ماتېماتىكىسىن ئاساس

Abdusalam

بۇ قوللانما ئارقىلىق

سىز ماتېماتىكابىلىملىرىنى تىزلا كۆرۈپ چىقالايسىز.

Powered by LaTeX

مۇندەرىجە

بىرىنچى قىسىم

ئالىي ماتېماتىكا

بىرىنچى باب

ئالدىن بىلىملەر

> بۇ باپتا ئالىي ماتېماتىكا ئۆگىنىشتىن ئاۋۋال ھازىرلاشقا تېگىشلىك ئالدىن بىلىملەر خاتىرلەندى. بۇ بىلىملەر ئوتتۇرا مەكتەپ ماتىماتىكا بىلىملىرىدىن ئالىي ماتېماتىكا بىلىملىرىگە بولغان ئۆتكۈنچى نۇقتىلار ھېساپلىنىدۇ.

1.1 فۇنكسىيە

فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى ئادەتتە ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ۋە زامانىۋى ئېنىقلىما دەپ ئىككىگە بۆلىنىدۇ. بايانىنىڭ ئۇقۇمىنىڭ باشلىنىش نۇقتىسى باشقىچە بولغاندىن باشقا ، فۇنكسىيەنىڭ ئىككى ئېنىقلىمىسى ئاساسەن ئوخشاش. ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ھەرىكەت ئۆزگىرىشى نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ. ، زامانىۋى ئېنىقلىما بولسا توپلام ۋە ئەكس ئېتىش نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ.

1.1.1 ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە

ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى، دەرىجە فۇنكسىيەسى، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفملىق فۇنكسىيە، ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە، تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيەنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ. تەپسىلاتى تۆۋەندىكىچە:
تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە دەرىجىلىك فۇنكسىيە كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە لوگارىفملىق فۇنكسىيە ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە

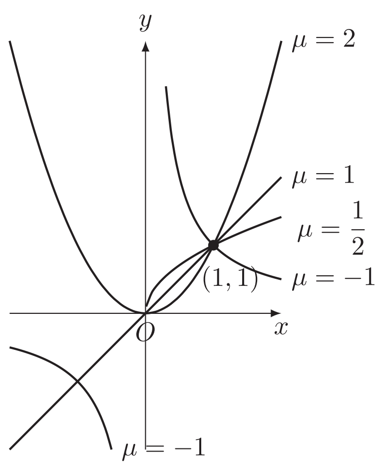
تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى $y = f(x) = C$ بۇنىڭدا C تۇراقلىق سان.

بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = f(x) = ax + b$,a, b خالىغان سان، ھەم $a \neq 0$

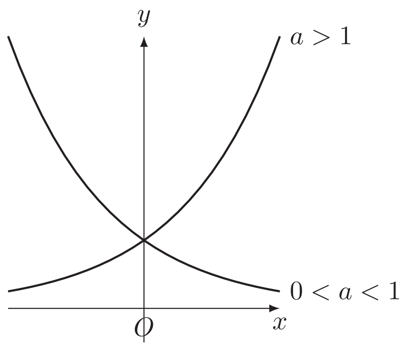
ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = f(x) = ax^2 + bx + c$,a, b, c خالىغان سان، ھەم $a \neq 0$

تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە $y = f(x) = \frac{a}{x}$,a خالىغان سان.

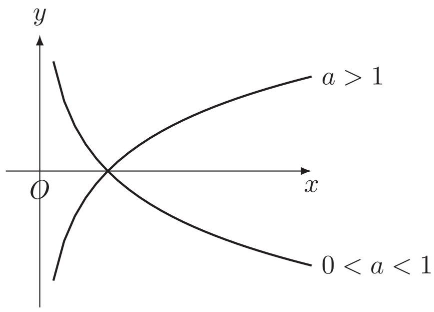
دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = x^{\mu}$، μ خالىغان سان
$x > 0$، $y = x^{\mu}$ رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.



كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

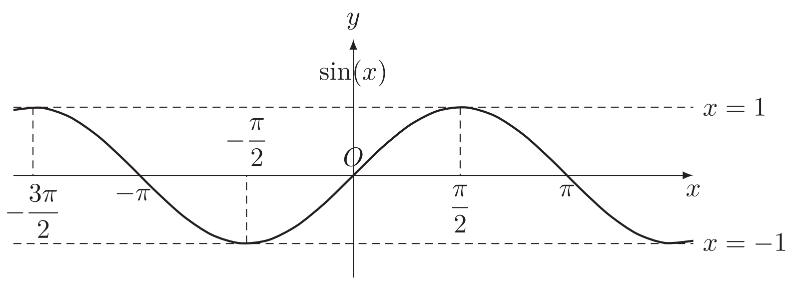


لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y = log_a x (a > 0, a \neq 1)$

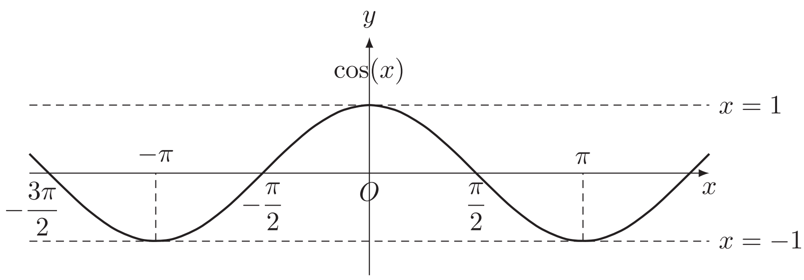


ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە

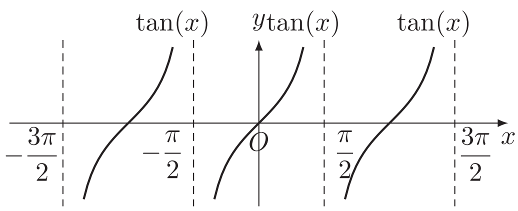
سىنۇس فۇنكسىيەسى:



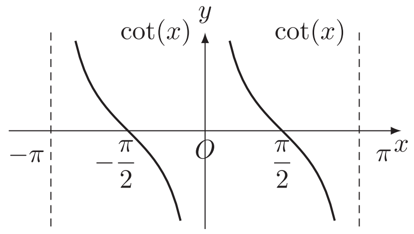
كوسىنۇس فۇنكسىيەسى:



تانگېنس فۇنكسىيەسى:



كوتانگېنس فۇنكسىيەسى:



تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە دددددد

1.1.2 ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيەلەر فورمۇلاسى

يىغىندى:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

كۆپەيمە:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha+\tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

بىرلىك:

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$
$$\sec^2 x-\tan^2 x = 1$$
$$\cosh^2 x-\sinh^2 x = 1$$

يېرىم بۇلۇڭ:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)}$$

1.1.3 ھاسىلە فورمۇلاسى

$$(C)' = 0$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu - 1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \tan x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

1.1.4 ئىنتېگرال فورمۇلاسى

$$\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

1.2 سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.1 تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.3 سانلار قاتارى

1.2.4 سانلار قاتارى يىغىندىسى

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

دەرىجە فۇنكسىيەسىگە نىسبەتەن ئوخشاش بولمىغان دەرىجە ئاستىدىكى ئوخشاش مونوتونلۇقتا ئاساسەن ئەڭ قىممەتنى تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ

ئىككىنچى باب

فۇنكسىيە ۋە لىمىت نەزەرىيىسى

2.1 فۇنكسىيە

فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى ئادەتتە ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ۋە زامانىۋى ئېنىقلىما دەپ ئىككىگە بۆلىنىدۇ. بايانىنىڭ ئۇقۇمىنىڭ باشلىنىش نۇقتىسى باشقىچە بولغاندىن باشقا ، فۇنكسىيەنىڭ ئىككى ئېنىقلىمىسى ئاساسەن ئوخشاش. ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ھەرىكەت ئۆزگىرىشى نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ. ، زامانىۋى ئېنىقلىما بولسا توپلام ۋە ئەكس ئېتىش نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ.

ئېنىقلىما 2.1.1: فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى

A سانىنى بېرىش ، ئۇنىڭدىكى ئېلېمېنتنى x دەپ پەرەز قىلىش ، $f(x)$ دەپ ئىپادىلەنگەن A دىكى x ئېلېمېنتىغا مۇناسىپ قانۇن f نى ئىشلىتىش ، B غا باشقا بىر سانغا ئېرىشىش ، پەرەز قىلايلى B دىكى ئېلېمېنتلار y بولىدۇ ، ئاندىن y بىلەن x ئوتتۇرىسىدىكى باراۋەر مۇناسىۋەتنى $y = f(x)$ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولىدۇ. فۇنكسىيە ئۇقۇمى ئۈچ دائىرىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ: ئېنىقلىما ساھەسى A ، قىممەت دائىرىسى B ۋە مۇناسىۋەت ئىپادىسى f

2.2 سانلار قاتارى

2.2.1 تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى

2.2.2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى

2.2.3 سانلار قاتارى

2.3 لىمىت

2.3.1 لىمىت ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى

2.3.2 سانلار قاتارى لىمىتى

2.3.3 فۇنكسىيە لىمىتى

2.3.4 سانلار قاتارى ۋە فۇنكسىيە لىمىتى

2.4 فۇنكسىيە ئۈزلۈكسىزلىكى

2.4.1 فۇنكسىيە مونوتونلىقى

2.4.2 فۇنكسىيە ئۈزۈك نۇقتىسى

ئۈچىنچى باب

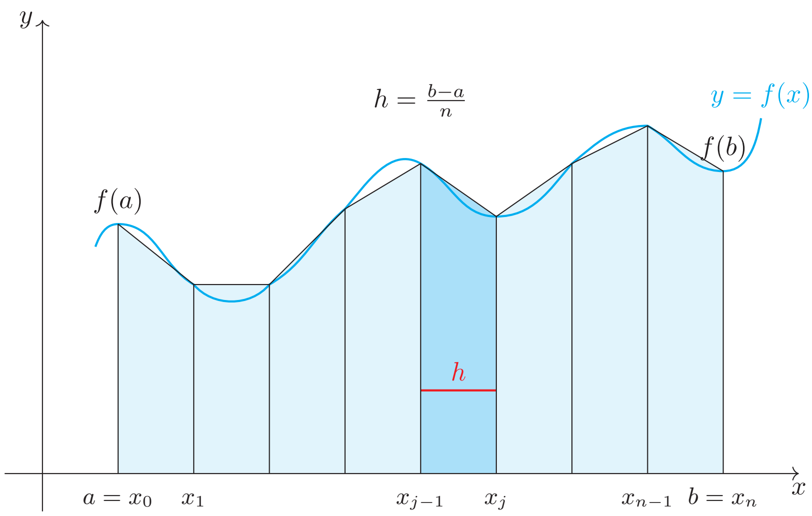
دىففېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرال

3.1 هاسىلە ئۇقۇمى

3.1.1 فۇنكسىيە هاسىلىسى

3.1.2 يۇقىرى دەرىجىلىك هاسىلە

3.2 دىففېرېنسىيال



3.1-رەسىم: دىففېرېنسىيال

3.2.1 فۇنكسىيە دىففېرېنسىيالى

3.2.2 هاسىلە فورمۇلىسى

تۆتىنچى باب

ئېنىق ئىنتېگرال ۋە ئېنىقسىز ئىنتېگرال

4.1 ئېنىق ئىنتېگرال

4.1.1 ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەت

4.1.2 ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلى

بىرىنچى خىل ئالماشتۇرۇش

ئىككىنچى خىل ئالماشتۇرۇش

4.1.3 قەدەملەش ئۇسۇلى

4.1.4 راتسىيونال فۇنكسىيە ئىنتېگرالى

4.2 ئېنىقسىز ئىنتېگرال

4.2.1 ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەت

4.2.2 ھىساپلاش

4.2.3 نيۇتون-لېبىرنىتس فورمۇلىسى

4.2.4 غەيرى ئىنتېگرال

4.3 ئىنتېگرال قوللىنىلىشى

4.3.1 يۈز

4.3.2 ھەجىم

4.3.3 ئوتتۇرىچە قىممەت

4.3.4 ئۇزۇنلۇق

4.3.5 ئىنتېگرال جەدۋىلى

بەشنچى باب

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە

ئالتىنچى باب

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ئىنتېگرالى

6.4 ئىككىنچى ئەگرى سىزىق ئىنتېگرال

6.4.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.4.2 ھېساپلاش

6.4.3 گىرىن فورمۇلىسى

6.4.4 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.5 بىرىنچى سىرت ئىنتېگرال

6.5.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.5.2 ھېساپلاش

6.5.3 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.6 ئىككىنچى سىرت ئىنتېگرال

6.6.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.6.2 گائۇس فورمۇلىسى

6.6.3 ھېساپلاش

6.7 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.7.1 ئېغىرلىق ۋە شەكىل مەركىزى

6.7.2 ئايلىنىش ئېنېرتسىيەسى

يەتتىنچى باب

چەكسىز قاتار

بۇ باپتىكى مۇھىم نۇقتىلار: مۇسبەت قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقىنى سېلىشتۇرۇپ ئېنىقلاش ئۇسۇلى، نىسبەت قىممىتى ئېنىقلاش ئۇسۇلى، يىلتىز قىممىتىنى ئېنىقلاش ئۇسۇلى، گىرەلەشمە قاتارنىڭ لېبنىز ئېنىقلاش ئۇسۇلى. قىيىن نۇقتا خالىغان قاتارنىڭ ئابىل پەرقلەندۈرۈش ئۇسۇلى ۋە دىرىكلېي پەرقلەندۈرۈش ئۇسۇلى قاتارلىقلار.

7.1 ئاساسىي ئۇقۇملار

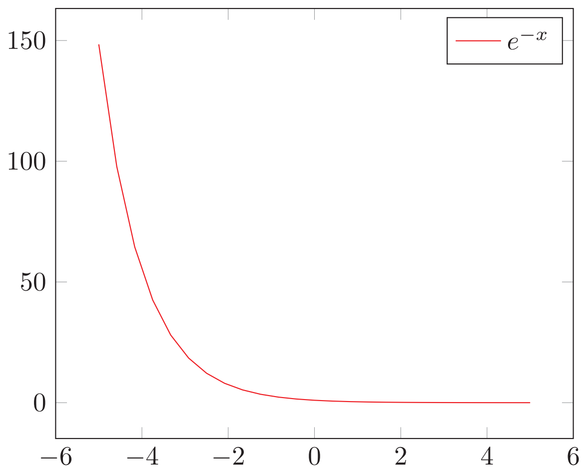
ھەرقانداق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ غا نىسبەتەن، ئۇنىڭ خالىغان ئېلېمېنتلىرىنىڭ چېكى بولسا، بىز بۇنى **چېگرىلانغان** دەپ ئاتايمىز. يەنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادە قۇرۇلىدۇ:

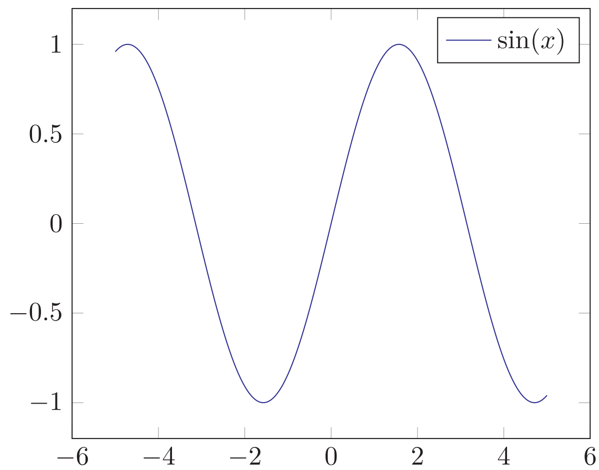
$$A_k \leq a_{k+n} \leq B_k, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$$

دېمەك يۇقىرىدىكى A_k, B_k لار بۇ سانلارنىڭ **ئېنىق چېكى** دەپ ئاتىلىدۇ.
بۇنىڭدا A_k ئېنىق ئاستا چېكى دېيىلىدۇ ھەم $A_k = inf\{a_{k+n}\}, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$ قىلىپ خاتىرلىنىدۇ، ئوخشاشلا B_k ئېنىق ئۈستى چېكى دېيىلىدۇ ھەم $B_k = sup\{a_{k+n}\}, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$ قىلىپ خاتىرلىنىدۇ. بۇ يەردىكى ئېنىق چېكى مۇقىم ئەمەس بولۇپ، شۇڭا ئىندېكسى k قوشۇپ يېزىلىدۇ. بۇ خۇددى مەلۇم بىر ساننىڭ بەشتىن كىچىك بولسا، ئۇ ساننىڭ ئالتىدىنمۇ كىچىك، يەتتىدىنمۇ كىچىك، ... ، بولىدىغانلىقى بىلەن ئوخشاش مەنىدە.
ئەگەر يۇقارقى سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى يىغىلسا، ئۇنىڭ لىمىتى چوقۇم مەۋجۇت بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن ئۇنىڭ لىمىتى ۋە ئېنىق چېكى ئوتتۇرىسىدا مۇنداق مۇناسىۋەت ئىپادىسى قۇرۇلىدۇ:

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} inf\{a_{k+n}\}$$
$$B = \lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} sup\{a_{k+n}\}$$

دېمەك، بۇيەردىكى A, B لار $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ نىڭ ئاستى لىمىتى ۋە ئۈستى لىمىتى دەپ ئاتىلىدۇ. شۇنىڭ بىلەن يىغىلىدىغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ۋە ئۇنىڭ چېگرىسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت لىمىت بىلەن باغلانغان بولىدۇ. سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقنىڭ لىمىتى ۋە ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى لىمىتلىرىنى ئارىلاشتۇرۇۋېتىشكە بولمايدۇ. ئاستى ئۈستى لىمىتلىرىنى مەۋجۇت بولسا سانلارنىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولىشى ناتايىن. مەسىلەن تۆۋەندىكى رەسىمدە:





سىنوس فۇنكسىيەلىك سانلار ئارقىمۇ ئارىلىقنىڭ لىمىتى يوق، ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى چېكى بار، 1 ۋە -1 دەل ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى چېكى، شۇنداقلا ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى لىمىتلىرى بار. ئوخشاشلا سول تەرەپتىكى رەسىمدىكىدەك، e^{-x} فۇنكسىيەلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقنىڭ ئاستى چېكى بار، ئاستى لىمىتى بار يەنى 0 ، ئەمما ئۈستى لىمىتى يوق. شۇڭا ئۆزگەرگۈچى مىقدار x چەكسىزلىككە يۈزلەنگەندە ئۇنىڭ لىمىتى بار، بۇ دەل ئۇنىڭ ئاستى لىمىتى.

7.1.1 قاتار

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرسىدە سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ھەققىدە مۇناسىۋەتلىك بىلىملەرنى دەسلەپ ئۆگەنگەنمىز. ئۇ ۋاقىتتا پەقەت چەكلىك ئەزالىق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئۈستىدە، يەنە كېلىپ تەڭ ئايرىمىلىق ۋە تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئۈستىدىلا ئۆگىنىش ئېلىپ بېرىلاتتى. ئەمدىكى مەزمۇندا چەكسىز بولغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى «قاتار» ئۈستىدە مۇلاھىزە ئېلىپ بارىمىز.

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەققىدە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەك ئايرىملىق سانلار ئارقمۇ-ئارقلىقى ۋە تەك نىسبەتلىك سانلار ئارقمۇ-ئارقلىقى ئۈستىدە تەپسىلىي ئۇقتىلار يېزىلدى. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. قاتار دېگەن نۇرغۇنلىغان ئېلمېنتلارنىڭ يىغىندىسىدىن تەركىپ تاپقان ئىپادە بولۇپ، چەكسىز قاتار بولسا چەكسىز ئېلمېنتلار قاتارىنى كۆرسىتىدۇ.

ئېنىقلىما 7.1.1: قاتار

خالىغان سانلار ئارقمۇ-ئارقلىقى $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ نىڭ ئېلمېنتلىرىنى قوشۇش ئەمىلى بىلەن ئۇلاپ يېزىپ ھاسىل بولغان ئىپادە ئىپادە چەكسىز قاتار دەپ ئاتىلىدۇ(قىسقارتىلىپ قاتار دېيىلىدۇ).ماتېماتىكىدا

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

قىلىپ خاتىرلىنىدۇ.

ئېنىقلىمىدىكى u_n قاتارنىڭ **ئۇمۇمىي ئەزاسى** دەپ ئاتىلىدۇ. ئالدىنقى n ئەزاسىنىڭ يىغىندىسى **قىسمەن يىغىندى** دەپ ئاتىلىدۇ، ھەم $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$ قىلىپ خاتىرلىنىدۇ.

ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار ئەگەر قاتارنىڭ ئۇمۇمىي ئەزاسى u_n تۇراقلىق سان بولسا، بۇ خىلدىكى قاتارنىڭ ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار دەپ ئاتايمىز. مەسىلەن: $\sum_{n=1}^{\infty} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$, $\sum_{n=1}^{\infty} = 1+2+...+n+....$ ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار ھېساپلىنىدۇ.

7.1.2 قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ۋە خۇسۇسىيىتى

يىغىلىشچانلىقى ئەگەر قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n نىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولسا، بۇ قاتار **يىغىلىدۇ** دەپ ئاتىلىدۇ. يەنى، ئەگەر $\lim_{n\to\infty} S_n = S$، ئۇنداقتا $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. ئەگەر قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n نىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولمىسا، ئۇنداقتا بۇ قاتار **يىراقلىشىدۇ** دەپ ئاتىلىدۇ.
قاتارنىڭ يىغىلىش ۋە يىراقلىشىشىنىڭ يۈزەكى مەنىسى بولسا، يىغىلغاندا ئۇنىڭ يىغىندىسىنىڭ چېكى بار، يىراقلاشقاندا ئۇنىڭ يىغىندىسىنىڭ چېكى يوق.

خۇسۇسىيىتى قاتارنىڭ ئېنىقلىمىسى ۋە يىغىلىشچانلىقىغا ئاساسەن تۆۋەندىكى بىرقانچە خۇسۇسىيەتلەرگە ئېرىشەلەيمىز.

خۇسۇسىيەت 7.1.1: قاتار يىغىلىشىنىڭ زۆرۈر شەرتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ يىغىلسا، ئۇنىڭ ئۇمۇمىي ئەزاسىنىڭ لىمىتى $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ چوقۇم مەۋجۇت ھەم نۆلگە تەڭ.

بۇنىڭ سەۋەبىنى قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n دىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ.
ئېنىقلىمىغا ئاساسەن قاتار يىغىلسا ئۇنىڭ قىسمەن يىغىندىسىنىڭ لىمىتى بار ئىدى، $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ ھەم $u_n = S_n - S_{n-1}$ شۇڭا $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.
شۇنى ئەسكەرتىشكە تېگىشلىكى بۇ پەقەت زۆرۈر شەرت، يېتەرلىك شەرت ئەمەس، شۇڭا ئۇمۇمىي ئەزانىڭ لىمىتى 0 بولسا، قاتارنىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولۇشى ناتايىن. مەسىلەن تۆۋەندىكى قاتارنىڭ ئۇمۇمىي ئەزا لىمىتى بار يەنى $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، ئەمما قاتار يىغىلمايدۇ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = +\infty$$

خۇسۇسىيەت 7.1.2: يىغىلىشچان قاتارنىڭ سىزىقلىق خۇسۇسىيىتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ۋە $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ يىغىلسا، ئۇلارنىڭ سىزىقلىق ھېساپلاشلىرى

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n \pm \beta v_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

ئوخشاشلا يىغىلىدۇ. بۇ يەردە α, β لار خالىغان ھەقىقىي سان.

بۇ خۇسۇسىيەتنى ئىسپاتلاش ياكى چۈشەنچە بېرىلمەيدۇ، چۈنكى سىزىقلىق ئالگېبرادىكى ئىدىيە بويىچە تۇراقلىق سان بىلەن سىزىقلىق ھېساپلاش ئېلىپ بېرىلغان قاتارنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى ئۆزگەرمەيدۇ.

خۇسۇسىيەت 7.1.3: يىغىلىشچان قاتارنىڭ تىرناق خۇسۇسىيىتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ يىغىلسا، ئۇنىڭ ئۇمۇمىي ئەزالىرىنىڭ خالىغان يېرىگە خالىغان تىرناق قويسا، ئۇنىڭ يىغىلىشچانلىقى ئۆزگەرمەيدۇ. يەنى $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلسا، $(u_1 + u_2 + ... + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + ...+) + ...$ ئوخشاشلا يىغىلىدۇ.

تىرناقنىڭ ماتېماتىكىدىكى رولى ئەمەللەر تەرتىپىنى ئۆزگەرتىش بولغاچقا، بۇ يەردىكى تىرناق خۇسۇسىيىتى دەل يىغىلىشچانلىق، قاتار ئۇنىڭ ئەزالىرىنىڭ جەملىنىش تەرتىپى بىلەن مۇناسىۋەتسىزلىكى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ. بۇ خۇسۇسىيەتمۇ كۆپ ئىشلىتىلىدۇ.

مەسىلەن ..... $\sum_{n=1}^{\infty} 1-1+1-1+1-...+1-1+$ بۇ قاتار يىغىلمايدۇ، لىمىتى مەۋجۇت ئەمەس. ئەمما ھەر ئىككى ئومۇمىي ئەزاسىنى تىرناققا ئالساق

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+....=0+0+..0+..=0$$

دېمەك تىرناق ئالغاندىن كېيىن يىغىلمايدىغان قاتار يىغىلىدىغان بولۇپ قالدى. شۇڭا تىرناقنىڭ رولىنى بوش چاغلاشقا بولمايدۇ ھەم قالايمىقان تىرناق قويۇشقىمۇ بولمايدۇ.

كۆرسەتمە

گېئومېترىيەلىك قاتار تولىمۇ مۇھىم قاتارلارنىڭ بىرى بولۇپ، ئىنتايىن كۆپ ئۇچرايدۇ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a+aq+aq^2+...+aq^n+...(a\neq 0)$$

ئالدىنقى n ئەزا يىغىندىسى $(q\neq 1)$ $S_n=a+aq+aq^2+...+aq^n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$, شۇڭا بۇنىڭ يىغىلىشچانلىق ۋە يىراقلىششچانلىقى تۆۋەندىكىچە بولىدۇ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} |q|<1, & \text{يىغىلىدۇ} \\ |q|\geqslant 1, & \text{يىراقلىشىدۇ} \end{cases}$$

7.1.3 مۇسبەت قاتار

خالىغان قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ئەگەر ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى u_n بىردەك مۇسبەت بولسا، بۇ قاتارنى مۇسبەت قاتار دەپ ئاتايمىز. يەنى

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n\geq 0$$

ئەگەر بىردەك مەنپىي بولسا، بۇ قاتارنى مەنپىي قاتار دەپ ئاتايمىز. مۇسبەت قاتارمۇ قاتار بولۇش سۈپىتى بىلەن، ئالدىنقى مەزمۇندىكى خۇسۇسىيەتلەرنى تامامەن كۆچۈرۈپ ئەكىلىشكە بولىدۇ.

مۇسبەت قاتارنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسىمۇ مۇسبەت بولىدۇ، ھەم ئاشقۇچى فۇنكسىيە خۇسۇسىيەتتە بولىدۇ.(بۇ دەل مۇسبەت سانغا مۇسبەت سان قېتىلسا چوقۇم مۇسبەت بولىدىغانلىقىنىڭ مىسالى).

تېئورما 7.1.1: مۇسبەت قاتار يىغىلىشچانلىقىنىڭ يېتەرلىك زۆرۈر شەرتى

ئەگەر مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلسا، ئۇنىڭ قىسمىي يىغىندىسىنىڭ چېكى بار. يەنى

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ يىغىلىدۇ} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ قىسمىي يىغىندىنىڭ چېكى بار}$$

دېمەك، مۇسبەت قاتارغا نىسبەتەن، ئەگەر ئۇ يىغىلسا ئۇنىڭ ئالدىنقى n ئەزا يىغىندىسىنىڭ چېكى بولسىلا كۇپايە. سەۋەبى مۇسبەت قاتارنىڭ قىسمىي يىغىندىسى ئاشقۇچى فۇنكسىيەدۇر.

مۇسبەت قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى مۇسبەت قاتار كەڭ قوللىنىلىدىغان بولۇپ، ئۇنىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش تولىمۇ مۇھىم. تۆۋەندە بىرقانچە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇلى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز.

تېئورما 7.1.2: سېلىشتۇرۇپ ئېنىقلاش ئۇسۇلى

ئەگەر ئىككى مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ئەگەر مەلۇم ئەزادىن باشلاپ بارلىق ئەزالاردا $u_n\leq v_n$ قۇرۇلسا، ئۇنداقتا:

$$\text{ئەگەر } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ يىغىلسا} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ مۇ يىغىلىدۇ}$$

$$\text{ئەگەر } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ يىراقلاشسا} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ مۇ يىراقلىشىدۇ}$$

بۇنىڭ يۈزەكى مەنىسى: چوڭى يىغىلسا كىچىكمۇ يىغىلىدۇ، كىچىكى يىراقلاشسا چوڭىمۇ يىراقلىشىدۇ.

مەشىق 2

گارمونىك قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش.

$$\because x>0, x>\ln(1+x), \therefore \frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ھەم يەنە $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1)$$

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$

شۇڭا $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ يىراقلىشىدۇ. شۇڭا $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ مۇ يىراقلىشىدۇ.

تېئورېما 7.1.3: نىسبەتلىك ئېنىقلاش ئۇسۇلى(دالانبېرت ئۇسۇلى)

مۇسبەت قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ قوشنا ئومۇمىي ئەزالىرىنىڭ نىسبىتى ئارقىلىق ھۆكۈم قىلىش. يەنى

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}<1, & \text{يىغىلىدۇ}\\ =1, & \text{بىلگىلى بولمايدۇ}\\ >1, & \text{يىراقلىشىدۇ}\end{cases}$$

بۇ يەردىكى نىسبەت دەل ئۇنىڭ چوڭ كىچىكلىكىنىڭ بىۋاستە ئىپادىسىدۇر. نىسبىتى چوڭ، دېمەك كېيىنكى ئەزا ئالدىنقىسىدىن چوڭ، يەنى ئەزالار ئېشىۋاتقانلىقىنىڭ بەلگىسى. ئەلۋەتتە ئۇ بارغانسېرى يىراقلىشىدۇ.

مەشىق 3

قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n n!}{n^n}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ. بۇيەردە $a\neq 0$

شۇڭا، $u_n=\frac{|a|^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=|a|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{n}{n+1}}=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{n}{n+1}-1)}=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-n}{n+1}-1)}=|a|e^{-1}=\frac{|a|}{e}$$

شۇڭا a ۋە e نىڭ چوڭ كىچىكلىكى بويىچە ھۆكۈم قىلىمىز.

ئەگەر $0<|a|<e$ ئۇنداقتا يىغىلىدۇ.

ئەگەر $|a|\geq e$ يىراقلىشىدۇ.

تېئورېما 7.1.4: (كوشى ئۇسۇلى)يىلتىزلىك ئېنىقلاش ئۇسۇلى

مۇسبەت قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ئومۇمىي ئەزا يىلتىز ئارقىلىق ھۆكۈم قىلىش. يەنى

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}<1, & \text{يىغىلىدۇ}\\ =1, & \text{بىلگىلى بولمايدۇ}\\ >1, & \text{يىراقلىشىدۇ}\end{cases}$$

ناۋادا قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ يىغىلىدىغان قاتار ئۇنداقتا

ئەگەر ئۇنىڭ مۇتلەق قىممەت قاتارى $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ مۇ يىغىلسا، بۇ قاتارنى **مۇتلەق يىغىلىشچان قاتار** دەيمىز.

ئەگەر مۇتلەق قىممەت قاتارى يىغىلمىسا **شەرتلىك يىغىلىشچان قاتار** دەيمىز.

مەشىق 4

قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

شۇڭا، $u_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^{(}n\sin\frac{1}{n}-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}}=e^{-\frac{1}{6}}<1$$

شۇڭا يىغىلىدۇ.

يۇقارقى كوشى ئېنقلاش ئۇسۇلىدىكى مىسالدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئومۇمىي ئەزا شەكلى a^n, n^n بولغان قاتاردا كۆپ ئىشلىتىلىدۇ، قىسقىسى كوشى ئۇسۇلىدا دەرىجىنى يوقاتقىلى بولىدۇ.

تېئورما 7.1.5: ئىنتېگرال ئۇسۇلى

ئەگەر مۇسبەت قاتار

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

غا نىسبەتەن، ئىنتېرۋال $[1,+\infty]$ دا مونوتون كېمەيگۈچى فۇنكسىيە $f(x)$ مەۋجۇت بولسا، ھەممە $u_n=f(n)$ بولسا, ئۇنداقتا بۇ مۇسبەت قاتار ۋە غەيرىي نورمال ئىنتېگرال

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx$$

ئوخشاش خۇسۇسىيەتتە بولىدۇ، يەنى ئۇلارنىڭ يىغىلىش ۋە يىراقلىشىش خۇسۇسىيىتى ئوخشاش.

يۇقارقى تېئورمىدا، بىۋاستە فۇنكسىيىدىن پايدىلىنىپ قاتارنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىشتا ناھايىتى كۆپ ئىشلىتىلىدۇ. نۇرغۇن مەسىلىلەرنى مۇشۇنىڭدىن پايدىلىنىپ يېشىشكە بولىدۇ.

5 ـ مەشىق

قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقى.

ئەگەر سېلىشتۇرۇش ئۇسۇلى ياكى نىسبەت ئۇسۇلى ئىشلەتسەك، ياكى بولمىسا كوشى ئۇسۇلى ئىشلەتسەك يۇقارقى قاتارنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئېنقلاپ چىققىلى بولىسمۇ، ئىنتېگرال ئۇسۇلى ئارقىلىق تېخىمۇ تېز ھەم چۈشىنىشلىك ئېنقلاپ چىققىلى بولىدۇ.

فۇنكسىيە $f(x)=\frac{1}{x^p}$

ئېنىقكى $u_n=f(n)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{n\to\infty}\begin{cases}\ln(n)=+\infty, & p=1,\text{يىراقلىشىدۇ}\\ \frac{n^{1-p}-1}{1-p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1,\text{يىغىلىدۇ}\\ +\infty, & p<1,\text{يىراقلىشىدۇ}\end{cases}\end{cases}$$

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى ئىنتېگرال ئۇسۇلىنى پىششىق بىلىش زۆرۈردۇر، چۈنكى ئۇ قاتار بىلەن فۇنكسىيەنى باغلاپ تۇرىدۇ.

7.1.4 ئالماش قاتار ۋە خالىغان قاتار

ئالماش قاتار دېگەن پىلوس مىنوس ئەزالىرى ئالمىشىپ كېلىدىغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. چۈنكى -1 ئۆز ئۆزى كۆپەيگەندە ئالامىتى ئۆزگىرىدىغان بولغاچقا، شۇڭا ئالماش قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3+...+(-1)^{n+1}u_n+...$$

$$u_n>0,(n=1,2,...)$$

ئالماش قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشتا تۆۋەندىكى بىرلا ئۇسۇلنى ئىگەللەش يېتەرلىك.

تېئورما 7.1.6: لېيبنز ئېنقلاش ئۇسۇلى

ئەگەر ئالماش قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ تۆۋەندىكى ئىككى شەرتنى ھازىرلىسا:

- $\forall n\in N^+, u_n\geq u_{n+1}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

ئۇنداقتا بۇ ئالماش قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ يىغىلىدۇ.

بىرىنچى شەرتتىن بۇ قاتارنىڭ كېمەيگۈچى قاتار ئىكەنلىكىنى كۆرۈۋالغىلى بولىدۇ. ئىككىنچى خۇسۇسىيەتتىن بۇقاتارنىڭ 0 گە يىغىلىدىغانلىقى چىقىپ تۇرۇپتۇ.

6 ـ مەشىق

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

كۆرۈۋالغىلى بولىدۇكى 0 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

ئەمدى $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ بولغاندا، $f'(x)=\frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0, (x\geq 2)$

دېمەك، $f(x)$ نىڭ ھاسىلىسى 0 دىن كىچىك، مونوتون كېمەيگۈچى فۇنكسىيە،

شۇڭا $u_n=f(n)>f(n+1)=u_{n+1}$ شەرتىنى قانائەتلەندۈرىدۇ، شۇڭا بۇ قاتار يىغىلىدۇ.

خالىغان قاتار بۇ يەردىكى خالىغان سۆزى قاتارنىڭ ئەزاسىنىڭ خالىغان ئىكەنلىكىنى بىلدۈرىدۇ. يەنى مەيلى قاتارنىڭ ئەزاسى مۇسبەت ياكى مەنپىي ۋە ياكى نامەلۇم سان بولسۇن، خالىغان قاتار ئۇقۇمىغا تەۋە. لېكىن ئەمەلىي قوللىنىشتا كۆپ ھاللاردا مەلۇم ئورتاق خۇسۇسىيەتكە ئىگە، مەيلى قانداقلا بولسۇن بۇ يەنىلا كونكرېت مەسىلىگە تايىنىدۇ.

7.2 فۇنكسىيە قاتارى

7.2.1 فۇنكسىيە قاتارى

فۇنكسىيە قاتارى كەڭ دائىرىدىكى قاتارنى ئۆزئىچىگە ئالغان بولۇپ، بىر قەدەر ئومۇملىققا ئىگە. دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$
$$u_n(x),(n=1,2,\ldots)$$

ئوخشاشلا فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزا، قىسمىي يىغىندا قاتارلىقلار ئالدىنقى باپتىكى ئېنىقلىما بىلەن ئوخشاش، شۇڭا قايتا تەكرارلانمايدۇ.

فۇنكسىيە قاتارى بىلەن ئادەتتىكى قاتارنىڭ ماھىيەتلىك پەرقى دەل ئۇنىڭ ئومۇمىنىڭ ئەزاسىدا. ئادەتتىكى قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى تۇراقلىق سان بولىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئادەتتىكى ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيەسى بولىدۇ. مەيلى ئادەتتىكى قاتار بولسۇن ياكى فۇنكسىيە قاتار بولسۇن، ئۇلار ئوخشاش قائىدە قانۇنىيەتلەرگە بويسۇنىدۇ. ئاددى قىلىپ ئېيتقاندا، فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئۆزگەرگۈچى مىقدارى مەلۇم بىر ئېنىق قىممەتنى ئالغاندا دەل ئادەتتىكى قاتار بولىدۇ.

7.2.2 دەرىجىلىك قاتار

شەكلى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_n)^n+\ldots$ بولغان قاتارنى دەرىجىلىك قاتار دەپ ئاتايمىز. ئەگەر بۇيەردىكى $x_0=0$ بولغاندا، قاتارنىڭ شەكلى $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ بولىدۇ. دېمەك سىزىقلىق ئالماشتۇرۇش $t=x-x_0$ ئارقىلىق ئادەتتىكى دەرىجىلىك قاتارنىڭ $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ شەكلىگە ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ. شۇڭا بۇ بۆلەكتىكى دەرىجىلىك قاتار پەقەت $x_0=0$ بولغان ئادەتتىكى دەرىجىلىك قاتارنىلا كۆرسىتىدۇ. ئەلۋەتتە دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش يىغىلماسلىق خۇسۇسىيەتلىرى ئىلگىركى بىلەن بىردەك، تۆۋەندە بىرنەچچە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇللىرى خاتىرلەندى.

تېئورما 7.2.1: ئابىل بىرىنچى تېئورمىسى

ئەگەر دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ مەلۇم بىر نۇقتا $x=x_0,(x_0\neq 0)$ دە يىغىلسا، ئۇنداقتا بارلىق $|x|<|x_0|$ نۇقتىلاردا، بۇ دەرىجىلىك قاتار مۇتلەق يىغىلىدۇ.ئەگەر مەلۇم بىر نۇقتا $x=x_0$ دە يىراقلاشسا، ئۇنداقتا بارلىق $|x|>|x_0|$ نۇقتىلاردا قاتار يىراقلىشىدۇ.

ئابىل تېئورمىسىدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئەگەر قاتار مەلۇم نۇقتا x_0 دە يىغىلسا، ئۇنداقتا $\frac{x_0}{2},\frac{x_0}{3},\ldots,$ نۇقتىلاردا تامامەن يىغىلىدۇ. دېمەك ئېنىق بىر دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىدىغان نۇقتىسى پەقەت بىردىن-بىر ئەمەس. ئەمما مۇشۇ يىغىلىشچان نۇقتىلارنىڭ مۇتلەق قىممىتىنىڭ ئەڭ يۇقىرى چېكى بولىدۇ، بىز بۇ چېكىنى دەرىجىلىك قاتارنىڭ **يىغىلىش رادىئۇسى** دەپ ئاتايمىز، ئادەتتە R ھەرپى بىلەن ئىپادىلەيمىز. يىغىنچاقلىساق:

$$\sup\{\text{بارلىق يىغىلىشچان نۇقتىلارنىڭ مۇتلەق قىممىتى } \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\}=R$$

$|x|<R$ يىغىلىدۇ

$|x|>R$ يىراقلىشىدۇ

$|x|=R$ بىلگىلى بولمايدۇ

دىمەك، رادىئۇس ئېنىقلانغاندىن كېيىن، يېپىق ئىنتېرۋال $(-R,+R)$ نى قاتارنىڭ **يىغىلىش ئىنتېرۋالى** دەپ ئاتايمىز. رادىئۇس نۇقتىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئىنتېرۋال، قاتارنىڭ **يىغىلىش دائىرىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

رادىئۇس نۇقتىسىدا، قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ئايرىم ھۆكۈم قىلىنىشى كېرەك. ئەگەر رادىئۇس نۇقتىسى $x=-R, x=+R$ دا قاتار يەنىلا يىغىلسا، قاتارنىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋالى ئوچۇق ئىنتېرۋال بولىدۇ، يەنى $[-R,+R]$ ،بۇ ئارقىلىق قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرىسىنى ئېنىقلىغىلى بولىدۇ.

تېئورما 7.2.2: كوشى خادامارد تېئورمىسى

دەرىجىلىك قاتار $\sum\limits_{n\to}^{\infty} a_n x^n$ غا نىسبەتەن، $\sup\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ بولسا، ئۇنداقتا بۇ قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى:

$$R=\frac{1}{\rho}=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ 0, & \rho=+\infty\\ +\infty & \rho=0\end{cases}$$

ئادەتتە يۇقارقى تېئورمىدىن پايدىلىنىپ دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسىنى تاپقىلى بولىدۇ. بولۇپمۇ بۇيەردە $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ بويىچە ئېلىنسا بولىدۇ.

7 ـ مەشىق

قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$ نىڭ يىغىلىش دائىرسىنى تېپىڭ،

رادىئۇس تېپىش فورمۇلىسىدىن بىلۋالغىلى بولىدۇكى:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{n2^{n+1}}{(n+1)2^n}|=2\lim_{n\to\infty}|\frac{n}{n+1}|=2$$

شۇڭا قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى $R=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}$ يىغىلىش ئىنتېرۋالى $(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$ بولىدۇ.

ئەگەر $x=+\frac{1}{2}$ بولغاندا، $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(\frac{1}{2})^n$ شۇڭا بۇ نۇقتىدا قاتار يىراقلىشىدۇ.

ئەگەر $x=-\frac{1}{2}$ بولغاندا، $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(-\frac{1}{2})^n$ شۇڭا بۇ نۇقتىدا قاتار يىغىلىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرسى $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

ئويلىنىش: فۇنكسىيە $f(x)$ نى، دەرىجىلىك قاتار $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ بىلەن ئىپادىلەش مۇمكىنمۇ؟

7.2.3 فۇنكسىيەلىك يېيىش

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نى، دەرىجىلىك قاتار $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ بويىچە يايغىلى بولسا، يەنى $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ئۇنداقتا بۇ قاتار، فۇنكسىيەنىڭ يېيىلمىسى دەپ ئاتىلىدۇ. داڭلىق تەيلور يېيىلمىسى دەل مۇشۇنداق يېيىشتۇر.

ئېنىقلىما 7.2.1: تەيلور قاتارى

ئەگەر خالىغان دەرىجىدە ھاسىلىسى بار بولغان فۇنكسىيە $f(x)$ نى، يىغىلىش رادىئۇسى R بولغان نۇقتا x_0 نىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋلى (x_0-R,x_0+r) دا دەرىجىلىك فۇنكسىيە بويىچە يايغىلى بولسا، ئۇنداقتا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ، نۇقتا x_0 دىكى تەيلور قاتارى دەپ ئاتايمىز. ئادەتتە $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ $f(x)$ قىلىپ خاتىرلەيمىز. ئەگەر $x_0=0$ بولغاندا، بۇ قاتارنىڭ فۇنكسىيەنىڭ ماكروۋىن قاتارى دەپ ئاتايمىز.

بۇ بىرگە قانداق قۇلايلىق ئېلىپ كىلىدۇ دىگەندە، مەيلى بىر مۇرەككەپ فۇنكسىيە بولسۇن، ئۇنى ئاددىي بولغان نۇرغۇن ئۈششاق فۇنكسىيەلەرگە پارچىلىغىلى بولىدىغانلىقىنى كۆرستىپ بېرىدۇ. بۇ خىل ئىدىيە دەل كېيىنكى مەزمۇندىكى فۇرىيې قاتارى، فۇرىيې ئالماشتۇرشى قاتارلىقلاردا كەڭ ئۇچرايدۇ.

كۆپ ئىشلىتىلىدىغان تەيلور يېيىلمىلار ئېلمىنتار فۇنكسىيەلەرنىڭ كۆپىنچىسى چەكسىز ھاسىلىسى بار بولۇپ، ئۇلارنى 0 نۇقتىدا دەرىجىلىك قاتارغا يايغاندا، بىرتۈركۈم گۈزەل نەتىجىلەرگە ئېرىشەلەيمىز، ئاساسلىقى تۆۋەندىكىچە:

1. $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots\quad -\infty<x<+\infty.$

2. $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\quad -1<x<1.$

3. $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1.$

4. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\leqslant 1.$

5. $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2x+1}}{(2n+1)!}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad -\infty<x<+\infty.$

6. $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$

7. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots\begin{cases} x\in(-1,1), & \alpha\leqslant -1\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0\\ x\in[-1,1], & \alpha>0\end{cases}.$

ئادەتتىكى فۇنكسىيلەر مەلۇم ئىنتېرۋالدا يىغىلسا، ئۇنداقتا ئۇستىدىكى يەكۇنلەر بويىچە فۇنكسىيە قاتارغا يېيىشقا بولىدۇ.

8 ـ مەشىق

فۇنكسىيە $f(x)=\arctan x$ نىڭ $x=0$ بولغاندىكى فۇنكسىيە يېيىلمىسىنى تېپىڭ.

$$f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad ,|-x^2|<1.$$

شۇڭا، ئاۋال ئىنتېگراللاپ كېيىن دىففېرېنسىئاللاش ئارقىلىق:

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

7.3 ترىگونومېترىيىلىك قاتار

فۇرىيېر قاتارى ترىگونومېترىيىلىك قاتار، ئادەتتە فۇرىيېر قاتارنى ترىگونومېترىيىلىك قاتارمۇ دەپ قويىدۇ. ئەمما ترىگونومېترىيىلىك قاتار فۇرىيېر قاتارى ئەمەس، شۇڭا بىز بۇ بۆلەكتە ئاۋال ترىگونومېترىيىلىك قاتار بىلەن تونۇشۇپ چىقايلى، شۇ ئارقىلىق فۇرىيې قاتارنى چۈشىنىشىمىز تېخىمۇ ئاسانلاشقۇسى.

7.3.1 ترىگونومېترىيىلىك قاتار

شەكلى تۆۋەندىكىدەك:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

بولغان قاتارنى ترىگونومېترىيىلىك قاتار دەپ ئاتايمىز.
قىسقىسى ترىگونومېترىيىلىك قاتارنىڭ ئېنىقلىمىسىدا كۆرۈنۈپ تۇرۇپتىكى، ترىگونومېترىيىلىك قاتار ئىلگىرى خاتىرلەنگەن فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئالاھىدە بىر تۈرى، بۇنىڭدا فۇنكسىيە پەقەت سىنوس ۋە كوسىنوس فۇنكسىيەلەرنىڭ ئاددىي سىزىقلىق بىرىكمىسى خالاس. سىنۇس كوسىنوس فۇنكسىيەلىرنىڭ دەۋرىيلىك خۇسۇسىيتىدىن تۆۋەندىكىدەك خۇسۇسىيەتكە ئېرىشىمىز:

ئېنىقلىما 7.3.1: ئورتوگونال فۇنكسىيە

ئەگەر ئىككى فۇنكسىيە $f(x)$ ۋە $g(x)$ تۆۋەندىكى ئىپادە قۇرۇلسا،

$$\int_a^b f(x)g(x)=0$$

ئۇنداقتا بۇ ئىككى فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $[a,b]$ دە ئورتوگونال دەپ ئاتىلىدۇ.

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىستېمىسى ... $1,\cos x\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots,\ldots\cos nx,\sin nx,\ldots$ ئىنتېرۋال $[-\pi,\pi]$ دا ئورتوگونال.

ئورتوگونال ئۇقۇمىنىڭ چۈشىنىشلىك ئىپادىلىنىشى: تىك كېسىشىش.
فۇنكسىيە تىك كېسىشىتى دېمەك، فۇنكسىيە ئىنتېرۋالدا ئىنتېگرالى نۆل بولىدۇ، ئەگەر بۇ فۇنكسىيەدىن تۈزۈلگەن بوشلۇق بار بولسا، ئورتوگونال فۇنكسىيە سىستېمىسى دەلبۇ بوشلۇقنىڭ ئاساسىي بولىدۇ. دېمەك ئاساس فۇنكسىيەلەردىن پايدىلىنىپ بۇ بوشلۇقتىكى خالىغان فۇنكسىيەنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ. داڭلىق ھىلبېرت بوشلۇقى دەل مۇشۇنىڭ كېڭەيتىلىشى.

7.3.2 فۇرىيېر قاتارى

ئاۋال تۆۋەندىكى ئېنىقلىمىنى كۆرۈپ چىقايلى.

تېئورما 7.3.1: ترىگونومېترىيىلىك قاتار تېئورمىسى

دەرىجىلىك قاتارئەگەر خالىغان فۇنكسىيە $f(x)$ نى $[-\pi,\pi]$ دائىرە ئىچىدە تەكشى يىغىلىدىغان تروگونومېترىيىلىك قاتار شەكلىدە يايغىلى بولسا، يەنى:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), |x|<\pi$$

ئۇنداقتا بۇ قاتارنىڭ بارلىق كويېفىتسىنتلىرى بىردىنبىر ئېنىق بولىدۇ. يەنى:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, n=0,1,2,...$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,3,...$$

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نى ئىنتېرۋال $[-\pi,\pi]$ ئىچىدە ئىنتېگراللىغىلى بولسا، ئۇنداقتا:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, n=0,1,2,...$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,3,...$$

نى فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ فۇرىيې كوئېففىتسېنتى دەپ ئاتايمىز. فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيې كوئېففىتسېنتى بىلەن تۈزۈلگەن تروگونومېترىيىلىك قاتار دەل فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيې قاتارى دەپ ئاتىلىدۇ.
يۇقىرىدا فۇنكسىيە $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-\pi,\pi]$ ئىچىدە ئىنتېگراللىغىلى بولىدۇ دېگەن، ناۋادا ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ دەۋرىيسى $2l$ بولۇپ $[-l,l]$ ئىچىدە فۇرىيې قاتارى بويىچە يايساقلا بولىدۇ، بۇ يەردىكى l كەڭ مەنىدە بولۇپ، π دىن باشقا ھەرقانداق سان بولسا بولىدۇ. بىز مىقدار ئالماشتۇرۇش، تاق-جۈپ يېيىش قاتارلىق تاكتىكىلاردىن پايدىلىنىپ بۇنىمۇ ئەمەلگە ئاشۇرالايمىز.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,2,...$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,3,...$$

فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىلىشچانلىقى خالىغان فۇنكسىيەنى فۇرىيې قاتارى بىلەن يايغىلى بولمايدۇ، دەۋرىي ھەم يىغىلىشچان بولۇش شەرتى قاتتىق شەرت بولۇپ، فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىلىشچانلىقىنى تەتقىق قىلىشقا توغرا كېلىدۇ. شۇڭا تۆۋەندىكى ئېنىقلىمىنى كۆرۈپ چىقايلى.

تېئورما 7.3.2: يىغىلىش تېئورمىسى

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ دەۋرىيسى 2π بولغان ھەم $[-\pi,\pi]$ دا سىلىق بولسا، ئۇنىڭ فۇرىيې قاتارى يىغىلىدۇ، ھەمدە فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىندى فۇنكسىيەسى:

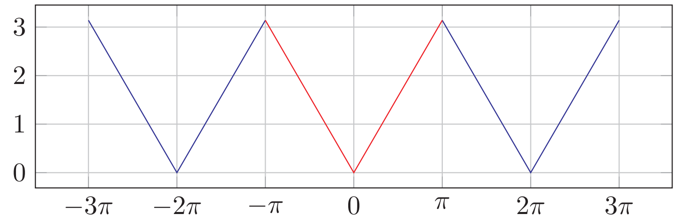
$$S(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ئۈزلۈكسىز سىلىق نۇقتىدا} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{ئۈزۈك نۇقتىدا} \\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi \end{cases}$$

تېئورمىدا دېمەكچى، دەۋرىي بولۇپلا قالماي سىلىق بولۇشى شەرت، يەنى ھېچقانداق ئۈزۈك نۇقتىسى بولماسلىقى كېرەك. ئادەتتە فۇنكسىيەنى فۇرىيې قاتارغا يايغاندا، ئېنىقلىما ساھەسىنى كېڭەرتىشمۇ مۇمكىن، بۇنىڭدا فۇنكسىيەنىڭ جۈپ-تاقلىقى بويىچە كېڭەرتىشكە بولىدۇ.

9 ـ مەشىق

فۇنكسىيە $f(x)=|x|, (-\pi \le x \le \pi)$ نى فۇريې قاتارغا يېيىڭ.

رەسىمدىكىدەك، دەۋرىي فۇنكسىيە گە يايىمىز. شۇڭا:



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos(nx)dx=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin(nx)dx=0$$

شۇنىڭ ئۈچۈن:

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\quad |x|\le\pi$$

7.3.3 فۇريې ئالماشتۇرۇشى

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا فۇريې قاتارى خاتىرلەندى، ئەمدى بىز يەنە بىر مۇھىم نۇقتا **فۇريې ئالماشتۇرۇشى** ھەققىدە توختىلىپ ئۆتىمىز. خالىغان دەۋرىيسى $2l$ بولغان دەۋرىي فۇنكسىيەنىڭ فۇريې قاتارى:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}) \tag{7.1}$$
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,2,... \tag{7.2}$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,3,... \tag{7.3}$$

كۆرسەتمە

ئەيلېر فورمۇلىسى كەڭ ئىشلىتىلىدىغان فورمۇلا بولۇپ، كومپلېكس ئۆزگەرگۈچى فۇنكسىيەدىكى ئىنتايىن مۇھىم فورمۇلانىڭ بىرىدۇر. مەلۇمكى i مەۋھۇم سان بىرلىكىدۇر، يەنى $i^2=-1$ ئەيلېر فورمۇلىسى:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

بۇنى تەيلور يېيىلمىسى ئارقىلىق كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانى قىسقارتىلدى.

فورمۇلا $1.1-1.3$ لارنى ئەيلېر فورمۇلىسى بىلەن بىرىكتۈرسەك:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)-\frac{ib_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right]$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right]$$
$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}+C_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{i\frac{n\pi x}{l}},\quad C_0=\frac{a_0}{2},C_n=\frac{a_n-ib_n}{2},C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

دېمەك

$$C_n=\frac{1}{2l}\left[\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx-i\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx$$

C_n مۇ تېپىلدى، فۇريې قاتارى مەزمۇنىدا فۇنكسىيە دەۋرىنى $T=2l$ دېگەن. شۇڭا $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ ئىچىدە، فۇنكسىيە $f(x)$ نى يۇقىرىدا كەلتۈرۈپ چىقارغان فۇريې قاتارى فورمۇلىسى بويىچە مۇنداق يېزىشقىمۇ بولىدۇ:

$$f_T(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{i\frac{2n\pi x}{T}}$$

فىزىكىلىق بىلىملەرگە ئاساسەن، بۇلۇڭلۇق تېزلىك ω ۋە دەۋرىي T ۋە چاستوتا f ئوتتۇرىسىدا مۇنداق مۇناسىۋات بار:

$$\Delta\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1}$$
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = 2\pi\omega$$

شۇڭا يەكۈنلەشكە بولىدۇكى:

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}$$
$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$f_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right) e^{in\omega x}$$

ئۈستىدىكى ئۆز نۆۋىتىدە يەنە فۇرىيې دەرىجىلىك قاتارى دەپ ئاتىلىدۇ، چۈنكى بۇنىڭ بارلىق ئەزالىرى e نىڭ دەرىجىسىنىڭ ۋەزىنلىك يىغىندىلىرىدىن تۈزۈلىدۇ.

يۇقارقى فورمۇلا ۋە ئەيلېر فورمۇلاسىنىڭ گېئومېترىيەلىك مەنىسىدىن بىلىۋېلىشقا بولىدۇكى، فۇنكسىيە $f(x)$ نى نۇرغۇن چەمبەر بويىلما ھەركەت ياپىلىرىنىڭ ۋەزىنلىك يىغىندىسى دەپ قاراشقىمۇ بولىدۇ. ئەلۋەتتە بۇ فورمۇلا سىزىقلىق ئالگېبرادىكى بىلىملەر بىلەن تامامەن بىردەك.يەنى: سىزىقلىق بوشلۇقتا بىر بىر گورۇپا ئاساس ۋېكتورلارنى تاللاپلا، بۇ بوشلۇقتىكى بارلىق ۋېكتورلارنى مۇشۇ ئاساس ۋېكتورلارنىڭ سىزىقلىق بىرىكمە شەكلىدە ئىپادىلەپ چىقالايمىز.

ئادەتتە نۇرغۇن فونكسيەلەرنىڭ دەۋرىيسى T ئېنىق مەۋجۇت بولمايدۇ، ئەمما بىز بۇلارنىڭ دەۋرىيسىنى چەكسىز دەپ قارىۋالساقلا بولىدۇ. شۇڭا ئۈستىدىكى $\lim_{T\to+\infty} f_T(x) = f(x)$

$$f(x) = \lim_{T\to+\infty} f_T(x) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right)e^{in\omega x}$$

يۇقىرىدىكى لىمىت نەزىرىيەسى ئاساسىدا بۇ ئىپادىگە قارىتا ئاددىيلاشتۇرۇش ئېلىپ بارىمىز. دەۋرىيسى چەكسىزلىككە قاراپ ماڭىدى، دېمەك بۇلۇڭلۇق تېزلىكى نۆلگە قاراپ ماڭىدى دېگەنلىك.

$$f(x) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right)e^{in\omega x}$$
$$= \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\omega_n x}dx\right)\Delta\omega$$

چۈنكى $\Delta\omega \to 0(T \to +\infty)$ ۋەجىدىن، تۆۋەندىكىدەك ھادىسە مەۋجۇت:

$$\Delta\omega \to 0(T \to +\infty)$$
$$\therefore \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$$
$$\omega_n = n\omega \to \omega = \omega_n - \omega_{n-1}$$
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\omega_n x}dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)$$

شۇڭلاشقا:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$\therefore f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega$$

مانا ئەڭ ئاخىردىكى فورمۇلانى بىز فۇرىيې ئىنتېگرال فورمۇلاسى دەيمىز.

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-\infty, +\infty]$ مۇتلەق ئىنتېگراللىغلى بولسا، يۇقىرىدىكى $F(\omega)$ نى بىز فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى دەيمىز. ھەم تۆۋەندىكىدەك خاتىرلەيمىز:

$$F(\omega) = F[f(x)]$$
$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

مانا بۇ فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى.
ئالماشتۇرۇشتى كېيىنكى فۇنكسىيەنى ئەسلىي فۇنكسىيە بىلەن بىرلەشتۇرۇپ فۇرىيې تەتۈر ئالماشتۇرۇشى دەپ ئاتايمىز. ھەم تۆۋەندىكىدەك خاتىرلەيمىز:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= F^{-1}[F(\omega)] \\
f(x) &= F^{-1}[F(\omega)] \\
F^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega
\end{aligned}
$$

فۇرىيې قاتارى ۋە فۇرىيې ئالماشتۇرۇشىنىڭ مۇناسىۋىتى: فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ھەرقانداق دەۋرىي فۇنكسىيەنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ، ئەگەر فۇنكسىيە دەۋرىي فۇنكسىيە ئەمەس بولسا، ئۇنداقتا ئۇنىڭ دەۋرى چەكسىز ئىنتېرۋال ئىچىدە بولىدۇ. دەۋرى چەكسىزلىككە ماڭسا بۇلۇڭلۇق تىزلىق 0 گە قاراپ ماڭىدۇ شۇنداقلا ئاساس چاستوتىسى 0 گە قاراپ ماڭىدۇ، بۇ ۋاقىتتا چاستوتىسى داۋاملىق دىسكرېت ھالەتتە بولماي ئۈزلۈكسىز ھالەتتە بولىدۇ دە فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى ئارقىلىق داۋاملىق تەھلىل قىلغىلى بولىدۇ.

فۇرىيېنىڭ قىياسى: ھەرقانداق دەۋرىي فۇنكسىيەنى تىروگونومېترىيىلىك فۇنكسىيەلەرنىڭ يىغىندىسى يەنى فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولىدۇ.

7.3.4 دىسكرېت فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى

يۇقىرىدىكى كۆپلىگەن باسقۇچلاردىن كېيىن، بىز ئېرىشكەن فۇرىيې دەرىجىلىك قاتارى ۋە فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى تۆۋەندىكىدەك:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x} \\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega
\end{aligned}
$$

ئەمما ھېساپلاش ماشىنىسى پەقەت چەكلىك ئېقىمدىكى ئۇچۇرلارنى بىرتەرەپ قىلالايدۇ، يەنە كېلىپ ئۈزلۈكسىز دائىرىدىكى ئۇچۇرلارنى ئەسلا بىر تەرەپ قىلالمايدۇ. شۇڭا فۇرىيې ئالماشتۇرۇشىنى چوقۇم چەكلىك بولغان دىسكرېت ھالەتكە ئايلاندۇرۇش كېرەك.

$$e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$$

دىسكرېت ئالماشتۇرۇشى بىرتەرەپ قىلىدىغىنى دىسكرېت دەۋرىي سىگنال. ئالايلۇق بىز سىگنال تەرتىپلىرى $\{x[1], x[2], x[3], ...\}$ دەۋرىيسىنى D دەپ قارايلى، ئۇنداقتا خالىغان پۈتۈن سان r غا نىسبەتەن، بىر پۈتۈن دەۋرىي ئىچىدىكى سىگناللار تەڭداش، يەنى $x[n] = x[n+rD]$.
ئۈزلۈكسىز سىگنال مەيداندا فۇرىيې بوشلۇقىدىكى ئاساس $e^{ki\omega t}$ بولۇپ، k پۈتۈن ساننى ئىپادىلەپ ئوخشىمىغان ئاساسنى بەلگىلەپ قويىدۇ، t بولسا ۋاقىت ئۈزلۈكسىز مىقدارى.
ھازىر بىزنىڭ قىلىدىغىنىمىز دىسكرېت ھەم دەۋرىي سىگنال، دەۋرىيسى D , شۇڭا ۋاقىت مىقدار دىسكرېت سىگنال تەرتىپى n گە ئايلىنىدۇ. شۇنىڭ بىلەن بۇ دىسكرېت بوشلۇقتىكى ئاساس $e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$ غا ئۆزگىرىدۇ. شۇڭا فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى تۆۋەندىكىدەك ئۆزگىرىدۇ:
ئۈزلۈكسىز: ئەسلىدىكى سىگنال $f(x)$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ki\omega t}dt, k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ki\omega t}$$

دىسكرېت: ئەسلىي سىگنال $x[n]$

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{n=0}^{D-1} x[n]e^{-ki\frac{2\pi}{D}n} \\
x[n] &= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} X_k e^{ki\frac{2\pi}{D}n}
\end{aligned}
$$

بۇ يەكۈنگە ئەيلېر فورمۇلاسىنى بىرلەشتۇرۇپ $x = FX$ $w = e^{2\pi i/D} = \cos\frac{2\pi}{D} - i\sin\frac{2\pi}{D}$ شەكلىدىكى سىزىقلىق تەڭلىمىلەر سېستىمىسىغا ئېرىشەلەيمىز، يەنى:

$$
\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[X-1] \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\
1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}
$$

ئەلۋەتتە، ئۈستىدىكى ماترىسسا ۋاندېرموند ماترىسسا ۋە ياكى فۇرىيې ماترىسسا دەپمۇ ئاتىلىدۇ. مۇشۇ ماترىسسانىڭ خۇسۇسىيتى دەل دىسكرېت فۇرىيې ئالماشتۇرشىنىڭ ئالاقە رەقەملىك ئۇچۇرنى بىرتەرەپ قىلغىلى بولىدىغان بولمايدىغانلىقىنى بەلگىلەپ قويىدۇ. ناۋادا بۇ ماترىسسانىڭ شەكلى ئىنتايىن مۇرەككەپ ھەتتا ئەكس ماترىسساسى مەۋجۇت ئەمەس، ئۇنداقتا بۇنىڭ چوڭ كېرىكى قالمايدۇ. ئەلۋەتتە، بۇ ماترىسسانىڭ ئۆزى ياكى ئەكس ماترىسساسىنىڭ ھېساپلاشلىرىنى تېز ئېلىپ بېرىش ئۈچۈن مەيدانغا **تېز فۇرىيې ئالماشتۇرشى** مەيدانغا كىلىدۇ. قىسقىسى دىسكرېت فۇرىيې ئوڭ-تەتۈر ئالماشتۇرۇشلىرىنى ھېساپلاشتا ئىشلىتىلىدۇ.

مەشىق 10 ـ

كۈۋادىرات دولقۇننى دەۋرىيسى 2π بولغان سىگنالنىڭ ئىنتېرۋال $[-\pi,\pi]$ ئىچىدىكى فۇنكسىيە ئىپادىسى تۆۋەندىكىچە:

$$g(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ -1, & -\pi<x<0\end{cases}$$

فۇرىيې قاتارى فورمۇلىسىگە ئاساسەن، ھېساپلاپ چىقىشقا بولىدۇكى:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=0,\quad n=0,1,2,...$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi),\quad n=0,1,2,...$$

شۇڭا بۇ سىگنالنىڭ فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى مۇنداق:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\sin\frac{n\pi x}{l})=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1-\cos n\pi}{n}\sin nx)$$

سەككىزىنچى باب

دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

ئون بىرىنچى قىسىم

ئالگېبرا

توققۇزىنچى باب

دېتېرمىنانت

9.1 ئۇقۇم

9.1.1 ئالاھىدە دېتېرمىنانت

9.2 ھېساپلاش

9.2.1 تولدۇرغۇچى مىنور

9.2.2 ئالگېبرالىق تولدۇرغۇچى مىنور

9.2.3 دېتېرمىنانتنى يېيىش قائىدىسى

ئونىنچى باب

ۋېكتور

ئون بىرىنچى باب

ماترىسسا

ئۇسۇسىيەت 11.3.1: جۇڭگو نېفت ئۇنىۋېرسىتېتى

جۇڭگو نېفت ئۇنىۋېرسىتېتى مائارىپ مىنىستىرلىكى قارمىقىدىكى دۆلەتلىك مۇھىم ئۇنىۋېرسىتېت ، ئۇ دۆلەتنىڭ «211 تۈرى» نىڭ مۇھىم قۇرۇلۇشى ۋە «985 تۈر ئەۋزەللىكى ئىنتىزامى يېڭىلىق يارىتىش» نى تەرەققىي قىلدۇرۇش ئۈچۈن ئاسپىرانتلىق مەكتىپى قۇرغان ئۇنىۋېرسىتېتلارنىڭ بىرى.

$$f(x) - f(x_0) = \operatorname{grad} f(\xi)^\top (x - x_0)$$

تېئورما 11.3.1: جۇڭگو نېفت ئۇنىۋېرسىتېتى

جۇڭگو نېفت ئۇنىۋېرسىتېتى مائارىپ مىنىستىرلىكى قارمىقىدىكى دۆلەتلىك مۇھىم ئۇنىۋېرسىتېت ، ئۇ دۆلەتنىڭ «211 تۈرى» نىڭ مۇھىم قۇرۇلۇشى ۋە «985 تۈر ئەۋزەللىكى ئىنتىزامى يېڭىلىق يارىتىش» نى تەرەققىي قىلدۇرۇش ئۈچۈن ئاسپىرانتلىق مەكتىپى قۇرغان ئۇنىۋېرسىتېتلارنىڭ بىرى.

$$f(x) - f(x_0) = \operatorname{grad} f(\xi)^\top (x - x_0)$$

يېغىنچاقلاش

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەققە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەك ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ۋە تەك نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ئۈستىدە تەپسىلىي نۇقتىلار يېزىلدى. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. قاتار دېگەن نۇرغۇنلىغان ئېلمىنتلارنىڭ يىغىندىسىدىن تەركىپ تاپقان ئىپادە بولۇپ، چەكسىز قاتار بولسا چەكسىز ئېلمىنتلار قاتارىنى كۆرسىتىدۇ.

كۆرسەتمە

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەققە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەك ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ۋە تەك نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ئۈستىدە تەپسىلىي نۇقتىلار يېزىلدى. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. قاتار دېگەن نۇرغۇنلىغان ئېلمىنتلارنىڭ يىغىندىسىدىن تەركىپ تاپقان ئىپادە بولۇپ، چەكسىز قاتار بولسا چەكسىز ئېلمىنتلار قاتارىنى كۆرسىتىدۇ.

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەققە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەك ئايرىملىق *سانلار* ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ۋە تەك نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ئۈستىدە ~~تەپسىلىي~~ نۇقتىلار. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز.

12 - مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

$u_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ شۇڭا،

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n^{\left(n\sin\frac{1}{n}-1\right)}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}}=e^{-\frac{1}{6}}<1$$

شۇڭا يىغىلىدۇ.

شۇنىڭ بىلەن

فۇنكسىيە قاتارى دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

فۇنكسىيە قاتارى دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

فۇنكسىيە قاتارى دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

فۇنكسىيە قاتارى دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

ئون ئۈچىنچى قىسىم

ئېھتىماللىق نەزەرىيىسى

مەشقلەرنىڭ پايدىلىنىش جاۋاب كودى

پايدىلانمىلار

[1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin.
The LaTeX Companion. Addison-Wesley Reading Mass, 2004.

[2] Hubert Partl, Irene Hyna, and Elisabeth Schlegl. https://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/english

[3] Jean Pierre Casteleyn. Visual TikZ (version 0.62). IUT Génie Thermique et Énergie, 2016

[4] Leslie Lamport. LaTeX: A Document Preparation System, 2nd edition. Addison-Wesley Reading Mass, 1994.

[5] Till Tantau. TikZ PGF Manual, 2010. http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/.

[6] URL https://texample.net/

[7] URL https://www.latex-project.org

[8] URL https://python.org/

[9] URL https://www.latexstudio.net/