第五讲 符号计算与微积分

- 符号变量
- 微积分符号计算
- Taylor展开式
- 级数求和,求极限
- 常微分方程（组）求解

符号计算，又称为计算机代数，是通过集成在Matlab中的符号运算工具箱（Symbolic Math Toolbox）来实现的。

符号计算关注准确的计算和公式推导，能最大限度减少数值运算过程中产生的误差。

Matlab提供了一种符号数据类型，相应的运算对象称为符号对象。如：符号常量，符号变量，以及它们参与的数学表达式等。

在进行符号运算前首先要建立符号对象，然后才可以进行符号对象的运算。

符号变量

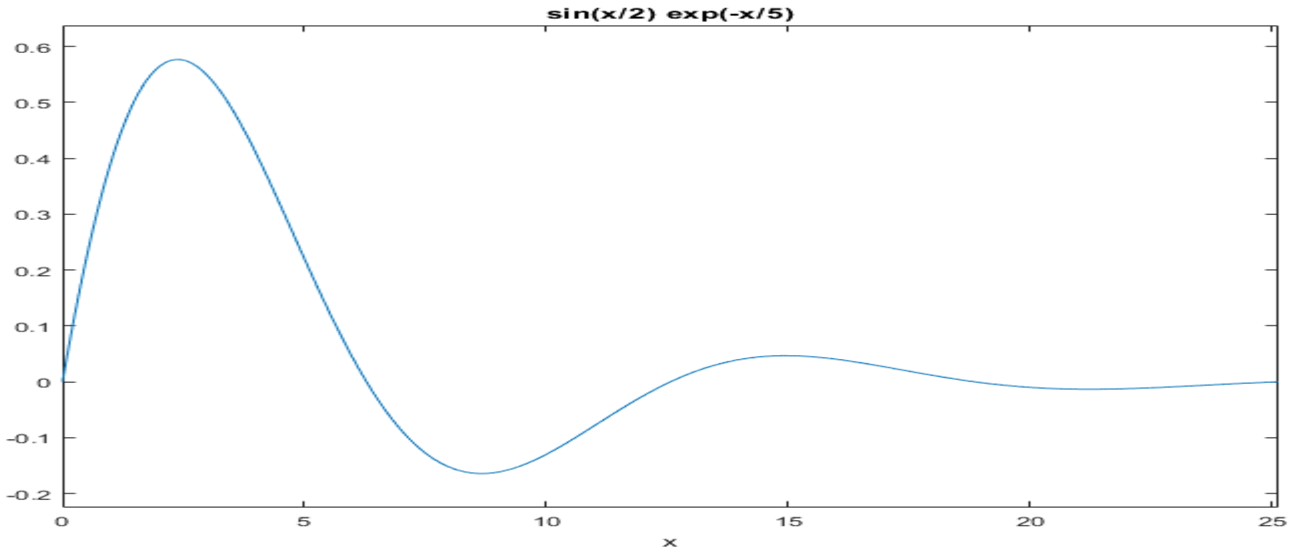
在符号计算中，首先需要通过创建符号变量

syms 符号变量1 符号变量2 ……

符号表达式是主要操作对象.
符号表达式：符号变量、运算符、函数、数字组成
在定义符号表达式之前,首先要创建符号变量.

例 用符号表达式定义函数 $f(x)= e^{-0.2x}\sin 0.5x$，并在 $[0,8\pi]$上绘图。

```
syms x
f = exp(-0.2*x)*sin(0.5*x);
ezplot(f,[0,8*pi])
```

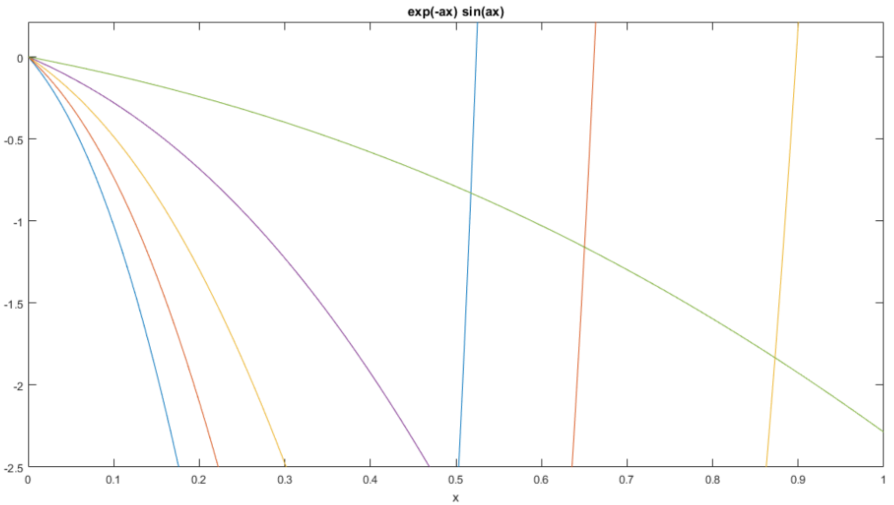


替换命令:

S1=subs(S, ‘old’, ‘new’)

例 对不同的参数$a(a=-6.00,-4.75,-3.50,-2.25,$
$-1.00)$,绘制$f(x)=e^{-ax}\sin(ax)$在$[0,1]$上的图形.

```
syms a  x
f = exp(-a*x)*sin(a*x);
for i = linspace(-6, -1, 5)
    f1 = subs(f, a, i);
    ezplot(f1,[0,1])
    hold on
end
```



化简命令：simplify

例 $\sin \boldsymbol{x}_1 \cos \boldsymbol{x}_2 - \cos \boldsymbol{x}_1 \sin \boldsymbol{x}_2$

```
syms x1 x2
y1= sin(x1)*cos(x2)-cos(x1)*sin(x2);
y2=simplify(y1)
```

```
y2 =
   sin(x1-x2)
```

微积分符号计算

- **diff(f)** 对符号表达式**f**的缺省变量求导数
- **diff(f,v)** 对指定变量 **v** 求导数
- **diff(f,v,n)** 对指定变量 **v** 求**n**阶导数
- **int(f)** 对符号表达式**f**的缺省变量求积分
- **int(f,v)** 对指定变量**v**求积分
- **int(f,v,a,b)** 对指定变量 **v**在区间**[a, b]**上求定积分

例 已知$f(x)=\dfrac{1}{5+4\cos(x)}$,求$f'(x)$.

```
syms x
f =1/(5+4*cos(x))
diff(f,x,1)
% 或者 diff(f)

f =
 1/(4*cos(x) + 5)

ans =
 (4*sin(x))/(4*cos(x) + 5)^2
```

例 已知$f(x,y)=\ln(xy)+\dfrac{\sin(x-y)}{y}$，求$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$.

```
syms x y
f  = log(x*y)+sin(x-y)/y
Dfx = diff(f,x,1)
D2fy = diff(f,y,2)
pretty(D2fy)
```

```
f =  log(x*y) + sin(x - y)/y
Dfx =  cos(x - y)/y + 1/x
D2fy =  (2*cos(x - y))/y^2 - sin(x - y)/y + (2*sin(x - y))/y^3 - 1/y^2

2 cos(x - y)      sin(x - y)      2 sin(x - y)      1
--------------  -  -----------  +  -------------  -  ---
      2                y                 3             2
     y                                  y             y
```

例 $\int_0^{2\pi} \boldsymbol{x} \cdot \sin \boldsymbol{x} \, \boldsymbol{dx}$

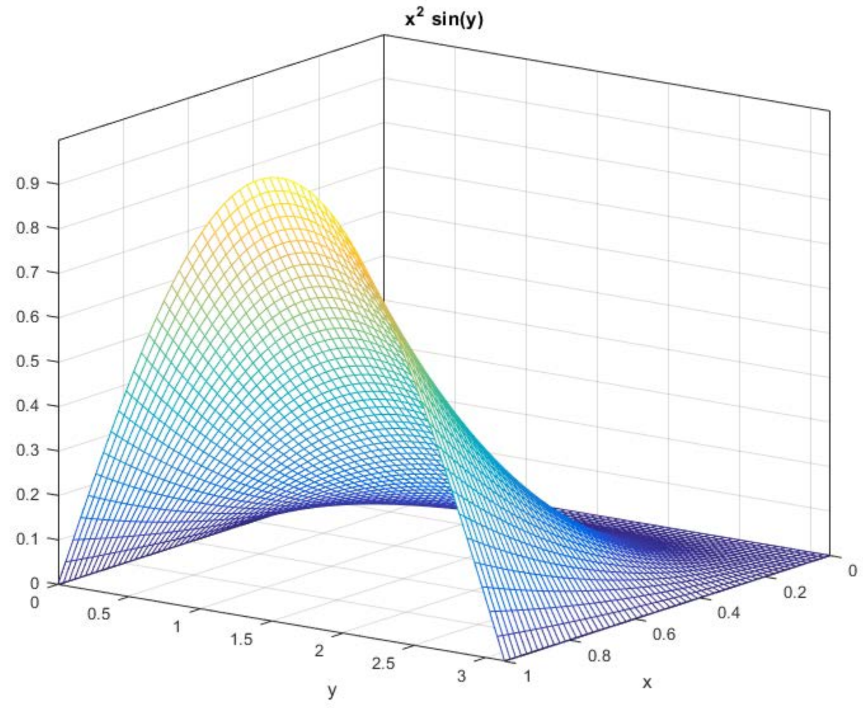
```
syms x
f=x*sin(x);
sol=int(f,x,0,2*pi)

sol = -2*pi
```

例 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le \pi}} x^2 \sin y \, dxdy$

分析 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le \pi}} x^2 \sin y \, dxdy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 x^2 \sin y dx\right) dy$

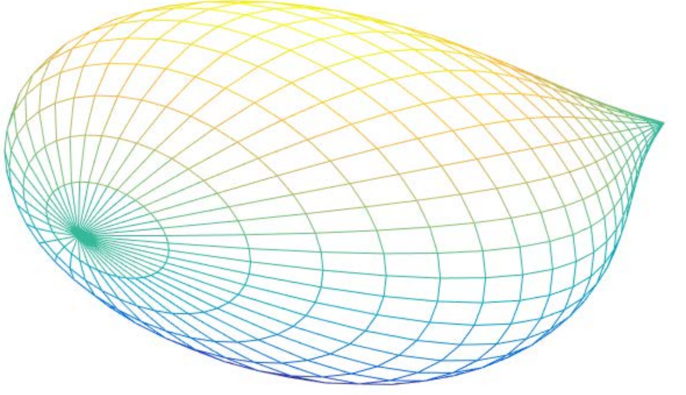
```
syms x y
f=x^2*sin(y);
g=int(f,x,0,1);
int(g,y,0,pi)
ezmesh(f,[0,1,0,pi])
```

ans = 2/3



例　计算$f(x)=e^{-0.2x}\sin(0.5x)$绕x轴旋转的曲面体积，$0\le x\le 2\pi$.

分析　$V=\pi\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$



```
syms x
f=exp(-0.2*x)*sin(0.5*x);
V=pi*int(f*f,x,0,2*pi)
double(V)
```

```
V =pi*(-125/116*exp(-4/5*pi)+125/116)
ans =  3.1111
```

double(V) 或 vpa(V)：将符号变量V转化为数值变量

Taylor展开式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

taylor(f, x, 'expansionpoint', x0, 'order', n)

taylor(f, x, x0, 'order', n)

f **(*x*)在 *x* = *x*0 处的 *n*-1 次 taylor 多项式**

注：在低版本MATLAB中，taylor用法有所不同。

taylor(f)

$f(x)$在 $x = 0$ 处的 5 次 taylor 多项式, 即麦克劳林多项式

taylor(f, x)

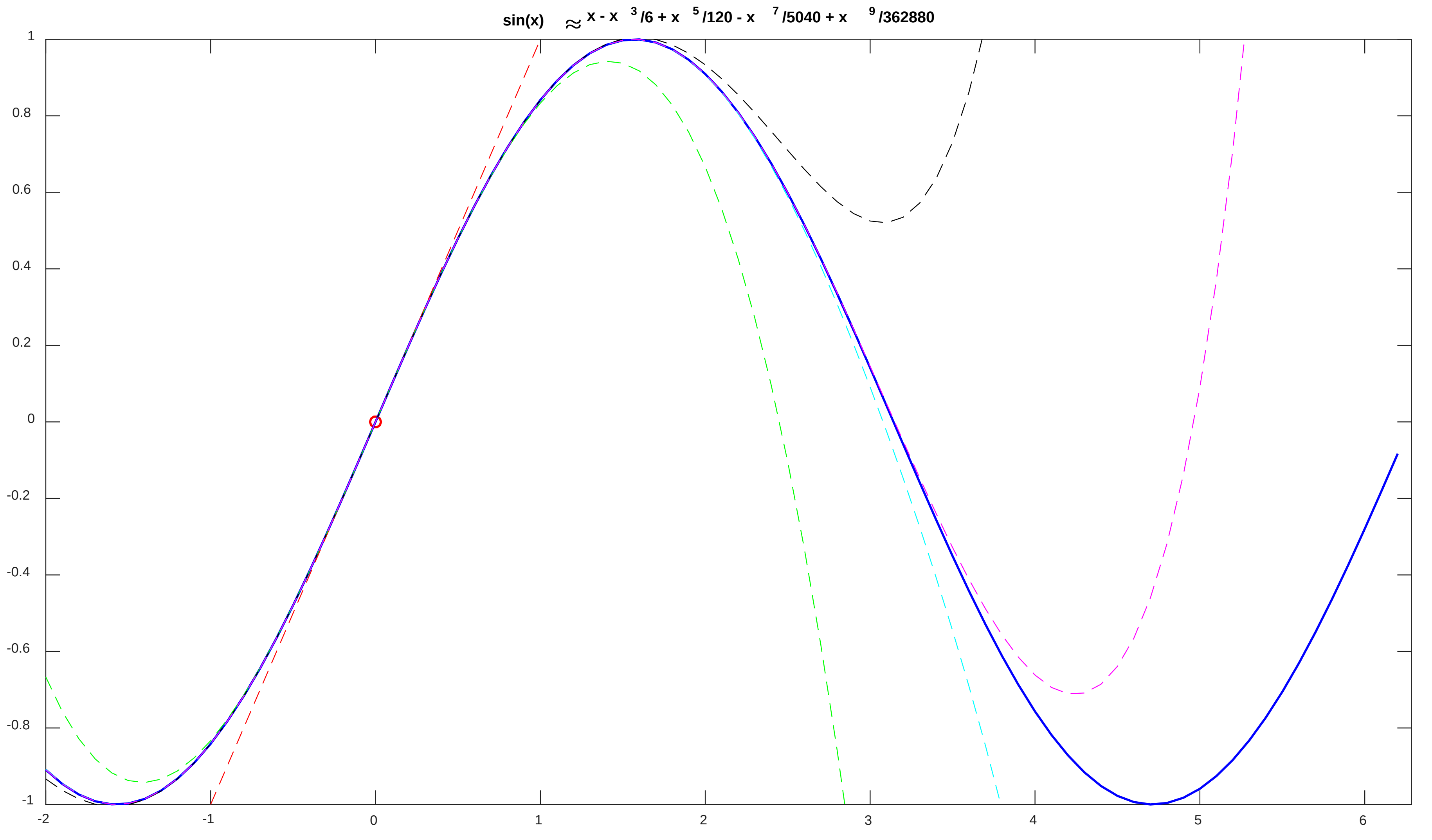
$f(x)$在 $x = 0$ 处的 5 次 taylor 多项式

taylor(f, x, x0)

$f(x)$在 $x = x0$ 处的 5 次 taylor 多项式

注：默认$n = 6$

```
syms x y z
taylor(sin(x), x, pi/2, 'order', 6)
ans =
        (pi/2 - x)^4/24 - (pi/2 - x)^2/2 + 1

taylor(exp(-x))
ans =
        x^4/24 - x^5/120 - x^3/6 + x^2/2 - x + 1

taylor(log(x), x, 'expansionpoint', 1, 'order', 4)
ans =
        x - 1 - 1/2*(x - 1)^2 + 1/3*(x - 1)^3
```


sin(x) ≈ x - x3/6 + x5/120 - x7/5040 + x9/362880
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

```
syms x
f = sin(x);
X = -2:0.1:2*pi;
plot(0,0,'ro',X,sin(X),'b','linewidth',1.2)
xlim([-2,2*pi])
ylim([-1,1])
M=['r--';'g--';'k--';'c--';'m--'];
for n = 2:2:10
    h = taylor(f,'order',n);
    g = inline(vectorize(char(h)));
    % g = inline(h);
    Y = g(X); % Y = subs(h,x,X);
    pause
    hold on
    plot(X,Y,M(n/2,:))
    title(['sin(x) \approx ',char(h)])
    hold off
end
```

```
syms x
f = sin(x);
T = [-2,2*pi,-1,1];
for i = 2:2:10
    ezplot(f,T);
    hold on
    plot(0,0,'rs')
    eval(strcat('f',num2str(i),...
'=taylor(f,',''''order'',',num2str(i),')'));
    eval(['ezplot(f',num2str(i),',T)']);
    title(['sin(x) \approx ',...
        eval(['char(','f',num2str(i),')'])])
    pause
    hold off
end
```

例 求椭圆积分

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt$$

```
syms x t
f = sqrt(1-e2*x)
T = taylor(f, x, 0, 'order', 3)
g = subs(T, x, cos(t)^2)
S = int(g, 0, pi/2)

S =
     -(pi*(3*e2 - 8)*(e2 + 8))/128
```

级数求和

S = symsum(f, n, a, b)

例 计算级数

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2$$

```
syms k n
S = symsum(k^2,k,1,n)
```

S =1/6*n*(n+1)*(2*n+1)

求极限

- **limit(f,x,a)** 求当x→a时符号表达式f的极限。
- **limit(f,a)** 关于符号变量a求极限。
- **limit(f)** 求当x→0时f的极限。
- **limit(f,x,a,‘left’)** 求当x→a时f的左极限。
- **limit(f,x,a,‘right’)** 求当x→a时f的右极限。

例

```
syms x a t h
limit(sin(x)/x)                       %returns  1
limit((x-2)/(x^2-4),2)                %returns  1/4
limit((1+2*t/x)^(3*x),x,inf)          % returns  exp(6*t)
limit(1/x,x,0,'right')                % returns  inf
limit(1/x,x,0,'left')                 % returns  -inf
limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)        % returns  cos(x)
v = [(1 + a/x)^x, exp(-x)];
limit(v,x,inf,'left')                 % returns  [exp(a),  0]
```

常微分方程（组）求解

dsolve('eq1', ⋯, 'eqN', ⋯, 'con1', ⋯, 'conN', ⋯, 'x')

例 $y' = \dfrac{1}{x^2+1} - 2y^2, y(0) = 0.$

```
y = dsolve('Dy=1/(1+x^2)-2*y^2','y(0) = 0','x')
```

```
y =
    2*x/(2*x^2+2)
```

这里，**Dy**：**y**的**1**阶导数；**D2y**：**y**的**2**阶导数，等等。

例 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.1y \\ \dfrac{dy}{dt} = -0.15x \end{cases}, x(0) = 1000, y(0) = 1800.$$

```
sol = dsolve('Dx=-0.1*y','Dy=-0.15*x', ...
'x(0) = 1000','y(0) = 1800','t');
sol.x
sol.y
```

后续版本，dsolve语法

dsolve(eq1, ⋯, eqN, con1, ⋯ , conN)

例 $$y' = \frac{1}{x^2+1} - 2y^2, y(0) = 0.$$

```
syms y(x)   %定义符号函数y(x)

y = dsolve(diff(y,x) == 1/(1+x^2)-2*y^2, y(0) == 0)


y =
    2*x/(2*x^2+2)
```