第七讲　数值计算方法

- 数值积分
- 非线性方程(组)求根
- 离散数据的多项式拟合
- 微分方程数值解

一、数值积分

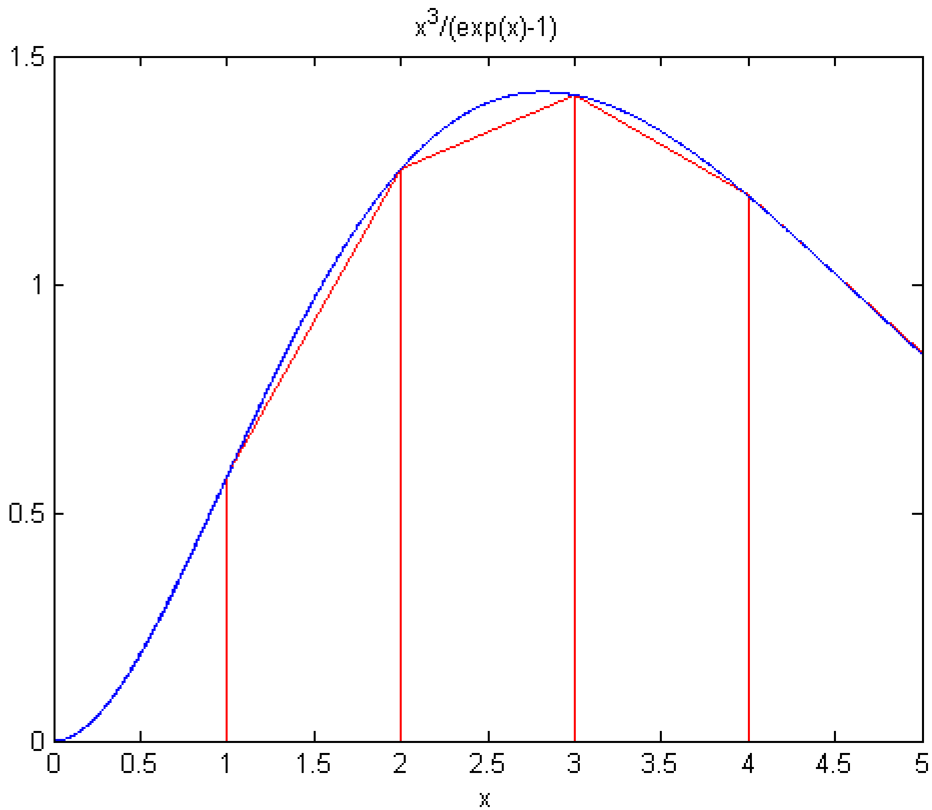
例1 计算 $$\int_0^5 \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx$$

```
syms x
f = x^3/(exp(x)-1);
s = int(f, x, 0, 5)
```

数值积分MATLAB计算命令

quad(f, a, b)

注意：f 不是符号表达式，而是字符串表达式，且其中运算为点运算。



例1 计算 $\int_0^5 \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx$

```
f = 'x.^3./(exp(x)-1)';
s = quad(f, eps, 5)

% or
f = @(x)(x.^3./(exp(x)-1));
s = quad(f, eps, 5)
```

二、非线性方程(组)求根

（1）求一元非线性方程零根

$$f(x) = 0$$

命令：x = fzero(fun, x0) 或 x = fzero(fun, [x1, x2])

这里fun是目标函数，[x1，x2]是零根搜索区间，且 $f(x1)f(x2)<0$，x是一个零根。

例2 求函数x^2-4sinx=0的零点

```
x1 = fzero('x^2-4*sin(x)', 0.2)
x2 = fzero('x^2-4*sin(x)', 2)
```

（2）求多元非线性方程组零根

$$F(X)=\{f_1(X),\cdots,f_n(X)\}=0$$

命令： **[X, Fval] = fsolve(fun, X0)**

例3 求 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - e^{-x_1} = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - e^{-x_2} = 0 \end{cases}$ **的零点**

X0 = [-5; -5];

[X, Fval] = fsolve('myfun', X0)

% [X, Fval] = fsolve(@myfun, X0)

```
function F = myfun(X)
F = [2*X(1) - X(2) - exp(-X(1)); ...
     -X(1) + 2*X(2) - exp(-X(2))];
```

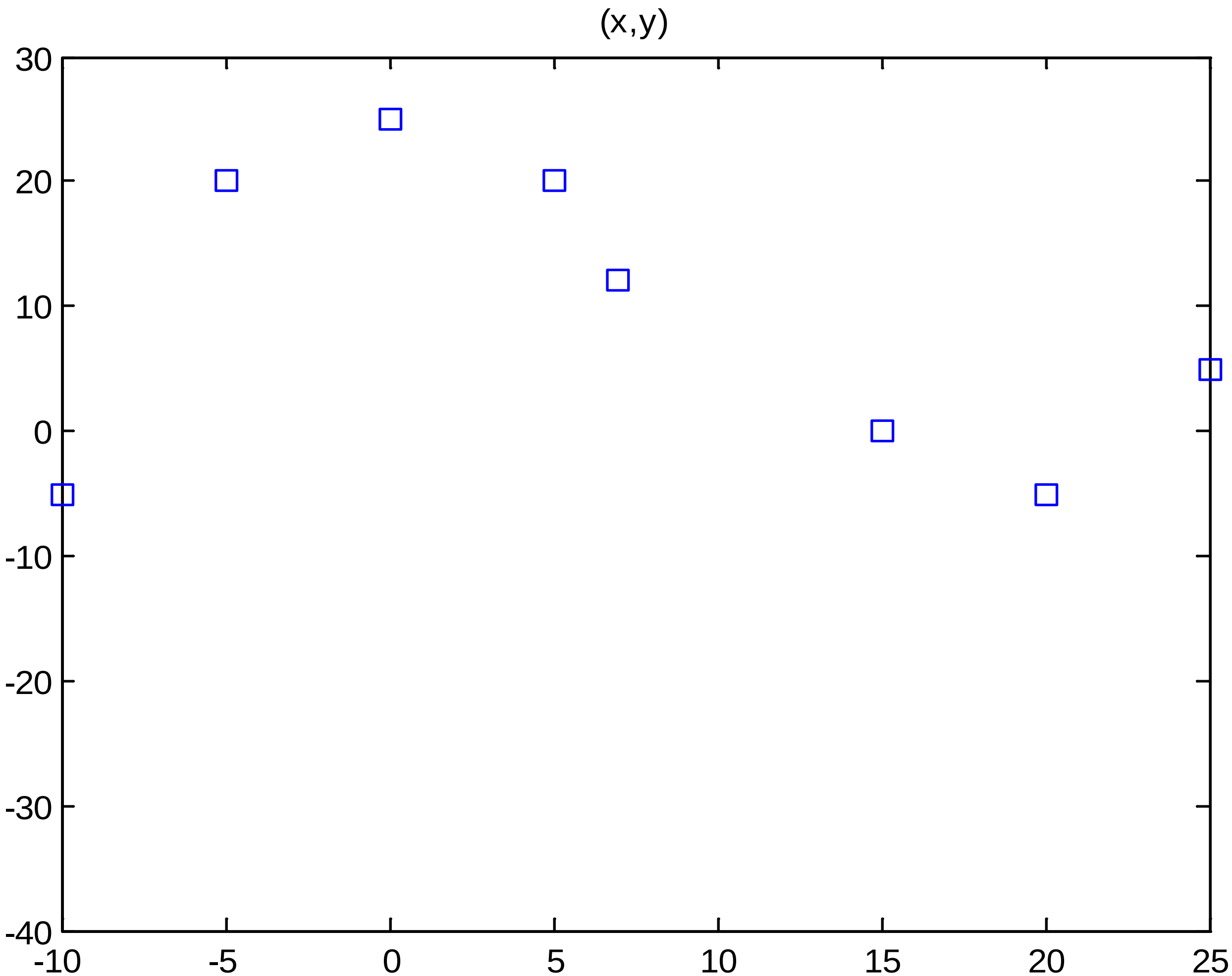
三、离散数据的多项式曲线拟合方法

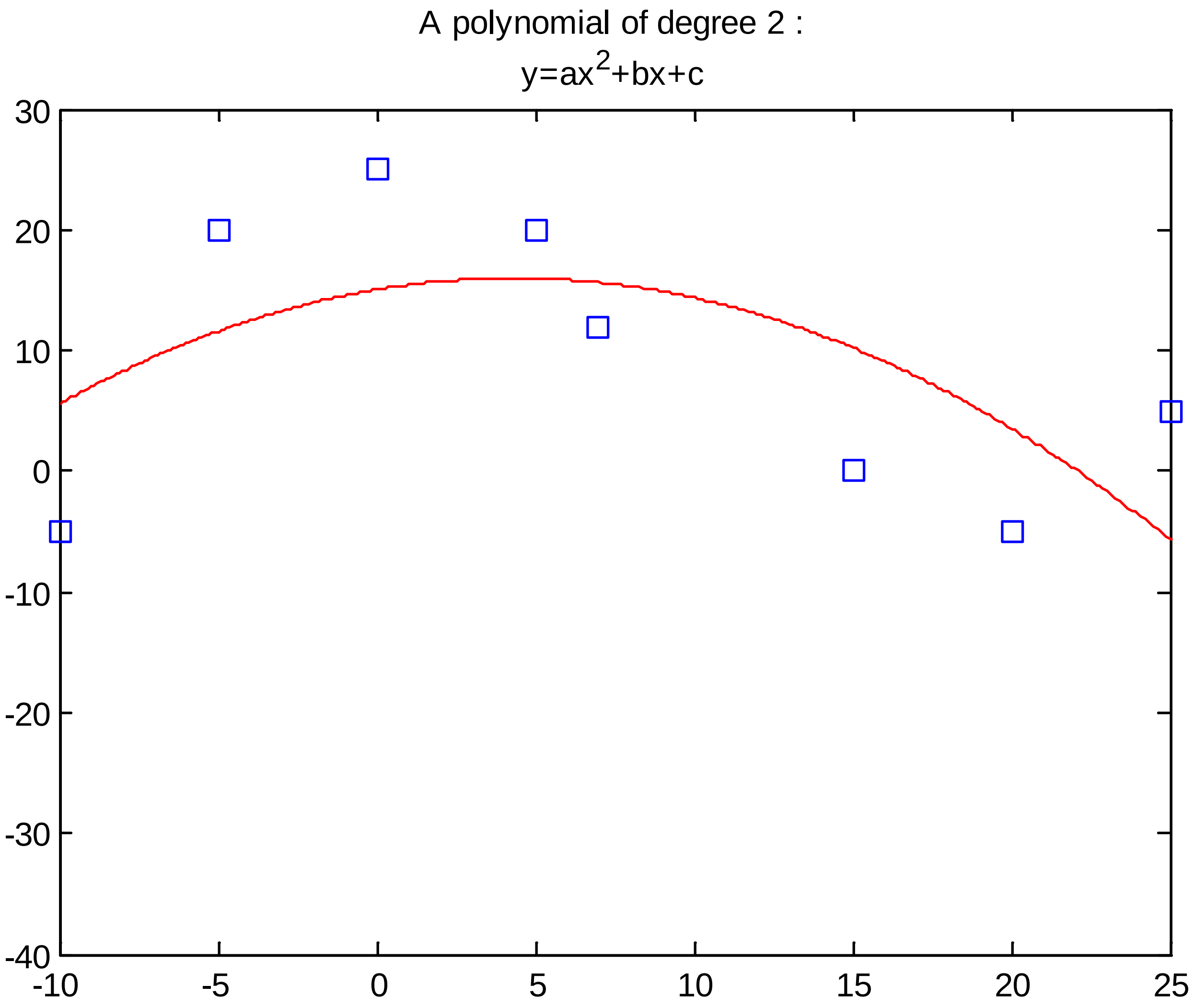
x	x_1	x_2	……	x_m
$f(x)$	y_1	y_2	……	y_m

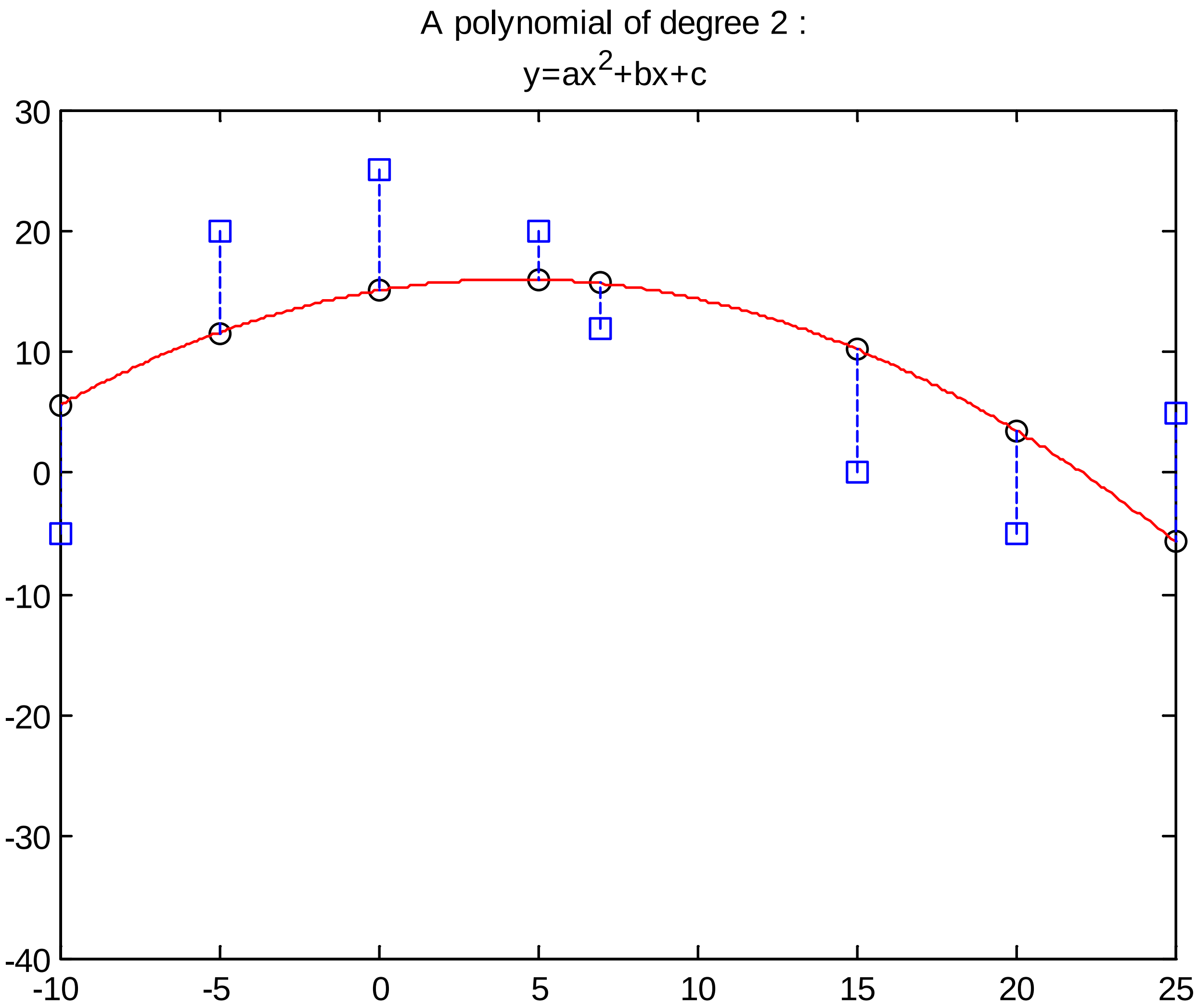
求一个n 次多项式 ($n < m$)

$$P(x) = a_1x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n x + a_{n+1}，$$

使得这条曲线尽可能多的穿过所有的点。


(x,y)
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25


A polynomial of degree 2 :
y=ax2+bx+c
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25


A polynomial of degree 2 :
y=ax2+bx+c
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25

求 n 次多项式 ($n < m$)

$$P(x) = a_1x^n + a_2\, x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n\, x + a_{n+1}$$

使得

$$\min \sum_{j=1}^{m} [y_j - P(x_j)]^2$$

MATLAB求解多项式拟合方法如下：

$$P = \text{polyfit}(x，y，n)$$

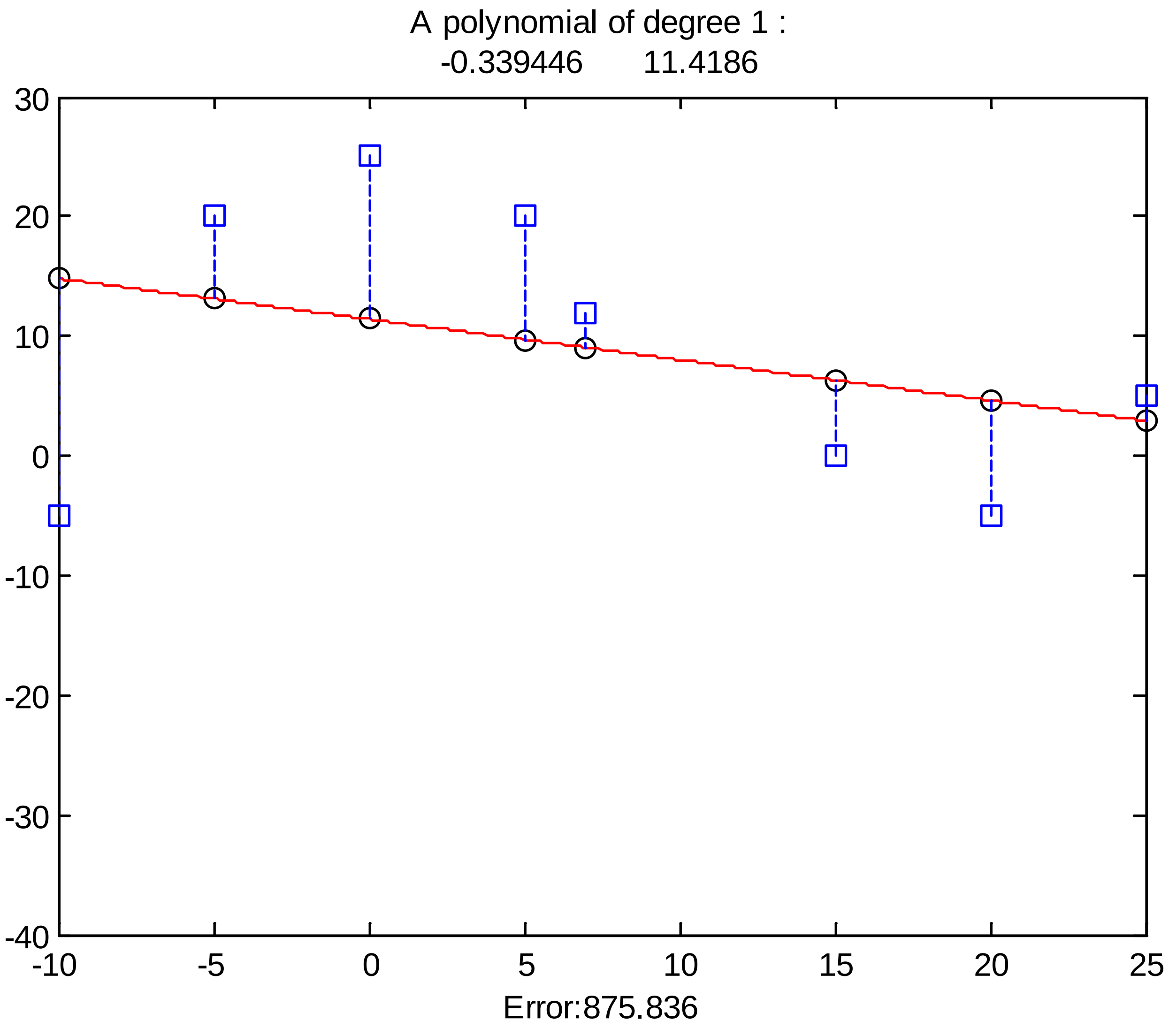
输出变量P是一个具有$(n+1)$ 个数的一维数组，表示拟合出的n次多项式$P(x)$的系数（多项式降幂排列）。

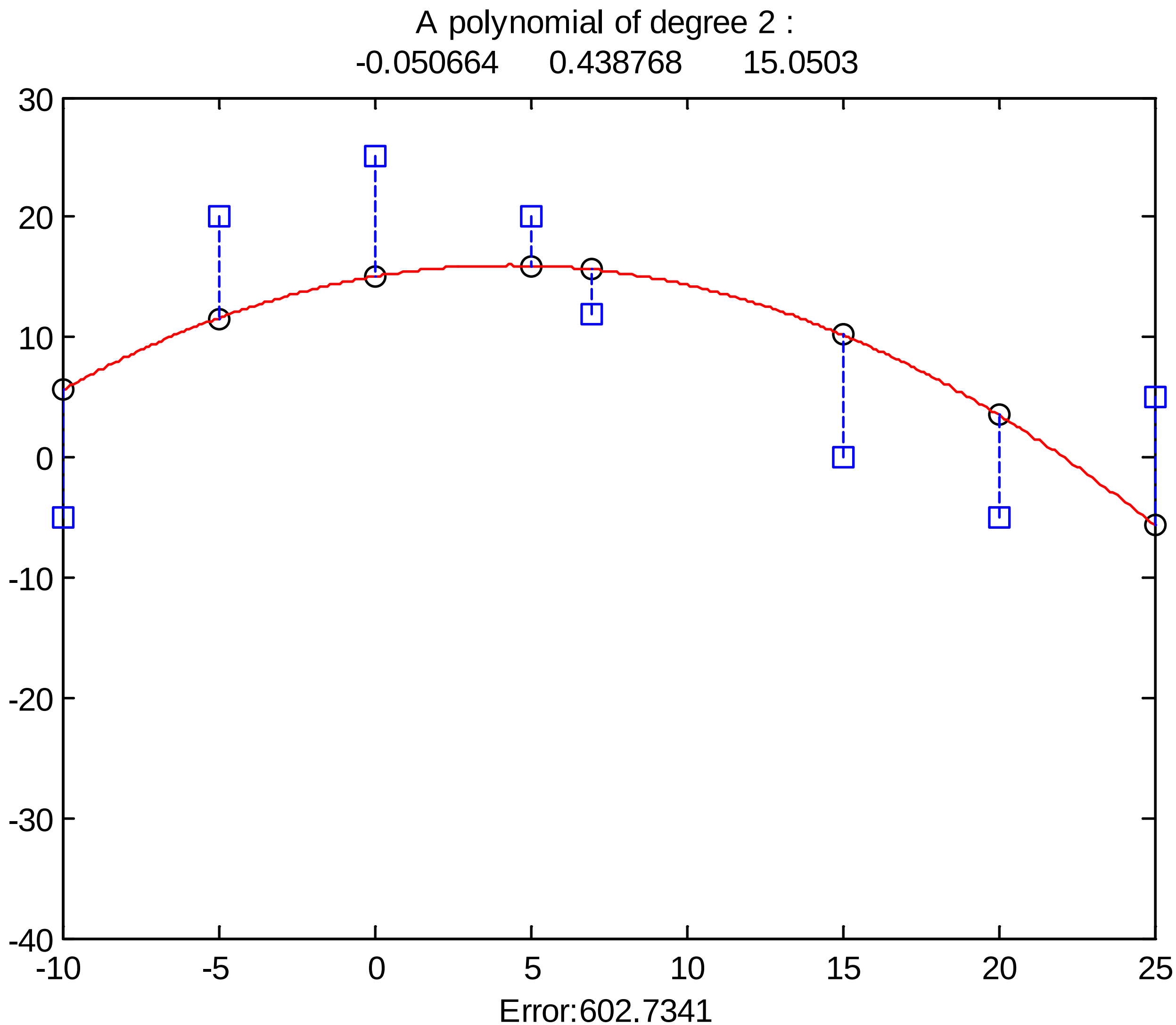
多项式求值

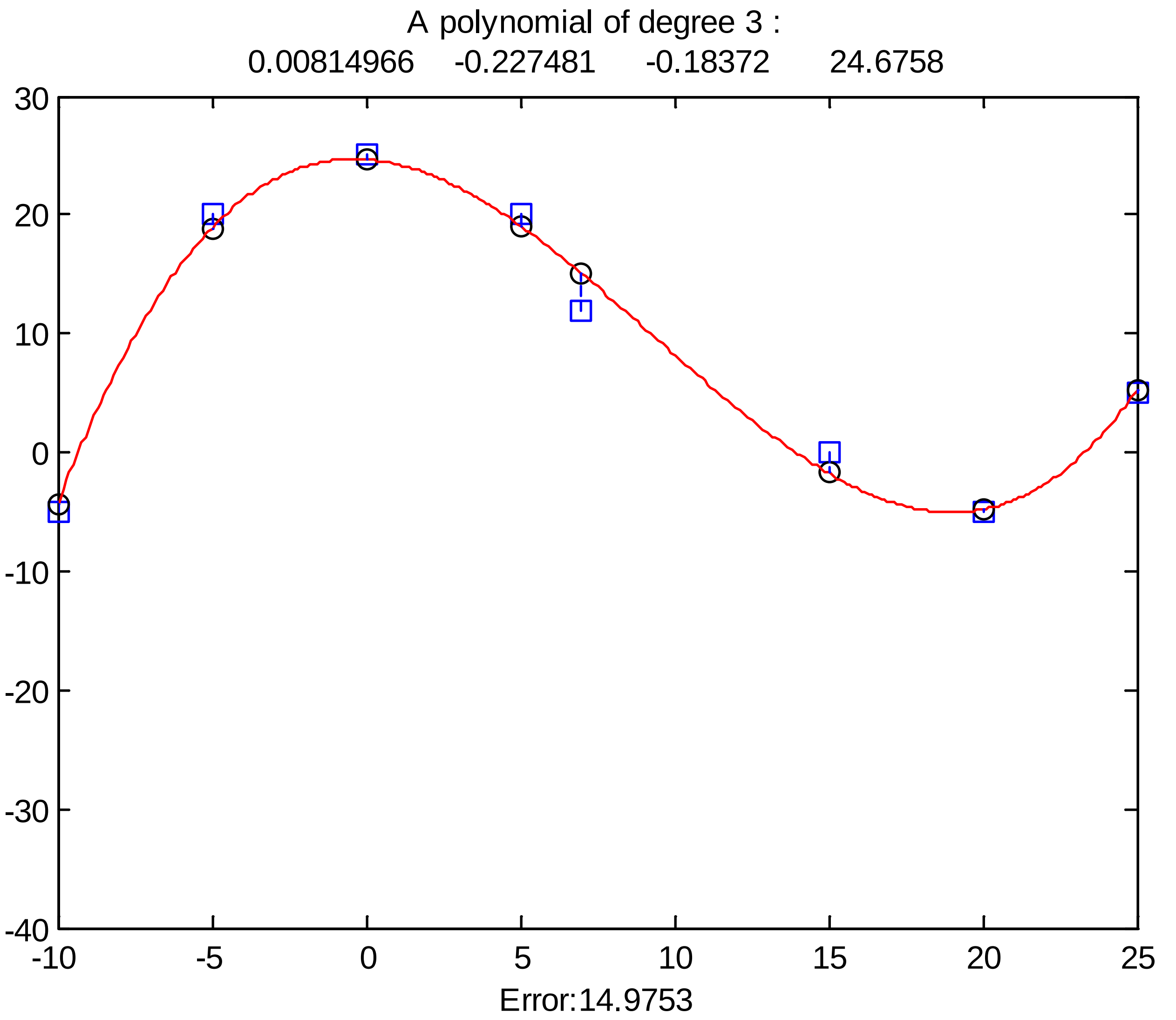
$$v = \text{polyval}(P，x)$$

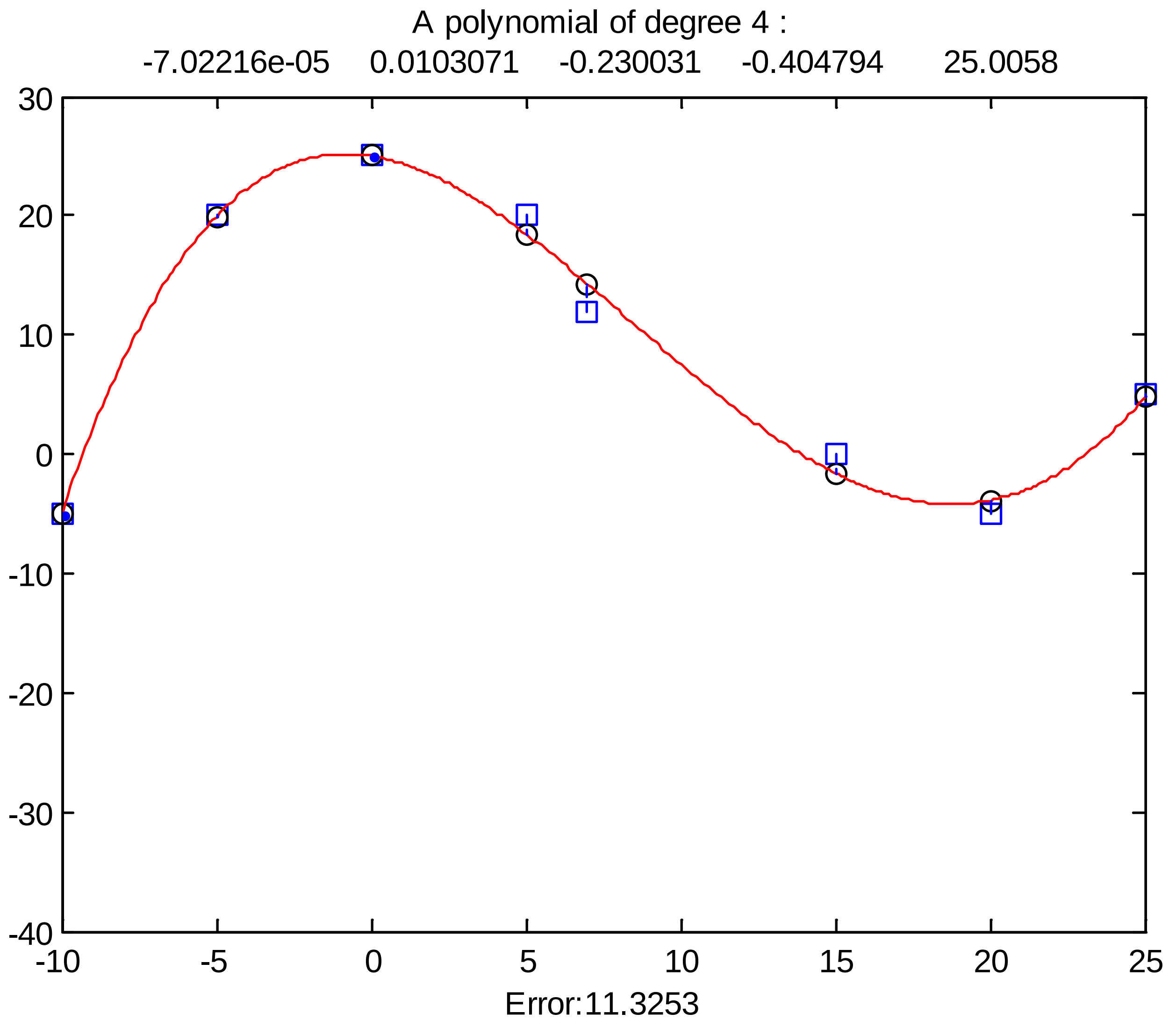
输入变量P是一个具有$(n+1)$ 个数的一维数组，表示一个n次多项式$P(x)$ 。

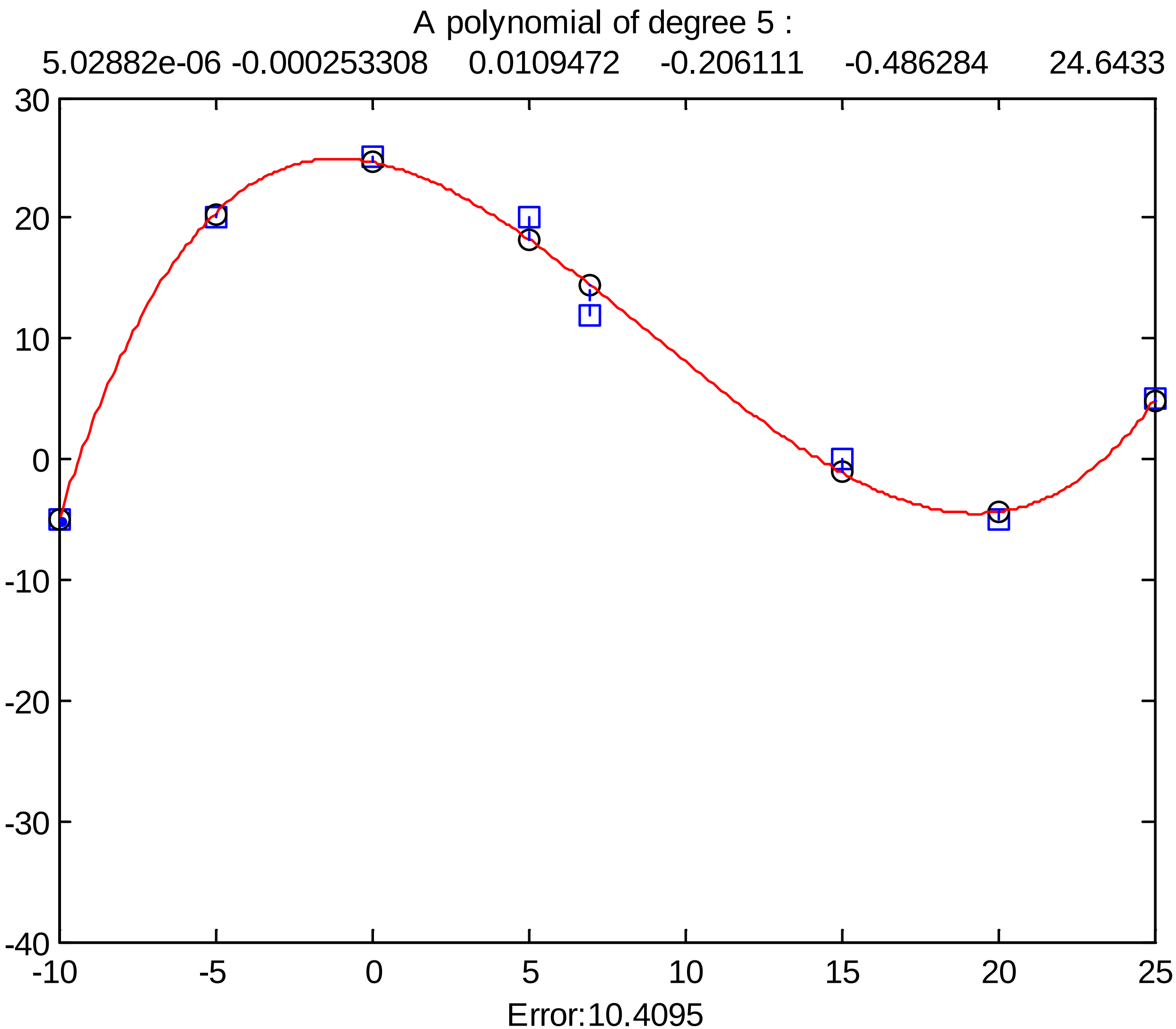
这里x可以是向量，v是多项式在x的每一个分量处的函数值所组成的向量.

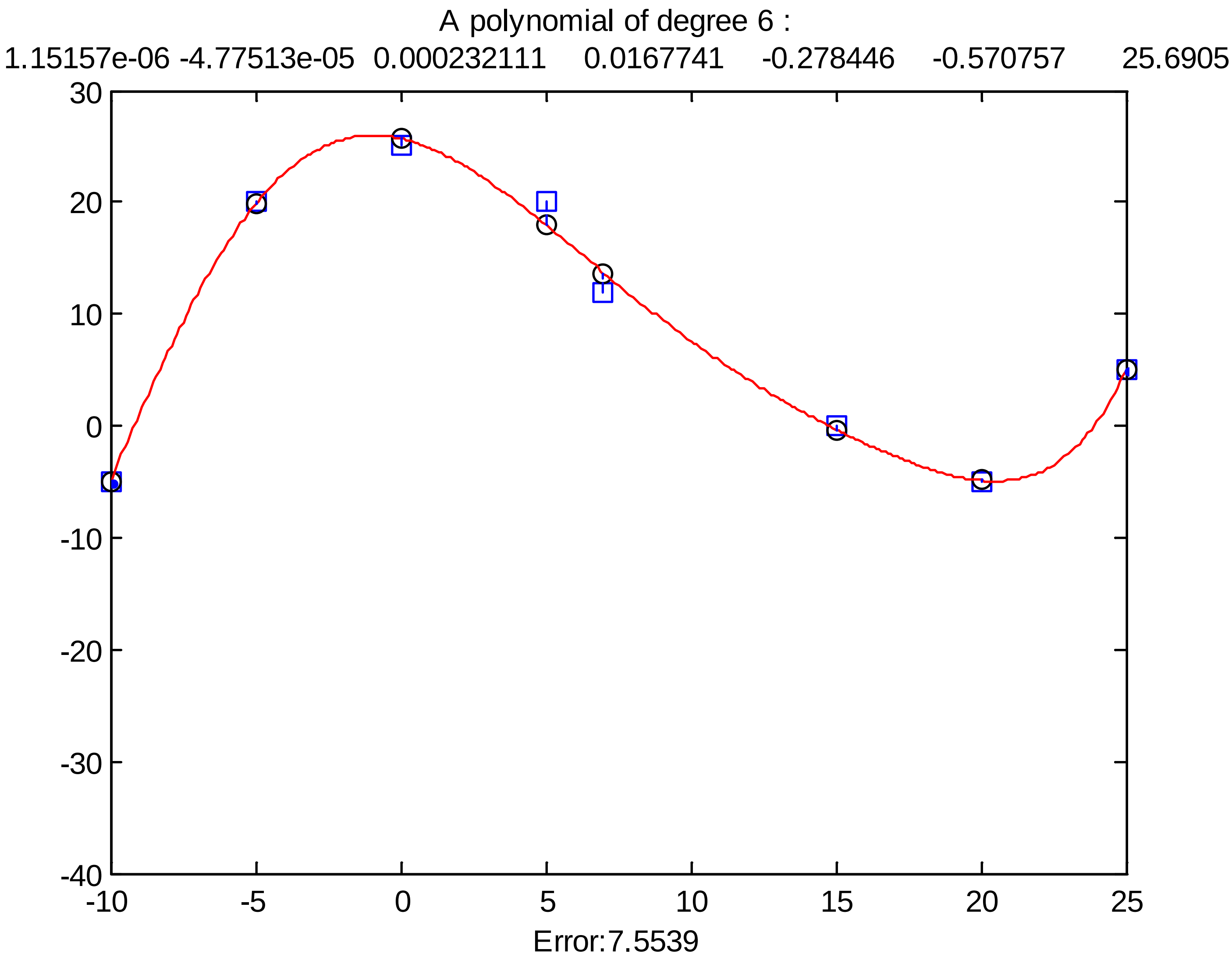

A polynomial of degree 1 :
-0.339446 11.4186
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:875.836

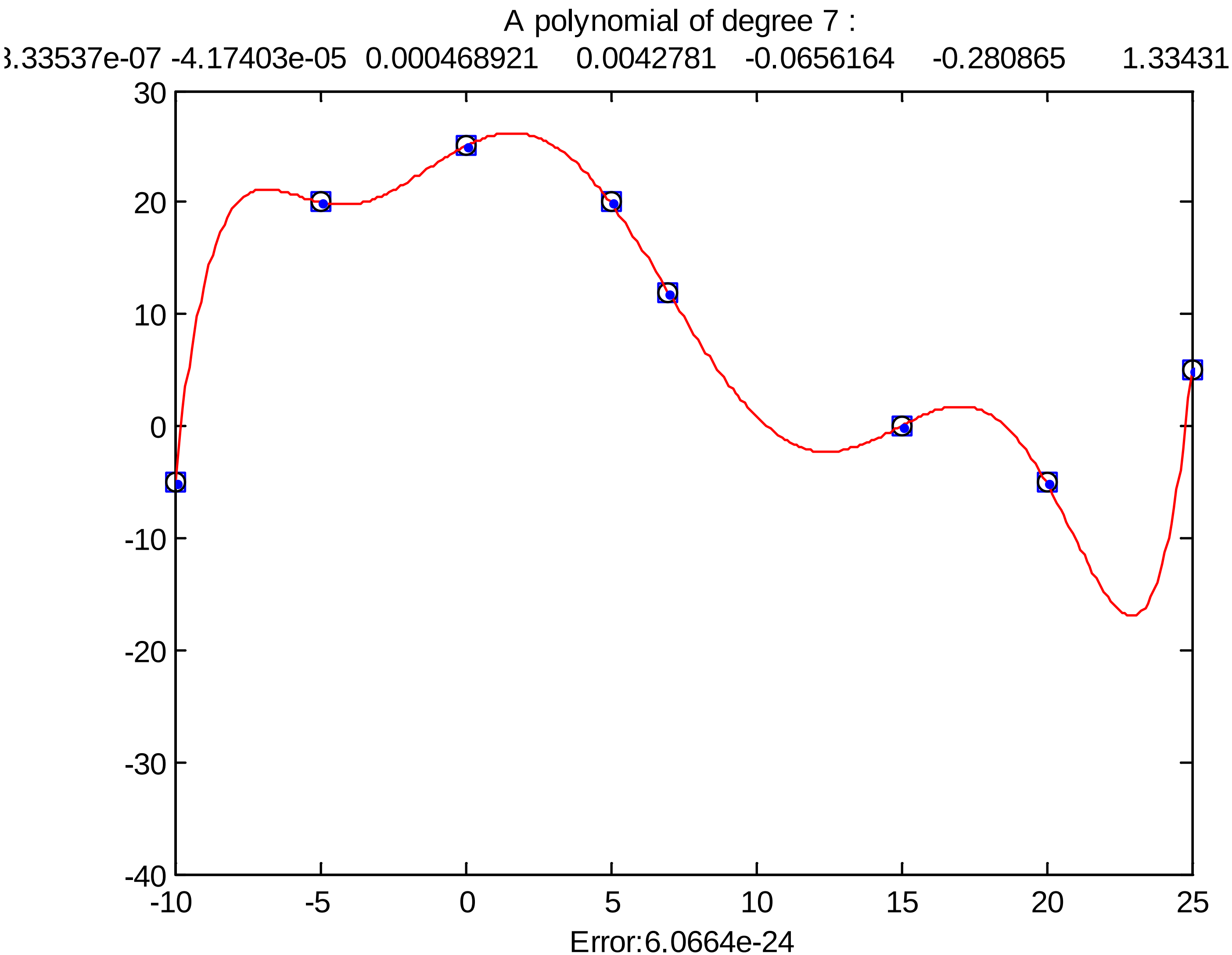

A polynomial of degree 2 :
-0.050664 0.438768 15.0503
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:602.7341

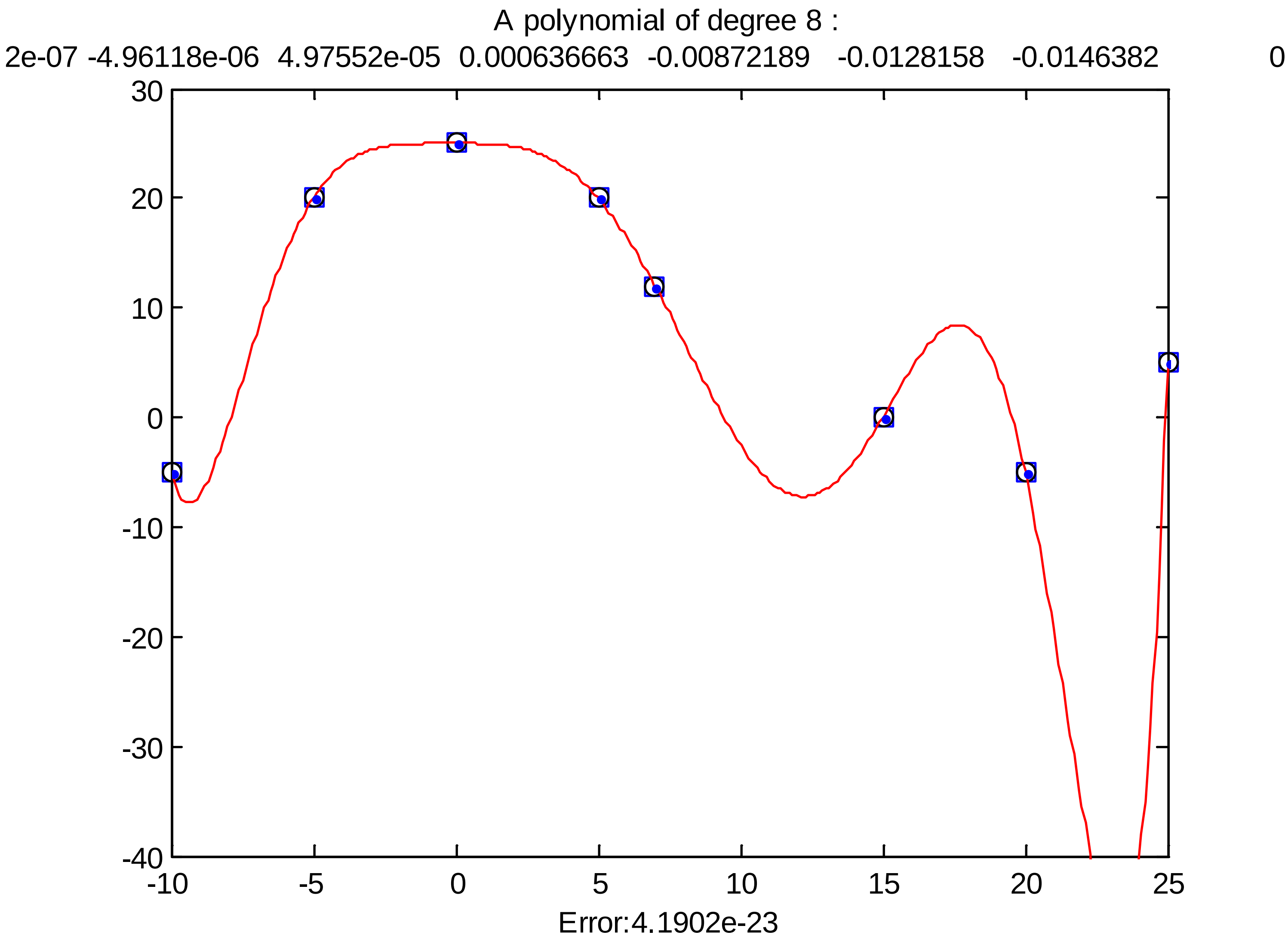

A polynomial of degree 3 :
0.00814966 -0.227481 -0.18372 24.6758
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:14.9753

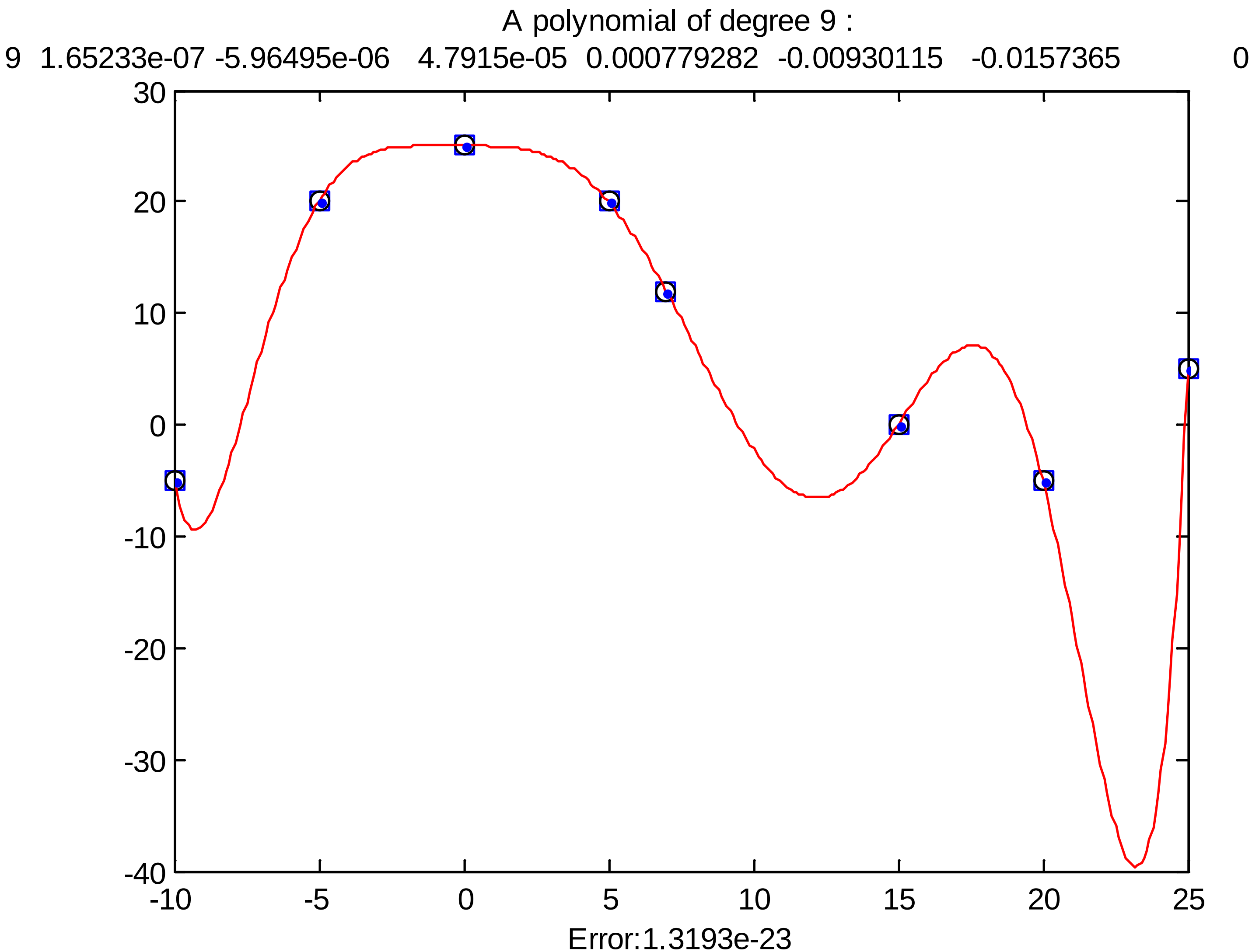

A polynomial of degree 4 :
-7.02216e-05 0.0103071 -0.230031 -0.404794 25.0058
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:11.3253

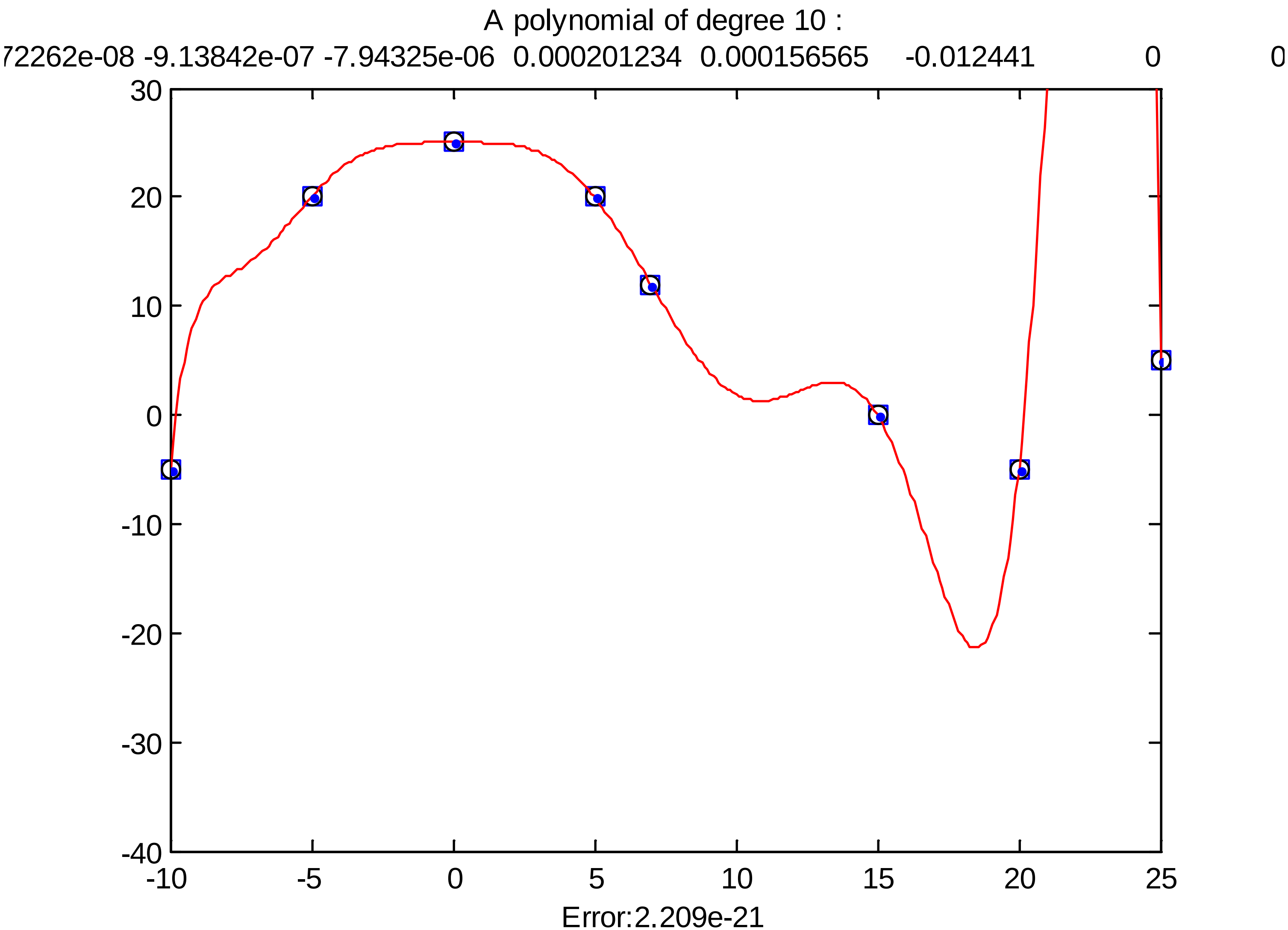

A polynomial of degree 5 :
5.02882e-06 -0.000253308 0.0109472 -0.206111 -0.486284 24.6433
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:10.4095


A polynomial of degree 6 :
1.15157e-06 -4.77513e-05 0.000232111 0.0167741 -0.278446 -0.570757 25.6905
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:7.5539


A polynomial of degree 7 :
3.33537e-07 -4.17403e-05 0.000468921 0.0042781 -0.0656164 -0.280865 1.33431
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:6.0664e-24


A polynomial of degree 8 :
2e-07 -4.96118e-06 4.97552e-05 0.000636663 -0.00872189 -0.0128158 -0.0146382 0
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:4.1902e-23

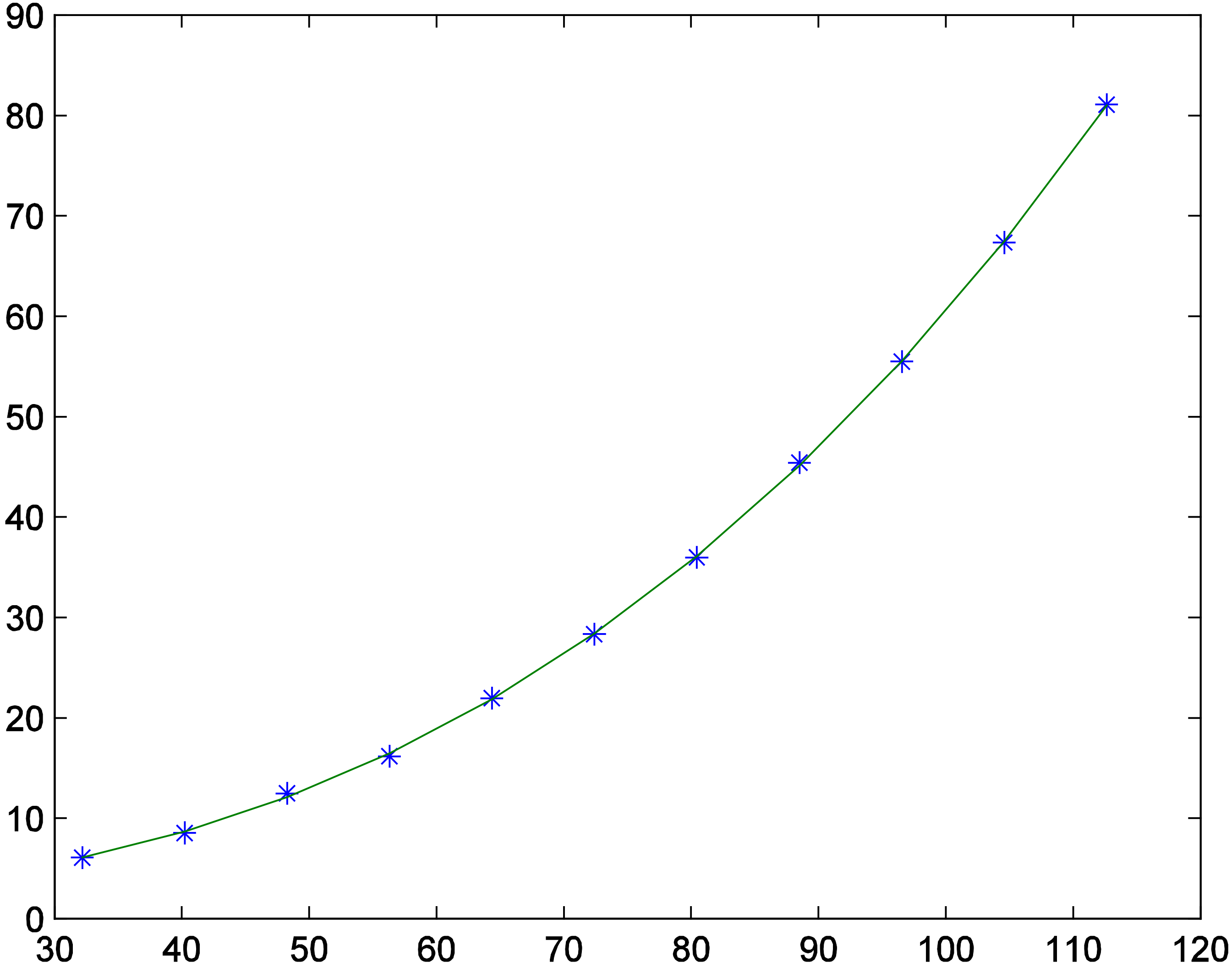

A polynomial of degree 9 :
9 1.65233e-07 -5.96495e-06 4.7915e-05 0.000779282 -0.00930115 -0.0157365 0
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:1.3193e-23


A polynomial of degree 10 :
72262e-08 -9.13842e-07 -7.94325e-06 0.000201234 0.000156565 -0.012441 0 0
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:2.209e-21

例4. 汽车紧急刹车问题数据拟合实验

V	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
T	20	28	41	53	72	93	118	149	182	221	266

V表示刹车时汽车行驶速度(英里/小时), T表示刹车后汽车滑行距离(英尺)



90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120

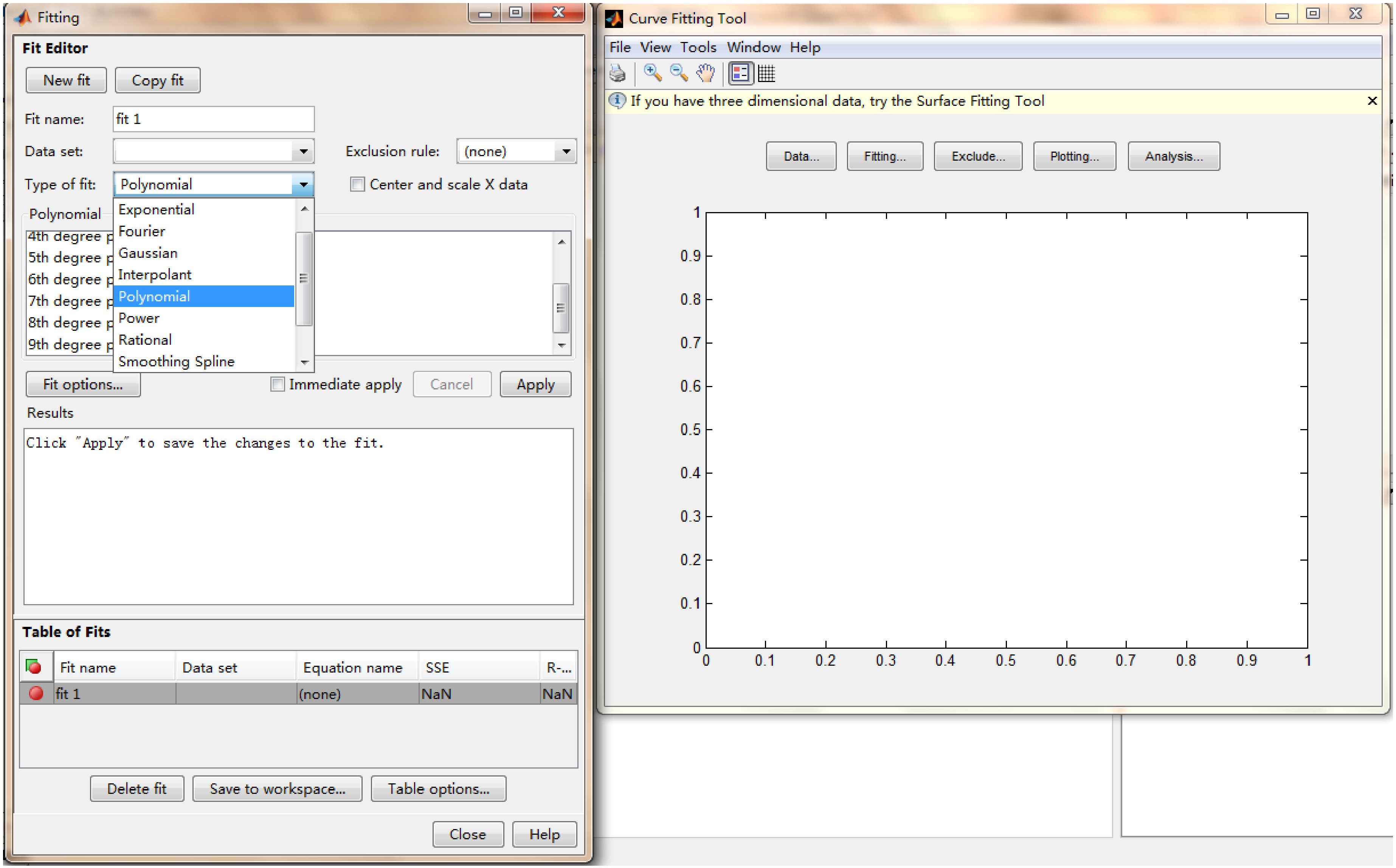
```
v=[20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70]*1.609;
T=[20 28 41 53 72 93 118 149 182 221 266]*.3048;
P2=polyfit(v,T,2);
T2=polyval(P2,v);
R2=sum((T-T2).^2)
plot(v,T,'*',v,T2)
```

R2 = 1.9634

```
P3=polyfit(v,T,3);
T3=polyval(P3,v);
R3=sum((T-T3).^2)
```

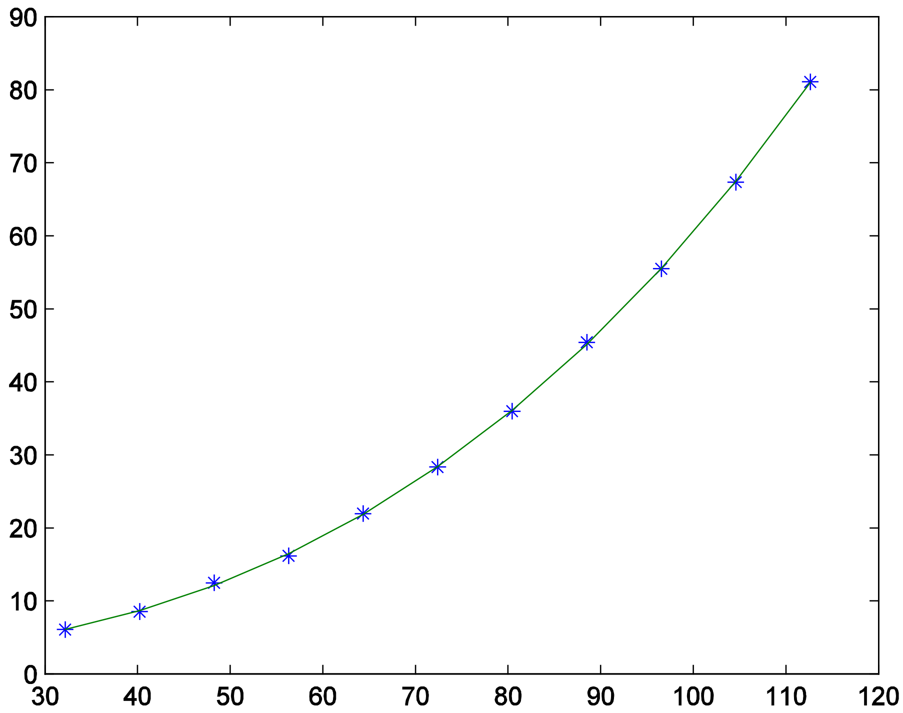
R3 = 0.4080

曲线拟合工具箱　cftool



四、常微分方程数值解

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$



四、常微分方程数值解

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

命令：

[T,Y] = ode23('F',Tspan,y0)

这里，Tspan = [$t_{0,}$ t_N]是常微分方程求解区域，y0是初始值，‘F’ 是包括函数文件名字的符串。

[T,Y]是求解区域内离散数据以及对应的数值解。

步骤：

(1)用函数文件定义一阶微分方程（或方程组）右端函数；

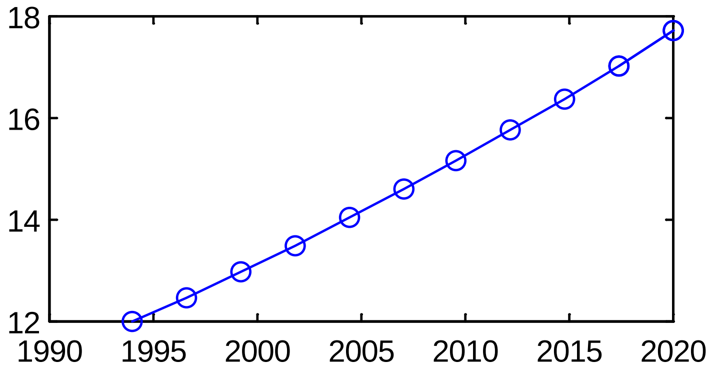
(2)用MATLAB命令ode23()求数值解或绘积分曲线。

例5 马尔萨斯模型 以1994 年我国人口为12亿为初值，求解常微分方程。

分析：$N(t)$表示人口数量, 取人口变化率r=0.015, 微分方程

$$\frac{dN}{dt} = 0.015N$$

$$N(1994) = 12$$




```
ode23('fun', [1994, 2020], 12)
[T, N]=ode23('fun', [1994, 2020], 12)
```

```
function z = fun(t, N)
z = 0.015*N;
```

例6 捕食者与被捕食者问题

海岛上有狐狸和野兔, 当野兔数量增多时，狐狸捕食野兔导致狐群数量增长;大量兔子被捕食使狐群进入饥饿状态其数量下降;狐群数量下降导致兔子被捕食机会减少, 兔群数量回升。微分方程模型如下

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 0.015xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + 0.01xy \end{cases}, \quad \begin{array}{l} x(0) = 100 \\ y(0) = 20 \end{array}$$

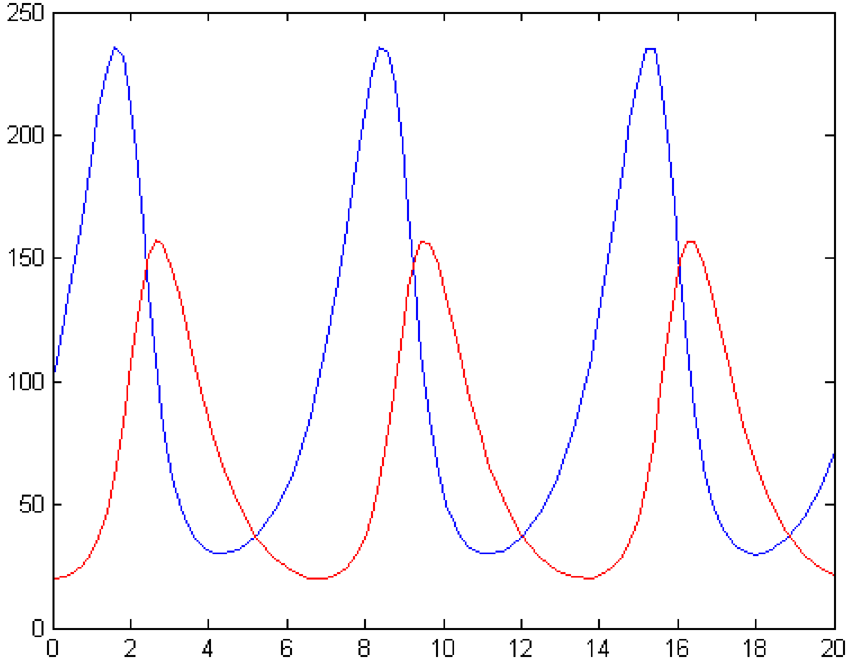
计算 $x(t)$，$y(t)$ 当$t\in[0，20]$时的数据。绘图并分析捕食者和被捕食者的数量变化规律。

% 创建MATLAB的函数文件

```
function z = fox(t, X)
z = [X(1)-0.015*X(1)*X(2);…
     -X(2)+0.01*X(1)*X(2)];
```

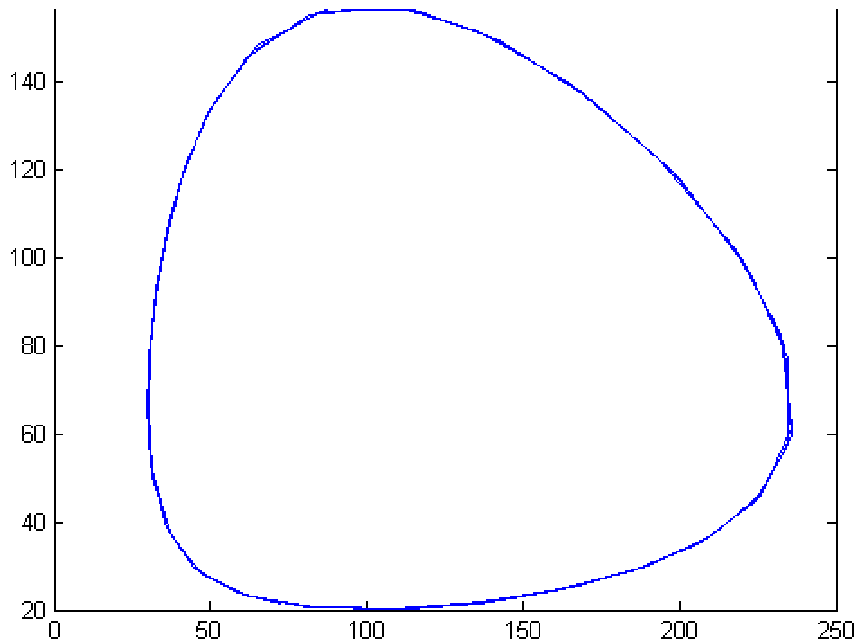
% 求微分方程数值解并绘解函数图形

```
Y0 = [100,20];
[t,Y] = ode23('fox',[0,20],Y0);
x = Y(:,1); y = Y(:,2);
figure(1)
plot(t,x,'b',t,y,'r')
figure(2)
plot(x,y)
```



兔子数量

狐狸数量



兔、狐数量

变化相位图