ماتېماتىكىسىن ئاساس

Abdusalam

بۇ قوللانما ئارقىلىق

سىز ماتېماتىكا بىلىملىرىنى تېزلا كۆرۈپ چىقالايسىز.

Powered by LaTeX

مۇندەرىجە

بىرىنچى قىسىم

ئالىي ماتېماتىكا

بىرىنچى باب

ئالدىن بىلىملەر

بۇ باپتا ئالىي ماتېماتىكا ئۆگىنىشتىن ئاۋال ھازىرلاشقا تېگىشلىك ئالدىن بىلىملەر خاتىرلەندى. بۇ بىلىملەر ئوتتۇرا مەكتەپ ماتىماتىكا بىلىملىرىدىن ئالىي ماتېماتىكا بىلىملىرىگە بولغان ئۆتكۈنچى نۇقتىلار ھېساپلىنىدۇ.

1.1 فۇنكسىيە

فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى ئادەتتە ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ۋە زامانىۋى ئېنىقلىما دەپ ئىككىگە بۆلىنىدۇ. بايانىنىڭ ئۇقۇمىنىڭ باشلىنىش نۇقتىسى باشقىچە بولغاندىن باشقا ، فۇنكسىيەنىڭ ئىككى ئېنىقلىمىسى ئاساسەن ئوخشاش. ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ھەرىكەت ئۆزگىرىشى نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ. ، زامانىۋى ئېنىقلىما بولسا توپلام ۋە ئەكس ئېتىش نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ.

1.1.1 ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە

ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى، دەرىجە فۇنكسىيەسى، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە، ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە، تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيەنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ. تەپسىلاتى تۆۋەندىكىچە:

تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە دەرىجىلىك فۇنكسىيە كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە

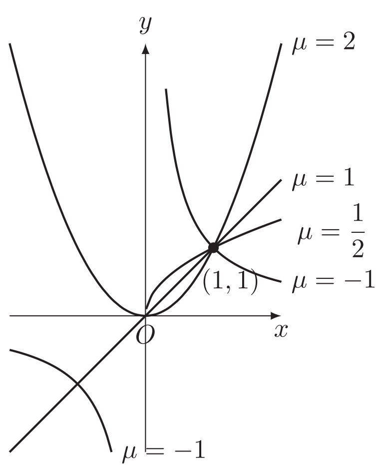
تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى $y = f(x) = C$ بۇنىڭدا C تۇراقلىق سان.

بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = f(x) = ax + b$ a, b خالىغان سان، ھەم $a \neq 0$

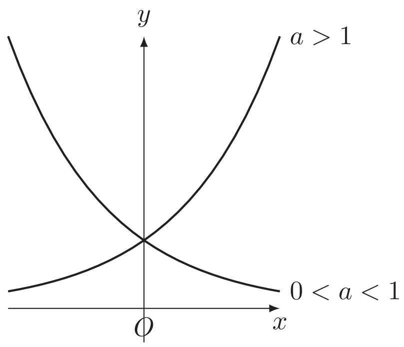
ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c خالىغان سان، ھەم $a \neq 0$

تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە $y = f(x) = \frac{a}{x}$ a خالىغان سان.

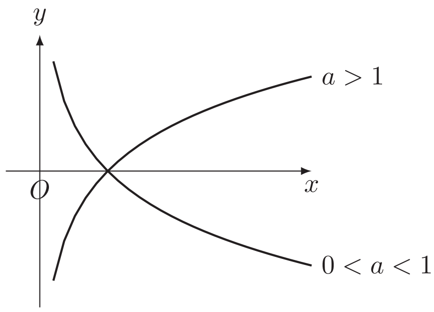
دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = x^\mu$ ، μ خالىغان سان
$x > 0$ ، $y = x^\mu$ رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.



كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

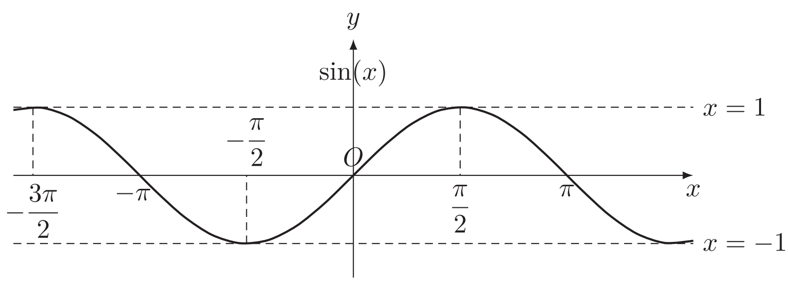


لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y = log_a x (a > 0, a \neq 1)$

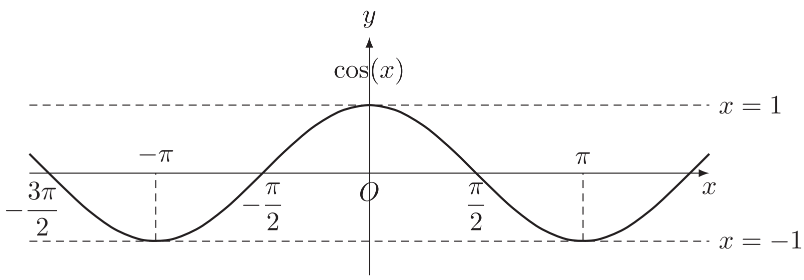


ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە

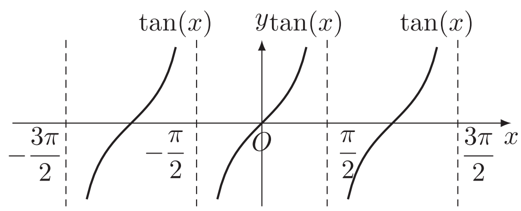
سىنۇس فۇنكسىيەسى:



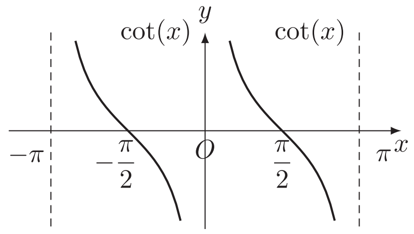
كوسىنۇس فۇنكسىيەسى:



تانگېنس فۇنكسىيەسى:



كوتانگېنس فۇنكسىيەسى:



تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە دددددد

1.1.2 ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيەلەر فورمۇلاسى

يىغىندى:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

كۆپەيمە:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

بىرلىك:

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x-\tan^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x = 1$$

يېرىم بۇلۇڭ:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$
$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$
$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$
$$\tan x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)}$$

1.1.3 ھاسىلە فورمۇلاسى

$$(C)' = 0$$
$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \tan x$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \; (a > 0, a \neq 1)$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \; (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$
$$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

1.1.4 ئىنتېگرال فورمۇلاسى

$$\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

1.2 سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.1 تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.3 سانلار قاتارى

1.2.4 سانلار قاتارى يىغىندىسى

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

دەرىجە فۇنكسىيەسگە نىسبەتەن ئوخشاش بولمىغان دەرىجە ئاستىدىكى ئوخشاش مونوتونلۇقتا ئاساسەن ئەڭ قىممەتنى تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ

ئىككىنچى باب

فۇنكسىيە ۋە لىمىت نەزەرىيىسى

2.1 فۇنكسىيە

فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى ئادەتتە ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ۋە زامانىۋى ئېنىقلىما دەپ ئىككىگە بۆلىنىدۇ. بايانىنىڭ ئۇقۇمىنىڭ باشلىنىش نۇقتىسى باشقىچە بولغاندىن باشقا ، فۇنكسىيەنىڭ ئىككى ئېنىقلىمىسى ئاساسەن ئوخشاش. ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ھەرىكەت ئۆزگىرىشى نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ. ، زامانىۋى ئېنىقلىما بولسا توپلام ۋە ئەكس ئېتىش نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ.

ئېنىقلىما 2.1.1: فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى

خالىغان توپلام A دىكى ئېلېمېنت x گە نىسبەتەن، ماسلىق مۇناسىۋىتى f مەۋجۇت بولۇپ، بۇ x گە تەسىر قىلغاندىن كېيىن ئېرىشكەن توپلام B نىڭ ئېلېمېنتى y بولسا، ئۇنداقتا $f(x)$ بولسا توپلام A دىن توپلام B غا بولغان ئەكس ئېتىش ھېساپلىنىدۇ. بۇنىڭدا y بولسا x نىڭ فۇنكسىيەسى دېيىلىدۇ. بۇنى

$$x :\to y \Leftrightarrow y = f(x)$$

ئارقىلىق خاتىرلەشكە بولىدۇ.

فۇنكسىيە ئۇقۇمى ئۈچ دائىرىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ: ئېنىقلىما ساھەسى A ، قىممەت دائىرىسى B ۋە مۇناسىۋەت ئىپادىسى f

2.2 سانلار قاتارى

2.2.1 تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى

2.2.2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى

2.2.3 سانلار قاتارى

2.3 لىمىت

2.3.1 لىمىت ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى

2.3.2 سانلار قاتارى لىمىتى

2.3.3 فۇنكسىيە لىمىتى

2.3.4 سانلار قاتارى ۋە فۇنكسىيە لىمىتى

2.4 فۇنكسىيە ئۈزلۈكسىزلىكى

2.4.1 فۇنكسىيە مونوتونلىقى

2.4.2 فۇنكسىيە ئۈزۈك نۇقتىسى

ئۈچىنچى باب

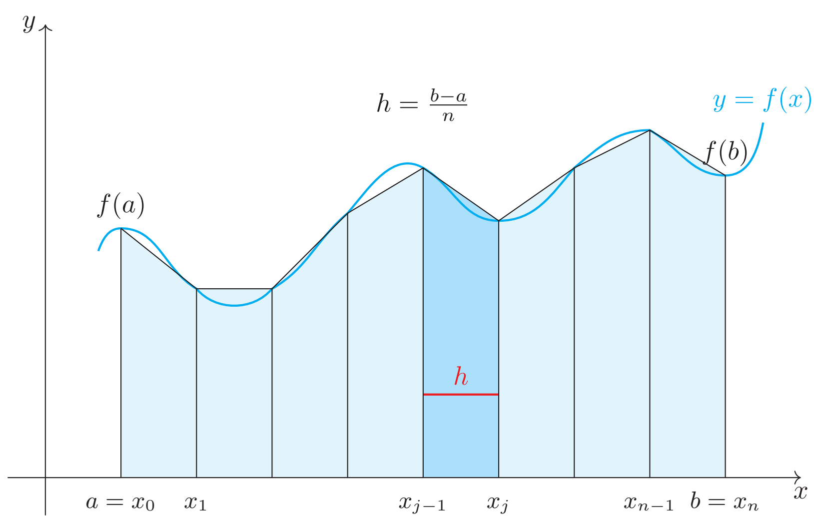
دىففېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرال

3.1 هاسىلە ئۇقۇمى

3.1.1 فۇنكسىيە هاسىلىسى

3.1.2 يۇقىرى دەرىجىلىك هاسىلە

3.2 دىففېرېنسىيال



3.1-رەسىم: دېففېرېرېنسىئال

3.2.1 فۇنكسىيە دىففېرېنسىيالى

3.2.2 هاسىلە فورمۇلىسى

تۆتىنچى باب

ئېنىق ئىنتېگرال ۋە ئېنىقسىز ئىنتېگرال

4.1 ئېنىق ئىنتېگرال

4.1.1 ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەت

4.1.2 ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلى

بىرىنچى خىل ئالماشتۇرۇش

ئىككىنچى خىل ئالماشتۇرۇش

4.1.3 قەدەملەش ئۇسۇلى

4.1.4 راتسىيونال فۇنكسىيە ئىنتېگرالى

4.2 ئېنىقسىز ئىنتېگرال

4.2.1 ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەت

4.2.2 ھېساپلاش

4.2.3 نيۇتون-لېيبنىتس فورمۇلىسى

4.2.4 غەيرى ئىنتېگرال

4.3 ئىنتېگرال قوللىنىلىشى

4.3.1 يۈز

4.3.2 ھەجىم

4.3.3 ئوتتۇرىچە قىممەت

4.3.4 ئۇزۇنلۇق

4.3.5 ئىنتېگرال جەدۋىلى

بەشنچى باب

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە

ئالتىنچى باب

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ئىنتېگرالى

6.4 ئىككىنچى ئەگرى سىزىق ئىنتېگرال

6.4.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.4.2 ھېساپلاش

6.4.3 گىرىن فورمۇلىسى

6.4.4 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.5 بىرىنچى سىرت ئىنتېگرال

6.5.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.5.2 ھېساپلاش

6.5.3 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.6 ئىككىنچى سىرت ئىنتېگرال

6.6.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.6.2 گائۇس فورمۇلىسى

6.6.3 ھېساپلاش

6.7 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.7.1 ئېغىرلىق ۋە شەكىل مەركىزى

6.7.2 ئايلىنىش ئېنېرتسىيەسى

يەتتىنچى باب

چەكسىز قاتار

بۇ باپتىكى مۇھىم نۇقتىلار: مۇسبەت قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقىنى سىلىشتۇرۇپ ئېنىقلاش ئۇسۇلى، نىسبەت قىممىتى ئېنىقلاش ئۇسۇلى، يىلتىز قىممىتىنى ئېنىقلاش ئۇسۇلى، گىرەلەشمە قاتارنىڭ لېبنىز ئېنىقلاش ئۇسۇلى. قىيىن نۇقتا خالىغان قاتارنىڭ ئابىل پەرقلەندۈرۈش ئۇسۇلى ۋە دىرىكلېي پەرقلەندۈرۈش ئۇسۇلى قاتارلىقلار.

7.1 ئاساسىي ئۇقۇملار

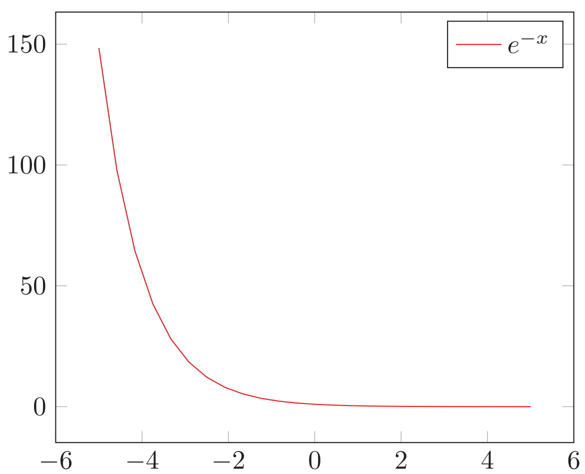
ھەرقانداق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ غا نىسبەتەن، ئۇنىڭ خالىغان ئېلېمېنتلىرىنىڭ چېكى بولسا، بىز بۇنى **چېگرىلانغان** دەپ ئاتايمىز. يەنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادە قۇرۇلىدۇ:

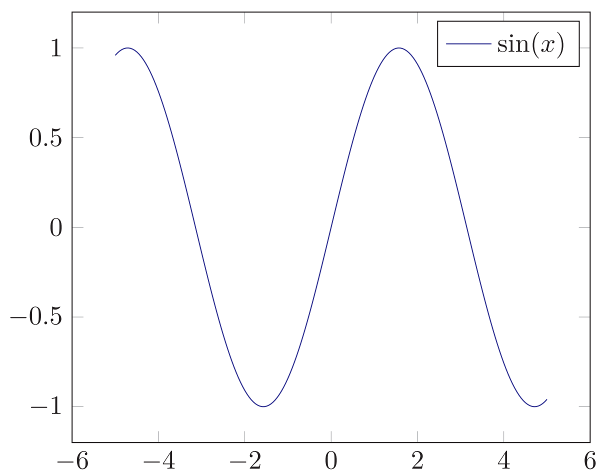
$$A_k \leq a_{k+n} \leq B_k, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$$

دېمەك يۇقىرىدىكى A_k, B_k لار بۇ سانلارنىڭ **ئېنىق چېكى** دەپ ئاتىلىدۇ.
بۇنىڭدا A_k ئېنىق ئاستا چېكى دېيىلىدۇ ھەم $A_k = inf\{a_{k+n}\}, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$ قىلىپ خاتىرىلىنىدۇ، ئوخشاشلا B_k ئېنىق ئۈستى چېكى دېيىلىدۇ ھەم $B_k = sup\{a_{k+n}\}, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$ قىلىپ خاتىرىلىنىدۇ. بۇ يەردىكى ئېنىق چېكى مۇقىم ئەمەس بولۇپ، شۇڭا ئىندېكسى k قوشۇپ يېزىلىدۇ. بۇ خۇددى مەلۇم بىر ساننىڭ بەشتىن كىچىك بولسا، ئۇ ساننىڭ ئالتىدىنمۇ كىچىك، يەتتىدىنمۇ كىچىك، ... ، بولىدىغانلىقى بىلەن ئوخشاش مەنىدە.
ئەگەر يۇقارقى سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى يىغىلسا، ئۇنىڭ لىمىتى چوقۇم مەۋجۇت بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن ئۇنىڭ لىمىتى ۋە ئېنىق چېكى ئوتتۇرىسىدا مۇنداق مۇناسىۋەت ئىپادىسى قۇرۇلىدۇ:

$$A = \lim_{k \to \infty} A_k = \lim_{k \to \infty} inf\{a_{k+n}\}$$
$$B = \lim_{k \to \infty} B_k = \lim_{k \to \infty} sup\{a_{k+n}\}$$

دېمەك، بۇيەردىكى A, B لار $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ نىڭ ئاستى لىمىتى ۋە ئۈستى لىمىتى دەپ ئاتىلىدۇ. شۇنىڭ بىلەن يىغىلىدىغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ۋە ئۇنىڭ چېگرىسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت لىمىت بىلەن باغلانغان بولىدۇ. سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ لىمىتى ۋە ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى لىمىتلىرىنى ئارىلاشتۇرۇۋېتىشكە بولمايدۇ. ئاستى ئۈستى لىمىتلىرىنى مەۋجۇت بولسا سانلارنىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولۇشى ناتايىن. مەسىلەن تۆۋەندىكى رەسىمدە:





سىنۇس فۇنكسىيەلىك سانلار ئارقىمۇ ئارىلىقىنىڭ لىمىتى يوق، ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى چېكى بار، 1 ۋە $1-$ دەل ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى چېكى، شۇنداقلا ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى لىمىتلىرى بار. ئوخشاشلا سول تەرەپتىكى رەسىمدىكىدەك، e^{-x} فۇنكسىيەلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ ئاستى چېكى بار، ئاستى لىمىتى بار يەنى 0 ، ئەمما ئۈستى لىمىتى يوق. شۇڭا ئۆزگەرگۈچى مىقدار x چەكسىزلىككە يۈزلەنگەندە ئۇنىڭ لىمىتى بار، بۇ دەل ئۇنىڭ ئاستى لىمىتى.

7.1.1 قاتار

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرسىدە سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ھەققىدە مۇناسىۋەتلىك بىلىملەرنى دەسلەپ ئۆگەنگەنمىز. ئۇ ۋاقىتتا پەقەت چەكلىك ئەزالىق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئۈستىدە، يەنە كېلىپ تەڭ ئايرىمىلىق ۋە تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئۈستىدىلا ئۆگىنىش ئېلىپ بېرىلاتتى. ئەمدىكى مەزمۇندا چەكسىز بولغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى «قاتار» ئۈستىدە مۇلاھىزە ئېلىپ بارىمىز.

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەققەتە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ۋە تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ئۈستىدە تەپسىلىي ئۇقتىلار يېزىلدى. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. قاتار دېگەن نۇرغۇنلىغان ئېلمېنتلارنىڭ يىغىندىسىدىن تەركىپ تاپقان ئىپادە بولۇپ، چەكسىز قاتار بولسا چەكسىز ئېلمېنتلار قاتارىنى كۆرسىتىدۇ.

ئېنىقلىما 7.1.1: قاتار

خالىغان سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ نىڭ ئېلمېنتلىرىنى قوشۇش ئەملى بىلەن ئۇلاپ يېزىپ ھاسىل بولغان ئىپادە ئىپادە چەكسىز قاتار دەپ ئاتىلىدۇ(قىسقارتىلىپ قاتار دېيىلىدۇ).ماتېماتىكىدا

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

قىلىپ خاتىرلىنىدۇ.

ئېنىقلىمىدىكى u_n قاتارنىڭ **ئومۇمىي ئەزاسى** دەپ ئاتىلىدۇ. ئالدىنقى n ئەزاسىنىڭ يىغىندىسى **قىسمەن يىغىندى** دەپ ئاتىلىدۇ، ھەم $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$ قىلىپ خاتىرلىنىدۇ.

ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار ئەگەر قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى u_n تۇراقلىق سان بولسا، بۇ خىلدىكى قاتارنىڭ ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار دەپ ئاتايمىز. مەسىلەن: $\sum_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$, $\sum_{n=1}^{\infty} = 1 + 2 + ... + n + ...$ ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار ھېساپلىنىدۇ.

7.1.2 قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ۋە خۇسۇسىيىتى

يىغىلىشچانلىقى ئەگەر قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n نىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولسا، بۇ قاتار **يىغىلىدۇ** دەپ ئاتىلىدۇ. يەنى، ئەگەر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$، ئۇنداقتا $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. ئەگەر قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n نىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولمىسا، ئۇنداقتا بۇ قاتار **يىراقلىشىدۇ** دەپ ئاتىلىدۇ.

قاتارنىڭ يىغىلىش ۋە يىراقلىشىنىڭ يۈزەكى مەنىسى بولسا، يىغىلغاندا ئۇنىڭ يىغىندىسىنىڭ چېكى بار، يىراقلاشقاندا ئۇنىڭ يىغىندىسىنىڭ چېكى يوق.

خۇسۇسىيىتى قاتارنىڭ ئېنىقلىمىسى ۋە يىغىلىشچانلىقىغا ئاساسەن تۆۋەندىكى بىرقانچە خۇسۇسىيەتلەرگە ئېرىشەلەيمىز.

خۇسۇسىيەت 7.1.1: قاتار يىغىلىشىنىڭ زۆرۈر شەرتى

ئەگەر قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ يىغىلسا، ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزاسىنىڭ لىمىتى $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ چوقۇم مەۋجۇت ھەم نۆلگە تەڭ.

بۇنىڭ سەۋەبىنى قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n دىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ.

ئېنىقلىمىغا ئاساسەن قاتار يىغىلسا ئۇنىڭ قىسمەن يىغىندىسىنىڭ لىمىتى بار ئىدى، $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ھەم $u_n = S_n - S_{n-1}$ شۇڭا $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

شۇنى ئەسكەرتىشكە تېگىشلىكى بۇ پەقەت زۆرۈر شەرت، يېتەرلىك شەرت ئەمەس، شۇڭا ئومۇمىي ئەزانىڭ لىمىتى 0 بولسا، قاتارنىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولىشى ناتايىن. مەسىلەن تۆۋەندىكى قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزا لىمىتى بار يەنى $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، ئەمما قاتار يىغىلمايدۇ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = +\infty$$

خۇسۇسىيەت 7.1.2: يىغىلىشچان قاتارنىڭ سىزىقلىق خۇسۇسىيىتى

ئەگەر قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ۋە $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ يىغىلسا، ئۇلارنىڭ سىزىقلىق ھېساپلاشلىرى

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n \pm \beta v_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

ئوخشاشلا يىغىلىدۇ. بۇ يەردە α, β لار خالىغان ھەققىي سان.

بۇ خۇسۇسىيەتكە ئىسپاتلاش ياكى چۈشەنچە بېرىلمەيدۇ، چۈنكى سىزىقلىق ئالگېبرادىكى ئىدىيە بويىچە تۇراقلىق سان بىلەن سىزىقلىق ھېساپلاش ئېلىپ بېرىلغان قاتارنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى ئۆزگەرمەيدۇ.

خۇسۇسىيەت 7.1.3: يىغىلىشچان قاتارنىڭ تىرناق خۇسۇسىيىتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ يىغىلسا، ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزالىرىنىڭ خالىغان يېرىگە خالىغان تىرناق قويسا، ئۇنىڭ يىغىلىشچانلىقى ئۆزگەرمەيدۇ. يەنى $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلسا، $(u_1+u_2+...+u_{i_1})+(u_{i_1+1}+u_{i_1+2}+....+)+...$ ئوخشاشلا يىغىلىدۇ.

تىرناقنىڭ ماتېماتىكىدىكى رولى ئەمەللەر تەرتىپىنى ئۆزگەرتىش بولغاچقا، بۇ يەردىكى تىرناق خۇسۇسىيىتى دەل يىغىلىشچانلىق، قاتار ئۇنىڭ ئەزالىرىنىڭ جەملىنىش تەرتىپى بىلەن مۇناسىۋەتسىزلىكى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ. بۇ خۇسۇسىيەتمۇ كۆپ ئىشلىتىلىدۇ.

مەسىلەن $\sum_{n=1}^{\infty} 1-1+1-1+1-...+1-1+.....$ بۇ قاتار يىغىلمايدۇ، لىمىتى مەۋجۇت ئەمەس. ئەمما ھەر ئىككى ئومۇمىي ئەزاسىنى تىرناقتا ئالساق

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+.... = 0+0+..0+.. = 0$$

دېمەك تىرناق ئالغاندىن كېيىن يىغىلمايدىغان قاتار يىغىلىدىغان بولۇپ قالدى. شۇڭا تىرناقنىڭ رولىنى بوش چاغلاشقا بولمايدۇ ھەم قالايمىقان تىرناق قويۇشقىمۇ بولمايدۇ.

كۆرسەتمە

گېئومېتىرىيەلىك قاتار تولىمۇ مۇھىم قاتارلارنىڭ بىرى بولۇپ، ئىنتايىن كۆپ ئۇچرايدۇ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a+aq+aq^2+...+aq^n+...(a\neq 0)$$

ئالدىنقى n ئەزا يىغىندىسى $(q\neq 1)$ ، $S_n = a+aq+aq^2+...+aq^n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ شۇڭا بۇنىڭ يىغىلىشچانلىقى ۋە يىراقلىشىشچانلىقى تۆۋەندىكىچە بولىدۇ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} |q|<1, & \text{يىغىلىدۇ} \\ |q|\geqslant 1, & \text{يىراقلىشىدۇ} \end{cases}$$

7.1.3 مۇسبەت قاتار

خالىغان قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ئەگەر ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى u_n بىردەك مۇسبەت بولسا، بۇ قاتارنى مۇسبەت قاتار دەپ ئاتايمىز. يەنى

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n\geq 0$$

ئەگەر بىردەك مەنپىي بولسا، بۇ قاتارنى مەنپىي قاتار دەپ ئاتايمىز. مۇسبەت قاتارمۇ قاتار بولۇش سۈپىتى بىلەن، ئالدىنقى مەزمۇندىكى خۇسۇسىيەتلەرنى تامامەن كۆچۈرۈپ ئەكىلىشكە بولىدۇ.

مۇسبەت قاتارنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسىمۇ مۇسبەت بولىدۇ، ھەم ئاشقۇچى فۇنكسىيە خۇسۇسىيەتتە بولىدۇ.(بۇ دەل مۇسبەت سانغا مۇسبەت سان قېتىلسا چوقۇم مۇسبەت بولىدىغانلىقىنىڭ مىسالى).

تېئورېما 7.1.1: مۇسبەت قاتار يىغىلىشچانلىقىنىڭ يېتەرلىك زۆرۈر شەرتى

ئەگەر مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلسا، ئۇنىڭ قىسمىي يىغىندىسىنىڭ چېكى بار. يەنى

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلىدۇ $\Leftrightarrow \{S_n\}$ قىسمىي يىغىندىنىڭ چېكى بار

دېمەك، مۇسبەت قاتارغا نىسبەتەن، ئەگەر ئۇ يىغىلسا ئۇنىڭ ئالدىنقى n ئەزا يىغىندىسىنىڭ چېكى بولسىلا كۇپايە. سەۋەبى مۇسبەت قاتارنىڭ قىسمىي يىغىندىسى ئاشقۇچى فۇنكسىيەدۇر.

مۇسبەت قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى مۇسبەت قاتار كەڭ قوللىنىلىدىغان بولۇپ، ئۇنىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش تولىمۇ مۇھىم. تۆۋەندە بىرقانچە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇلى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز.

تېئورما 7.1.2: سېلىشتۇرۇپ ئېنىقلاش ئۇسۇلى

ئەگەر ئىككى مۇسبەت قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ئەگەر مەلۇم ئەزادىن باشلاپ بارلىق ئەزالاردا $u_n \le v_n$ قۇرۇلسا، ئۇنداقتا:

$$\text{ئەگەر } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ يىغىلسا } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ مۇ يىغىلىدۇ}$$

$$\text{ئەگەر } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ يىراقلاشسا } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ مۇ يىراقلىشىدۇ}$$

بۇنىڭ يۇزەكى مەنىسى: چوڭى يىغىلسا كىچىكمۇ يىغىلىدۇ، كىچىكى يىراقلاشسا چوڭمۇ يىراقلىشىدۇ.

مەشىق ـ 1

گارمونىك قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش.

$$\because x > 0, x > \ln(1+x), \therefore \frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ھەم يەنە $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

شۇڭا $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ يىراقلىشىدۇ. شۇڭا $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مۇ يىراقلىشىدۇ.

تېئورما 7.1.3: نىسبەتلىك ئېنىقلاش ئۇسۇلى(دالانبېرت ئۇسۇلى)

مۇسبەت قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ قوشنا ئومۇمىي ئەزالىرىنىڭ نىسبىتى ئارقىلىق ھۆكۈم قىلىش. يەنى

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} < 1, & \text{يىغىلىدۇ} \\ = 1, & \text{بىلگىلى بولمايدۇ} \\ > 1, & \text{يىراقلىشىدۇ} \end{cases}$$

بۇ يەردىكى نىسبەت دەل ئۇنىڭ چوڭ كىچىكلىكىنىڭ بىۋاستە ئىپادىسىدۇر. نىسبىتى چوڭ، دېمەك كېيىنكى ئەزا ئالدىنقىسىدىن چوڭ، يەنى ئەزالار ئېشىۋاتقانلىقىنىڭ بەلگىسى. ئەلۋەتتە ئۇ بارغانسېرى يىراقلىشىدۇ.

مەشىق ـ 2

قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n n!}{n^n}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ. بۇيەردە $a \neq 0$

شۇڭا، $u_n = \frac{|a|^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |a| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = |a| e^{\lim\limits_{n\to\infty} n \ln \frac{n}{n+1}} = |a| e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)} = |a| e^{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-n}{n+1} - 1\right)} = |a| e^{-1} = \frac{|a|}{e}$$

شۇڭا a ۋە e نىڭ چوڭ كىچىكلىكى بويىچە ھۆكۈم قىلىمىز.

ئەگەر $0 < |a| < e$ ئۇنداقتا يىغىلىدۇ.

ئەگەر $|a| \ge e$ يىراقلىشىدۇ.

تېئورما 7.1.4: (كوشى ئۇسۇلى)يىلتىزلىك ئېنىقلاش ئۇسۇلى

مۇسبەت قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ئومۇمىي ئەزا يىلتىز ئارقىلىق ھۆكۈم قىلىش. يەنى

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} < 1, & \text{يىغىلىدۇ} \\ = 1, & \text{بىلگىلى بولمايدۇ} \\ > 1, & \text{يىراقلىشىدۇ} \end{cases}$$

ناۋادا قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ يىغىلىدىغان قاتار ئۇنداقتا
ئەگەر ئۇنىڭ مۇتلەق قىممەت قاتارى $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ مۇ يىغىلسا، بۇ قاتارنى **مۇتلەق يىغىلىشچان قاتار** دەيمىز.
ئەگەر مۇتلەق قىممەت قاتارى يىغىلمىسا **شەرتلىك يىغىلىشچان قاتار** دەيمىز.

3 ـ مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

$u_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ شۇڭا،

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n^(n\sin\frac{1}{n}-1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}} = e^{-\frac{1}{6}} < 1$$

شۇڭا يىغىلىدۇ.

يۇقارقى كوشى ئېنىقلاش ئۇسۇلىدىكى مىسالدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئومۇمىي ئەزا شەكلى a^n, n^n بولغان قاتاردا كۆپ ئىشلىتىلىدۇ، قىسقىسى كوشى ئۇسۇلىدا دەرىجىنى يوقاتقىلى بولىدۇ.

تېئورما 7.1.5: ئىنتېگرال ئۇسۇلى

ئەگەر مۇسبەت قاتار

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

غا نىسبەتەن، ئىنتېرۋال $[1, +\infty]$ دا مونوتون كېمەيگۈچى فۇنكسىيە $f(x)$ مەۋجۇت بولسا، ھەممە $u_n = f(n)$ بولسا, ئۇنداقتا بۇ مۇسبەت قاتار ۋە غەيرىي نورمال ئىنتېگرال

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

ئوخشاش خۇسۇسىيەتتە بولىدۇ، يەنى ئۇلارنىڭ يىغىلىش ۋە يىراقلىشىش خۇسۇسىيىتى ئوخشاش.

يۇقارقى تېئورمىدا، بىۋاستە فۇنكسىيىدىن پايدىلىنىپ قاتارنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىشتا ناھايىتى كۆپ ئىشلىتىلىدۇ. نۇرغۇن مەسىلىلەرنى مۇشۇنىڭدىن پايدىلىنىپ يېشىشكە بولىدۇ.

4 ـ مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقى.

ئەگەر سېلىشتۇرۇش ئۇسۇلى ياكى نىسبەت ئۇسۇلى ئىشلەتسەك، ياكى بولمىسا كوشى ئۇسۇلى ئىشلەتسەك يۇقارقى قاتارنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئېنىقلاپ چىققىلى بولىسمۇ، ئىنتېگرال ئۇسۇلى ئارقىلىق تېخىمۇ تېز ھەم چۈشىنىشلىك ئېنىقلاپ چىققىلى بولىدۇ.
فۇنكسىيە $f(x) = \frac{1}{x^p}$
ئېنىقكى $u_n = f(n)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\begin{cases}\ln(n) = +\infty, & p = 1, \text{يىراقلىشىدۇ} \\ \frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p > 1, \text{يىغىلىدۇ} \\ +\infty, & p < 1, \text{يىراقلىشىدۇ}\end{cases}\end{cases}$$

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى ئىنتېگرال ئۇسۇلىنى پىششىق بىلىش زۆرۈردۇر، چۈنكى ئۇ قاتار بىلەن فۇنكسىيەنى باغلاپ تۇرىدۇ.

7.1.4 ئالماش قاتار ۋە خالىغان قاتار

ئالماش قاتار دېگەن پلوس منوس ئەزالىرى ئالمىشىپ كېلىدىغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. چۈنكى -1 ئۆز ئۆزى كۆپەيگەندە ئالامىتى ئۆزگىرىدىغان بولغاچقا، شۇڭا ئالماش قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$$

$$u_n > 0, (n = 1, 2, \ldots)$$

ئالماش قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشتا تۆۋەندىكى بىرلا ئۇسۇلنى ئىگەللەش يېتەرلىك.

تېئورما 7.1.6: لېيبنىز ئېنىقلاش ئۇسۇلى

ئەگەر ئالماش قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ تۆۋەندىكى ئىككى شەرتنى ھازىرلىسا:

- $\forall n \in N^+, u_n \geq u_{n+1}$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

ئۇنداقتا بۇ ئالماش قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ يىغىلىدۇ.

بىرىنچى شەرتتىن بۇ قاتارنىڭ كېمەيگۈچى قاتار ئىكەنلىكىنى كۆرۈۋالغىلى بولىدۇ. ئىككىنچى خۇسۇسىيەتتىن بۇقاتارنىڭ 0 گە يىغىلىدىغانلىقى چىقىپ تۇرۇپتۇ.

5 ـ مەشىق

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ كۆرۈۋالغىلى بولىدۇكى

ئەمدى $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ بولغاندا، $f'(x) = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0, (x \geq 2)$

دېمەك، $f(x)$ نىڭ ھاسىلىسى 0 دىن كىچىك، مونوتون كېمەيگۈچى فۇنكسىيە،

شۇڭا $u_n = f(n) > f(n+1) = u_{n+1}$ شەرتنى قانائەتلەندۈرىدۇ، شۇڭا بۇ قاتار يىغىلىدۇ.

خالىغان قاتار بۇ يەردىكى خالىغان سۆزى قاتارنىڭ ئەزاسىنىڭ خالىغان ئىكەنلىكىنى بىلدۈرىدۇ. يەنى مەيلى قاتارنىڭ ئەزاسى مۇسبەت ياكى مەنپىي ۋە ياكى نامەلۇم سان بولسۇن، خالىغان قاتار ئۇقۇمىغا تەۋە. لېكىن ئەمەلىي قوللىنىشتا كۆپ ھاللاردا مەلۇم ئورتاق خۇسۇسىيەتكە ئىگە، مەيلى قانداقلا بولسۇن بۇ يەنىلا كونكرېت مەسىلىگە تايىنىدۇ.

7.2 فۇنكسىيە قاتارى

7.2.1 فۇنكسىيە قاتارى

فۇنكسىيە قاتارى كەڭ دائىرىدىكى قاتارنى ئۆزئىچىگە ئالغان بولۇپ، بىر قەدەر ئومۇملىققا ئىگە. دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$
$$u_n(x), (n = 1, 2, \ldots)$$

ئوخشاشلا فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزا، قىسمىي يىغىندا قاتارلىقلار ئالدىنقى بابتىكى ئېنىقلىما بىلەن ئوخشاش، شۇڭا قايتا تەكرارلانمايدۇ.

فۇنكسىيە قاتارى بىلەن ئادەتتىكى قاتارنىڭ ماھىيەتلىك پەرقى دەل ئۇنىڭ ئومۇملىقى ئەزاسىدا. ئادەتتىكى قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى تۇراقلىق سان بولىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئادەتتىكى ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيەسى بولىدۇ. مەيلى ئادەتتىكى قاتار بولسۇن ياكى فۇنكسىيە قاتار بولسۇن، ئۇلار ئوخشاش قائىدە قانۇنىيەتلەرگە بويسۇنىدۇ. ئاددى قىلىپ ئېيتقاندا، فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئۆزگەرگۈچى مىقدارى مەلۇم بىر ئېنىق قىممەتنى ئالغاندا دەل ئادەتتىكى قاتار بولىدۇ.

7.2.2 دەرىجىلىك قاتار

شەكلى .... $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_n)^n + \ldots$ بولغان قاتارنى دەرىجىلىك قاتار دەپ ئاتايمىز. ئەگەر بۇيەردىكى $x_0 = 0$ بولغاندا، قاتارنىڭ شەكلى ... $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ بولىدۇ. دېمەك سىزىقلىق ئالماشتۇرۇش $t = x - x_0$ ئارقىلىق ئادەتتىكى دەرىجىلىك قاتارنىڭ ... $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ شەكلىگە ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ. شۇڭا بۇ بۆلەكتىكى دەرىجىلىك قاتار پەقەت $x_0 = 0$ بولغان ئادەتتىكى دەرىجىلىك قاتارنىلا كۆرسىتىدۇ. ئەلۋەتتە دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش يىغىلماسلىق خۇسۇسىيەتلىرى ئىلگىرىكى بىلەن بىردەك، تۆۋەندە بىرنەچچە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇللىرى خاتىرلەندى.

تېئورما 7.2.1: ئابېل بىرىنچى تېئورمىسى

ئەگەر دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مەلۇم بىر نۇقتا $x = x_0, (x_0 \neq 0)$ دە يىغىلسا، ئۇنداقتا بارلىق $|x| < |x_0|$ نۇقتىلاردا، بۇ دەرىجىلىك قاتار مۇتلەق يىغىلىدۇ.ئەگەر مەلۇم بىر نۇقتا $x = x_0$ دە يىراقلاشسا، ئۇنداقتا بارلىق $|x| > |x_0|$ نۇقتىلاردا قاتار يىراقلىشىدۇ.

ئابېل تېئورمىسىدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئەگەر قاتار مەلۇم نۇقتا x_0 دە يىغىلسا، ئۇنداقتا $\frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{3}, \ldots,$ نۇقتىلاردا تامامەن يىغىلىدۇ. دىمەك ئىنىق بىر دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىدىغان نۇقتىسى پەقەت بىردىن-بىر ئەمەس. ئەمما مۇشۇ يىغىلىشچان نۇقتىلارنىڭ مۇتلەق قىممىتىنىڭ ئەڭ يۇقىرى چېكى بولىدۇ، بىز بۇ چېكىنى دەرىجىلىك قاتارنىڭ **يىغىلىش رادىئۇسى** دەپ ئاتايمىز، ئادەتتە R ھەرپى بىلەن ئىپادىلەيمىز. يىغىنچاقلىساق:

$$\sup\{\text{قىممىتى مۇتلەق نۇقتىلارنىڭ يىغىلىشچان بارلىق } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\} = R$$

$$|x| < R \quad \text{يىغىلىدۇ}$$

$$|x| > R \quad \text{يىراقلىشىدۇ}$$

$$|x| = R \quad \text{بىلگىلى بولمايدۇ}$$

دىمەك، رادىئۇس ئېنىقلانغاندىن كېيىن، يېپىق ئىنتېرۋال $(-R, +R)$ نى قاتارنىڭ **يىغىلىش ئىنتېرۋالى** دەپ ئاتايمىز. رادىئۇس نۇقتىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئىنتېرۋال، قاتارنىڭ **يىغىلىش دائىرىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.
رادىئۇس نۇقتىسىدا، قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ئايرىم ھۆكۈم قىلىنىشى كېرەك. ئەگەر رادىئۇس نۇقتىسى $x = -R, x = +R$ دا قاتار يەنىلا يىغىلسا، قاتارنىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋالى ئوچۇق ئىنتېرۋال بولىدۇ، يەنى $[-R, +R]$ ،بۇ ئارقىلىق قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرىسىنى ئېنىقلىغىلى بولىدۇ.

تېئورما 7.2.2: كوشى خادامارد تېئورمىسى

دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n\to} a_n x^n$ غا نىسبەتەن، $\sup\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ بولسا، ئۇنداقتا بۇ قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى:

$$R = \frac{1}{\rho} = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \end{cases}$$

ئادەتتە يۇقارقى تېئورمىدىن پايدىلىنىپ دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسىنى تاپقىلى بولىدۇ. بولۇپمۇ بۇيەردە $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\lim_{n\to\infty} = \rho$ بويىچە ئىلىنسا بولىدۇ.

6 ـ مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ نىڭ يىغىلىش دائىرسىنى تېپىڭ،

رادىئۇس تېپىش فورمۇلىسىدىن بىلىۋالغىلى بولىدۇكى:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n2^{n+1}}{(n+1)2^n}| = 2\lim_{n\to\infty} |\frac{n}{n+1}| = 2$$

شۇڭا قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$ يىغىلىش ئىنتېرۋالى $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ بولىدۇ.

ئەگەر $x = +\frac{1}{2}$ بولغاندا، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(\frac{1}{2})^n$ شۇڭا بۇ نۇقتىدا قاتار يىراقلىشىدۇ.

ئەگەر $x = -\frac{1}{2}$ بولغاندا، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(-\frac{1}{2})^n$ شۇڭا بۇ نۇقتىدا قاتار يىغىلىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرىسى $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ئويلىنىش: فۇنكسىيە $f(x)$ نى، دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ بىلەن ئىپادىلەش مۇمكىنمۇ؟

7.2.3 فۇنكسىيەلىك يېيىش

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نى، دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ بويىچە يايغىلى بولسا، يەنى $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ئۇنداقتا بۇ قاتار، فۇنكسىيەنىڭ يېيىلمىسى دەپ ئاتىلىدۇ. داڭلىق تەيلور يېيىلمىسى دەل مۇشۇنداق يېيىشتۇر.

ئېنىقلىما 7.2.1: تەيلور قاتارى

ئەگەر خالىغان دەرىجىدە ھاسىلىسى بار بولغان فۇنكسىيە $f(x)$ نى، يىغىلىش رادىئۇسى R بولغان نۇقتا x_0 نىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋالى (x_0-R,x_0+r) دا دەرىجىلىك فۇنكسىيە بويىچە يايغىلى بولسا، ئۇنداقتا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ، نۇقتا x_0 دىكى تەيلور قاتارى دەپ ئاتايمىز. ئادەتتە $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ $f(x)$ قىلىپ خاتىرىلەيمىز. ئەگەر $x_0=0$ بولغاندا، بۇ قاتارنىڭ فۇنكسىيەنىڭ ماكروۋىن قاتارى دەپ ئاتايمىز.

بۇ بىزگە قانداق قۇلايلىق ئېلىپ كېلىدۇ دېگەندە، مەيلى بىر مۇرەككەپ فۇنكسىيە بولسۇن، ئۇنى ئاددىي بولغان نۇرغۇن ئۇششاق فۇنكسىيەلەرگە پارچىلىغىلى بولىدىغانلىقنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ. بۇ خىل ئىدىيە دەل كېيىنكى مەزمۇندىكى فۇرىيې قاتارى، فۇرىيې ئالماشتۇرۇش قاتارلىقلاردا كەڭ ئۇچرايدۇ.

كۆپ ئىشلىتىلىدىغان تەيلور يېيىلمىلار ئېلمېنتار فۇنكسىيەلەرنىڭ كۆپىنچىسى چەكسىز ھاسىلىسى بار بولۇپ، ئۇلارنى 0 نۇقتىدا دەرىجىلىك قاتارغا يايغاندا، بىرتۇركۇم گۈزەل نەتىجىلەرگە ئېرىشەلەيمىز، ئاساسلىق تۆۋەندىكىچە:

1. $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots\ -\infty<x<+\infty.$
2. $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots\ -1<x<1.$
3. $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1.$
4. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\leqslant 1.$
5. $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2x+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\ -\infty<x<+\infty.$
6. $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$
7. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots\begin{cases}x\in(-1,1), & \alpha\leqslant -1\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0\\ x\in[-1,1], & \alpha>0\end{cases}.$

ئادەتتىكى فۇنكسىيىلەر مەلۇم ئىنتېرۋالدا يىغىلسا، ئۇنداقتا ئۈستىدىكى يەكۈنلەر بويىچە فۇنكسىيە قاتارغا يېيىشقا بولىدۇ.

7 ـ مەشىق

فۇنكسىيە $f(x)=\arctan x$ نىڭ $x=0$ بولغاندىكى فۇنكسىيە يېيىلمىسىنى تېپىڭ.

$$,|-x^2|<1\quad f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}.$$

شۇڭا، ئاۋال ئىنتېگىراللاپ كېيىن دىففېرىنسىئاللاش ئارقىلىق:

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

7.3 ترىگونومېترىيىلىك قاتار

فۇرىيېر قاتارى ترىگونومېترىيىلىك قاتار، ئادەتتە فۇرىيېر قاتارنى ترىگونومېترىيىلىك قاتارمۇ دەپ قويىدۇ. ئەمما ترىگونومېترىيىلىك قاتار فۇرىيېر قاتارى ئەمەس، شۇڭا بىز بۇ بۆلەكتە ئاۋال ترىگونومېترىيىلىك قاتار بىلەن تونۇشۇپ چىقايلى، شۇ ئارقىلىق فۇرىيې قاتارنى چۈشىنىشىمىز تېخىمۇ ئاسانلاشقۇسى.

7.3.1 ترىگونومېترىيىلىك قاتار

شەكلى تۆۋەندىكىدەك:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

بولغان قاتارنى ترىگونومېترىيىلىك قاتار دەپ ئاتايمىز.
قىسقىسى ترىگونومېترىيىلىك قاتارنىڭ ئېنىقلىمىسىدا كۆرۈنۈپ تۇرۇپتىكى، ترىگونومېترىيىلىك قاتار ئىلگىرى خاتىرلەنگەن فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئالاھىدە بىر تۈرى، بۇنىڭدا فۇنكسىيە پەقەت سىنۇس ۋە كوسىنۇس فۇنكسىيەلەرنىڭ ئاددىي سىزىقلىق بىرىكمىسى خالاس. سىنۇس كوسىنۇس فۇنكسىيەلىرنىڭ دەۋرىيلىك خۇسۇسىيىتىدىن تۆۋەندىكىدەك خۇسۇسىيەتكە ئېرىشىمىز:

ئېنىقلىما 7.3.1: ئورتوگونال فۇنكسىيە

ئەگەر ئىككى فۇنكسىيە $f(x)$ ۋە $g(x)$ تۆۋەندىكى ئىپادە قۇرۇلسا،

$$\int_a^b f(x)g(x) = 0$$

ئۇنداقتا بۇ ئىككى فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $[a, b]$ دە ئورتوگونال دەپ ئاتىلىدۇ.

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىستېمىسى $1, \cos x \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., ... \cos nx, \sin nx, ...$ ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ دا ئورتوگونال.

ئورتوگونال ئۇقۇمىنىڭ چۈشىنىشلىك ئىپادىلىنىشى: تىك كېسىشىش.
فۇنكسىيە تىك كېسىشتى دېمەك، فۇنكسىيە ئىنتېرۋالدا ئىنتېگرالى نۆل بولىدۇ، ئەگەر بۇ فۇنكسىيەدىن تۈزۈلگەن بوشلۇق بار بولسا، ئورتوگونال فۇنكسىيە سىستېمىسى دەلبۇ بوشلۇقنىڭ ئاساسى بولىدۇ. دېمەك ئاساس فۇنكسىيەلەردىن پايدىلىنىپ بۇ بوشلۇقتىكى خالىغان فۇنكسىيەنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ. داڭلىق ھىلبىرت بوشلۇقى دەل مۇشۇنىڭ كېڭەيتىلىشى.

7.3.2 فۇرىيېر قاتارى

ئاۋال تۆۋەندىكى ئېنىقلىمىنى كۆرۈپ چىقايلى.

تېئورما 7.3.1: ترىگونومېترىيىلىك قاتار تېئورمىسى

دەرىجىلىك قاتارئەگەر خالىغان فۇنكسىيە $f(x)$ نى $[-\pi, \pi]$ دائىرە ئىچىدە تەكشى يىغىلىدىغان تروگونومېترىيىلىك قاتار شەكلىدە يايغىلى بولسا، يەنى:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), |x| < \pi$$

ئۇنداقتا بۇ قاتارنىڭ بارلىق كويفېتسېنتلىرى بىردىنبىر ئېنىق بولىدۇ. يەنى:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0, 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, 3, ...$$

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نى ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ ئىچىدە ئىنتېگرالللىغىلى بولسا، ئۇنداقتا:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0, 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, 3, ...$$

نى فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ فۇرىيې كوئېففتسېنتى دەپ ئاتايمىز. فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيې كوئېففتسېنتى بىلەن تۈزۈلگەن تروگونومېترىيىلىك قاتار دەل فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيې قاتارى دەپ ئاتىلىدۇ.
يۇقىرىدا فۇنكسىيە $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ ئىچىدە ئىنتېگراللىغىلى بولىدۇ دېگەن، ناۋادا ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ دەۋرىيسى $2l$ بولۇپ $[-l, l]$ ئىچىدە فۇرىيې قاتارى بويىچە يايساقلا بولىدۇ، بۇ يەردىكى l كەڭ مەنىدە بولۇپ، π دىن باشقا ھەرقانداق سان بولسا بولىدۇ. بىز مىقدار ئالماشتۇرۇش، تاق-جۈپ يېيىش قاتارلىق تاكتىكىلاردىن پايدىلىنىپ بۇنىمۇ ئەمەلگە ئاشۇرالايمىز.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$$
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, 3, ...$$

فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىلىشچانلىقى خالىغان فۇنكسىيەنى فۇرىيې قاتارى بىلەن يايغىلى بولمايدۇ، دەۋرىي ھەم يىغىلىشچان بولۇش شەرتى قاتتىق شەرت بولۇپ، فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىلىشچانلىقىنى تەتقىق قىلىشقا توغرا كېلىدۇ. شۇڭا تۆۋەندىكى ئېنىقلىمىنى كۆرۈپ چىقايلى.

تېئورما 7.3.2: يىغىلىش تېئورمىسى

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ دەۋرىيسى 2π بولغان ھەم $[-\pi,\pi]$ دا سىلىق بولسا، ئۇنىڭ فۇرىيې قاتارى يىغىلىدۇ، ھەمدە فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىندى فۇنكسىيەسى:

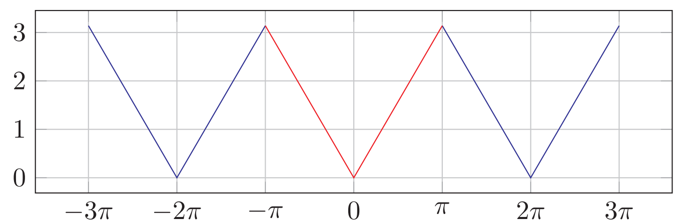
$$S(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ئۈزلۈكسىز سىلىق نۇقتىدا} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{ئۈزۈك نۇقتىدا} \\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi \end{cases}$$

تېئورمىدا دېمەكچى، دەۋرىي بولۇپلا قالماي سىلىق بولۇشى شەرت، يەنى ھېچقانداق ئۈزۈك نۇقتىسى بولماسلىقى كېرەك. ئادەتتە فۇنكسىيەنى فۇرىيې قاتارغا يايغاندا، ئېنىقلىما ساھەسىنى كېڭەيتىشمۇ مۇمكىن، بۇنىڭدا فۇنكسىيەنىڭ جۈپ-تاقلىقى بويىچە كېڭەيتىشكە بولىدۇ.

8 ـ مەشىق

فۇنكسىيە $f(x)=|x|, (-\pi\le x\le\pi)$ نى فۇرىيې قاتارغا يېيىڭ.

رەسىمدىكىدەك، دەۋرىي فۇنكسىيە گە يايىمىز. شۇڭا:



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin(nx)dx=0$$

شۇنىڭ ئۈچۈن:

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\quad |x|\le\pi$$

7.3.3 فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا فۇرىيې قاتارى خاتىرلەندى، ئەمدى بىز يەنە بىر مۇھىم نۇقتا **فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى** ھەققىدە توختىلىپ ئۆتىمىز. خالىغان دەۋرىيسى $2l$ بولغان دەۋرىي فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيې قاتارى:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}) \tag{7.1}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,2,\ldots \tag{7.2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,3,\ldots \tag{7.3}$$

كۆرسەتمە

ئەيلېر فورمۇلىسى كەڭ ئىشلىتىلىدىغان فورمۇلا بولۇپ، كومپلېكس ئۆزگەرگۈچى فۇنكسىيەدىكى ئىنتايىن مۇھىم فورمۇلانىڭ بىرىدۇر. مەلۇمكى i مەۋھۇم سان بىرلىكىدۇر، يەنى $i^2=-1$
ئەيلېر فورمۇلىسى:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

بۇنى تەيلور يېيىلمىسى ئارقىلىق كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانى قىسقارتىلدى.

فورمۇلا $1.1-1.3$ لارنى ئەيلېر فورمۇلىسى بىلەن بىرىكتۈرسەك:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right) - \frac{ib_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right] \\
&= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + C_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \quad C_0 = \frac{a_0}{2}, C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}
\end{aligned}
$$

دىمەك

$$
C_n = \frac{1}{2l}\left[\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx - i\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right] = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx
$$

C_n مۇ تېپىلدى، فۇرىيې قاتارى مەزمۇنىدا فۇنكسىيە دەۋرىنى $T = 2l$ دېگەن. شۇڭا $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ئىچىدە، فۇنكسىيە $f(x)$ نى يۇقىرىدا كەلتۈرۈپ چىقارغان فۇرىيې قاتارى فورمۇلىسى بويىچە مۇنداق يېزىشقىمۇ بولىدۇ:

$$
f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi x}{T}}
$$

فىزىكىلىق بىلىملەرگە ئاساسەن، بۇلۇڭلۇق تېزلىك ω ۋە دەۋرىي T ۋە چاستوتا f ئوتتۇرىسىدا مۇنداق مۇناسىۋەت بار:

$$
\begin{aligned}
\Delta\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}, &\quad \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} \\
T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, &\quad f = \frac{1}{T} = 2\pi\omega
\end{aligned}
$$

شۇڭا يەكۈنلەشكە بولىدۇكى:

$$
\begin{aligned}
f_T(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x} \\
C_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \\
f_T(x) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right)e^{in\omega x}
\end{aligned}
$$

ئۈستىدىكى ئۈز نۆۋەتتە يەنە **فۇرىيې دەرىجىلىك قاتارى** دەپ ئاتىلىدۇ، چۈنكى بۇنىڭ بارلىق ئەزالىرى e نىڭ دەرىجىسىنىڭ ۋەزنىلىك يىغىندىلىرىدىن تۈزۈلىدۇ.

> يۇقارقى فورمۇلا ۋە ئەيلېر فورمۇلاسىنىڭ گېئومېترىيەلىك مەنىسىدىن بىلىۋېلىشقا بولىدۇكى، فۇنكسىيە $f(x)$ نى نۆرغۇن چەمبەر بويىلما ھەركەت يايلىرىنىڭ ۋەزنىلىك يىغىندىسى دەپ قاراشقىمۇ بولىدۇ. ئەلۋەتتە بۇ فورمۇلا سىزىقلىق ئالگېبرادىكى بىلىملەر بىلەن تامامەن بىردەك.يەنى: سىزىقلىق بوشلۇقتا بىز بىر گورۇپا ئاساس ۋېكتورلارنى تاللاپلا، بۇ بوشلۇقتىكى بارلىق ۋېكتورلارنى مۇشۇ ئاساس ۋېكتورلارنىڭ سىزىقلىق بىرىكمە شەكلىدە ئىپادىلەپ چىقالايمىز.

ئادەتتە نۆرغۇن فونكسىيەلەرنىڭ دەۋرىيسى T ئېنىق مەۋجۇت بولمايدۇ، ئەمما بىز بۇلارنىڭ دەۋرىيسىنى چەكسىز دەپ قارىۋالساقلا بولىدۇ. شۇڭا ئۈستىدىكى: $\lim_{T\to+\infty} f_T(x) = f(x)$

$$
f(x) = \lim_{T\to+\infty} f_T(x) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right)e^{in\omega x}
$$

يۇقىرىدىكى لىمت نەزىرىيەسى ئاساسىدا بۇ ئىپادىگە قارىتا ئاددىيلاشتۇرۇش ئېلىپ بارىمىز. دەۋرىيسى چەكسىزلىككە قاراپ ماڭدى، دىمەك بۇلۇڭلۇق تېزلىكى نۆلگە قاراپ ماڭدى دېگەنلىك.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right)e^{in\omega x} \\
&= \lim_{\Delta\omega\to0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\omega_n x}dx\right)\Delta\omega
\end{aligned}
$$

چۈنكى $\Delta\omega \to 0(T \to +\infty)$ ۋەجىدىن، تۆۋەندىكىدەك ھادىسە مەۋجۇت:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\omega \to 0(T \to +\infty) \\
&\therefore \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \\
&\omega_n = n\omega \to \omega = \omega_n - \omega_{n-1} \\
&\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\omega_n x}dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)
\end{aligned}
$$

شۇڭلاشقا:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
\therefore f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega
\end{aligned}
$$

مانا ئەڭ ئاخىردىكى فورمۇلانى بىز فۇريې ئىنتېگرال فورمۇلاسى دەيمىز.

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-\infty, +\infty]$ مۇتلەق ئىنتېگراللىغىلى بولسا، يۇقىرىدىكى $F(\omega)$ نى بىز فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ فۇريې ئالماشتۇرۇشى دەيمىز. ھەم تۆۋەندىكىدەك خاتىرلەيمىز:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= F[f(x)] \\
F[f(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx
\end{aligned}
$$

مانا بۇ فۇريې ئالماشتۇرۇشى.

ئالماشتۇرۇشتى كېيىنكى فۇنكسىيەنى ئەسلىي فۇنكسىيە بىلەن بىرلەشتۇرۇپ فۇريې تەتۈر ئالماشتۇرۇشى دەپ ئاتايمىز. ھەم تۆۋەندىكىدەك خاتىرلەيمىز:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= F^{-1}[F(\omega)] \\
f(x) &= F^{-1}[F(\omega)] \\
F^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega
\end{aligned}
$$

فۇريې قاتارى ۋە فۇريې ئالماشتۇرۇشىنىڭ مۇناسىۋىتى: فۇريې قاتارى ئارقىلق ھەرقانداق دەۋرىي فۇنكسىيەنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ، ئەگەر فۇنكسىيە دەۋرىي فۇنكسىيە ئەمەس بولسا، ئۇنداقتا ئۇنىڭ دەۋرى چەكسىز ئىنتېرۋال ئىچىدە بولىدۇ. دەۋرى چەكسىزلىككە ماڭسا بۇلۇڭلۇق تىزلىق 0 گە قاراپ ماڭىدۇ شۇنداقلا ئاساس چاستوتىسى 0 گە قاراپ ماڭىدۇ، بۇ ۋاقىتتا چاستوتىسى داۋاملىق دىسكرېت ھالەتتە بولماي ئۈزلۈكسىز ھالەتتە بولىدۇ دە فۇريې ئالماشتۇرۇشى ئارقىلق داۋاملىق تەھلىل قىلغىلى بولىدۇ.

> فۇرىيېنىڭ قىياسى: ھەرقانداق دەۋرىي فۇنكسىيەنى تروگونومېترىيىلىك فۇنكسىيەلەرنىڭ يىغىندىسى يەنى فۇريې قاتارى ئارقىلق ئىپادىلىگىلى بولىدۇ.

7.3.4 دىسكرېت فۇريې ئالماشتۇرۇشى

يۇقىرىدىكى كۆپلىگەن باسقۇچلاردىن كېيىن، بىز ئېرىشكەن فۇريې دەرىجىلىك قاتارى ۋە فۇريې ئالماشتۇرۇشى تۆۋەندىكىدەك:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x} \\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega
\end{aligned}
$$

ئەمما ھېساپلاش ماشىنىسى پەقەت چەكلىك ئېقىمدىكى ئۇچۇرلارنى بىرتەرەپ قىلالايدۇ، يەنە كېلىپ ئۈزلۈكسىز دائىرىدىكى ئۇچۇرلارنى ئەسلا بىر تەرەپ قىلالمايدۇ. شۇڭا فۇريې ئالماشتۇرۇشنى چوقۇم چەكلىك بولغان دىسكرېت ھالەتكە ئايلاندۇرۇش كېرەك.

$$
e^{ki\frac{2\pi}{D}n}
$$

دىسكرېت ئالماشتۇرۇشى بىرتەرەپ قىلىدىغىنى دىسكرېت دەۋرىي سىگنال. ئالايلۇق بىر سىگنال تەرتىپلىرى $\{x[1], x[2], x[3], \ldots\}$ دەۋرىيسىنى D دەپ قارايلى، ئۇنداقتا خالىغان پۈتۈن سان r غا نىسبەتەن، بىر پۈتۈن دەۋرىي ئىچىدىكى سىگناللار تەڭداش، يەنى $x[n] = x[n + rD]$.

ئۈزلۈكسىز سىگنال مەيداندا فۇريې بوشلۇقىدىكى ئاساس $e^{ki\omega t}$ بولۇپ، k پۈتۈن سانى ئىپادىلەپ ئوخشىمىغان ئاساسنى بەلگىلەپ قويىدۇ، t بولسا ۋاقىت ئۈزلۈكسىز مىقدارى.

ھازىر بىزنىڭ قىلىدىغىنىمىز دىسكرېت ھەم دەۋرىي سىگنال، دەۋرىيسى D ، شۇڭا ۋاقىت مىقدار دىسكرېت سىگنال تەرتىپى n گە ئايلىنىدۇ. شۇنىڭ بىلەن بۇ دىسكرېت بوشلۇقتىكى ئاساس $e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$ غا ئۆزگىرىدۇ. شۇڭا فۇريې ئالماشتۇرۇشى تۆۋەندىكىدەك ئۆزگىرىدۇ:

ئۈزلۈكسىز: ئەسلىدىكى سىگنال $f(x)$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ki\omega t}dt, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ki\omega t}$$

دىسكرېت: ئەسلىي سىگنال $x[n]$

$$X_k = \sum_{n=0}^{D-1} x[n]e^{-ki\frac{2\pi}{D}n}$$

$$x[n] = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} X_k e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$$

بۇ يەكۈنگە ئەيلېر فورمۇلاسىنى بىرلەشتۈرۈپ $w = e^{2\pi i/D} = \cos\frac{2\pi}{D} - i\sin\frac{2\pi}{D}$ $x = FX$ شەكلىدىكى سىزىقلىق تەڭلىمىلەر سىستېمىسىغا ئېرىشەلەيمىز، يەنى:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[X-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

ئەلۋەتتە، ئۈستىدىكى ماترىسسا ۋاندېرموند ماترىسسا ۋە ياكى فۇرىيې ماترىسسا دەپمۇ ئاتىلىدۇ. مۇشۇ ماترىسسانىڭ خۇسۇسىيىتى دەل دىسكرېت فۇرىيې ئالماشتۇرۇشنىڭ ئالاقە رەقەملىك ئۇچۇرنى بىرتەرەپ قىلغىلى بولىدىغان بولمايدىغانلىقىنى بەلگىلەپ قويىدۇ. ناۋادا بۇ ماترىسسانىڭ شەكلى ئىنتايىن مۇرەككەپ ھەتتا ئەكس ماترىسساسى مەۋجۇت ئەمەس، ئۇنداقتا بۇنىڭ چوڭ كېرىكى قالمايدۇ. ئەلۋەتتە، بۇ ماترىسسانىڭ ئۆزى ياكى ئەكس ماترىسساسىنىڭ ھېساپلاشلىرىنى تېز ئېلىپ بېرىش ئۈچۈن مەيدانغا **تېز فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى** مەيدانغا كېلىدۇ. قىسقىسى دىسكرېت فۇرىيې ئوڭ-تەتۈر ئالماشتۇرۇشلىرىنى ھېساپلاشتا ئىشلىتىلىدۇ.

9 ـ مەشىق

كۈۋادرات دولقۇننى دەۋرىيسى 2π بولغان سىگنالنىڭ ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ ئىچىدىكى فۇنكسىيە ئىپادىسى تۆۋەندىكىچە:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

فۇرىيې قاتارى فورمۇلىسىغا ئاساسەن، ھېساپلاپ چىقىشقا بولىدۇكى:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

شۇڭا بۇ سىگنالنىڭ فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى مۇنداق:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin\frac{n\pi x}{l}) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1 - \cos n\pi}{n}\sin nx)$$

سەككىزىنچى باب

دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

تەڭلىمە ئۇقۇمى باشلانغۇچ ماتېماتىكىسىدا ئەڭ بۇرۇن ئۇچرايتتى. ئىلگىرىكى مەزمۇنلاردا فۇنكسىيە، ھاسىلە ئۇقۇمى، دىففېرېنسىئال ۋە ئىنتېگرال ئۇقۇملىرىنى ئىگەللىگەندىن كېيىن مۇشۇلارنىڭمۇ تەڭلىمىگە ئائىت قوللىنىشلىرىنى بىلىش ئۈچۈن، شۇنداقلا تۇرمۇشتىكى ئەمەلىي مەسىلىلەرنىڭ ئېھتىياجى ئۈچۈن تۆۋەندە يېڭى بىر بىلىم نۇقتىسى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. بۇ باپتا بىر قەدەر قىيىن بولغان نۇقتا **دىففېرېنسىئال تەڭلىمە** ھەققىدە دەسلەپكى بىلىملەرنى ئۆگىنىپ چىقايلى.

8.1 دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

دىففېرېنسىيال تەڭلىمە نامەلۇم فۇنكسىيەنىڭ ھاسىلىسى بىلەن ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئوتتۇرىسىدىكى مۇناسىۋەت سىستېمىسىنى تەسۋىرلەيدىغان تەڭلىمىنى كۆرسىتىدۇ. دىففېرېنسىئال تەڭلىمىنىڭ يېشىمى تەڭلىمىگە ماس كېلىدىغان فۇنكسىيە بولىدۇ. ھالبۇكى، ئېلېمېنتار ماتېماتىكىنىڭ ئالگېبرالىق تەڭلىمىسىنىڭ يېشىمى تۇراقلىق سانلىق قىممەتتۇر.

8.1.1 ئاساسىي ئۇقۇم

ئېنىقلىما 8.1.1: دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

نامەلۇم فۇنكسىيە ۋە نامەلۇم فۇنكسىيە ھاسىلىسىنىڭ ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئارىسىدىكى مۇناسىۋىتىنى ئىپادىلەيدىغان تەڭلىمە. يەنى فۇنكسىيە ھاسىلىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان تەڭلىمە دىففېرېنسىئال تەڭلىمە دەپ ئاتىلىدۇ. بۇنى

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

ئارقىلىق خاتىرىلەشكە بولىدۇ.

دىففېرېنسىئال تەڭلىمىدىكى نامەلۇم فۇنكسىيە ھاسىلىسىنىڭ دەرىجىسى، دىففېرېنسىئال تەڭلىمىنىڭ **دەرىجىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

دىففېرېنسىئال تەڭلىمىنىڭ يېشىمى ئەگەر فۇنكسىيە $y = \phi(x)$ نىڭ n دەرىجىلىك ئۈزلۈكسىز ھاسىلىسى $\phi^n(x)$ ، بېرىلگەن ئىنتېرۋال I دا مەۋجۇت ھەم تەڭلىمە

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$$

نى قانائەتلەندۈرسە، ئۇنداقتا فۇنكسىيە $y = \phi(x)$ تەڭلىمە

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$$

نىڭ ئىنتېرۋال I دىكى **يېشىمى** دەپ ئاتىلىدۇ.

ئومۇمىي يېشىمى ئەگەر دىففېرېنسىئال تەڭلىمە يېشىمى خالىغان تۇراقلىق سانىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھەمدە خالىغان تۇراقلىق ساننىڭ سانى تەڭلىمە دەرىجىسى بىلەن تەڭ بولغاندا، بۇ يېشىمنى تەڭلىمىنىڭ **ئومۇمىي يېشىمى** دەپ ئاتايمىز.

ئالاھىدە يېشىمى دىففېرېنسىئال تەڭلىمە ئومۇمىي يېشىمىدىكى خالىغان تۇراقلىق سانىنى مۇقىم بېكىتكەندىن كېيىن ئېرىشكەن يېشىمنى، **ئالاھىدە يېشىمى** دەپ ئاتايمىز.

8.1.2 ئاساسىي تەڭلىمىلەر

- **دەسلەپكى قىممەت شەرتى**
ئەگەر $x = x_0$ بولغاندىكى فۇنكسىيە ۋە ئۇنىڭ ھاسىلىسىنىڭ قىممىتى y_0, y_0' بېرىلگەن بولسا، بۇنداق شەرتلەرنى بىز تەڭلىمىنىڭ دەسلەپكى قىممەت شەرتى دەپ ئاتايمىز.

- **بىرىنچى دەرىجىلىك دەسلەپكى قىممەت مەسىلىسى**
تەڭلىمە $y' = f(x, y)$ نىڭ دەسلەپكى شەرت $y|_{x=x_0} = y_0$ ئاستىدىكى ئالاھىدە يېشىمىنى تېپىش مەسىلىسىنى كۆرسىتىدۇ. يەنى:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

- **ئىككىنچى دەرىجىلىك دەسلەپكى قىممەت مەسىلىسى**
تەڭلىمە $y'' = f(x, y, y')$ نىڭ دەسلەپكى شەرت $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0'$ ئاستىدىكى ئالاھىدە يېشىمىنى تېپىش مەسىلىسىنى كۆرسىتىدۇ. يەنى:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$$

- **ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە**
شەكلى تۆۋەندىكىدەك بولغان تەڭلىمىنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە دەپ ئاتايمىز:

$$y' = f(x)g(y)$$

بۇنى يېشىشتە، ئوخشاش مىقدارلارنى بىر تەرەپكە يىغىپ ئىنتېگراللىساقلا بولىدۇ.

شەكلى $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$ كە ئوخشاش تەڭلىمىدە،(a, b, cلار بىرلا ۋاقىتتا نۆل ئەمەس). $u = ax + by + c$ ئۇنداقتا $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ بولىدۇ، بۇنى ئەسلىدىكى تەڭلىمىگە بىرىكتۈرگەندە $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + bf(u)$ گە ئېرىشىمىز، بۇ دەل ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە.

10 ـ مەشىق

تەڭلىمە $\frac{dy}{dx} = 2xy$ نى يېشىڭ.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ بىر ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە.

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\, dx, \ln|y| = x^2 + C, |y| = e^{x^2+C}$$

$$\therefore y = \pm e^{x^2}e^C = \pm C_1 e^{x^2} = C_2 e^{x^2}$$

- **بىر جىنسلىق تەڭلىمە**
شەكلى $y' = f(x, y) = \phi(\frac{y}{x})$ بولغان تەڭلىمە بىر جىنسلىق تەڭلىمە دەپ ئاتىلىدۇ.
بۇنى يېشىشنىڭ باسقۇچلىرى:

$$u = \frac{y}{x}, y = xu, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

شۇنىڭ بىلەن:

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u), \quad \therefore x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u) - u$$

بۇنى پارچىلىغىلى بولىدىغان تەڭلىمە يېشىش ئۇسۇلى بويىچە يېشىشكە بولىدۇ.

شەكلى $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{A_1x + B_1y}{A_2x + B_2y}$ بولغان تەڭلىمىنى، تەڭلىكنىڭ ئىككى تەرىپىگە x نى بۆلۈش ئارقىلىق بىر جىنسلىق تەڭلىمىگە ئېرىشەلەيمىز.
شەكلى $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}$ بولغان تەڭلىمىدە، ئاۋۋال تۇراقلىق سان C نى $x = X + h, y = Y + k$ ئارقىلىق ئالماشتۇرۇش ئېلىپ بارغاندا، $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{A_1X + B_1Y + A_1h + B_1k + C_1}{A_2X + B_2Y + A_2h + B_2k + C_2}$ بۇنىڭدا مۇۋاپىق سان h, k بىلەن $A_1h+B_1k+C_1 = A_2h+B_2k+C_2 = 0$

نى قانائەتلەندۈرۈپ، بىر جىنسلىق تەڭلىمىگە ئېرىشەلەيمىز. بۇ ۋاقىتتا $\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}$ بولغاندا تىپىپ چىقىشقا بولىدۇكى

$$\begin{cases} k = \dfrac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_2B_1 - A_1B_2} \\ h = \dfrac{A_1B_1C_2 - A_2B_1C_1 + A_1A_2B_1C_1 - A_1^2B_2C_1}{A_1^2B_2 - A_1A_2B_1} \end{cases}$$

ئەگەر $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \lambda$ بولغاندا، $A_1x + B_1y = v$ قىلىپ خاتىرىلىۋالساق، كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇكى

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = A_1 + B_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = A_1 + B_1\frac{v + C_1}{\lambda v + C_2} = \frac{(A_1\lambda + B_1)v + A_1C_2 + B_1C_1}{\lambda v + C_2}$$

بۇ ۋاقىتتا ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە بويىچە بىر تەرەپ قىلساق بولىدۇ.

11 ـ مەشىق

تەڭلىمە $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ نى يېشىڭ.

ئەزا يۆتكەش ئارقىلىق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ گە ئېرىشەلەيمىز.

سول تەرەپ سۈرەت مەخرەجنى x^2 غا بۆلۈش ئارقىلىق $\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy - x^2}{x^2}}$ گە ئېرىشەلەيمىز.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ $\frac{y}{x}$ شەكلىدىكى بىر جىنسلىق تەڭلىمە. ئەگەر $u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u^2}{u - 1}$

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u^2}{u-1} - u = \frac{u}{u-1}, \therefore \frac{u-1}{u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\therefore \int \frac{u-1}{u}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, u - \ln u = \ln x + C, \ln xu = u + C$$

نەتىجىگە $u = \frac{y}{x}$ نى ئالماشتۇرساق، $\ln y = \frac{y}{x} + C$ شۇڭا $y = Ce^{\frac{y}{x}}$

8.2 ئادەتتىكى دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

ئادەتتىكى دىففېرېنسىيال تەڭلىمە (ODE) دېگىنى دىففېرېنسىيال تەڭلىمىدىكى نامەلۇم مىقدار يەككە ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيەسى ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىدۇ. ئەڭ ئاددىي ئادەتتىكى دىففېرېنسىئال تەڭلىمە، نامەلۇم مىقدار بىر ھەقىقىي سان ياكى كومپلېكس ساننىڭ فۇنكسىيىسى بولۇشى مۇمكىن، لېكىن نامەلۇم مىقدار بىر ۋېكتور فۇنكسىيىسى ياكى ماترىتسا فۇنكسىيىسى بولۇشى مۇمكىن، كېيىنكىسى ئادەتتىكى دىففېرېنسىئال تەڭلىمىدىن تەركىب تاپقان تەڭلىمىلەر سىستېمىغا ماس كېلىدۇ. ئەڭ كۆپ ئۇچرايدىغان ئىككى خىلى بىرىنچى تەرتىپلىك دىففېرېنسىيال تەڭلىمە ۋە ئىككىنچى تەرتىپلىك دىففېرېنسىيال تەڭلىمىدىن ئىبارەت.

8.2.1 سىزىقلىق دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

شەكلى $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ بولغان تەڭلىمە بىرىنچى تەرتىپلىك سىزىقلىق دىففېرېنسىيال تەڭلىمە دېيىلىدۇ. تەڭلىمىدىكى نامەلۇم فۇنكسىيە y ۋە ئۇنىڭ ھاسىلىسىنىڭ دەرىجىسى بىرىنچى دەرىجە.
ئەگەر $Q(x) = 0$ بولغاندا، بۇ بىرىنچى تەرتىپلىك بىر جىنسلىق دىففېرېنسىيال تەڭلىمە دېيىلىدۇ. بۇ ۋاقىتتا

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\,\mathrm{d}x, \ln y = \int P(x)\,\mathrm{d}x + C', y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \cdot e^{C'}, y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

ئەگەر $Q(x) \neq 0$ بۇنى **تۇراقلىق سانىنى ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلى** ئارقىلىق يېشىشكە بولىدۇ. بۇنىڭ قەدەم باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىچە:
ئەگەر $Q(x) = 0$ بولغاندا، تەڭلىمە يېشىمى $y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ بولاتتى، ئەمما $Q(x) \neq 0$ بولغاچقا، بۇيەردىكى تۇراقلىق سان C دەل x نىڭ فۇنكسىيەسى بولىدۇ، شۇڭا $y = ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ بولغاندا، بۇنى ئەسلى تەڭلىمىگە باغلاش ئارقىلىق

$$u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} - ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}P(x) + P(x)ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)$$

گە ئېرىشەلەيمىز. يەنى $u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)$ بۇنى u' گە نىسبەتەن ئىنتېگراللىساق

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$$

ئاخىردا بۇنى ئەسلى تەڭلىمىگە باغلاش ئارقىلىق فورمۇلا

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)}$$

گە ئېرىشەلەيمىز. دېمەك بىر جىنسلىق بولمىغان تەڭلىمىنىڭ يېشىمى، بىر جىنسلىق تەڭلىمىنىڭ ئورتاق يېشىمىگە بىر جىنسلىق بولمىغان تەڭلىمىنىڭ خاس يېشىمىنى قوشقانغا باراۋەر.

12 ـ مەشىق

تەڭلىمە $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+y}$ نى يېشىڭ.

تەڭلىمىدە y نى ئاجرىتىپ چىقارغىلى بولمايدۇ، چۈنكى بۇ ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە ئەمەس. بۇنى شەكىل ئۆزگەرتىش ئارقىلىق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x$ گە ئېرىشەلەيمىز. بۇ دەل سىزىقلىق دىففېرېنسىئال تەڭلىمە.
بۇنىڭدا $x + y = u$ قىلىپ خاتىرلىۋالساق،

$$y = u - x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u}{u}, \frac{u}{1+u}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

بۇنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە بويىچە بىرتەرەپ قىلساق بولىدۇ.

8.2.2 بېرنوئىل تەڭلىمىسى

شەكلى $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n$ بولغان تەڭلىمىنى بېرنوئىل تەڭلىمىسى دەپ ئاتايمىز. بۇنىڭدا، ئەگەر $y = 0$ بولسا دەل بىر جىنسلىق تەڭلىمە، $y = 1$ بولسا ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە ھېساپلىنىدۇ.بېرنوئىل تەڭلىمىسىنى يېشىشنىڭ ئۇسۇلى تۆۋەندىكىچە:

ئالدى بىلەن شەكىل ئۆزگەرتىمىز، يەنى $y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$
بۇنىڭدا $y^{1-n} = z$ دەپ خاتىرلىۋالساق، $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ بولىدۇ.
شۇڭا $\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ گە ئېرىشەلەيمىز.
بۇنى ئەسلىدىكى تەڭلىمىگە باغلىساق، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n$ ئېرىشىمىزكى $\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + P(x)z = Q(x)$
شۇڭا $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ دېمەك سىزىقلىق دىففېرېنسىئال تەڭلىمىگە ئايلاندۇردۇق.

13 ـ مەشىق

تەڭلىمە $x > 0$ $\quad y(2) = -1,$ $\quad y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$ نى يېشىڭ.

---

14 ـ مەشىق

تەڭلىمە $x > 0$ $\quad y(2) = -1,$ $\quad y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$ نى يېشىڭ.

666

15 ـ مەشىق

تەڭلىمە نى يېشىڭ.

8.2.3 تۆۋەنلەتكىلى دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

سالام ئەل يۇرت

8.3 يۇقىرى دەرىجىلىك سىزىقلىق دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

8.3.1 يۇقىرى دەرىجىلىك تەڭلىمە

8.3.2 ئەيلېر تەڭلىمىسى

ئىككىنچى قىسىم

ئالگېبرا

توققۇزىنچى باب

دېتېرمىنانت

ئونىنچى باب

ۋېكتور

ئون بىرىنچى باب

ماترىسسا

خۇسۇسىيەت 11.3.1: جۇڭگو نېفت ئۇنىۋېرستېتى

جۇڭگو نېفت ئۇنىۋېرستېتى مائارىپ مىنىستىرلىكى قارمىقىدىكى دۆلەتلىك مۇھىم ئۇنىۋېرستېت ، ئۇ دۆلەتنىڭ «211 تۈرى» نىڭ مۇھىم قۇرۇلۇشى ۋە «985 تۈر ئەۋزەللىكى ئىنتىزامى يېڭىلىق يارىتىش» نى تەرەققىي قىلدۇرۇش ئۈچۈن ئاسپىرانتلىق مەكتىپى قۇرغان ئۇنىۋېرستېتلارنىڭ بىرى.

$$f(x) - f(x_0) = \operatorname{grad} f(\xi)^\top (x - x_0)$$

تېئورما 11.3.1: جۇڭگو نېفت ئۇنىۋېرستېتى

جۇڭگو نېفت ئۇنىۋېرستېتى مائارىپ مىنىستىرلىكى قارمىقىدىكى دۆلەتلىك مۇھىم ئۇنىۋېرستېت ، ئۇ دۆلەتنىڭ «211 تۈرى» نىڭ مۇھىم قۇرۇلۇشى ۋە «985 تۈر ئەۋزەللىكى ئىنتىزامى يېڭىلىق يارىتىش» نى تەرەققىي قىلدۇرۇش ئۈچۈن ئاسپىرانتلىق مەكتىپى قۇرغان ئۇنىۋېرستېتلارنىڭ بىرى.

$$f(x) - f(x_0) = \operatorname{grad} f(\xi)^\top (x - x_0)$$

يىغىنچاقلاش

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەققە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەك ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ۋە تەك نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ئۇستىدە تەپسىلىي نۇقتىلار يېزىلدى. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. قاتار دېگەن نۇرغۇنلىغان ئېلمىنتلارنىڭ يىغىندىسىدىن تەركىپ تاپقان ئىپادە بولۇپ، چەكسىز قاتار بولسا چەكسىز ئېلمىنتلار قاتارىنى كۆرستىدۇ.

كۆرسەتمە

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەققە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەك ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ۋە تەك نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ئۇستىدە تەپسىلىي نۇقتىلار يېزىلدى. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. قاتار دېگەن نۇرغۇنلىغان ئېلمىنتلارنىڭ يىغىندىسىدىن تەركىپ تاپقان ئىپادە بولۇپ، چەكسىز قاتار بولسا چەكسىز ئېلمىنتلار قاتارىنى كۆرستىدۇ.

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەققە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەك ئايرىملىق *سانلار* ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ۋە تەك نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ئۇستىدە ~~تەپسىلىي~~ نۇقتىلار. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز.

16-مەشق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

شۇڭا $u_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$،

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^{\left(n\sin\frac{1}{n}-1\right)}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}}=e^{-\frac{1}{6}}<1$$

شۇڭا يىغىلىدۇ.

شۇنىڭ بىلەن

فۇنكسىيە قاتارى دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرستىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

فۇنكسىيە قاتارى دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرستىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

فۇنكسىيە قاتارى دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرستىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

فۇنكسىيە قاتارى دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرستىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

ئۈچىنچى قىسىم

ئېھتىماللىق نەزەرىيىسى

مەشىقلەرنىڭ پايدىلىنىش جاۋاب كودى

پايدىلانمىلار

[1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The LaTeX Companion*. Addison-Wesley Reading Mass, 2004.

[2] Hubert Partl, Irene Hyna, and Elisabeth Schlegl. https://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/english

[3] Jean Pierre Casteleyn. Visual TikZ (version 0.62). IUT Génie Thermique et Énergie, 2016

[4] Leslie Lamport. LaTeX: A Document Preparation System, 2nd edition. Addison-Wesley Reading Mass, 1994.

[5] Till Tantau. TikZ PGF Manual, 2010. http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/.

[6] URL https://texample.net/

[7] URL https://www.latex-project.org

[8] URL https://python.org/

[9] URL https://www.latexstudio.net/