ \boldsymbol{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

矩阵特征值问题

$\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵,若非零向量 α 和数 λ 使得

$$\boldsymbol{A}\alpha = \lambda\alpha,$$

则称 α 为特征向量, λ 为特征值。

lambda = eig(A) 计算A的特征值，这里lambda是A的全部特征值构成的列向量。

[P, D] = eig(A) 计算出A的全部特征值和对应的特征向量。其中D是对角矩阵，保存矩阵A的全部特征值; P的列向量构成对应于D的特征向量组。

例. 计算 A^n

定义

若$\boldsymbol{n}$阶矩阵$\boldsymbol{A}$与对角阵Λ相似，则称$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

如果矩阵可以相似对角化,则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\Lambda$$

这里，$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}})$.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\Lambda$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$$

则$\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n$为特征向量，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为特征值。

所以

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\Lambda^k\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} {\lambda_1}^{\boldsymbol{k}} & & & \\ & {\lambda_2}^{\boldsymbol{k}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & {\lambda_{\boldsymbol{n}}}^{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

```
[P,D] = eig(A);
Sol = P * diag(diag(D).^k))*inv(P)
% Sol = P*D^k*P^-1
% Sol = A^k
```

例. 简单迁移模型

每年A镇的人口10%迁往B镇，B镇的人口15%迁往A镇。假设某年A、B两镇人口各有120人和80人，问两年后两镇人口数量分布如何?

分析：设两镇总人口不变。设$x_1^{(k)}$ 表示 A 镇第 k 年人口数量; $x_2^{(k)}$ 表示 B 镇第 k 年人口数量，则由第 k 年到第 k+1 年两镇人口数量变化规律如下：

$$x_1^{(k+1)} = 0.9x_1^{(k)} + 0.15x_2^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.85x_2^{(k)}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^{(\boldsymbol{k}+1)} \\ \boldsymbol{x}_2^{(\boldsymbol{k}+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.15 \\ 0.1 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^{(\boldsymbol{k})} \\ \boldsymbol{x}_2^{(\boldsymbol{k})} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k}+1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}$$

$$\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(1)} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(0)}\right) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \end{bmatrix}$$

```
A = [0.9,0.15;0.1,0.85];
X0 = [120;80];
X2 = A^2*X0
```

$$\because \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1-\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} & 1-\boldsymbol{q} \end{bmatrix}, \therefore \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 1-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \\ \alpha_1 = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]^{\boldsymbol{T}}, \\ \alpha_2 = [-1, 1]^{\boldsymbol{T}}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{n})} &= \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X}^{(0)} \\ &= \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{c}_1 \alpha_1 + \boldsymbol{c}_2 \alpha_2) \\ &= \boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} \alpha_1 + \boldsymbol{c}_2 \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} \alpha_2 \\ &= \boldsymbol{c}_1 {\lambda_1}^{\boldsymbol{n}} \alpha_1 + \boldsymbol{c}_2 {\lambda_2}^{\boldsymbol{n}} \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\because \boldsymbol{x}_1^{(0)} : \boldsymbol{x}_2^{(0)} = \boldsymbol{q} : \boldsymbol{p}$$

$$\therefore \boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{c}_1 \alpha_1 = \boldsymbol{X}^{(0)}$$

练习：出租汽车问题

出租汽车公司在仅有A城和B城的海岛上,设了A,B两营业部。如果周一A城有120辆可出租汽车，而B城有150辆。统计数据表明，平均每天A城营业部汽车的10%被顾客租用开到B城 ,B城营业部汽车的12%被开到了A城。假设所有汽车正常，试计算一周后两城的汽车数量。寻找方案使每天汽车正常流动而A城和B城的汽车数量不增不减。

分析：设第n天A城营业部汽车数为$x_1^{(n)}$，B城营业部汽车数为$x_2^{(n)}$。 则有

$$\begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

两营业部汽车总数量为：270

矩阵 $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{bmatrix}$$

特征值 $$\lambda_1 = 1$$

特征向量 $$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 270$$

$$\boldsymbol{x}_1 : \boldsymbol{x}_2 = 1.2 : 1$$

近似解 $$\boldsymbol{x}_1 = 147$$ $$\boldsymbol{x}_2 = 123$$

超定方程组的最小二乘解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

当方程数超过未知数个数时，称为超定方程组。

超定方程组最小二乘解是使残差平方和最小的解

$$S(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{m}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2$$

MATLAB求解超定方程组方法和求解一般线性方程组方法相同：**X = A\b**

例 **求超定方程组最小二乘解**

$$\begin{cases} 2x + 4y = 11 \\ 3x - 5y = 3 \\ x + 2y = 6 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

```
A = [2,4;3,-5;1,2;4,2];
b = [11;3;6;14];
X = A\b
R = b-A*X;
S = R'*R
```

```
X = 2.9774
    1.2259
S = 0.5154
```