数值计算方法

二分法、牛顿法

张晓伟
http://staff.uestc.edu.cn/zhangxiaowei

电子科技大学 数学科学学院

May 18, 2015

非线性方程数值方法

方程

$$f(x) = 0,$$

如果$f(x)$是非线性函数，则称为非线性方程，其中$f(x)$是关于x的一元函数。

非线性方程的求解问题是科学与工程计算中常见的问题之一。但对高于4次的代数方程，不存在通用的求根公式，而对超越方程一般很难直接求出其准确解。

所以，数值方法就是非常实用和有效的方法。其中，迭代技术是一种常用技术。其思想是对根的逐次逼近。

二分法

二分法本质上是一种区间迭代算法，在迭代过程中不断对隔根区间进行压缩，以区间中点逼近方程的根。它所涉及的理论是连续函数介值定理：

定理 1.1

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则$f(x)=0$在区间(a,b)内至少有一个根。

算法

步骤 1 求区间$[a,b]$的中点：

$$x_0 = a + (b-a)/2 = (a+b)/2.$$

步骤 2 计算$f(x_0)$，

if $|f(x_0)| < \varepsilon$ **then**

　　x_0是方程的零根，停机。

end if

步骤 3

if $f(x_0)f(a) < 0$ **then**

　　$b = x_0;$

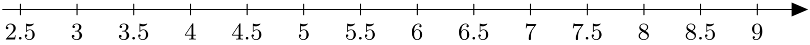
else $f(x_0)f(b) < 0$

　　$a = x_0;$

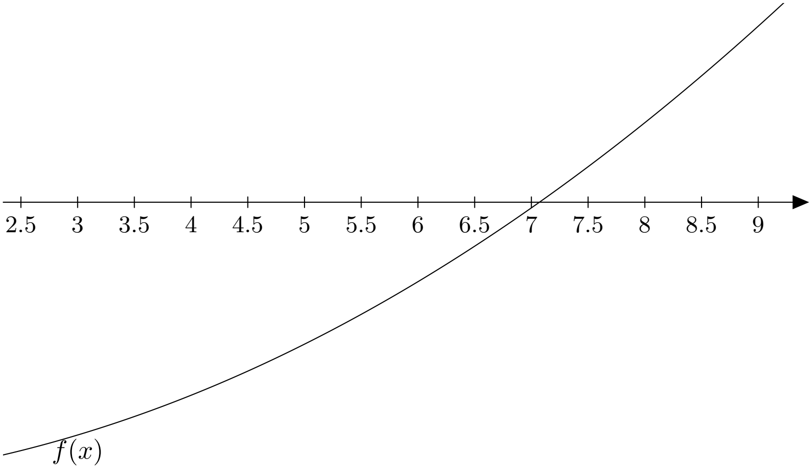
end if

转步骤 1。

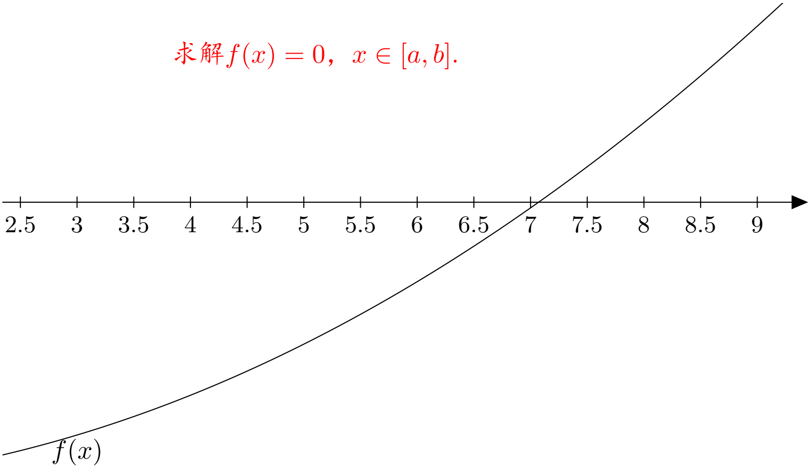
二分法图例



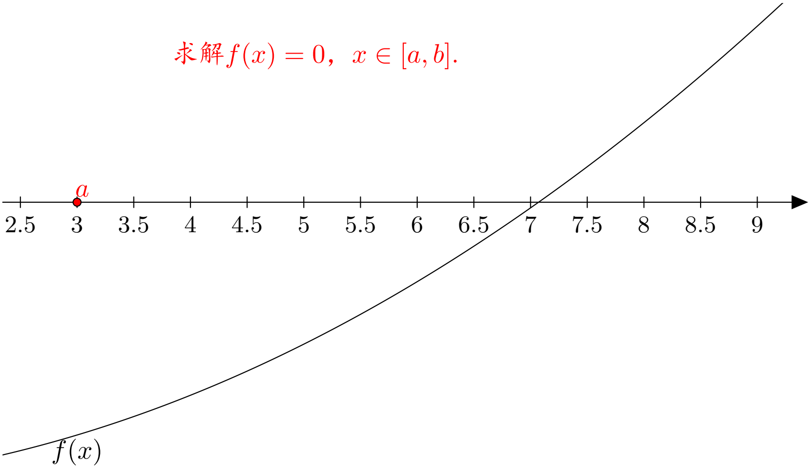
二分法图例



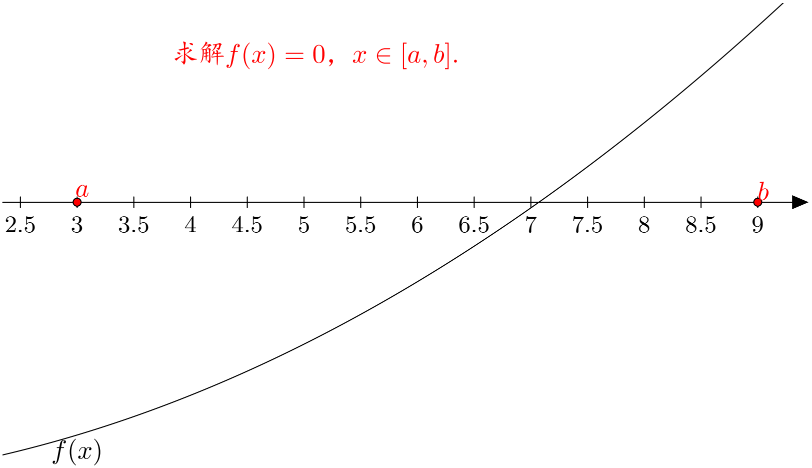
二分法图例



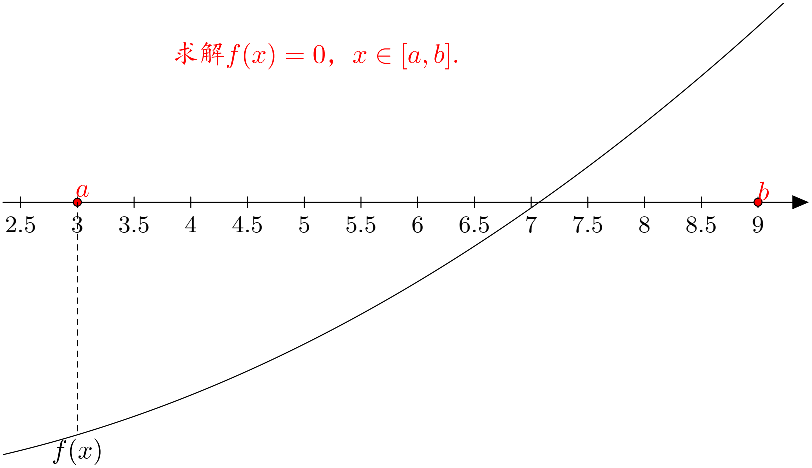
二分法图例



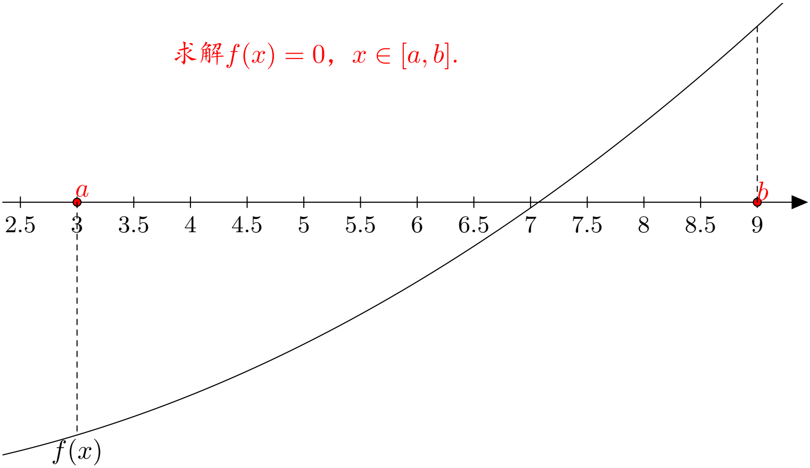
二分法图例



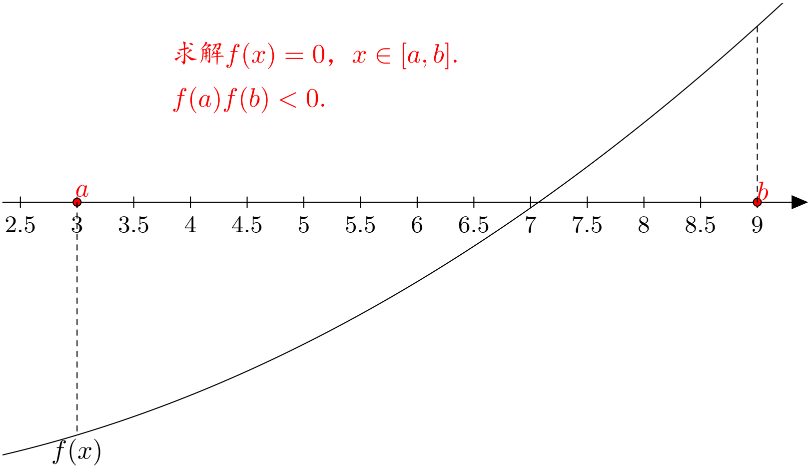
二分法图例



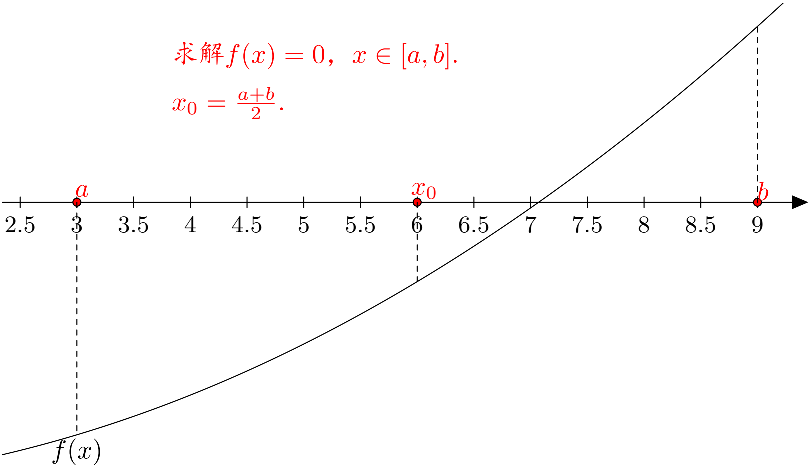
二分法图例



二分法图例



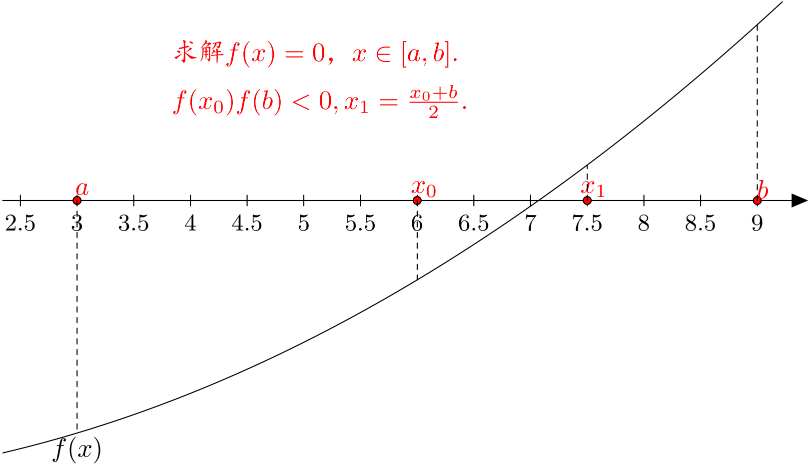
二分法图例



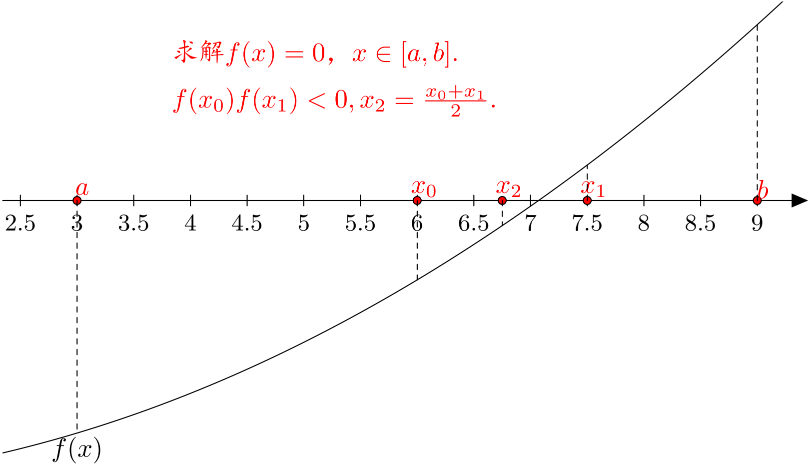
二分法图例

求解$f(x)=0$，$x\in[a,b]$.

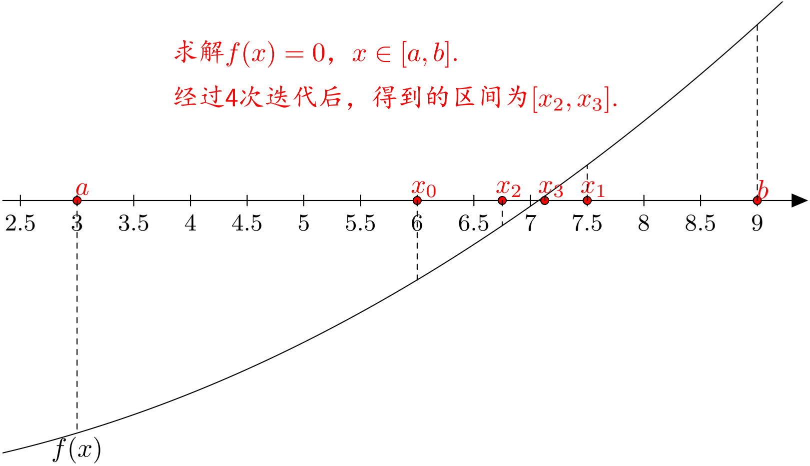
$f(x_0)f(b)<0, x_1=\frac{x_0+b}{2}$.



二分法图例


求解$f(x)=0$，$x\in[a,b]$.
$f(x_0)f(x_1)<0, x_2=\frac{x_0+x_1}{2}$.
a
x_0
x_2
x_1
b
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
$f(x)$

二分法图例


求解$f(x)=0$，$x\in[a,b]$.
经过4次迭代后，得到的区间为$[x_2,x_3]$.
a
x_0
x_2
x_3
x_1
b
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
$f(x)$

```
function [x,fval]=zhbm(f,a,b,opt)
% [x,fval]=zhbm(f,a,b,opt)
% 二分法求解函数f(x)在[a,b]中的零根,这里a < b。
% f为字符串表达式。
% opt为控制精度，默认值为1E-6。
% x为x*的近似，fval为f(x)。
% zhangxiaowei@uestc.edu.cn
clc
if nargin == 3
    opt = 1E-6;
end
if a >= b
    error('注意: a < b，查看说明文件 help zhbm.');
end

f = inline(f)
Fa = f(a);
Fb = f(b);

if Fa == 0
    x = a;
    fval = Fa;
elseif Fb == 0
    x = b;
    fval = Fb;
```

```
elseif Fa*Fb > 0
    disp('注意: f(a)*f(b) < 0,查看说明文件 help zhbm.')
else
    i = 0;
    fprintf('第%d次迭代: [%.6f, %.6f]\n',i,a,b)
    x0 = (a+b)/2;
    F0 = f(x0);
    while abs(F0) >= opt
        if Fa*F0 < 0
            b = x0;
%           Fb = F0;
        else
            a = x0;
            Fa = F0;
        end
        x0 = (a+b)/2;
        F0 = f(x0);
        i = i+1;
        fprintf('第%d次迭代: [%.6f, %.6f]\n',i,a,b)
    end
    x = x0;
    fval = F0;
end
```

牛顿法

算法思想: 将方程$f(x)=0$中函数$f(x)$在零根的附近线性化，以线性方程的解逼近非线性方程的解.

理论依据: 设函数$f(x)$在有根区间$[a,b]$二次连续可微，x_0是根x^*的一个近似解，则$f(x)$ 在x_0 处的泰勒展开式为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2. \tag{2.1}$$

于是，$f(x)$可近似为：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.2}$$

若$f'(x_0) \neq 0$，则

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2.3}$$

比x_0更靠近x^*.

一般地，在x_n附近的线性化方程为

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n). \tag{2.4}$$

设$f'(x_n) \neq 0$, 其解为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.5}$$

这就是**牛顿迭代公式**。

选一个初始点x_0，由迭代公式便可得到迭代序列

$$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$$

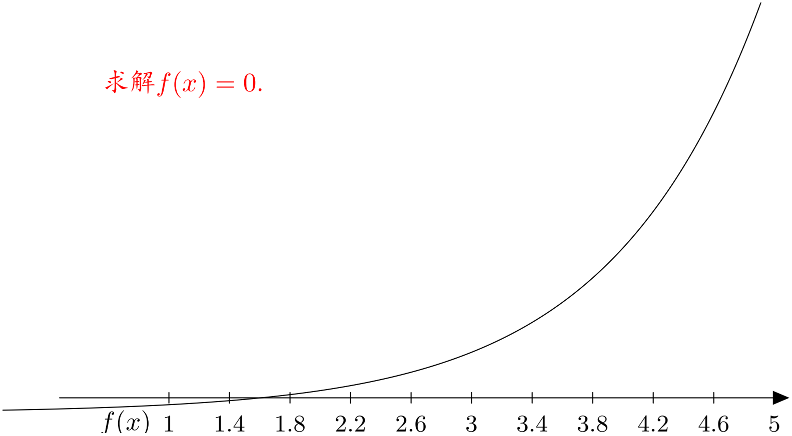
算法

步骤 1 给定初始迭代点x_0，精度$\varepsilon_1, \varepsilon_2$，令$n = 0$.

步骤 2 计算$f'(x_n)$，
if $|f'(x_n)| < \varepsilon_1$ **then**
  算法失败，停机。
else
  计算$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
end if

步骤 3
if $|f(x_{n+1})| < \varepsilon_2$ **then**
  输出x_{n+1}，停机。
else
  $n = n + 1$，转步骤 2。
end if

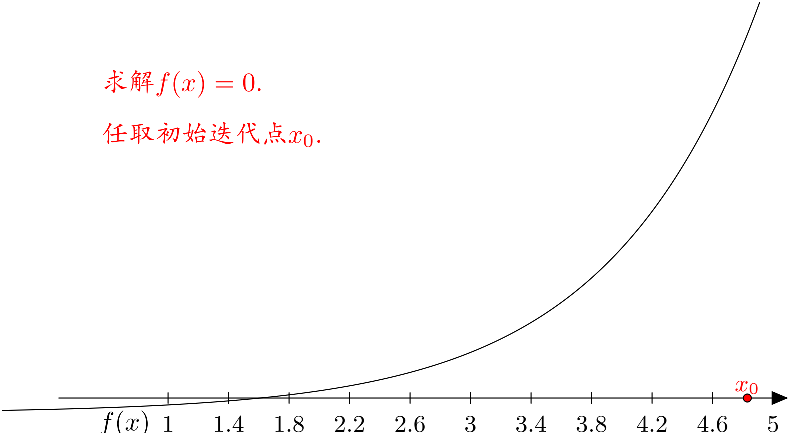
牛顿法图例



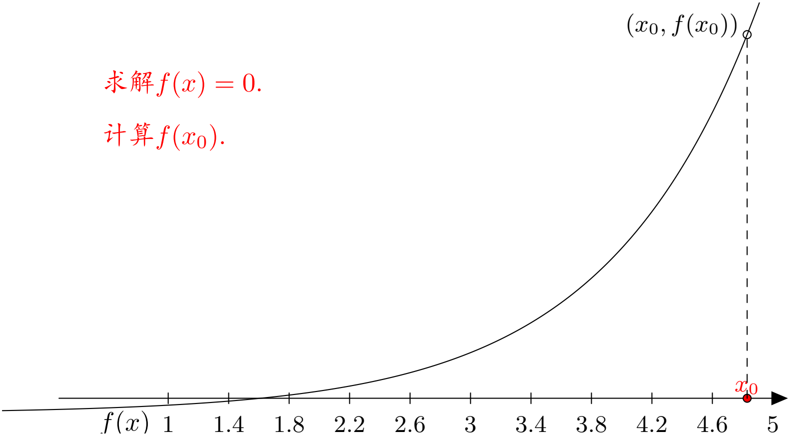
牛顿法图例

求解$f(x) = 0.$

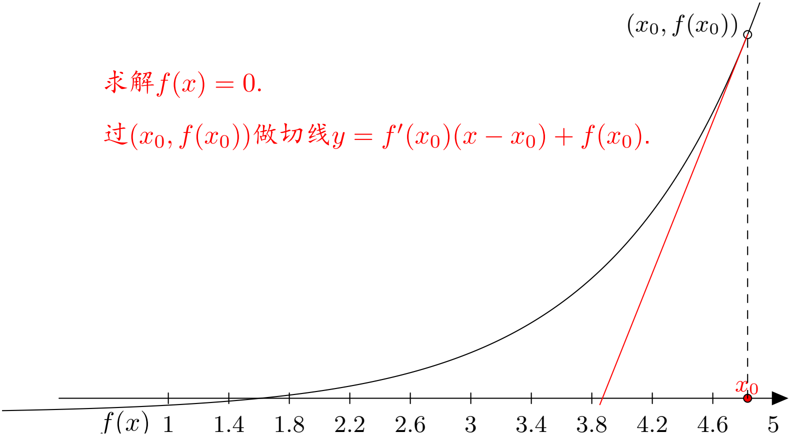
任取初始迭代点$x_0.$



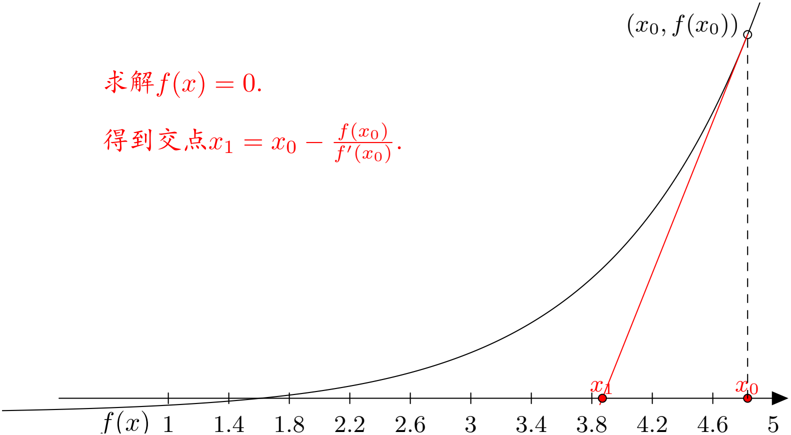
牛顿法图例



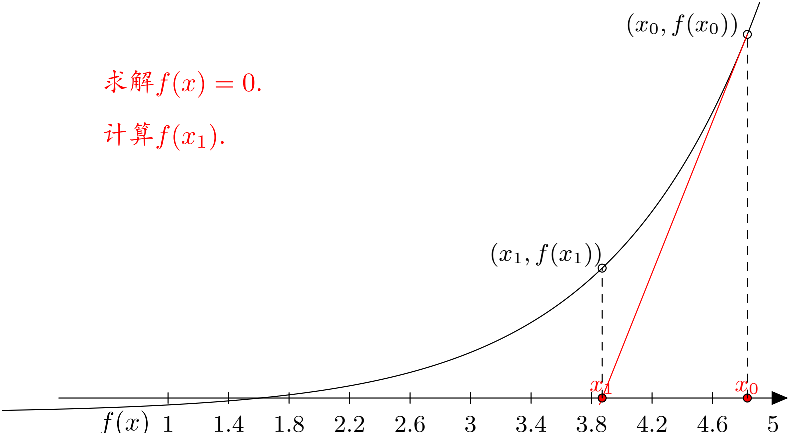
牛顿法图例


$(x_0, f(x_0))$
求解$f(x) = 0.$
过$(x_0, f(x_0))$做切线$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$
x_0
$f(x)$
1
1.4
1.8
2.2
2.6
3
3.4
3.8
4.2
4.6
5

牛顿法图例


求解$f(x) = 0.$
得到交点$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$
$(x_0, f(x_0))$
x_1
x_0
$f(x)$
1
1.4
1.8
2.2
2.6
3
3.4
3.8
4.2
4.6
5

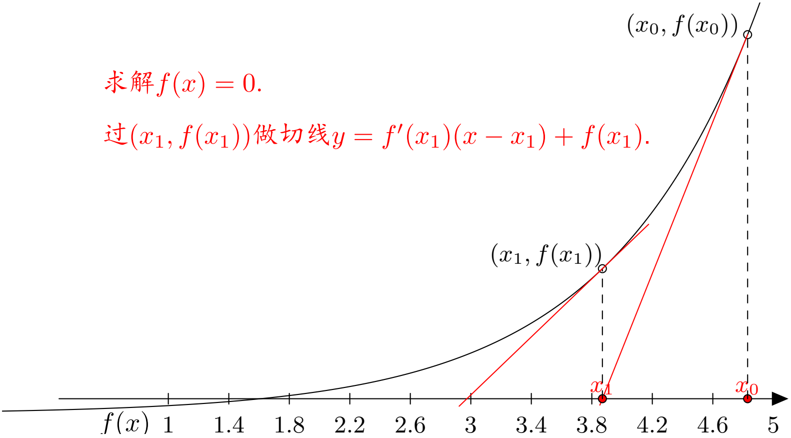
牛顿法图例



牛顿法图例

求解$f(x)=0.$

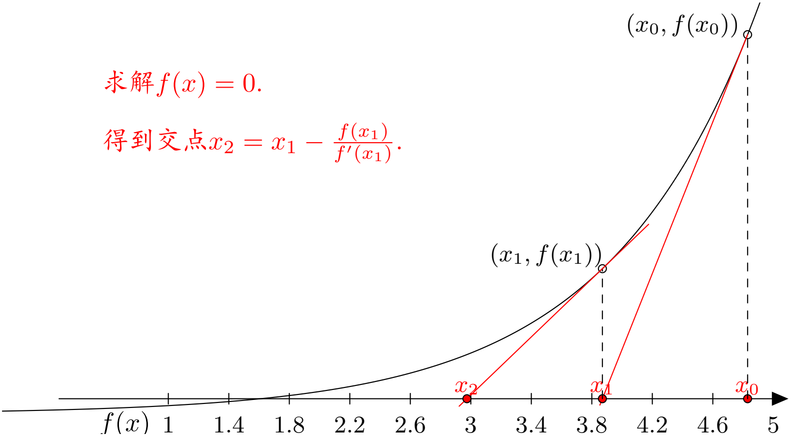
过$(x_1, f(x_1))$做切线$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1).$



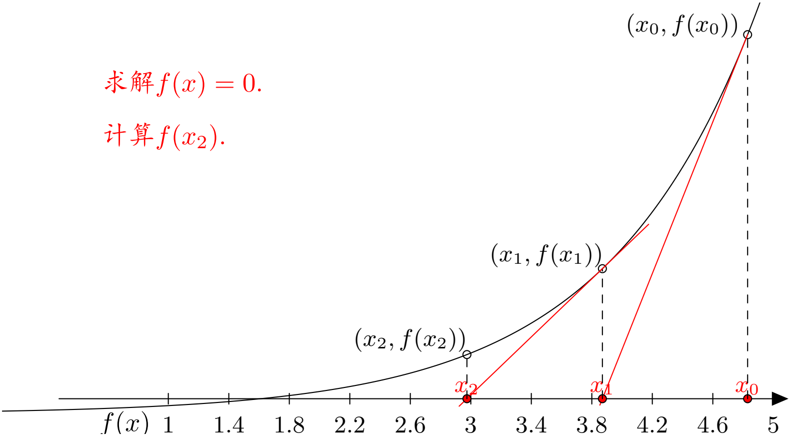
牛顿法图例

求解$f(x) = 0$.

得到交点$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.



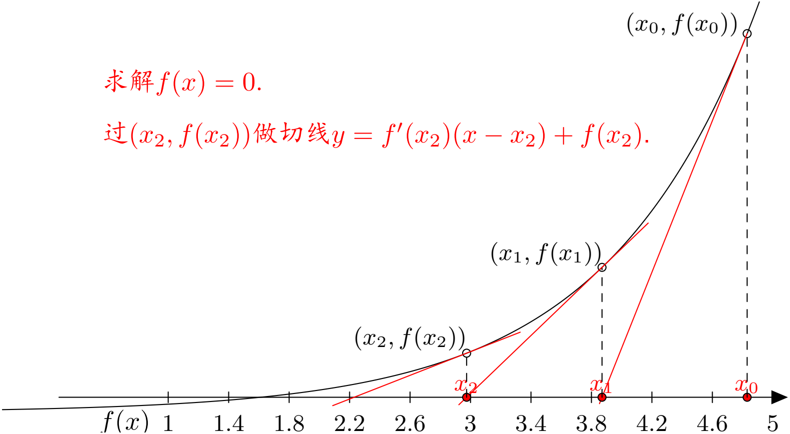
牛顿法图例


求解$f(x) = 0$.
计算$f(x_2)$.
$(x_0, f(x_0))$
$(x_1, f(x_1))$
$(x_2, f(x_2))$
x_0
x_1
x_2
$f(x)$
1
1.4
1.8
2.2
2.6
3
3.4
3.8
4.2
4.6
5

牛顿法图例

求解$f(x)=0$.

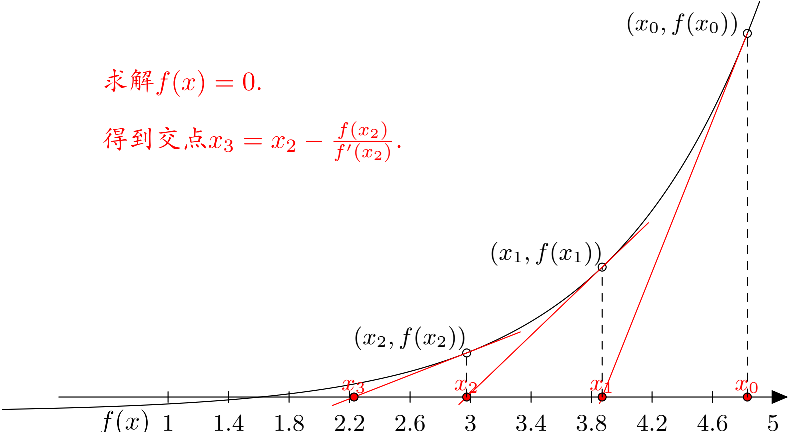
过$(x_2, f(x_2))$做切线$y=f'(x_2)(x-x_2)+f(x_2)$.



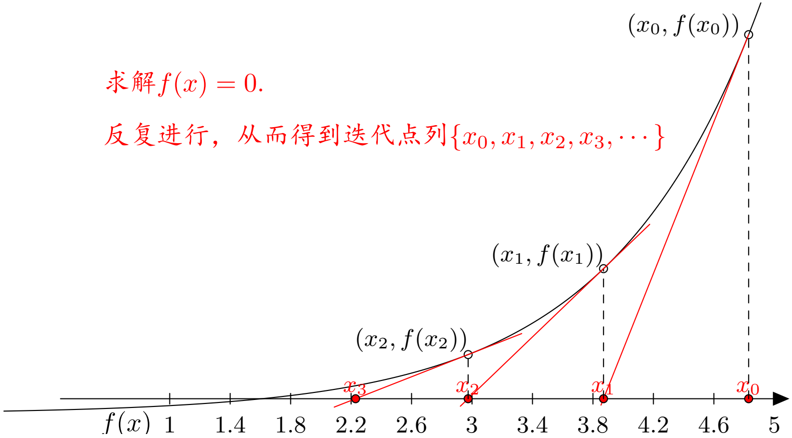
牛顿法图例

求解$f(x) = 0$.

得到交点$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$.



牛顿法图例


$(x_0, f(x_0))$
求解$f(x) = 0$.
反复进行，从而得到迭代点列$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots\}$
$(x_1, f(x_1))$
$(x_2, f(x_2))$
x_3
x_2
x_1
x_0
$f(x)$
1
1.4
1.8
2.2
2.6
3
3.4
3.8
4.2
4.6
5

```
function [x,fval]=zhnewton(f,x,opt)
% Version 1
% [x,fval]=zhnewton(f,a,b,opt)
% 牛顿法求解函数f(x)的零根。
% f为字符串表达式，x为初始迭代点。
% opt为控制精度，默认值为1E-6。
% x为x*的近似，fval为f(x)。
% zhangxiaowei@uestc.edu.cn
clc
if nargin == 2
    opt = 1E-6;
end

x0=x;
opt2 = 1E-100;

F = sym(f);
G = diff(F);
f = inline(f)

while 1
    G0 = double(subs(G,'x',x0));
    if abs(G0) <= opt2
        error('导数为零！');
    end
```

```
    x = x0 - f(x0)/G0;
    fval = f(x);
    if abs(fval) <= opt
        fprintf('零根为: ');
        break;
    else
        x0 = x;
    end
end
```

```
function [x,fval]=zhnewton1(f,x,opt)
% Version 2
clc
if nargin == 2
    opt = 1E-6;
end

opt2 = 1E-100;

F = sym(f);
G = diff(F);
f = inline(f)
fval = f(x);

while abs(fval) >= opt
    x0 = x;
    G0 = double(subs(G,'x',x0));
    if abs(G0) <= opt2
        error('导数为零！');
    end
    x = x0 - f(x0)/G0;
    fval = f(x);
end
```

MATLAB参考程序

点击下载MATLAB代码

作业

(1)对二分法，牛顿法$Matlab$参考程序的每一行进行注释说明。

(2)求求解7的算术平方根，即求

$$f(x) = x^2 - 7$$

的零根，并比较这两种算法的优劣。