

ماتېماتىكىسىن ئاساس

Abdusalam

بۇ قوللانما ئارقىلىق

سىز ماتېماتىكا بىلىملىرىنى تىزلا كۆرۈپ چىقالايسىز.



مۇندەرىجە

I ئالىي ماتېماتىكا

1

2

2

2

4

5

6

7

7

7

7

7

1 ئالدىن بىلىملەر

1.1 فۇنكسىيە

1.1.1 ئاساسىي ئېلېمېنتلار فۇنكسىيە

1.1.2 تىرگۈنۈمپىتېرىيەلىك فۇنكسىيەلەر فورمۇلاسى

1.1.3 ھاسىلە فورمۇلاسى

1.1.4 ئىنتېگرال فورمۇلاسى

1.2 سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى

1.2.1 تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى

1.2.2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى

1.2.3 سانلار قاتارى

1.2.4 سانلار قاتارى يىغىندىسى

8

8

8

8

8

8

9

9

9

9

9

9

9

9

2 فۇنكسىيە ۋە لىمىت نەزەرىيىسى

2.1 فۇنكسىيە

2.2 سانلار قاتارى

2.2.1 تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى

2.2.2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى

2.2.3 سانلار قاتارى

2.3 لىمىت

2.3.1 لىمىت ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى

2.3.2 سانلار قاتارى لىمىتى

2.3.3 فۇنكسىيە لىمىتى

2.3.4 سانلار قاتارى ۋە فۇنكسىيە لىمىتى

2.4 فۇنكسىيە ئۈزلۈكسىزلىكى

2.4.1 فۇنكسىيە مونوتونلىقى

2.4.2 فۇنكسىيە ئۈزلۈك نۇقتىسى

10

10

10

10

10

10

10

11

11

11

11

11

11

11

11

11

12

12

12

12

12

3 دىففېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرال

3.1 ھاسىلە ئۇقۇمى

3.1.1 فۇنكسىيە ھاسىلىسى

3.1.2 يۇقىرى دەرىجىلىك ھاسىلە

3.2 دىففېرېنسىيال

3.2.1 فۇنكسىيە دىففېرېنسىيالى

3.2.2 ھاسىلە فورمۇلاسى

3.3 دىففېرېنسىيال تېئورېمىسى

3.3.1 فېرمات تېئورېمىسى

3.3.2 لور تېئورېمىسى

3.3.3 لاگرانج تېئورېمىسى

3.3.4 كوشى تېئورېمىسى

3.3.5 دىففېرېنسىيال ئوتتۇرا قىممەت تېئورېمىسى

3.4 تەيلىرى يېيىلمىسى

3.4.1 تەيلىرى يېيىلمىسى

3.4.2 تەيلىرى فورمۇلاسى

3.5 فۇنكسىيە خۇسۇسىيىتى

3.5.1 فۇنكسىيە يىلتىزى

3.5.2 فۇنكسىيە مونوتون رايونى

3.5.3 فۇنكسىيە ئېكستېرېمۇم قىممىتى

3.5.4 فۇنكسىيە كۆپۈنگۈ ۋە پېتىنقى قىسمى

12	3.5.5	فۇنكسىيە بۇرۇلۇش نۇقتىسى
12	3.6	ياي دىففېرېنسىيالى
12	3.6.1	ياي دىففېرېنسىيالى
12	3.6.2	ئەگرلىك
12	3.6.3	ئەگرلىك رادېئۇس
13	4	ئېنىق ئىنتېگرال ۋە ئېنىقسىز ئىنتېگرال
13	4.1	ئېنىق ئىنتېگرال
13	4.1.1	ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەت
13	4.1.2	ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلى
13	4.1.3	قەدەملەش ئۇسۇلى
13	4.1.4	راتسىيونال فۇنكسىيە ئىنتېگرالى
13	4.2	ئېنىقسىز ئىنتېگرال
13	4.2.1	ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەت
13	4.2.2	ھېساپلاش
13	4.2.3	نيۇتون-لېبېرېتس فورمۇلىسى
13	4.2.4	غەيرى ئىنتېگرال
14	4.3	ئىنتېگرال قوللىنىلىشى
14	4.3.1	يۈز
14	4.3.2	ھەجىم
14	4.3.3	ئوتتۇرىچە قىممەت
14	4.3.4	ئوزۇنلۇق
14	4.3.5	ئىنتېگرال جەدۋىلى
15	5	كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە
15	5.1	ئاساسىي بىلىم
15	5.1.1	تەكشىلىك ۋە نۇقتا
15	5.1.2	لىمىت
15	5.1.3	خۇسۇسىي ھاسىلە
15	5.1.4	تولۇق ھاسىلە
15	5.1.5	ھاسىلە ئۈزلۈكسىزلىكى
15	5.2	كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ھاسىلىسى
15	5.2.1	زەنجىر قائىدىسى
15	5.2.2	يوشۇرۇن فۇنكسىيە مەۋجۇتلىقى
15	5.3	كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ئېكىستىرمىۇم
15	5.3.1	ئاساسىي ئۇقۇم
15	5.3.2	شەرتسىز ئېكىستىرمىۇم
15	5.3.3	شەرتلىك ئېكىستىرمىۇم
16	6	كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ئىنتېگرالى
16	6.1	قوش قات ئىنتېگرال
16	6.1.1	ئاساسىي ئۇقۇم
16	6.1.2	ھېساپلاش
16	6.1.3	ئەمەلىي قوللىنىلىشى
16	6.2	ئۈچ قات ئىنتېگرال
16	6.2.1	ئاساسىي ئۇقۇم
16	6.2.2	ھېساپلاش
16	6.2.3	ئەمەلىي قوللىنىلىشى
16	6.3	بىرىنچى ئەگرى سىزىق ئىنتېگرال
16	6.3.1	ئاساسىي ئۇقۇم
16	6.3.2	ھېساپلاش
16	6.3.3	ئەمەلىي قوللىنىلىشى

17	6.4	ئىككىنچى ئەگرى سىزىق ئىتېگىرال
17	6.4.1	ئاساسىي ئۇقۇم
17	6.4.2	ھېساپلاش
17	6.4.3	گىرىن فورمۇلىسى
17	6.4.4	ئەمەلىي قوللىنىلىشى
17	6.5	بىرىنچى سىرت ئىتېگىرال
17	6.5.1	ئاساسىي ئۇقۇم
17	6.5.2	ھېساپلاش
17	6.5.3	ئەمەلىي قوللىنىلىشى
17	6.6	ئىككىنچى سىرت ئىتېگىرال
17	6.6.1	ئاساسىي ئۇقۇم
17	6.6.2	گاۋۇس فورمۇلىسى
17	6.6.3	ھېساپلاش
17	6.7	ئەمەلىي قوللىنىلىشى
17	6.7.1	ئېغىرلىق ۋە شەكىل مەركىزى
17	6.7.2	ئايلنىش ئېنېرگىيەسى
18	7	چەكسىز قاتار
18	7.1	ئاساسىي ئۇقۇملار
18	7.1.1	قاتار
19	7.1.2	قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ۋە خۇسۇسىيىتى
21	7.1.3	مۇسبەت قاتار
23	7.1.4	ئالماش قاتار ۋە خالىغان قاتار
24	7.2	فۇنكسىيە قاتارى
24	7.2.1	فۇنكسىيە قاتارى
24	7.2.2	دەرىجىلىك قاتار
25	7.2.3	فۇنكسىيەلىك يېيىش
27	7.3	ترىگونومېترىيەلىك قاتار
27	7.3.1	ترىگونومېترىيەلىك قاتار
27	7.3.2	فۇرىيە قاتارى
29	7.3.3	فۇرىيە ئالماشتۇرۇشى
31	7.3.4	دىسكرىپت فۇرىيە ئالماشتۇرۇشى
33	8	دېففېرېنسىئال تەڭلىمە
33	8.1	دېففېرېنسىئال تەڭلىمە
33	8.1.1	ئاساسىي ئۇقۇم
34	8.1.2	ئاساسىي تەڭلىملەر
35	8.2	ئادەتتىكى دېففېرېنسىئال تەڭلىمە
36	8.2.1	سىزىقلىق دېففېرېنسىئال تەڭلىمە
36	8.2.2	بېرىئىل تەڭلىمىسى
38	8.2.3	تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان دېففېرېنسىئال تەڭلىمە
38	8.3	يۇقىرى دەرىجىلىك سىزىقلىق دېففېرېنسىئال تەڭلىمە
38	8.3.1	يۇقىرى دەرىجىلىك تەڭلىمە
39	8.3.2	ئەيلەر تەڭلىمىسى
40	II	ئالگېبرا
41	9	دېتېرمىنانت
41	9.1	ئۇقۇم
41	9.1.1	ئالاھىدە دېتېرمىنانت
41	9.2	ھېساپلاش

41	تولدۇرغۇچى منور	9.2.1
41	ئالگېبرالىق تولدۇرغۇچى منور	9.2.2
41	دېتېرمىنانتنى يېيىش قائىدىسى	9.2.3

10 ۋېكتور

42	ۋېكتور ۋە ۋېكتور ئۇقۇمى	10.1
42	ۋېكتور	10.1.1
42	ھېساپلاشلار	10.1.2
42	سىزىقلىق باغلىنىشلىق ۋېكتور	10.1.3
42	ۋېكتور خۇسۇسىيەتلىرى	10.2
42	ۋېكتور سىزىقلىق مۇناسىۋەتسىزلىك	10.2.1
42	ۋېكتور رانكى	10.2.2
42	ۋېكتور تەڭداشلىقى	10.2.3
42	ۋېكتور بوشلۇقى	10.2.4

11 ماترىسا

43	ئاساسىي ئۇقۇم	11.1
43	ماترىسا ئارىسىدا ھېساپلاش	11.1.1
43	ماترىسا خۇسۇسىيەتلىرى	11.1.2
43	ماترىسا خاسلىقلىرى	11.2
43	ماترىسا ۋە دېتېرمىنانت	11.2.1
43	ماترىسا رانكى	11.2.2
43	خاراكتېرلىگۈچى قىممەت ۋە ۋېكتور	11.2.3
44	ئالاھىدە ماترىسسالار	11.3
44	ئېلىمىنتار ماترىسا	11.3.1
44	تەتۈر ماترىسا	11.3.2
44	تەڭداش ماترىسا	11.3.3
44	سىممېتىرىك ماترىسا	11.3.4
44	ئوخشاش ماترىسا	11.3.5
44	ئورتوگونال ماترىسا	11.3.6

برنجی قسم
ٲالي ماتيماتكا

بىرىنچى باب

ئالدىن بىلىملەر

بۇ باپتا ئالىي ماتېماتىكا ئۆگىنىشتىن ئاۋال ھازىرلاشقا تىگىشلىك ئالدىن بىلىملەر خاتىرىلەندى. بۇ بىلىملەر ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا بىلىملىرىدىن ئالىي ماتېماتىكا بىلىملىرىگە بولغان ئۆتكۈنچى نۇقتىلار ھېساپلىنىدۇ.

1.1 فۇنكسىيە

فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى ئادەتتە ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ۋە زامانىۋى ئېنىقلىما دەپ ئىككىگە بۆلىنىدۇ. باياننىڭ ئۇقۇمىنىڭ باشلىنىش نۇقتىسى باشقىچە بولغاندىن باشقا، فۇنكسىيەنىڭ ئىككى ئېنىقلىمىسى ئاساسەن ئوخشاش. ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ھەرىكەت ئۆزگىرىشى نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ، زامانىۋى ئېنىقلىما بولسا توپلام ۋە ئەكس ئېيتىش نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ.

1.1.1 ئاساسىي ئېلىمېنتلار فۇنكسىيە

ئاساسىي ئېلىمېنتلار فۇنكسىيە تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى، دەرىجە فۇنكسىيەسى، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفىملىق فۇنكسىيە، تىرگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە، تەتۈر تىرگونومېترىيەلىك فۇنكسىيەنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ. تەپسىلاتى تۆۋەندىكىچە:

تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە دەرىجىلىك فۇنكسىيە كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە لوگارىفىملىق فۇنكسىيە تىرگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە تەتۈر تىرگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە

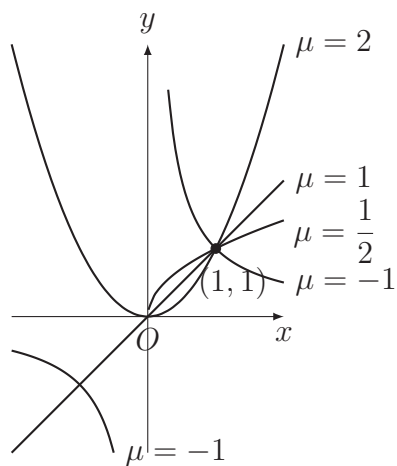
تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى $y = f(x) = C$ بۇنىڭدا C تۇراقلىق سان.

بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = f(x) = ax + b$ a, b خالىغان سان، ھەم $a \neq 0$

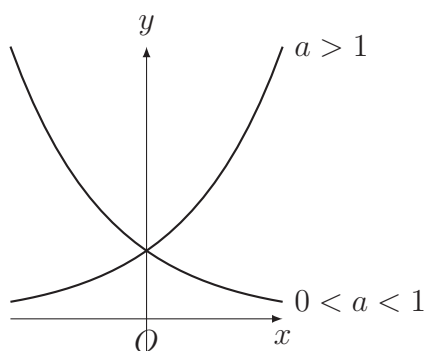
ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c خالىغان سان، ھەم $a \neq 0$

تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە $y = f(x) = \frac{a}{x}$ a خالىغان سان.

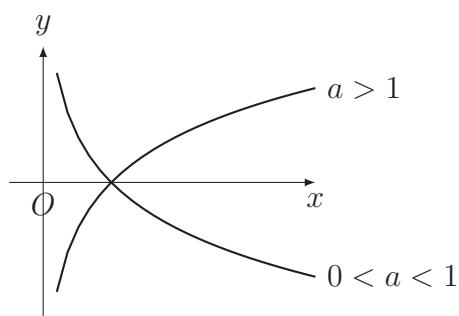
دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = x^\mu$ μ خالىغان سان
رەسمىدىكىدەك بولىدۇ. $y = x^\mu, x > 0$



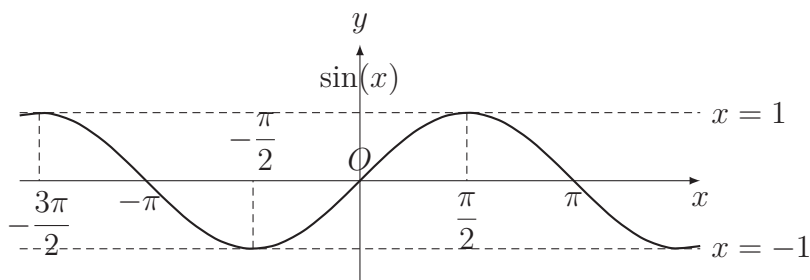
كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$



لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$



ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە سىنۇس فۇنكسىيەسى:



كوسىنۇس فۇنكسىيەسى:



1.1.2

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

كۆپەيمە:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

بىرلىك:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

يېرىم بۆلۈك:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)}$$

ھاسىلە فورمۇلاسى

1.1.3

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \tan x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(C)' = 0$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى

1.2

تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى

1.2.1

تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى

1.2.2

سانلار قاتارى

1.2.3

سانلار قاتارى يىغىندىسى

1.2.4

$$1. \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

دەرىجە فۇنكسىيەسىگە نىسبەتەن ئوخشاش بولمىغان دەرىجە ئاستىدىكى ئوخشاش مونوتونلۇققا ئاساسەن ئەڭ قىممەتنى تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ

ئىككىنچى باب

فۇنكسىيە ۋە لىمىت نەزەرىيىسى

2.1 فۇنكسىيە

فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى ئادەتتە ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ۋە زامانىۋى ئېنىقلىما دەپ ئىككىگە بۆلىنىدۇ. باياننىڭ ئۇقۇمىنىڭ باشلىنىش نۇقتىسى باشقىچە بولغاندىن باشقا، فۇنكسىيەنىڭ ئىككى ئېنىقلىمىسى ئاساسەن ئوخشاش. ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ھەرىكەت ئۆزگىرىشى نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ، زامانىۋى ئېنىقلىما بولسا توپلام ۋە ئەكس ئېتىش نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ.

ئېنىقلىما 2.1.1: فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى

خالىغان توپلام A دىكى ئېلىمىنت x گە نىسبەتەن، ماسلىق مۇناسىۋىتى f مەۋجۇت بولۇپ، بۇ x گە تەسىر قىلغاندىن كېيىن ئېرىشكەن توپلام B نىڭ ئېلىمىنتى y بولسا، ئۇنداقتا $f(x)$ بولسا توپلام A دىن توپلام B غا بولغان ئەكس ئېتىش ھېساپلىنىدۇ. بۇنىڭدا y بولسا x نىڭ فۇنكسىيەسى دېيىلىدۇ. بۇنى

$$x \rightarrow y \Leftrightarrow y = f(x)$$

ئارقىلىق خاتىرىلەشكە بولىدۇ.

فۇنكسىيە ئۇقۇمى ئۈچ دائىرىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ: ئېنىقلىما ساھەسى A ، قىممەت دائىرىسى B ۋە مۇناسىۋەت ئىپادىسى f .

2.2 سانلار قاتارى

2.2.1 تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى

2.2.2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى

2.2.3 سانلار قاتارى

2.3 لىمىت

2.3.1 لىمىت ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى

2.3.2 سانلار قاتارى لىمىتى

2.3.3 فۇنكسىيە لىمىتى

2.3.4 سانلار قاتارى ۋە فۇنكسىيە لىمىتى

2.4 فۇنكسىيە ئۆزلىكسىزلىكى

2.4.1 فۇنكسىيە مونوتونلىقى

2.4.2 فۇنكسىيە ئۆزۈك نۇقتىسى

ئۈچىنچى باب

دېفېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرال

بۇ بايتىكى مۇھىم نۇقتىلار: دېفېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرال ماتېماتىكا پېنىدىكى ئەڭ يادرولۇق بىلىم نۇقتىسىنىڭ بىرى، شۇنداقلا ئۇ فىزىكا ئىلمىنىڭ ئاساسى. بۇ بايتا ھاسىلە ئۇقۇمىدىن باشلاپ دېفېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرالنىڭ ئەمەلىي قوللىنىشىغا بولغان مەزمۇنلار خاتىرىلىنىدۇ. بۇ بايتا يەنە دېفېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرالغا ئائىت ھېسابلاشلار، تېئورېمىلار چۈشەندۈرۈلىدۇ. بۇنىڭدىن سىرت دېفېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرالنىڭ ماھىيىتى ۋە قوللىنىلىشىغا دائىر ئەمەلىي مىساللار تونۇشتۇرۇلىدۇ.

3.1 ھاسىلە ئۇقۇمى

تىزلىك ئۇقۇمى ھەممە كىشىگە ئەڭ تونۇش بولسا كىرەك، مەسىلەن ماشىنا تىزلىكى $60km/h$ دىگەندەك. بۇ يەردىكى $60km/h$ ئەمەلىيەتتە $16.67m/s$ بىلەن ئوخشاش. يەنى 1 سېكۇنتتا 16.67 مېتىر يۆتكىلىدۇ دىگەنلىك. تىزلىك قانداق قىلىپ ماڭغان يۆتكىلىشكە ئايلاندى؟ ماڭغان يۆتكىلىش قانداق قىلىپ تىزلىكنى مەۋجۇت قىلدى؟ جىسىم مەلۇم تىزلىككە يېتىش ئۈچۈن تىنچ ھالەتتىن قوزغالسا، ئۇ نىشان تىزلىككە يەتكۈچە قانداق قىلىپ تىزلىنىشنى مەۋجۇت قىلدى؟ بۇنداق فىزىكىلىق ھادىسىلەرنى تەتقىق قىلىشتا ھاسىلگە تايانماي بولمايدۇ.

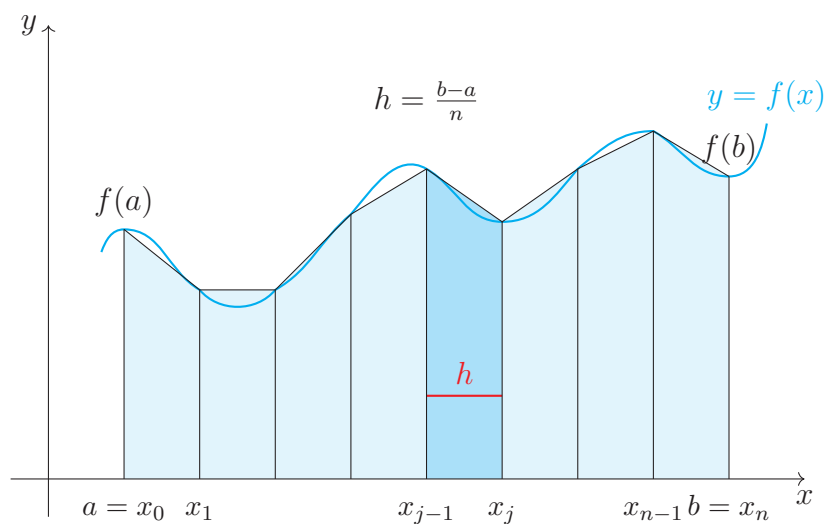
3.1.1 فۇنكسىيە ھاسىلىسى

3.1.2 يۇقىرى دەرىجىلىك ھاسىلە

3.2 دېفېرېنسىيال

3.2.1 فۇنكسىيە دېفېرېنسىيالى

3.2.2 ھاسىلە فورمۇلىسى



3.1-رەسىم: دىففېرېنسىيال

دىففېرېنسىيال تېئورمىسى

3.3

فېرمات تېئورمىسى

3.3.1

لور تېئورمىسى

3.3.2

لاگرانج تېئورمىسى

3.3.3

كوشى تېئورمىسى

3.3.4

دىففېرېنسىيال ئوتتۇرا قىممەت تېئورمىسى

3.3.5

تەيلىر يېپىلمىسى

3.4

تەيلىر يېپىلمىسى

3.4.1

تەيلىر فورمۇلىسى

3.4.2

فۇنكسىيە خۇسۇسىيىتى

3.5

فۇنكسىيە يىلتىزى

3.5.1

فۇنكسىيە مونوتون رايونى

3.5.2

فۇنكسىيە ئېكستېرمۇم قىممىتى

3.5.3

فۇنكسىيە كۆپۈنگۈ ۋە پېتىنقى قىسمى

3.5.4

فۇنكسىيە بۇرۇلۇش نۇقتىسى

3.5.5

ياي دىففېرېنسىيالى

3.6

ياي دىففېرېنسىيالى

3.6.1

ئەگرلىك

3.6.2

ئەگرلىك رادېئۇس

3.6.3

تۆتىنچى باب

ئېنىق ئىنتېگرال ۋە ئېنىقسىز ئىنتېگرال

4.1 ئېنىق ئىنتېگرال

4.1.1 ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەت

4.1.2 ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلى

بىرىنچى خىل ئالماشتۇرۇش

ئىككىنچى خىل ئالماشتۇرۇش

4.1.3 قەدەملەش ئۇسۇلى

4.1.4 راتسىيونال فۇنكسىيە ئىنتېگرالى

4.2 ئېنىقسىز ئىنتېگرال

4.2.1 ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەت

4.2.2 ھېساپلاش

4.2.3 نيۇتون - لېبېرېنتس فورمۇلىسى

4.2.4 غەيرى ئىنتېگرال

4.3 ئىنتېگرال قوللىنىلىشى

4.3.1 يۈز

4.3.2 ھەجىم

4.3.3 ئوتتۇرىچە قىممەت

4.3.4 ئوزۇنلۇق

4.3.5 ئىنتېگرال جەدۋىلى

بەشىنچى باب

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە

ئاساسىي بىلىم

5.1

تەكشىلىك ۋە نۇقتا

5.1.1

لىمىت

5.1.2

خۇسۇسىي ھاسىلە

5.1.3

تولۇق ھاسىلە

5.1.4

ھاسىلە ئۈزلۈكسىزلىكى

5.1.5

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ھاسىلىسى

5.2

زەنجىر قائىدىسى

5.2.1

يوشۇرۇن فۇنكسىيە مەۋجۇتلىقى

5.2.2

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ئېكستىرمىمۇ

5.3

ئاساسىي ئۇقۇم

5.3.1

شەرتسىز ئېكستىرمىمۇ

5.3.2

شەرتلىك ئېكستىرمىمۇ

5.3.3

ئالتىنچى باب

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ئىنتېگرالى

6.1 قوش قات ئىنتېگرال

6.1.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.1.2 ھېساپلاش

6.1.3 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.2 ئۈچ قات ئىنتېگرال

6.2.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.2.2 ھېساپلاش

6.2.3 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.3 بىرىنچى ئەگرى سىزىق ئىنتېگرال

6.3.1 ئاساسىي ئۇقۇم

6.3.2 ھېساپلاش

6.3.3 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.4 ئىككىنچى ئەگرى سىزىق ئىتېگىرال

6.4

ئاساسىي ئۇقۇم

6.4.1

ھېساپلاش

6.4.2

گىرىن فورمۇلىسى

6.4.3

ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.4.4

6.5 بىرىنچى سىرت ئىتېگىرال

6.5

ئاساسىي ئۇقۇم

6.5.1

ھېساپلاش

6.5.2

ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.5.3

6.6 ئىككىنچى سىرت ئىتېگىرال

6.6

ئاساسىي ئۇقۇم

6.6.1

گائۇس فورمۇلىسى

6.6.2

ھېساپلاش

6.6.3

6.7 ئەمەلىي قوللىنىلىشى

6.7

ئېغىرلىق ۋە شەكىل مەركىزى

6.7.1

ئايلىنىش ئېنېرگىيەسى

6.7.2

يەتتىنچى باب

چەكسىز قاتار

بۇ باپتىكى مۇھىم نۇقتىلار: مۇسبەت قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقىنى سېلىشتۇرۇپ ئېنىقلاش ئۇسۇلى، نىسبەت قىممىتى ئېنىقلاش ئۇسۇلى، يىلتىز قىممىتىنى ئېنىقلاش ئۇسۇلى، گىرەلەشمە قاتارنىڭ لېنىز ئېنىقلاش ئۇسۇلى. قىيىن نۇقتا خالىغان قاتارنىڭ ئابېل پەرقلەندۈرۈش ئۇسۇلى ۋە دىرىكېلى پەرقلەندۈرۈش ئۇسۇلى قاتارلىقلار.

7.1 ئاساسىي ئۇقۇملار

ھەرقانداق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ غا نىسبەتەن، ئۇنىڭ خالىغان ئېلىمىنتلىرىنىڭ چېكى بولسا، بىز بۇنى چېگرىلانغان دەپ ئاتايمىز. يەنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادە قۇرىلىدۇ:

$$A_k \leq a_{k+n} \leq B_k, (k = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, n > k)$$

دېمەك يۇقىرىدىكى A_k, B_k لار بۇ سانلارنىڭ ئېنىق چېكى دەپ ئاتىلىدۇ. بۇنىڭدا A_k ئېنىق ئاستا چېكى دىيىلىدۇ ھەم $A_k = \inf\{a_{k+n}\}, (k = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, n > k)$ قىلىپ خاتىرىلىنىدۇ، ئوخشاشلا B_k ئېنىق ئۈستى چېكى دىيىلىدۇ ھەم $B_k = \sup\{a_{k+n}\}, (k = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, n > k)$ قىلىپ خاتىرىلىنىدۇ. بۇ يەردىكى ئېنىق چېكى مۇقىم ئەمەس بولۇپ، شۇڭا ئىندېكسى k قوشۇپ يېزىلىدۇ. بۇ خۇددى مەلۇم بىر ساننىڭ بەشتىن كىچىك بولسا، ئۇ ساننىڭ ئالتىدىنمۇ كىچىك، يەتتىنچىدىنمۇ كىچىك، ... بولىدىغانلىقى بىلەن ئوخشاش مەنىدە. ئەگەر يۇقارقى سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى يىغىلسا، ئۇنىڭ لىمىتى چوقۇم مەۋجۇت بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن ئۇنىڭ لىمىتى ۋە ئېنىق چېكى ئوتتۇرىسىدا مۇنداق مۇناسىۋەت ئىپادىسى قۇرىلىدۇ:

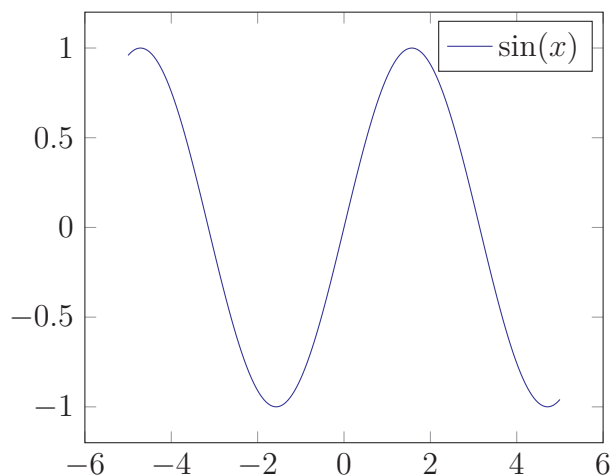
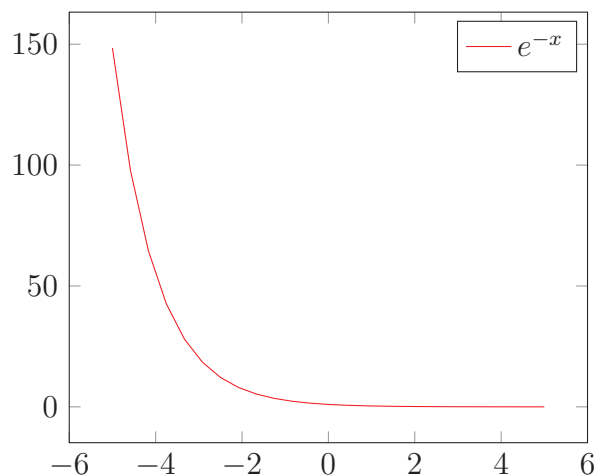
$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf\{a_{k+n}\}$$
$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup\{a_{k+n}\}$$

دېمەك، بۇ يەردىكى A, B لار $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ نىڭ ئاستى لىمىتى ۋە ئۈستى لىمىتى دەپ ئاتىلىدۇ. شۇنىڭ بىلەن يىغىلىدىغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ۋە ئۇنىڭ چېگرىسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت لىمىت بىلەن باغلانغان بولىدۇ. سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ لىمىتى ۋە ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى لىمىتلىرىنى ئارىلاشتۇرۇپ تېشىكە بولمايدۇ. ئاستى ئۈستى لىمىتلىرىنى مەۋجۇت بولسا سانلارنىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولىشى ئاتاين. مەسىلەن تۆۋەندىكى رەسىمدە:

سىنوس فۇنكسىيەلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ لىمىتى يوق، ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى چېكى بار، 1 ۋە -1 دەل ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى چېكى، شۇنداقلا ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى لىمىتلىرى بار. ئوخشاشلا سول تەرەپتىكى رەسىمدىكىدەك، e^{-x} فۇنكسىيەلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ ئاستى چېكى بار، ئاستى لىمىتى بار يەنى 0، ئەمما ئۈستى لىمىتى يوق. شۇڭا ئۆزگەرگۈچى مىقدار x چەكسىزلىككە يۈزلەنگەندە ئۇنىڭ لىمىتى بار، بۇ دەل ئۇنىڭ ئاستى لىمىتى.

7.1.1 قاتار

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرسىدە سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ھەققىدە مۇناسىۋەتلىك بىلىملەرنى دەسلەپ ئۆگەندىمىز. ئۇ ۋاقىتتا پەقەت چەكلىك ئەزالىق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئۈستىدە، يەنە كىلىپ تەڭ ئايرىملىق ۋە تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئۈستىدىلا ئۆگەنىش ئېلىپ بېرىلاتتى. ئەمدىكى مەزمۇندا چەكسىز بولغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى «قاتار» ئۈستىدە مۇلاھىزە قىلىپ بارىمىز.



ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەقتە مەزمۇنلار خاتېرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ۋە تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى ئۈستىدە تەپسىلىي نۇقتىلار يېزىلدى. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. قاتار دېگەن نۇرغۇنلىغان ئېلىمىنتلارنىڭ يىغىندىسىدىن تەركىپ تاپقان ئىپادە بولۇپ، چەكسىز قاتار بولسا چەكسىز ئېلىمىنتلار قاتارىنى كۆرسىتىدۇ.

ئېنىقلىما 7.1.1: قاتار

خالغان سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ نىڭ ئېلىمىنتلىرىنى قوشۇش ئەمىلى بىلەن ئۇلاپ يېزىپ ھاسىل بولغان ئىپادە ئىپادە چەكسىز قاتار دەپ ئاتىلىدۇ (قىسقارتىلىپ قاتار دېيىلىدۇ). ماتېماتىكىدا

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

قىلىپ خاتىرلىنىدۇ.

ئېنىقلىمىدىكى u_n قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى دەپ ئاتىلىدۇ. ئالدىنقى n ئەزاسىنىڭ يىغىندىسى قىسمەن يىغىندى دەپ ئاتىلىدۇ، ھەم $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ قىلىپ خاتىرلىنىدۇ.

ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار ئەگەر قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى u_n تۇراقلىق سان بولسا، بۇ خىلدىكى قاتارنىڭ ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار دەپ ئاتايمىز. مەسىلەن: $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 2 + \dots + n + \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار ھېساپلىنىدۇ.

7.1.2 قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ۋە خۇسۇسىيىتى

يىغىلىشچانلىقى ئەگەر قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n نىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولسا، بۇ قاتار يىغىلىدۇ دەپ ئاتىلىدۇ. يەنى، ئەگەر $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ، ئۇنداقتا $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. ئەگەر قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n نىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولمىسا، ئۇنداقتا بۇ قاتار يىراقلىشىدۇ دەپ ئاتىلىدۇ. قاتارنىڭ يىغىلىش ۋە يىراقلىشىشنىڭ يۈزەكى مەنىسى بولسا، يىغىلغاندا ئۇنىڭ يىغىندىسىنىڭ چېكى بار، يىراقلاشقاندا ئۇنىڭ يىغىندىسىنىڭ چېكى يوق.

خۇسۇسىيىتى قاتارنىڭ ئېنىقلىمىسى ۋە يىغىلىشچانلىقىغا ئاساسەن تۆۋەندىكى بىرقانچە خۇسۇسىيەتلەرگە ئېرىشەلەيمىز.

خۇسۇسىيەت 7.1.1: قاتار يىغىلىشنىڭ زۆرۈر شەرتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ يىغىلسا، ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزاسىنىڭ لىمىتى $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ چوقۇم مەۋجۇت ھەم نۆلگە تەڭ.

بۇنىڭ سەۋەبىنى قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n دىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ.

ئېنىقلىمىغا ئاساسەن قاتار يىغىلىسا ئۇنىڭ قىسمەن يىغىندىسىنىڭ لىمىتى بار ئىدى، $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ھەم $u_n = S_n - S_{n-1}$ شۇڭا $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

شۇنى ئەسكەرتىشكە تېگىشلىكى بۇ پەقەت زۆرۈر شەرت، يەتەرلىك شەرت ئەمەس، شۇڭا ئومۇمىي ئەزانىڭ لىمىتى 0 بولسا، قاتارنىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولۇشى ناتايىن. مەسىلەن تۆۋەندىكى قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزا لىمىتى بار يەنى $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ، ئەمما قاتار يىغىلمايدۇ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = +\infty$$

خۇسۇسىيەت 7.1.2: يىغىلىشچان قاتارنىڭ سىزىقلىق خۇسۇسىيىتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ۋە $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ يىغىلسا، ئۇلارنىڭ سىزىقلىق ھېساپلاشلىرى

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n \pm \beta v_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

ئوخشاشلا يىغىلىدۇ. بۇ يەردە α, β لار خالىغان ھەقىقىي سان.

بۇ خۇسۇسىيەتكە ئىسپاتلاش ياكى چۈشەنچە بېرىلمەيدۇ، چۈنكى سىزىقلىق ئالگېبرادىكى ئىدىيە بويىچە تۇرۇقلۇق سان بىلەن سىزىقلىق ھېساپلاش ئېلىپ بېرىلغان قاتارنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى ئۆزگەرمەيدۇ.

خۇسۇسىيەت 7.1.3: يىغىلىشچان قاتارنىڭ تىرناق خۇسۇسىيىتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ يىغىلسا، ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزالىرىنىڭ خالىغان يېرىگە خالىغان تىرناق قويىسا، ئۇنىڭ يىغىلىشچانلىق ئۆزگەرمەيدۇ. يەنى $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلسا، $(u_1 + u_2 + \dots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \dots) + \dots$ ئوخشاشلا يىغىلىدۇ.

تىرناقنىڭ ماتېماتىكىدىكى رولى ئەمەللەر تەرتىپىنى ئۆزگەرتىش بولغاچقا، بۇ يەردىكى تىرناق خۇسۇسىيىتى دەل يىغىلىشچانلىق، قاتار ئۇنىڭ ئەزالىرىنىڭ جەملىنىش تەرتىپى بىلەن مۇناسىۋەتسىزلىكى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ. بۇ خۇسۇسىيەتمۇ كۆپ ئىشلىتىلىدۇ.

مەسىلەن $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots + 1 - 1 + \dots$ بۇ قاتار يىغىلمايدۇ، لىمىتى مەۋجۇت ئەمەس. ئەمما ھەر ئىككى ئومۇمىي

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0$$

دىمەك تىرناق ئالغاندىن كېيىن يىغىلمايدىغان قاتار يىغىلىدىغان بولۇپ قالدى. شۇڭا تىرناقنىڭ رولىنى بوش چاغلانغا بولمايدۇ ھەم قالايمىقان تىرناق قويۇشقىمۇ بولمايدۇ.

؟ كۆرسەتمە

گېئومېتىرىيەلىك قاتار تولىمۇ مۇھىم قاتارلارنىڭ بىرى بولۇپ، ئىنتايىن كۆپ ئۇچرايدۇ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots (a \neq 0)$$



ئالدىنقى n ئەزا يىغىندىسى $S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$, ($q \neq 1$) شۇڭا بۇنىڭ يىغىلىشچانلىق ۋە يىراقلىشىشچانلىقى تۆۋەندىكىچە بولىدۇ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} |q| < 1, \text{ يىغىلىدۇ} \\ |q| \geq 1, \text{ يىراقلىشىدۇ} \end{cases}$$

مۇسبەت قاتار

7.1.3

خالغان قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ئەگەر ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى u_n بىردەك مۇسبەت بولسا، بۇ قاتارنى مۇسبەت قاتار دەپ ئاتايمىز. يەنى

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0$$

ئەگەر بىردەك مەنپىي بولسا، بۇ قاتارنى مەنپىي قاتار دەپ ئاتايمىز. مۇسبەت قاتارمۇ بولۇش سۈپىتى بىلەن، ئالدىنقى مەزمۇندىكى خۇسۇسىيەتلەرنى تامامەن كۆچۈرۈپ ئەكىلىشكە بولىدۇ.

مۇسبەت قاتارنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسىمۇ مۇسبەت بولىدۇ، ھەم ئاشقۇچى فۇنكسىيە خۇسۇسىيەتتە بولىدۇ. (بۇ دەل مۇسبەت سانغا مۇسبەت سان قېتىلسا چوقۇم مۇسبەت بولىدىغانلىقىنىڭ مىسالى).

ئېنىقلا 7.1.1: مۇسبەت قاتار يىغىلىشچانلىقىنىڭ يىتەرلىك زۆرۈر شەرتى

ئەگەر مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلسا، ئۇنىڭ قىسمىي يىغىندىسىنىڭ چېكى بار. يەنى

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ يىغىلىدۇ} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ قىسمىي يىغىندىنىڭ چېكى بار}$$

دېمەك، مۇسبەت قاتارغا نىسبەتەن، ئەگەر ئۇ يىغىلسا ئۇنىڭ ئالدىنقى n ئەزا يىغىندىسىنىڭ چېكى بولسلا كۇپايە. سەۋەبى مۇسبەت قاتارنىڭ قىسمىي يىغىندىسى ئاشقۇچى فۇنكسىيەدۇر.

مۇسبەت قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى مۇسبەت قاتار كەڭ قوللىنىلىدىغان بولۇپ، ئۇنىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش تولۇم مۇھىم. تۆۋەندە بىرقانچە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇلى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز.

ئېنىقلا 7.1.2: سېلىشتۇرۇپ ئېنىقلاش ئۇسۇلى

ئەگەر ئىككى مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ئەگەر مەلۇم ئەزادىن باشلاپ بارلىق ئەزالاردا $u_n \leq v_n$ قۇرۇلسا، ئۇنداقتا:

$$\begin{aligned} \text{ئەگەر } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ يىغىلسا} & \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ مۇ يىغىلىدۇ} \\ \text{ئەگەر } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ يىراقلاشسا} & \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ مۇ يىراقلىشىدۇ} \end{aligned}$$

بۇنىڭ يۈزەكى مەنىسى: چوڭى يىغىلسا كىچىكىمۇ يىغىلىدۇ، كىچىكى يىراقلاشسا چوڭىمۇ يىراقلىشىدۇ.

1- مەشىق

گارىمونىك قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش.

$$\therefore \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \therefore x > 0, x > \ln(1+x)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n \quad \text{ھەم يەنە}$$

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$$

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، شۇڭا $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ يىراقلىشىدۇ. شۇڭا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مۇ يىراقلىشىدۇ.

تېئورېم 7.1.3: نىسبەتلىك ئېنىقلاش ئۇسۇلى (دالانېرت ئۇسۇلى)

مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ قوشنا ئومۇمىي ئەزالىرىنىڭ نىسبىتى ئارقىلىق ھۆكۈم قىلىش. يەنى

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} < 1, & \text{يىغىلىدۇ} \\ = 1, & \text{بىلگىلى بولمايدۇ} \\ > 1, & \text{يىراقلىشىدۇ} \end{cases}$$

بۇ يەردىكى نىسبەت دەل ئۇنىڭ چوڭ كىچىكلىكىنىڭ بىۋاسىتە ئىپادىسىدۇر. نىسبىتى چوڭ، دېمەك كىيىنكى ئەزا ئالدىنقىسىدىن چوڭ، يەنى ئەزالار ئېشىۋاتقانلىقىنىڭ بەلگىسى. ئەلۋەتتە ئۇ بارغانسېرى يىراقلىشىدۇ.

2- مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n n!}{n^n}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ. بۇ يەردە $a \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n}{n+1}} = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right)} = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n}{n+1} \right)} = |a| e^{-1} = \frac{|a|}{e}$$

شۇڭا a ۋە e نىڭ چوڭ كىچىكلىكى بويىچە ھۆكۈم قىلىمىز.
 ئەگەر $0 < |a| < e$ ئۇنداقتا يىغىلىدۇ.
 ئەگەر $|a| \geq e$ يىراقلىشىدۇ.

تېئورېم 7.1.4: (كوشى ئۇسۇلى) يىلتىزلىك ئېنىقلاش ئۇسۇلى

مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ئومۇمىي ئەزا يىلتىز ئارقىلىق ھۆكۈم قىلىش. يەنى

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} < 1, & \text{يىغىلىدۇ} \\ = 1, & \text{بىلگىلى بولمايدۇ} \\ > 1, & \text{يىراقلىشىدۇ} \end{cases}$$

ناۋادا قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ يىغىلىدىغان قاتار ئۇنداقتا:

ئەگەر ئۇنىڭ مۇتلەق قىممەت قاتارى $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ مۇ يىغىلسا، بۇ قاتارنى مۇتلەق يىغىلىشچان قاتار دەيمىز.
 ئەگەر مۇتلەق قىممەت قاتارى يىغىلمىسا شەرتلىك يىغىلىشچان قاتار دەيمىز.

3- مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3}$ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n \sin \frac{1}{n} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}} = e^{-\frac{1}{6}} < 1$$

شۇڭا يىغىلىدۇ.

يۇقارقى كوشى ئېنىقلاش ئۇسۇلىدىكى مىسالدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئومۇمىي ئەزا شەكلى a^n ، n^n بولغان قاتاردا كۆپ ئىشلىتىلىدۇ، قىسقىسى كوشى ئۇسۇلىدا دەرىجىنى يوقاتقىلى بولىدۇ.

تېئورېم 7.1.5: ئىنتېگرال ئۇسۇلى

ئەگەر مۇسبەت قاتار

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

غا نىسبەتەن، ئىنتېگرال $[1, +\infty]$ دا مونوتون كېمەيگۈچى فۇنكسىيە $f(x)$ مەۋجۇت بولسا، ھەمدە $u_n = f(n)$ بولسا، ئۇنداقتا بۇ مۇسبەت قاتار ۋە غەيرىي نورمال ئىنتېگرال

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

ئوخشاش خۇسۇسىيەتتە بولىدۇ، يەنى ئۇلارنىڭ يىغىلىش ۋە يىراقلىشىش خۇسۇسىيىتى ئوخشاش.

يۇقارقى تېئورېمدا، بىۋاسىتە فۇنكسىيەدىن پايدىلىنىپ قاتارنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىشتا ناھايىتى كۆپ ئىشلىتىلىدۇ. نۇرغۇن مەسىلىلەرنى مۇشۇنىڭدىن پايدىلىنىپ يېشىشكە بولىدۇ.

4 - مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقى.

ئەگەر سېلىشتۇرۇش ئۇسۇلى ياكى نىسبەت ئۇسۇلى ئىشلەتسەك، ياكى بولمىسا كوشى ئۇسۇلى ئىشلەتسەك يۇقارقى قاتارنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئېنىقلاپ چىققىلى بولىمىز، ئىنتېگرال ئۇسۇلى ئارقىلىق تېخىمۇ تىز ھەم چۈشىنىشلىك ئېنىقلاپ چىققىلى بولىدۇ.

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

$$u_n = f(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \ln(n) = +\infty, & p = 1, \\ \frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p < 1, \end{cases} \end{cases}$$

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى ئىنتېگرال ئۇسۇلىنى پىششىق بىلىش زۆرۈردۇر، چۈنكى ئۇ قاتار بىلەن فۇنكسىيەنى باغلاپ تۇرىدۇ.

7.1.4 ئالماش قاتار ۋە خالىغان قاتار

ئالماش قاتار دېگەن پىلوس مىنوس ئەزالىرى ئالمىشىپ كېلىدىغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. چۈنكى -1 ئۆز ئۆزى كۆپەيگەندە ئالامىتى ئۆزگىرىدىغان بولغاچقا، شۇڭا ئالماش قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$$

$$u_n > 0, (n = 1, 2, \dots)$$

ئالماش قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشتا تۆۋەندىكى بىرلا ئۇسۇلنى ئىگەللەش يېتەرلىك.

تېئورېم 7.1.6: لېيبنىز ئېنىقلاش ئۇسۇلى

ئەگەر ئالماش قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ تۆۋەندىكى ئىككى شەرتنى ھازىرلىسا:

- $\forall n \in N^+, u_n \geq u_{n+1}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

ئۇنداقتا بۇ ئالماش قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ يىغىلىدۇ.

بىرىنچى شەرتتىن بۇ قاتارنىڭ كېمەيگۈچى قاتار ئىكەنلىكىنى كۆرۈۋالغىلى بولىدۇ. ئىككىنچى خۇسۇسىيەتتىن بۇ قاتارنىڭ 0 گە يىغىلىدىغانلىقى چىقىپ تۇرۇپتۇ.

5- مەشىق

نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$$

كۆرۈۋالغىلى بولىدۇكى $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

ئەمدى $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ بولغاندا، $f'(x) = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0, (x \geq 2)$

دىمەك، $f(x)$ نىڭ ھاسىلىسى 0 دىن كىچىك، مونوتون كىمەيگۈچى فۇنكسىيە،

شۇڭا $u_n = f(n) > f(n+1) = u_{n+1}$ شەرتىنى قانائەتلەندۈرىدۇ، شۇڭا بۇ قاتار يىغىلىدۇ.

خالغان قاتار بۇ يەردىكى خالغان سۆزى قاتارنىڭ ئەزاسىنىڭ خالغان ئىكەنلىكىنى بىلدۈرىدۇ. يەنى مەيلى قاتارنىڭ ئەزاسى مۇسبەت ياكى مەنپىي ۋە ياكى نامەلۇم سان بولسۇن، خالغان قاتار ئۇقۇمىغا تەۋە. لېكىن ئەمەلىي قوللىنىشتا كۆپ ھاللاردا مەلۇم ئورتاق خۇسۇسىيەتكە ئىگە، مەيلى قانداقل بولسۇن بۇ يەنىلا كونكېرت مەسىلىگە تايىنىدۇ.

7.2 فۇنكسىيە قاتارى

7.2.1 فۇنكسىيە قاتارى

فۇنكسىيە قاتارى كەڭ دائىرىدىكى قاتارنى ئۆز ئىچىگە ئالغان بولۇپ، بىر قەدەر ئومۇملىققا ئىگە. دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيەسى بولغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

$$u_n(x), (n = 1, 2, \dots)$$

ئوخشاشلا فۇنكسىيە قاتارىنىڭ ئومۇمىي ئەزا، قىسمىي يىغىندا قاتارلىقلار ئالدىنقى باپتىكى ئېنىقلىما بىلەن ئوخشاش، شۇڭا قايتا تەكرارلانمايدۇ.

فۇنكسىيە قاتارى بىلەن ئادەتتىكى قاتارنىڭ ماھىيەتلىك پەرقى دەل ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزاسىدا. ئادەتتىكى قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى تۇراقلىق سان بولىدۇ. فۇنكسىيە قاتارىنىڭ ئادەتتىكى ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيەسى بولىدۇ. مەيلى ئادەتتىكى قاتار بولسۇن ياكى فۇنكسىيە قاتار بولسۇن، ئۇلار ئوخشاش قائىدە قانۇنىيەتلەرگە بويسۇنىدۇ. ئاددىي قىلىپ ئېيتقاندا، فۇنكسىيە قاتارىنىڭ ئۆزگەرگۈچى مىقدارى مەلۇم بىر ئېنىق قىممەتنى ئالغاندا دەل ئادەتتىكى قاتار بولىدۇ.

7.2.2 دەرىجىلىك قاتار

شەكلى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$ بولغان قاتارنى دەرىجىلىك قاتار دەپ ئاتايمىز. ئەگەر بۇ يەردىكى $x_0 = 0$ بولغاندا، قاتارنىڭ شەكلى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ بولىدۇ. دىمەك سىزىقلىق ئالماشتۇرۇش $t = x - x_0$ ئارقىلىق ئادەتتىكى دەرىجىلىك قاتارنىڭ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ شەكلىگە ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ. شۇڭا بۇ بۆلەكتىكى دەرىجىلىك قاتار پەقەت $x_0 = 0$ بولغان ئادەتتىكى دەرىجىلىك قاتارنىلا كۆرسىتىدۇ. ئەلۋەتتە دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش يىغىلماسلىق خۇسۇسىيەتلىرى ئىلگىرىكى بىلەن بىردەك، تۆۋەندە بىرنەچچە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇللىرى خاتىرىلەندى.

7.2.1: ئابىل بىرىنچى تېئورېمىسى

ئەگەر دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مەلۇم بىر نۇقتا $x = x_0, (x_0 \neq 0)$ دە يىغىلسا، ئۇنداقتا بارلىق $|x| < |x_0|$ نۇقتىلاردا، بۇ دەرىجىلىك قاتار مۇتلەق يىغىلىدۇ. ئەگەر مەلۇم بىر نۇقتا $x = x_0$ دە يىراقلاشسا، ئۇنداقتا بارلىق $|x| > |x_0|$ نۇقتىلاردا قاتار يىراقلىشىدۇ.

ئايىل تېئورمىسىدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئەگەر قاتار مەلۇم نۇقتا x_0 دە يىغىلسا، ئۇنداقتا $\frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{3}, \dots$ نۇقتىلاردا تامامەن يىغىلىدۇ. دېمەك ئېنىق بىر دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىدىغان نۇقتىسى پەقەت بىردىن-بىر ئەمەس. ئەمما مۇشۇ يىغىلىشچان نۇقتىلارنىڭ مۇتلەق قىممىتىنىڭ ئەڭ يۇقىرى چېكى بولىدۇ، بىز بۇ چېكىنى دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى دەپ ئاتايمىز، ئادەتتە R ھەرىپى بىلەن ئىپادىلەيمىز. يىغىنچاقلىساق:

$$\sup\{a_n x^n\} = R$$

$$\begin{aligned} |x| < R & \text{ يىغىلىدۇ} \\ |x| > R & \text{ يىراقلىشىدۇ} \\ |x| = R & \text{ بىلگىلى بولمايدۇ} \end{aligned}$$

دېمەك، رادىئۇس ئېنىقلانغاندىن كېيىن، يېپىق ئىنتېرۋال $(-R, +R)$ نى قاتارنىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋالى دەپ ئاتايمىز. رادىئۇس نۇقتىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئىنتېرۋال، قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرىسى دەپ ئاتىلىدۇ.

رادىئۇس نۇقتىسىدا، قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ئايرىم ھۆكۈم قىلىنىشى كىرەك. ئەگەر رادىئۇس نۇقتىسى $x = -R, x = +R$ دا قاتار يەنىلا يىغىلسا، قاتارنىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋالى ئوچۇق ئىنتېرۋال بولىدۇ، يەنى $[-R, +R]$ ، بۇ ئارقىلىق قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرىسىنى ئېنىقلىغىلى بولىدۇ.

تېئورېم 7.2.2: كوشى خادمارد تېئورمىسى

دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ غا نىسبەتەن، $\sup \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ بولسا، ئۇنداقتا بۇ قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى:

$$R = \frac{1}{\rho} = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

ئادەتتە يۇقارقى تېئورمىدىن پايدىلىنىپ دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسىنى تاپقىلى بولىدۇ. بولۇپمۇ بۇيەردە $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ بولۇپمۇ بۇيەردە بويىچە ئېلىنسا بولىدۇ.

6 - مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ نىڭ يىغىلىش دائىرىسىنى تېپىڭ،

رادىئۇس تېپىش فورمۇلىسىدىن بىلىۋالغىلى بولىدۇكى:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n 2^{n+1}}{(n+1) 2^n} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 2$$

شۇڭا قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$ يىغىلىش ئىنتېرۋالى $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ بولىدۇ.

ئەگەر $x = +\frac{1}{2}$ بولغاندا، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ شۇڭا بۇ نۇقتىدا قاتار يىراقلىشىدۇ.

ئەگەر $x = -\frac{1}{2}$ بولغاندا، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ شۇڭا بۇ نۇقتىدا قاتار يىغىلىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرىسى $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ئويلىنىش: فۇنكسىيە $f(x)$ نى، دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ بىلەن ئىپادىلەش مۇمكىنمۇ؟

فۇنكسىيەلىك يېيىش

7.2.3

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نى، دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ بويىچە يايغىلى بولسا، يەنى $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ئۇنداقتا بۇ قاتار، فۇنكسىيەنىڭ يېيىلمىسى دەپ ئاتىلىدۇ. داڭلىق تەيلور يېيىلمىسى دەل مۇشۇنداق يېيىشتۇر.

بىنقىلما 7.2.1: تەيلور قاتارى

ئەگەر خالىغان دەرىجىدە ھاسىلىسى بار بولغان فۇنكسىيە $f(x)$ نى، يىغىلىش رادىئۇسى R بولغان نۇقتا x_0 نىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋالى $(x_0 - R, x_0 + R)$ دا دەرىجىلىك فۇنكسىيە بويىچە يايغىلى بولسا، ئۇنداقتا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ، نۇقتا x_0 دىكى تەيلور قاتارى دەپ ئاتايمىز. ئادەتتە $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ قىلىپ خاتىرلەيمىز. ئەگەر $x_0 = 0$ بولغاندا، بۇ قاتارنىڭ فۇنكسىيەنىڭ ماكروۋىن قاتارى دەپ ئاتايمىز.

بۇ بىزگە قانداق قۇلايلىق ئېلىپ كىلدۈ دىگەندە، مەيلى بىر مۇرەككەپ فۇنكسىيە بولسۇن، ئۇنى ئاددىي بولغان نۇرغۇن ئۇششاق فۇنكسىيەلەرگە پارچىلىغىلى بولىدىغانلىقىنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ. بۇ خىل ئىدىيە دەل كىيىنكى مەزمۇندىكى فۇرىيې قاتارى، فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى قاتارلىقلاردا كەڭ ئۇچرايدۇ.

كۆپ ئىشلىتىلىدىغان تەيلور يىيىلمىلار ئېلىمىنتار فۇنكسىيەلەرنىڭ كۆپىنچىسى چەكسىز ھاسىلىسى بار بولۇپ، ئۇلارنى 0 نۇقتىدا دەرىجىلىك قاتارغا يايغاندا، بىرتۈركۈم گۈزەل نەتىجىلەرگە ئېرىشەلەيمىز، ئاساسلىقى تۆۋەندىكىچە:

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

$$2. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1.$$

$$3. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1.$$

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leq 1.$$

$$5. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

$$\begin{cases} x \in (-1, 1), & \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], & \alpha > 0 \end{cases}$$

$$6. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

$$7. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

ئادەتتىكى فۇنكسىيەلەر مەلۇم ئىنتېرۋالدا يىغىلسا، ئۇنداقتا ئۈستىدىكى يەكۈنلەر بويىچە فۇنكسىيە قاتارغا يېيىشقا بولىدۇ.

7 - مەشىق

فۇنكسىيە $f(x) = \arctan x$ نىڭ $x = 0$ بولغاندىكى فۇنكسىيە يىيىلمىسىنى تېپىڭ.

$$f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1$$

شۇڭا، ئاۋال ئىنتېگراللاپ كىيىن دىففېرېنسىئاللاش ئارقىلىق:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ترگونومېترىيلىك قاتار

7.3

فۇرىيېر قاتارى ترگونومېترىيلىك قاتار، ئادەتتە فۇرىيېر قاتارى ترگونومېترىيلىك قاتارمۇ دەپ قويىدۇ. ئەمما ترگونومېترىيلىك قاتار فۇرىيېر قاتارى ئەمەس، شۇڭا بىز بۇ بۆلەكتە ئاۋال ترگونومېترىيلىك قاتار بىلەن تونۇشۇپ چىقايلى، شۇ ئارقىلىق فۇرىيېر قاتارىنى چۈشىنىشىمىز تېخىمۇ ئاسانلاشقۇسى.

ترگونومېترىيلىك قاتار

7.3.1

شەكلى تۆۋەندىكىدەك:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

بولغان قاتارى ترگونومېترىيلىك قاتار دەپ ئاتايمىز. قىسقىسى ترگونومېترىيلىك قاتارنىڭ ئېنىقلىمىسىدا كۆرۈنۈپ تۇرۇپتىكى، ترگونومېترىيلىك قاتار ئىلگىرى خاتىرىلەنگەن فۇنكسىيە قاتارىنىڭ ئالاھىدە بىر تۈرى، بۇنىڭدا فۇنكسىيە پەقەت سىنوس ۋە كوسىنوس فۇنكسىيەلەرنىڭ ئاددىي سىزىقلىق بىرىكمىسى خالاس. سىنوس كوسىنوس فۇنكسىيەلەرنىڭ دەۋرىيلىك خۇسۇسىيىتىدىن تۆۋەندىكىدەك خۇسۇسىيەتكە ئېرىشىمىز:

ئېنىقلىما 7.3.1: ئورتوگونال فۇنكسىيە

ئەگەر ئىككى فۇنكسىيە $f(x)$ ۋە $g(x)$ تۆۋەندىكى ئىپادە قۇرۇلسا،

$$\int_a^b f(x)g(x) = 0$$

ئۇنداقتا بۇ ئىككى فۇنكسىيە ئېنتېرۋال $[a, b]$ دە ئورتوگونال دەپ ئاتىلىدۇ.

ترگونومېترىيلىك فۇنكسىيە سېستىمىسى $1, \cos x \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ ئېنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ دا ئورتوگونال.

ئورتوگونال ئۇقۇمنىڭ چۈشىنىشلىك ئىپادىلىنىشى: تىك كىسىش.

فۇنكسىيە تىك كىسىشتى دىمەك، فۇنكسىيە ئېنتېرۋالدا ئىنتىگرالى نۆل بولىدۇ، ئەگەر بۇ فۇنكسىيەدىن تۈزۈلگەن بوشلۇق بار بولسا، ئورتوگونال فۇنكسىيە سىستېمىسى دەلىبۇ بوشلۇقنىڭ ئاساسى بولىدۇ. دىمەك ئاساس فۇنكسىيەلەردىن پايدىلىنىپ بۇ بوشلۇقتىكى خالىغان فۇنكسىيەنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ. داڭلىق ھېلىبىرت بوشلۇقى دەل مۇشۇنىڭ كېڭەيتىلىشى.

فۇرىيېر قاتارى

7.3.2

ئاۋال تۆۋەندىكى ئېنىقلىمىنى كۆرۈپ چىقايلى.

تېئورېما 7.3.1: ترگونومېترىيلىك قاتار تېئورېمىسى

دەرىجىلىك قاتار ئەگەر خالىغان فۇنكسىيە $f(x)$ نى $[-\pi, \pi]$ دائىرە ئىچىدە تەكشى يىغىلىدىغان تروگونومېترىيلىك قاتار شەكلىدە يايغىلى بولسا، يەنى:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), |x| < \pi$$

ئۇنداقتا بۇ قاتارنىڭ بارلىق كويغېنىستىلىرى بىردىنبىر ئېنىق بولىدۇ. يەنى:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نى ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ ئىچىدە ئىنتېگراللىغىلى بولسا، ئۇنداقتا:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

نى فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ **فۇرىيە كوئېففىتسېنتى** دەپ ئاتايمىز. فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيە كوئېففىتسېنتى بىلەن ئۈزلۈكەن تروگونومېترىيەلىك قاتار دەل فۇنكسىيەنىڭ **فۇرىيە قاتارى** دەپ ئاتىلىدۇ.

يۇقىرىدا فۇنكسىيە $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ ئىچىدە ئىنتېگراللىغىلى بولىدۇ دېگەن، ناۋادا ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ دەۋرىسى $2l$ بولۇپ $[-l, l]$ ئىچىدە فۇرىيە قاتارى بويىچە ياساقلانغان بولىدۇ، بۇ يەردىكى l كەڭ مەنىدە بولۇپ، π دىن باشقا ھەرقانداق سان بولسا بولىدۇ. بىز مىقدار ئالماشتۇرۇش، تاق-جۈپ يېيىش قاتارلىق تەكلىپلەردىن پايدىلىنىپ بۇنىمۇ ئەمەلگە ئاشۇرالايمىز.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

فۇرىيە قاتارىنىڭ يىغىلىشچانلىقى خالىغان فۇنكسىيەنى فۇرىيە قاتارى بىلەن يايغىلى بولمايدۇ، دەۋرىي ھەم يىغىلىشچان بولۇش شەرتى قاتتىق شەرت بولۇپ، فۇرىيە قاتارىنىڭ يىغىلىشچانلىقىنى تەتقىق قىلىشقا توغرا كىلىدۇ. شۇڭا تۆۋەندىكى ئېنىقلىمىنى كۆرۈپ چىقايلى.

تېئورېم 7.3.2: يىغىلىش تېئورېمىسى

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ دەۋرىسى 2π بولغان ھەم $[-\pi, \pi]$ دا سىلىق بولسا، ئۇنىڭ فۇرىيە قاتارى يىغىلىدۇ، ھەمدە فۇرىيە قاتارىنىڭ يىغىندى فۇنكسىيەسى:

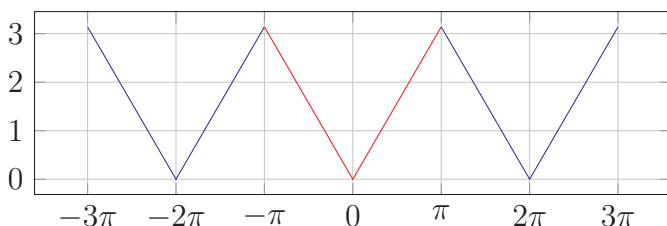
$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ئۈزلۈكسىز سىلىق نۇقتىدا} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{ئۈزۈك نۇقتىدا} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi \end{cases}$$

تېئورېمدا دېمەكچى، دەۋرىي بولۇپلا قالماي سىلىق بولۇشى شەرت، يەنى ھېچقانداق ئۈزۈك نۇقتىسى بولماسلىقى كېرەك. ئادەتتە فۇنكسىيەنى فۇرىيە قاتارىغا يايغاندا، ئېنىقلىما ساھەسىنى كېڭەرتىش مۇمكىن، بۇنىڭدا فۇنكسىيەنىڭ جۈپ-تاقلىقى بويىچە كېڭەرتىشكە بولىدۇ.

8 - مەشىق

فۇنكسىيە $f(x) = |x|$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$ نى فۇرىيە قاتارىغا يېيىڭ.

رەسىمىدىكىدەك، دەۋرىي فۇنكسىيە گە يايىمىز. شۇڭا:



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx) dx = 0$$

شۇنىڭ ئۈچۈن:

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad |x| \leq \pi$$

فۇرىي ئالماشتۇرۇشى

7.3.3

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا فۇرىي قاتارى خاتىرلەندى، ئەمدى بىز يەنە بىر مۇھىم نۇقتا فۇرىي ئالماشتۇرۇشى ھەققىدە توختىلىپ ئۆتىمىز. خالىغان دەۋرىيىسى $2l$ بولغان دەۋرىي فۇنكسىيەنىڭ فۇرىي قاتارى:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (7.1)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.3)$$

؟ كۆرسەتمە



ئەيلەر فورمۇلىسى كەڭ ئىشلىتىلىدىغان فورمۇلا بولۇپ، كومپلېكس ئۆزگەرگۈچى فۇنكسىيەدىكى ئىنتايىن مۇھىم فورمۇلانىڭ بىرىدۇر. مەلۇمكى i مەۋھۇم سان بىرلىكىدۇر، يەنى $i^2 = -1$ ئەيلەر فورمۇلىسى:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

بۇنى تەيلىر يېيىلمىسى ئارقىلىقمۇ كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانى قىسقارتىلدى.

فورمۇلا 1.1 – 1.3 لارنى ئەيلەر فورمۇلىسى بىلەن بىرىكتۈرسەك:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \left(e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right) - \frac{ib_n}{2} \left(e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right] \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + C_{-n} e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}. \\ C_0 &= \frac{a_0}{2}, C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{aligned}$$

دېمەك

$$C_n = \frac{1}{2l} \left[\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx - i \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx$$

C_n مۇ تېپىلدى، فۇرىي قاتارى مەزمۇنىدا فۇنكسىيە دەۋرىنى $T = 2l$ دېگەن. شۇڭا $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ئىچىدە، فۇنكسىيە $f(x)$ نى يۇقىرىدا كەلتۈرۈپ چىقارغان فۇرىي قاتارى فورمۇلىسى بويىچە مۇنداق يېزىشقىمۇ بولىدۇ:

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi x}{T}}$$

فىزىكىلىق بىلىملەرگە ئاساسەن، بۇلۇڭلۇق تىزلىك ω ۋە دەۋرى T ۋە چاستوتا f ئوتتۇرىسىدا مۇنداق مۇناسىۋات بار:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} \\ T &= \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = 2\pi\omega \end{aligned}$$

شۇڭا يەكۈنلەشكە بولىدۇكى:

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x} \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-in\omega x} dx, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ f_T(x) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-in\omega x} dx \right) e^{in\omega x} \end{aligned}$$

ئۈستىدىكى ئۆز نۆۋىتىدە يەنە **فۇرىيە دەرىجىلىك قاتارى** دەپ ئاتىلىدۇ، چۈنكى بۇنىڭ بارلىق ئەزالىرى e نىڭ دەرىجىسىنىڭ ۋەزىنلىك يىغىندىلىرىدىن تۈزىلىدۇ.

يۇقارقى فورمۇلا ۋە ئەيلەر فورمۇلاسىنىڭ گېئومېترىيەلىك مەنىسىدىن بىلىۋېلىشقا بولىدۇكى، فۇنكسىيە $f(x)$ نى نۇرغۇن چەمبەر بويلىما ھەركەت يايلىرىنىڭ ۋەزىنلىك يىغىندىسى دەپ قاراشقىمۇ بولىدۇ. ئەلۋەتتە بۇ فورمۇلا سىزىقلىق ئالگېبرادىكى بىلىملەر بىلەن تامامەن بىردەك. يەنى: سىزىقلىق بوشلۇقتا بىز بىر گورۇپا ئاساس ۋېكتورلارنى تاللاپلا، بۇ بوشلۇقتىكى بارلىق ۋېكتورلارنى مۇشۇ ئاساس ۋېكتورلارنىڭ سىزىقلىق بېرىكمە شەكلىدە ئىپادىلەپ چىقالايمىز.

ئادەتتە نۇرغۇن فۇنكسىيەلەرنىڭ دەۋرىيىسى T ئېنىق مەۋجۇت بولمايدۇ، ئەمما بىز بۇلارنىڭ دەۋرىيىسىنى چەكسىز دەپ قارىۋالساڭلا بولىدۇ. شۇڭا ئۈستىدىكى: $\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(x) = f(x)$

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-in\omega x} dx \right) e^{in\omega x}$$

لىمىت نەزىرىيەسى ئاساسىدا بۇ ئىپادىگە قارىتا ئاددىيلاشتۇرۇش ئېلىپ بارىمىز. دەۋرىيىسى چەكسىزلىككە قاراپ ماڭدى، دېمەك بۇلۇڭلۇق تىزلىكى نۆلگە قاراپ ماڭدى دېگەنلىك.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-in\omega x} dx \right) e^{in\omega x} \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\omega_n x} dx \right) \Delta\omega \end{aligned}$$

چۈنكى $\Delta\omega \rightarrow 0 (T \rightarrow +\infty)$ ۋەجىدىن، تۆۋەندىكىدەك ھادىسە مەۋجۇت:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &\rightarrow 0 (T \rightarrow +\infty) \\ \therefore \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \\ \omega_n = n\omega &\rightarrow \omega = \omega_n - \omega_{n-1} \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x) e^{-i\omega_n x} dx &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = F(\omega) \end{aligned}$$

شۇڭلاشقا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ \therefore f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

مانا ئەڭ ئاخىرىدىكى فورمۇلانى بىز فۇرىيە ئىنتېگرال فورمۇلاسى دەيمىز.

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-\infty, +\infty]$ مۇتلەق ئىنتېگراللىغىلى بولسا، يۇقىرىدىكى $F(\omega)$ نى بىز فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ **فۇرىيە ئالماشتۇرۇشى** دەيمىز. ھەم تۆۋەندىكىدەك خاتىرلەيمىز:

$$F(\omega) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

مانا بۇ فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى.

ئالماشتۇرۇشتىن كېيىنكى فۇنكسىيەنى ئەسلىي فۇنكسىيە بىلەن بىرلەشتۈرۈپ كېلىپ چىققان ئالماشتۇرۇشنى فۇرىيې تەتۈر ئالماشتۇرۇشى دەپ ئاتايمىز. ھەم تۆۋەندىكىدەك خاتىرىلەيمىز:

$$\begin{aligned} f(x) &= F^{-1}[F(\omega)] \\ f(x) &= F^{-1}[F(\omega)] \\ F^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

فۇرىيې قاتارى ۋە فۇرىيې ئالماشتۇرۇشىنىڭ مۇناسىۋىتى: فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ھەرقانداق دەۋرىي فۇنكسىيەنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ، ئەگەر فۇنكسىيە دەۋرىي فۇنكسىيە ئەمەس بولسا، ئۇنداقتا ئۇنىڭ دەۋرى چەكسىز ئېنىق ۋال ئىچىدە بولىدۇ. دەۋرى چەكسىزلىككە ماڭسا بۇلۇڭلۇق تىزلىق 0 گە قاراپ ماڭىدۇ شۇنداقلا ئاساس چاستوتىسى 0 گە قاراپ ماڭىدۇ، بۇ ۋاقىتتا چاستوتىسى داۋاملىق دىسكرېت ھالەتتە بولماي ئۈزلۈكسىز ھالەتتە بولىدۇ دە فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى ئارقىلىق داۋاملىق تەھلىل قىلغىلى بولىدۇ.

فۇرىيېنىڭ قىياسى: ھەرقانداق دەۋرىي فۇنكسىيەنى تروگونومېترىيلىك فۇنكسىيەلەرنىڭ يىغىندىسى يەنى فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولىدۇ.

7.3.4 دىسكرېت فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى

يۇقىرىدىكى كۆپلىگەن باسقۇچلاردىن كېيىن، بىز ئېرىشكەن فۇرىيې دەرىجىلىك قاتارى ۋە فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى تۆۋەندىكىدەك:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x} \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

ئەمما ھېساپلاش ماشىنىسى پەقەت چەكلىك ئېقىمدىكى ئۇچۇرلارنى بىر تەرەپ قىلالايدۇ، يەنە كېلىپ ئۈزلۈكسىز دائىرىدىكى ئۇچۇرلارنى ئەسلا بىر تەرەپ قىلالايدۇ. شۇڭا فۇرىيې ئالماشتۇرۇشىنى چوقۇم چەكلىك بولغان دىسكرېت ھالەتكە ئايلاندۇرۇش كېرەك.

$$e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$$

دىسكرېت ئالماشتۇرۇشى بىر تەرەپ قىلىدىغىنى دىسكرېت دەۋرىي سىگنال. ئالايلۇق بىز سىگنال تەرتىپلىرى $\{x[1], x[2], x[3], \dots\}$ دەۋرىيىسىنى D دەپ قارايمىز، ئۇنداقتا خالىغان پۈتۈن سان r غا نىسبەتەن، بىر پۈتۈن دەۋرىي ئىچىدىكى سىگناللار تەڭداش، يەنى $x[n] = x[n + rD]$.

ئۈزلۈكسىز سىگنال مەيداندا فۇرىيې بوشلۇقىدىكى ئاساس $e^{ki\omega t}$ بولۇپ، k پۈتۈن ساننى ئىپادىلەپ ئوخشىمىغان ئاساسنى بەلگىلەپ قويىدۇ، t بولسا ۋاقىت ئۈزلۈكسىز مىقدارى.

ھازىر بىزنىڭ قىلىدىغىنىمىز دىسكرېت ھەم دەۋرىي سىگنال، دەۋرىيىسى D ، شۇڭا ۋاقىت مىقدار دىسكرېت سىگنال تەرتىپى n گە ئايلاندى. شۇنىڭ بىلەن بۇ دىسكرېت بوشلۇقتىكى ئاساس $e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$ غا ئۆزگەردى. شۇڭا فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى تۆۋەندىكىدەك ئۆزگەردى: ئۈزلۈكسىز: ئەسلىدىكى سىگنال $f(x)$

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ki\omega t} dt, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ki\omega t} \end{aligned}$$

دىسكرېت: ئەسلىي سىگنال $x[n]$

$$X_k = \sum_{n=0}^{D-1} x[n] e^{-ki \frac{2\pi}{D} n}$$

$$x[n] = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X_k e^{ki \frac{2\pi}{D} n}$$

بۇ يەكۈنگە ئەيلەر فورمۇلاسىنى بىرلەشتۈرۈپ $x = FX w = e^{2\pi i/D} = \cos \frac{2\pi}{D} - i \sin \frac{2\pi}{D}$ شەكلىدىكى سىزىقلىق تەڭلىملەر سېستىمىسىغا ئېرىشەلەيمىز، يەنى:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[X-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

ئەلۋەتتە، ئۈستىدىكى ماترىسسا **ۋاندېرموند ماترىسسا** ۋە ياكى **فۇرىي ماترىسسا** دەپمۇ ئاتىلىدۇ. مۇشۇ ماترىسسانىڭ خۇسۇسىيىتى دەل دىسكرېت فۇرىي ئالماشتۇرۇشنىڭ ئالاقە رەقەملىك ئۆچۈرۈنى بىر تەرەپ قىلغىلى بولىدىغان بولمايدىغانلىقىنى بەلگىلەپ قويدۇ. ناۋادا بۇ ماترىسسانىڭ شەكلى ئىنتايىن مۇرەككەپ ھەتتا ئەكس ماترىسساسى مەۋجۇت ئەمەس، ئۇنداقتا بۇنىڭ چوڭ كېرىكى قالمايدۇ. ئەلۋەتتە، بۇ ماترىسسانىڭ ئۆزى ياكى ئەكس ماترىسساسىنىڭ ھېساپلاشلىرىنى تىز ئېلىپ بېرىش ئۈچۈن مەيدانغا تىز فۇرىي ئالماشتۇرۇشى مەيدانغا كىلىدۇ. قىسقىسى دىسكرېت فۇرىي ئۆڭ-تەتۈر ئالماشتۇرۇشلىرىنى ھېساپلاشتا ئىشلىتىلىدۇ.

9- مەشىق

كۇۋادىرات دولقۇنى دەۋرىيىسى 2π بولغان سىگنالنىڭ ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ ئىچىدىكى فۇنكسىيە ئىپادىسى تۆۋەندىكىچە:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

فۇرىي قاتارى فورمۇلىسىگە ئاساسەن، ھېساپلاپ چىقىشقا بولىدۇكى:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

شۇڭا بۇ سىگنالنىڭ فۇرىي قاتارى ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى مۇنداق:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n} \sin nx \right)$$

سەككىزىنچى باب

دېففېرېنسئال تەڭلىمە

تەڭلىمە ئۇقۇمى باشلانغۇچ ماتېماتىكىسىدا ئەڭ بۇرۇن ئۇچرايدۇ. ئىلگىرىكى مەزمۇنلاردا فۇنكسىيە، ھاسىلە ئۇقۇمى، دېففېرېنسئال ۋە ئىنتېگرال ئۇقۇملىرىنى ئىلگىرەندىن كېيىن مۇشۇلارنىڭمۇ تەڭلىمىگە ئائىت قوللىنىشلىرىنى بىلىش ئۈچۈن، شۇنداقلا تۇرمۇشتىكى ئەمەلىي مەسىلىلەرنىڭ ئېھتىياجى ئۈچۈن تۆۋەندە يېڭى بىر بىلىم نۇقتىسى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. بۇ باپتا بىر قەدەر قىيىن بولغان نۇقتا دېففېرېنسئال تەڭلىمە ھەققىدە دەسلەپكى بىلىملەرنى ئۆگىنىپ چىقايلى.

8.1 دېففېرېنسئال تەڭلىمە

دېففېرېنسئال تەڭلىمە نامەلۇم فۇنكسىيەنىڭ ھاسىلىسى بىلەن ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئوتتۇرىسىدىكى مۇناسىۋەت سىستېمىسىنى تەسۋىرلەيدىغان تەڭلىمىنى كۆرسىتىدۇ. دېففېرېنسئال تەڭلىمىنىڭ يېشىمى تەڭلىمىگە ماس كېلىدىغان فۇنكسىيە بولىدۇ. ھالبۇكى، ئېلىمېنتار ماتېماتىكىنىڭ ئالگېبرالىق تەڭلىمىسىنىڭ يېشىمى تۇراقلىق سانلىق قىممەتتۇر.

8.1.1 ئاساسىي ئۇقۇم

ئېنىقلىما 8.1.1: دېففېرېنسئال تەڭلىمە

نامەلۇم فۇنكسىيە ۋە نامەلۇم فۇنكسىيە ھاسىلىسىنىڭ ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئارىسىدىكى مۇناسىۋىتىنى ئىپادىلەيدىغان تەڭلىمە. يەنى فۇنكسىيە ھاسىلىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان تەڭلىمە دېففېرېنسئال تەڭلىمە دەپ ئاتىلىدۇ. بۇنى

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ئارقىلىق خاتىرلەشكە بولىدۇ.

دېففېرېنسئال تەڭلىمىدىكى نامەلۇم فۇنكسىيە ھاسىلىسىنىڭ دەرىجىسى، دېففېرېنسئال تەڭلىمىنىڭ دەرىجىسى دەپ ئاتىلىدۇ.

دېففېرېنسئال تەڭلىمىنىڭ يېشىمى ئەگەر فۇنكسىيە $y = \phi(x)$ نىڭ n دەرىجىلىك ئۈزلۈكسىز ھاسىلىسى $\phi^n(x)$ ، بېرىلگەن ئىنتېرۋال I دا مەۋجۇت ھەم تەڭلىمە

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

نى قانائەتلەندۈرسە، ئۇنداقتا فۇنكسىيە $y = \phi(x)$ تەڭلىمە

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

نىڭ ئىنتېرۋال I دىكى يېشىمى دەپ ئاتىلىدۇ.

ئومۇمىي يېشىمى ئەگەر دېففېرېنسئال تەڭلىمە يېشىمى خالىغان تۇراقلىق ساننى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھەمدە خالىغان تۇراقلىق ساننىڭ سانى تەڭلىمە دەرىجىسى بىلەن تەڭ بولغاندا، بۇ يېشىمنى تەڭلىمىنىڭ ئومۇمىي يېشىمى دەپ ئاتايمىز.

ئالاھىدە يېشىمى دىففېرېنسىئال تەڭلىمە ئومۇمىي يېشىمىدىكى خالىغان تۇراقلىق ساننى مۇقىم بېكىتكەندىن كېيىن ئېرىشكەن يېشىمنى، ئالاھىدە يېشىمى دەپ ئاتايمىز.

8.1.2 ئاساسىي تەڭلىملەر

• دەسلەپكى قىممەت شەرتى
ئەگەر $x = x_0$ بولغاندىكى فۇنكسىيە ۋە ئۇنىڭ ھاسىلىسىنىڭ قىممىتى y_0, y'_0 بېرىلگەن بولسا، بۇنداق شەرتلەرنى بىز تەڭلىمنىڭ دەسلەپكى قىممەت شەرتى دەپ ئاتايمىز.

• بىرىنچى دەرىجىلىك دەسلەپكى قىممەت مەسىلىسى
تەڭلىمە $y' = f(x, y)$ نىڭ دەسلەپكى شەرت $y|_{x=x_0} = y_0$ ئاستىدىكى ئالاھىدە يېشىمنى تېپىش مەسىلىسىنى كۆرسىتىدۇ. يەنى:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

• ئىككىنچى دەرىجىلىك دەسلەپكى قىممەت مەسىلىسى
تەڭلىمە $y'' = f(x, y, y')$ نىڭ دەسلەپكى شەرت $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0$ ئاستىدىكى ئالاھىدە يېشىمنى تېپىش مەسىلىسىنى كۆرسىتىدۇ. يەنى:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

• ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە
شەكلى تۆۋەندىكىدەك بولغان تەڭلىمنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە دەپ ئاتايمىز:

$$y' = f(x)g(y)$$

بۇنى يېشىشتە، ئوخشاش مىقدارلارنى بىر تەرەپكە يىغىپ ئىنتېگراللىساقلا بولىدۇ.

شەكلى $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ كە ئوخشاش تەڭلىمىدە، (a, b, c) لار بىرلا ۋاقىتتا نۆل ئەمەس. $u = ax + by + c$ ئۇنداقتا $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$ بولىدۇ، بۇنى ئەسلىدىكى تەڭلىمىگە بېرىكتۈرگەندە $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$ گە ئېرىشىمىز، بۇ دەل ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە.

10 - مەشىق

تەڭلىمە $\frac{dy}{dx} = 2xy$ نى يېشىڭ.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ بىر ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە.

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx, \ln |y| = x^2 + C, |y| = e^{x^2+C}$$

$$\therefore y = \pm e^{x^2} e^C = \pm C_1 e^{x^2} = C_2 e^{x^2}$$

• بىر جىنسلىق تەڭلىمە
شەكلى $y' = f(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ بولغان تەڭلىمە بىر جىنسلىق تەڭلىمە دەپ ئاتىلىدۇ. بۇنى يېشىشنىڭ باسقۇچلىرى:

$$u = \frac{y}{x}, y = xu, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

شۇنىڭ بىلەن:

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u), \therefore x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

بۇنى پارچىلىغىلى بولىدىغان تەڭلىمە يېشىش ئۇسۇلى بويىچە يېشىشكە بولىدۇ.

شەكلى $\frac{dy}{dx} = \frac{A_1x + B_1y}{A_2x + B_2y}$ بولغان تەڭلىمىنى، تەڭلىكنىڭ ئىككى تەرىپىگە x نى بۆلۈش ئارقىلىق بىر جىنسلىق تەڭلىمىگە ئېرىشەلەيمىز.

شەكلى $\frac{dy}{dx} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}$ بولغان تەڭلىمدە، ئاۋال تۇراقلىق سان C نى $x = X + h, y = Y + k$ ئارقىلىق ئالماشتۇرۇش ئېلىپ بارغاندا،

$$\frac{dY}{dX} = \frac{A_1X + B_1Y + A_1h + B_1k + C_1}{A_2X + B_2Y + A_2h + B_2k + C_2}$$

بۇنىڭدا مۇۋاپىق سان h, k بىلەن $A_1h + B_1k + C_1 = A_2h + B_2k + C_2 = 0$ نى قانائەتلەندۈرۈپ، بىر جىنسلىق تەڭلىمىگە ئېرىشەلەيمىز. بۇ ۋاقىتتا $\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}$ بولغاندا تېپىپ چىقىشقا بولىدۇكى

$$\begin{cases} k = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_2B_1 - A_1B_2} \\ h = \frac{A_1B_1C_2 - A_2B_1C_1 + A_1A_2B_1C_1 - A_1^2B_2C_1}{A_1^2B_2 - A_1A_2B_1} \end{cases}$$

ئەگەر $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \lambda$ بولغاندا، $A_1x + B_1y = v$ قىلىپ خاتېرلىۋالساق، كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇكى

$$\frac{dv}{dx} = A_1 + B_1 \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} = A_1 + B_1 \frac{v + C_1}{\lambda v + C_2} = \frac{(A_1\lambda + B_1)v + A_1C_2 + B_1C_1}{\lambda v + C_2}$$

بۇنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە بويىچە يېشىمىز.

11 - مەشىق

تەڭلىمە $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ نى يېشىڭ.

ئەزا يۆتكەش ئارقىلىق $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ گە ئېرىشەلەيمىز.

سول تەرەپ سۈرئەت مەخرەجنى x^2 غا بۆلۈش ئارقىلىق $\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy - x^2}{x^2}} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$ گە ئېرىشەلەيمىز.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ $\frac{y}{x}$ شەكىلدىكى بىر جىنسلىق تەڭلىمە. ئەگەر $u = \frac{y}{x}$ دەپ قويۇپ،

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1} - u = \frac{u}{u - 1}, \therefore \frac{u - 1}{u} du = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \int \frac{u - 1}{u} du = \int \frac{dx}{x}, u - \ln u = \ln x + C, \ln xu = u + C$$

نەتىجىگە $u = \frac{y}{x}$ نى ئالماشتۇرساق $\ln y = \frac{y}{x} + C$ ، شۇڭا $y = Ce^{\frac{y}{x}}$

ئادەتتىكى دېففېرېنسىئال تەڭلىمە

8.2

ئادەتتىكى دېففېرېنسىئال تەڭلىمە (ODE) دېگەن دېففېرېنسىئال تەڭلىمدىكى نامەلۇم مىقدار يەككە ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيەسى ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىدۇ. ئەڭ ئاددىي ئادەتتىكى دېففېرېنسىئال تەڭلىمە، نامەلۇم مىقدار بىر ھەقىقىي سان ياكى كومپلېكس ساننىڭ فۇنكسىيەسى بولۇشى مۇمكىن، لېكىن نامەلۇم مىقدار بىر ۋىكتور فۇنكسىيەسى ياكى ماترىتسا فۇنكسىيەسى بولۇشى مۇمكىن، كېيىنكى ئادەتتىكى دېففېرېنسىئال تەڭلىمدىن تەركىب تاپقان تەڭلىملەر سىستېمىغا ماس كېلىدۇ. ئەڭ كۆپ ئۇچرايدىغان ئىككى

خىلى بىرىنچى تەرتىپلىك دىففېرېنسئال تەڭلىمە ۋە ئىككىنچى تەرتىپلىك دىففېرېنسئال تەڭلىمدىن ئىبارەت.

سىزىقلىق دىففېرېنسئال تەڭلىمە

8.2.1

شەكلى $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ بولغان تەڭلىمە بىرىنچى تەرتىپلىك سىزىقلىق دىففېرېنسئال تەڭلىمە دېيىلدۇ. تەڭلىمدىكى نامەلۇم فۇنكسىيە y ۋە ئۇنىڭ ھاسىلىسىنىڭ دەرىجىسى بىرىنچى دەرىجە. ئەگەر $Q(x) = 0$ بولغاندا، بۇ بىرىنچى تەرتىپلىك بىر جىنسلىق دىففېرېنسئال تەڭلىمە دېيىلدۇ. بۇ ۋاقىتتا

$$\frac{dy}{y} = -P(x) dx, \ln y = \int P(x) dx + C', y = e^{-\int P(x) dx} \cdot e^{C'}, y = Ce^{-\int P(x) dx}$$

ئەگەر $Q(x) \neq 0$ بۇنى تۇراقلىق ساننى ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلى ئارقىلىق يېشىشكە بولىدۇ. بۇنىڭ قەدەم باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىچە: ئەگەر $Q(x) = 0$ بولغاندا، تەڭلىمە يېشىمى $y = Ce^{-\int P(x) dx}$ بولاتتى، ئەمما $Q(x) \neq 0$ بولغاچقا، بۇيەردىكى تۇراقلىق سان C دەل x نىڭ فۇنكسىيەسى بولىدۇ، شۇڭا $y = ue^{-\int P(x) dx}$ بولغاندا، بۇنى ئەسلى تەڭلىمىگە باغلاش ئارقىلىق

$$u'e^{-\int P(x) dx} - ue^{-\int P(x) dx} P(x) + P(x)ue^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

گە ئېرىشەلەيمىز. يەنى $u'e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$ بۇنى u' گە نىسبەتەن ئىنتېگراللىساق

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C$$

ئاخىرىدا بۇنى ئەسلى تەڭلىمىگە باغلاش ئارقىلىق فورمۇلا

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$$

گە ئېرىشەلەيمىز. دېمەك بىر جىنسلىق بولمىغان تەڭلىمنىڭ يېشىمى، بىر جىنسلىق تەڭلىمنىڭ ئورتاق يېشىمىگە بىر جىنسلىق بولمىغان تەڭلىمنىڭ خاس يېشىمىنى قوشقانغا باراۋەر.

12- مەشىق

تەڭلىمە $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ نى يېشىڭ.

تەڭلىمىدە y نى ئاجرىتىپ چىقارغىلى بولمايدۇ، چۈنكى بۇ ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە ئەمەس. بۇنى شەكىل ئۆزگەرتىش ئارقىلىق $\frac{dy}{dx} - y = x$ گە ئېرىشەلەيمىز. بۇ دەل سىزىقلىق دىففېرېنسئال تەڭلىمە. بۇنىڭدا $x + y = u$ قىلىپ خاتىرىلەۋالساق،

$$y = u - x, \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1, \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u}, \frac{u}{1+u} du = dx$$

بۇنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە بويىچە بىر تەرەپ قىلىساق بولىدۇ.

بېرنوئىل تەڭلىمىسى

8.2.2

شەكلى $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ بولغان تەڭلىمنى بېرنوئىل تەڭلىمىسى دەپ ئاتايمىز. بۇنىڭدا، ئەگەر $y = 0$ بولسا دەل بىر جىنسلىق تەڭلىمە، $y = 1$ بولسا ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە ھېساپلىنىدۇ. بېرنوئىل تەڭلىمىسىنى يېشىشنىڭ ئۇسۇلى تۆۋەندىكىچە:

ئالدى بىلەن شەكىل ئۆزگەرتىمىز، يەنى $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ بۇنىڭدا $y^{1-n} = z$ دەپ خاتېرلىۋالساق، $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ بولىدۇ. شۇڭا $\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx}$ گە ئېرىشەلەيمىز. بۇنى ئەسلىدىكى تەڭلىمىگە باغلىساق:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

بۇنىڭدىن كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز:

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

دېمەك سىزىقلىق دېففېرېنسىئال تەڭلىمىگە ئايلاندى.

13 - مەشىق

تەڭلىمە $y dx = (1 + x \ln y)x dy$ نى يېشىڭ.

كەسىر شەكلىگە ئايلاندۇرساق:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(1 + x \ln y)x}{y} = \frac{1}{y}x + \frac{\ln y}{y}x^2$$

بېرنوئىل تەڭلىمىسىدە:

$$x' + P(x)x = Q(x)x^n, x' - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y}{y}x^2$$

$$P(x) = -\frac{1}{y}, Q(x) = \frac{\ln y}{y}$$

تەڭلىكنىڭ ئىككى تەرىپىنى x^{-2} گە كۆپەيتسەك:

$$x^{-2}x' - \frac{1}{y}x^{-1} = \frac{\ln y}{y}, \quad z = x^{-1}, \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dy}$$

ئەسلى تەڭلىمىگە باغلىساق:

$$-\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z = \frac{\ln y}{y}, \quad \frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = -\frac{\ln y}{y}$$

فورمۇلا ئارقىلىق:

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(\int e^{\int \frac{1}{y} dy} \cdot \left(-\frac{\ln y}{y} \right) dy + C \right) \\ &= \frac{1}{y} \left(-\int \ln y dy + C \right) \\ &= \frac{1}{y} (-y(\ln y - 1) + C) \\ &= -\ln y + 1 + \frac{C}{y} \\ \therefore x &= \frac{y}{-y \ln y + y + C} \end{aligned}$$

تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان دىففېرېنسئال تەڭلىمە

8.2.3

ئادەتتە بەزى يۇقىرى دەرىجىلىك تەڭلىملەرنى تۆۋەن دەرىجىلىك تەڭلىملەرنى چۈشۈرۈپ يېشىشكە بولىدۇ ، بىز بۇنداق دەرىجىسىنى تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان تەڭلىملەرنى تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان دىففېرېنسئال تەڭلىمە دەيمىز.

$$y^{(n)} = f(x) \quad \blacktriangleright$$

تەڭلىمنىڭ ئوڭ تەرىپىدە پەقەت x لا بار بولغان فۇنكسىيە.

بۇ خىلدىكى تەڭلىمدە ، ئارقىمۇ-ئارا ھاسىلىسىنى ھىساپلىغاندا n دانە تۇراقلىق مىقدارنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئورتاق يېشىمىگە ئېرىشەلەيمىز. تۆۋەندىكى مىسالدا بېرىلگەندەك:

14 - مەشىق

تەڭلىمە $y''' = e^{2x} - \cos x$ نى يېشىڭ.

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1, y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$y'' = f(x, y') \quad \blacktriangleright$$

بۇ خىلدىكى تەڭلىمدە x, y', y'' لەر بار ، ئەمما y يوق. بۇنداق تەڭلىملەردە $y' = p$ قىلىپ خاتېرلىۋالساق ، $y'' = p'$ بولىدۇ ، بۇنى ئەسلى تەڭلىمىگە باغلىساق ، p غا مۇناسىۋەتلىك بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىگە ئېرىشەلەيمىز.

15 - مەشىق

تەڭلىمە $(1+x^2)y'' = 2xy'$ ، دەسلەپكى شەرتى $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$

$$y' = p, y'' = p', (1+x^2)p' = 2xp$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\ln p = \ln(1+x^2) + C', p = C(1+x^2)$$

$$y' = 3(1+x^2), y = x^3 + 3x + 1$$

$$y'' = f(y, y') \quad \blacktriangleright$$

بۇ خىلدىكى تەڭلىمدە y, y', y'' لەر بار ، ئەمما x يوق.

بۇ خىلدىكى تەڭلىملەردە ، ئالدىنقىسىغا ئوخشاش $y' = p$ قىلىپ خاتېرلىۋالساق ،

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

بۇنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە بويىچە يېشىشكە بولىدۇ.

يۇقىرى دەرىجىلىك سىزىقلىق دىففېرېنسئال تەڭلىمە

8.3

يۇقىرى دەرىجىلىك تەڭلىمە

8.3.1

بىرىنچى پاراگرافتا ئادەتتىكى دىففېرېنسئال تەڭلىمە خاتېرلەندى.

ئىككىنچى پاراگرافتا تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان تەڭلىملەر خاتېرلەندى.

بۇ بۆلەكتە شەكلى $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ ۋە $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ بولغان n دەرىجىلىك تەڭلىمە تونۇشتۇرىلىدۇ.

ئەيلەر تەڭلىمىسى

8.3.2

ئېنىقلىما 8.3.1: ئەيلەر تەڭلىمىسى

شەكلى

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

بولغان تەڭلىمە ئەيلەر تەڭلىمىسى دەپ ئاتىلىدۇ.

تەڭلىمىدە p, q لار ئېنىق بولغان تۇراقلىق سان، $f(x)$ ئېنىق بولغان فۇنكسىيە. ئەيلەر تەڭلىمىسىنى يېشىشتە تۆۋەندىكىدەك ئىككى باسقۇچقا بۆلۈشكە بولىدۇ.

ئەگەر $x > 0$ بولسا: $x = e^t$ دەپ خاتېرلىۋالساق، $t = \ln x$ بولىدۇ.

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{x}, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned}$$

تەڭلىمە $\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$ گە ئايلاندى، ئاخىرىدا $t = \ln x$ بىلەن قايتۇرساق تەڭلىمە يېشىمىگە ئېرىشەلەيمىز.

ئەگەر $x < 0$ بولسا، $x = -e^t$ قىلىپ خاتېرلىۋالساق، ئۈستىدىكى ئۇسۇل بىلەن يېشىمىگە ئېرىشەلەيمىز.

16 - مەشىق

تەڭلىمە $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad x > 0$ نى يېشىڭ.

بىۋاستە فورمۇلادىن پايدىلانسا، $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$

شۇڭا $y'' + 3y' + 2y = 0$

خاراكتېرلىگۈچى تەڭلىمىسى:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$\therefore y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

ئاخىرىدا $x = e^t$ بىلەن ئالماشتۇرساق:

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$$

ٲڪڪنچى قسم

ٲالگپرا

توققۇزىنچى باب

دېتېرمىنانت

9.1 ئۇقۇم

9.1.1 ئالاھىدە دېتېرمىنانت

9.2 ھېساپلاش

9.2.1 تولدۇرغۇچى مىنور

9.2.2 ئالگېبرالىق تولدۇرغۇچى مىنور

9.2.3 دېتېرمىنانتنى يېيىش قائىدىسى

ئۈنۈنچى باب

ۋېكتور

ۋېكتور ۋە ۋېكتور ئۇقۇمى

10.1

ۋېكتور

10.1.1

ھېساپلاشلار

10.1.2

سىزىقلىق باغلىنىشلىق ۋېكتور

10.1.3

ۋېكتور خۇسۇسىيەتلىرى

10.2

ۋېكتور سىزىقلىق مۇناسىۋەتسىزلىك

10.2.1

ۋېكتور رانكى

10.2.2

ۋېكتور تەڭداشلىقى

10.2.3

ۋېكتور بوشلۇقى

10.2.4

ئون بىرىنچى باب

ماترىسسا

11.1 ئاساسىي ئۇقۇم

11.1.1 ماترىسسا ئارىسىدا ھېساپلاش

11.1.2 ماترىسسا خۇسۇسىيەتلىرى

11.2 ماترىسسا خاسلىقلىرى

11.2.1 ماترىسسا ۋە دېتېرمىنانت

11.2.2 ماترىسسا رانكى

11.2.3 خاراكتېرلىگۈچى قىممەت ۋە ۋېكتور

11.3 ئالاھىدە ماترىسسalar

11.3.1 ئېلىمىنتار ماترىسسا

11.3.2 تەتۈر ماترىسسا

11.3.3 تەڭداش ماترىسسا

11.3.4 سىمىتىرىك ماترىسسا

11.3.5 ئوخشاش ماترىسسا

11.3.6 ئورتوگونال ماترىسسا

ئۈچىنچى قىسىم
ئېھتىماللىق نەزىرىيىسى

مەشقلەرنىڭ پايدىلىنىش جاۋاب كودى

- [1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley Reading Mass, 2004.
- [2] Hubert Partl, Irene Hyna, and Elisabeth Schlegl. <https://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/english>
- [3] Jean Pierre Casteleyn. Visual TikZ (version 0.62). IUT Génie Thermique et Énergie, 2016
- [4] Leslie Lamport. L^AT_EX: A Document Preparation System, 2nd edition. Addison-Wesley Reading Mass, 1994.
- [5] Till Tantau. TikZ PGF Manual, 2010. <http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/>.
- [6] URL <https://texample.net/>
- [7] URL <https://www.latex-project.org>
- [8] URL <https://python.org/>
- [9] URL <https://www.latexstudio.net/>