

1 BAGIAN 1: MATERI DAN TEORI

1.1 Pendahuluan: Mengapa Bab Ini Penting?

Kita menggunakan persamaan untuk menjelaskan beberapa hal terpenting di dunia. Tiga contoh utama adalah:

- **Gravitasi:** Mengapa Bulan tetap mengorbit Bumi dan tidak melayang ke luar angkasa? Ini dijelaskan oleh hukum gravitasi universal Newton:

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

- **Penerbangan:** Mengapa pesawat tidak jatuh? Prinsip Bernoulli menjelaskan perbedaan tekanan udara pada sayap ($p + q = p_0$).
- **Energi Nuklir:** Bagaimana sejumlah kecil plutonium bisa memiliki energi yang cukup untuk menghancurkan kota? Teori relativitas khusus Einstein menghubungkan massa dan energi:

$$E = mc^2$$

1.2 13.1 Menyelesaikan Persamaan Linear

Persamaan terbentuk ketika sebuah ekspresi disamakan dengan angka atau ekspresi lain.

- **Solusi** dari persamaan adalah nilai variabel yang membuat persamaan tersebut bernilai benar.
- Prinsip utamanya adalah **"lakukan hal yang sama pada kedua sisi"** hingga variabel berdiri sendiri.

Contoh 1: Prinsip Keseimbangan

Selesaikan persamaan berikut dengan melakukan hal yang sama pada kedua sisi.

a. $3x - 5 = 16$

b. $\frac{x}{2} + 2 = 10$

Penyelesaian:

- a. Tambahkan 5 ke kedua sisi:

$$3x - 5 + 5 = 16 + 5$$

$$3x = 21$$

Bagi dengan 3: $x = 7$

- b. Kurangi 2 dari kedua sisi:

$$\frac{x}{2} + 2 - 2 = 10 - 2$$

$$\frac{x}{2} = 8$$

Kalikan dengan 2: $x = 16$

Persamaan dengan Kurung

Jika persamaan mengandung kurung, Anda harus menjabarkannya terlebih dahulu atau membagi kedua sisi dengan angka di depan kurung.

Contoh 2 & 3

Contoh 2: Selesaikan $5(x + 3) = 25$.

Metode A (Jabarkan):

$$5x + 15 = 25 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2.$$

Metode B (Bagi):

$$\text{Bagi kedua sisi dengan } 5: x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2.$$

Contoh 3: Selesaikan $3(2x - 7) = 15$.

$$\text{Bagi kedua sisi dengan } 3: 2x - 7 = 5.$$

$$\text{Tambah } 7: 2x = 12.$$

$$\text{Bagi } 2: x = 6.$$

Persamaan dengan Variabel di Kedua Sisi

Kumpulkan semua suku yang mengandung variabel di satu sisi (biasanya sisi kiri atau sisi yang memiliki koefisien variabel lebih besar) dan angka di sisi lainnya.

Contoh 4, 5, & 6

Contoh 4: $5x + 4 = 3x + 10$.

$$\text{Kurangi } 3x: 2x + 4 = 10.$$

$$\text{Kurangi } 4: 2x = 6 \Rightarrow x = 3.$$

Contoh 5: $2x + 3 = 6x - 5$.

Karena sisi kanan punya lebih banyak x ($6x > 2x$), putar persamaan: $6x - 5 = 2x + 3$.

$$\text{Kurangi } 2x: 4x - 5 = 3.$$

$$\text{Tambah } 5: 4x = 8 \Rightarrow x = 2.$$

Contoh 6: $3(2x + 5) + x = 2(2 - x) + 2$.

$$\text{Jabarkan: } 6x + 15 + x = 4 - 2x + 2.$$

$$\text{Sederhanakan: } 7x + 15 = 6 - 2x.$$

$$\text{Tambah } 2x \text{ ke kedua sisi: } 9x + 15 = 6.$$

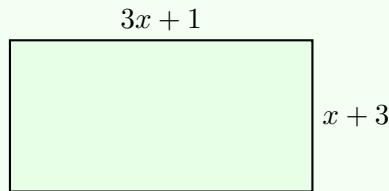
$$\text{Kurangi } 15: 9x = -9 \Rightarrow x = -1.$$

1.3 13.2 Menyusun Persamaan

Anda dapat menggunakan persamaan untuk memodelkan situasi nyata.

Contoh 7

Persegi panjang di bawah memiliki keliling 40 cm. Temukan nilai x .

**Penyelesaian:**

Keliling adalah jumlah semua sisi.

$$2(3x + 1) + 2(x + 3) = 40.$$

$$6x + 2 + 2x + 6 = 40.$$

$$8x + 8 = 40.$$

$$8x = 32 \Rightarrow x = 4.$$

1.4 13.3 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Pemfaktoran (Extended)

Persamaan kuadrat melibatkan pangkat kuadrat (x^2). Bentuk umumnya $ax^2 + bx + c = 0$.

Prinsip dasar: Jika hasil kali dua bilangan adalah nol ($A \times B = 0$), maka salah satu bilangan tersebut harus nol ($A = 0$ atau $B = 0$).

Contoh 8, 9, & 10: Bentuk Dasar

Contoh 8: Selesaikan $x^2 + 6x + 5 = 0$.

Faktorkan: $(x + 5)(x + 1) = 0$.

Maka: $x + 5 = 0$ atau $x + 1 = 0$.

Solusi: $x = -5$ atau $x = -1$.

Contoh 9: Selesaikan $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Faktorkan: $(x + 5)(x - 2) = 0$.

Maka: $x + 5 = 0$ atau $x - 2 = 0$.

Solusi: $x = -5$ atau $x = 2$.

Contoh 10: Selesaikan $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Faktorkan: $(x - 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$.

Solusi tunggal (akar kembar): $x = 3$.

Persamaan Kuadrat Umum ($a \neq 1$)

Untuk bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ di mana $a \neq 1$, kita harus memfaktorkan dengan mempertimbangkan faktor dari a dan c .

Contoh 11

Soal a: $12x^2 - 28x = -15$.

Atur ke bentuk umum: $12x^2 - 28x + 15 = 0$.

Faktorkan: $(2x - 3)(6x - 5) = 0$.

Solusi:

- $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 1.5$
- $6x - 5 = 0 \Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

Soal b: $30x^2 - 5x - 5 = 0$.

Bagi semua suku dengan 5 (faktor persekutuan): $6x^2 - x - 1 = 0$.

Faktorkan: $(3x + 1)(2x - 1) = 0$.

Solusi: $x = -\frac{1}{3}$ atau $x = \frac{1}{2}$.

Kasus Khusus**Contoh 12**

a. $3x^2 - 4 = 0$:

$$3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

b. $4x^2 - 25 = 0$: (Selisih dua kuadrat)

$$(2x - 5)(2x + 5) = 0 \Rightarrow x = 2.5 \text{ atau } x = -2.5.$$

c. $6x^2 - x = 0$: (Faktorkan x)

$$x(6x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ atau } 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$$

1.5 13.4 Rumus Kuadrat (Quadratic Formula) - Extended

Banyak persamaan kuadrat tidak dapat difaktorkan dengan mudah. Untuk kasus ini, gunakan rumus kuadrat. Untuk persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, solusinya adalah:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh 13

Selesaikan $5x^2 - 11x - 4 = 0$ memberikan solusi hingga 2 tempat desimal.

Identifikasi: $a = 5, b = -11, c = -4$.

Substitusi:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-4)}}{2(5)} \\ x &= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 80}}{10} \\ x &= \frac{11 \pm \sqrt{201}}{10} \end{aligned}$$

Hitung dua kemungkinan:

$$x_1 = \frac{11+14.177}{10} = 2.5177... \approx 2.52$$

$$x_2 = \frac{11-14.177}{10} = -0.3177... \approx -0.32$$

1 BAGIAN 1: MATERI DAN TEORI

1.1 13.5 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat (Extended)

Selain pemfaktoran dan rumus kuadrat, metode lain untuk menyelesaikan persamaan kuadrat adalah **melengkapkan kuadrat** (*completing the square*). Metode ini mengubah bentuk $x^2 + px + q$ menjadi $(x + a)^2 + b$.

Prinsip dasarnya adalah:

$$x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$$

Langkah-langkah:

1. Abaikan konstanta q sejenak. Fokus pada $x^2 + px$.
2. Ubah $x^2 + px$ menjadi $(x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2$.
3. Masukkan kembali konstanta q dan sederhanakan.

Contoh 14: Mengubah Bentuk

Ubah ekspresi berikut ke dalam bentuk $(x \pm a)^2 \pm b$.

- a. $x^2 + 6x - 7$
- b. $x^2 - 8x + 3$

Penyelesaian:

- a. $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.
Masukkan kembali -7 :
 $(x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16$.
- b. $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$.
Masukkan kembali $+3$:
 $(x - 4)^2 - 16 + 3 = (x - 4)^2 - 13$.

Contoh 15: Menyelesaikan Persamaan

Selesaikan $x^2 + 4x - 7 = 0$ dengan melengkapkan kuadrat (hingga 2 desimal).

Penyelesaian:

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4.$$

Persamaan menjadi:

$$(x + 2)^2 - 4 - 7 = 0 \\ (x + 2)^2 - 11 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 11.$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{11}.$$

$$x = -2 \pm \sqrt{11}.$$

$$x \approx 1.32 \text{ atau } x \approx -5.32.$$

Jika Koefisien x^2 Tidak Sama dengan 1

Jika persamaan berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ di mana $a \neq 1$, bagi seluruh persamaan dengan a terlebih dahulu.

Contoh 16

Selesaikan $2x^2 - 6x - 7 = 0$.

Bagi 2: $x^2 - 3x - 3.5 = 0$.

Lengkapkan kuadrat untuk $x^2 - 3x$:

$$(x - 1.5)^2 - 1.5^2 = (x - 1.5)^2 - 2.25.$$

Substitusi kembali:

$$(x - 1.5)^2 - 2.25 - 3.5 = 0.$$

$$(x - 1.5)^2 - 5.75 = 0 \Rightarrow (x - 1.5)^2 = 5.75.$$

$$x = 1.5 \pm \sqrt{5.75}.$$

$$x \approx 3.90 \text{ atau } x \approx -0.90.$$

1.2 13.6 Persamaan Simultan

Persamaan simultan adalah dua persamaan dengan dua variabel yang diselesaikan bersamaan.

Metode Eliminasi

Samakan koefisien salah satu variabel, lalu jumlahkan atau kurangkan persamaan.

Contoh 18 & 19**Contoh 18 (Tanda Sama, Kurangkan):**

$$6x + y = 15 \text{ dan } 4x + y = 11.$$

$$\text{Kurangkan: } 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Substitusi: } 4(2) + y = 11 \Rightarrow y = 3.$$

Contoh 19 (Tanda Beda, Jumlahkan):

$$5x + y = 22 \text{ dan } 2x - y = 6.$$

$$\text{Jumlahkan: } 7x = 28 \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Substitusi: } 5(4) + y = 22 \Rightarrow 20 + y = 22 \Rightarrow y = 2.$$

Metode Substitusi

Ubah satu persamaan menjadi $y = \dots$, lalu masukkan ke persamaan lain.

Contoh 20

$$y = 2x + 3 \text{ dan } 3x + 4y = 1.$$

$$\text{Substitusi: } 3x + 4(2x + 3) = 1.$$

$$3x + 8x + 12 = 1 \Rightarrow 11x = -11 \Rightarrow x = -1.$$

$$y = 2(-1) + 3 = 1.$$

Menyeimbangkan Koefisien

Jika koefisien tidak sama, kalikan persamaan agar sama.

Contoh 21 & 23

Contoh 21 (Satu Persamaan): $3x + 2y = 18$ dan $2x - y = 5$.

Kalikan persamaan kedua dengan 2: $4x - 2y = 10$.

Jumlahkan dengan persamaan pertama: $7x = 28 \Rightarrow x = 4$.

Cari y : $2(4) - y = 5 \Rightarrow y = 3$.

Contoh 23 (Dua Persamaan): $4x + 3y = 27$ dan $5x - 2y = 5$.

Kalikan pers 1 dengan 2 $\rightarrow 8x + 6y = 54$.

Kalikan pers 2 dengan 3 $\rightarrow 15x - 6y = 15$.

Jumlahkan: $23x = 69 \Rightarrow x = 3$.

Substitusi $x = 3$ ke pers 1: $12 + 3y = 27 \Rightarrow y = 5$.

1.3 13.7 Persamaan Simultan Linear dan Non-Linear

Gunakan metode **substitusi**. Substitusi persamaan linear ke dalam persamaan kuadrat.

Contoh 24

Selesaikan $x^2 + y^2 = 5$ dan $x + y = 3$.

Ubah linear: $y = 3 - x$.

Substitusi: $x^2 + (3 - x)^2 = 5$.

$$x^2 + (9 - 6x + x^2) = 5$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\text{Faktorkan: } (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 1$$

1.4 13.8 Menyelesaikan Pertidaksamaan

Aturan penting: **Jika mengalikan/membagi dengan bilangan negatif, tanda pertidaksamaan dibalik.**

Contoh 26 & 28

Contoh 26:

$$2x + 3 < 14 \Rightarrow 2x < 11 \Rightarrow x < 5.5$$

Contoh 28 (Pembalik Tanda):

$$10 - 2x \leq 3$$

$$-2x \leq -7$$

Bagi -2 (balik tanda): $x \geq 3.5$.