ماتېماتىكىسىن ئاساس

Abdusalam

بۇ قوللانما ئارقىلىق

سىز ماتېماتىكابىلىملىرىنى تېزلا كۆرۈپ چىقالايسىز.

Powered by LaTeX

مۇندەرىجە

بىرىنچى قىسىم

ئالىي ماتېماتىكا

بىرىنچى باب

ئالدىن بىلىملەر

بۇ باپتا ئالىي ماتېماتىكا ئۆگىنىشتىن ئاۋۋال ھازىرلاشقا تېگىشلىك ئالدىن بىلىملەر خاتىرلەندى. بۇ بىلىملەر ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا بىلىملىرىدىن ئالىي ماتېماتىكا بىلىملىرىگە بولغان ئۆتكۈنچى نۇقتىلار ھېساپلىنىدۇ.

1.1 فۇنكسىيە

فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى ئادەتتە ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ۋە زامانىۋى ئېنىقلىما دەپ ئىككىگە بۆلىنىدۇ. باياننىڭ ئۆزگىمىنىڭ باشلىنىش نۇقتىسى باشقىچە بولغاندىن باشقا ، فۇنكسىيەنىڭ ئىككى ئېنىقلىمىسى ئاساسەن ئوخشاش. ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ھەرىكەت ئۆزگىرىشى نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ. ، زامانىۋى ئېنىقلىما بولسا توپلام ۋە ئەكس ئېتىش نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ.

1.1.1 ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە

ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى، دەرىجە فۇنكسىيەسى، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفملىق فۇنكسىيە، ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە، تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيەنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ. تەپسىلاتى تۆۋەندىكىچە:
تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە دەرىجىلىك فۇنكسىيە تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە دەرىجىلىك فۇنكسىيە كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە لوگارىفملىق فۇنكسىيە ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە

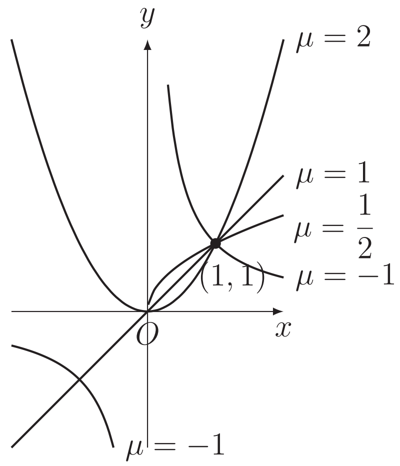
تۇراقلىق سان فۇنكسىيەسى $y = f(x) = C$ بۇنىڭدا C تۇراقلىق سان.

بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = f(x) = ax + b$ a, b, خالىغان سان، ھەم $a \neq 0$

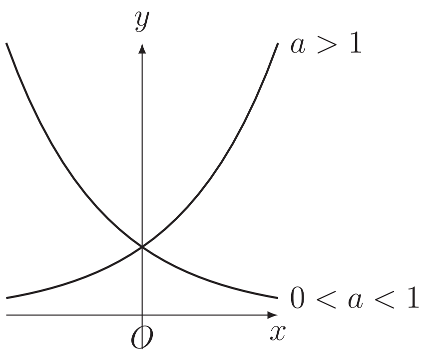
ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c, خالىغان سان، ھەم $a \neq 0$

تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە $y = f(x) = \frac{a}{x}$ a, خالىغان سان.

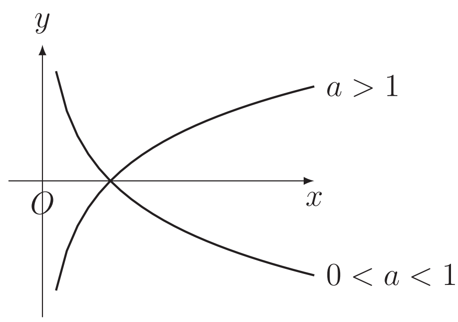
دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = x^\mu$ ، μ خالىغان سان
$x > 0$ ، $y = x^\mu$ رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.



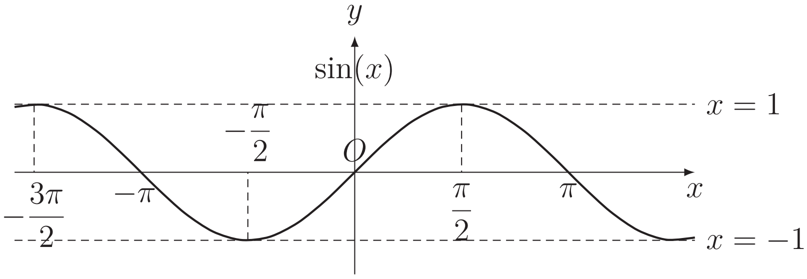
كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$



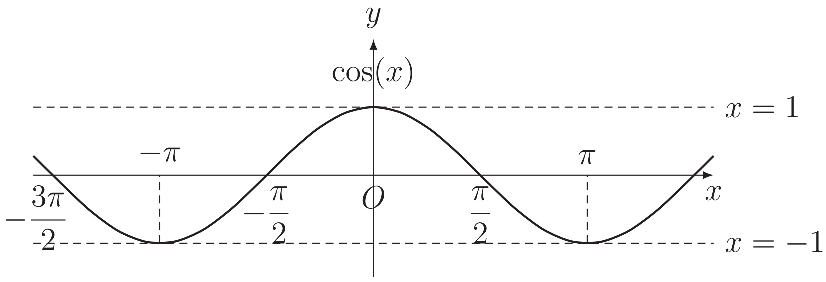
لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y = log_a x(a > 0, a \neq 1)$



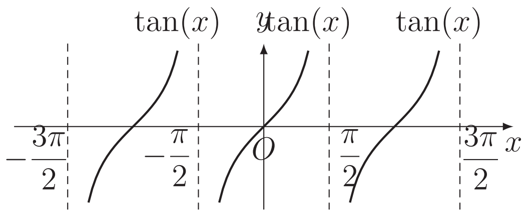
ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە سىنۇس فۇنكسىيەسى:



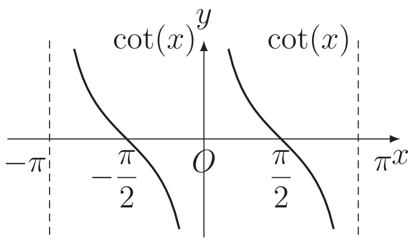
كوسىنۇس فۇنكسىيەسى:



تانگېنس فۇنكسىيەسى:



كوتانگېنس فۇنكسىيەسى:



تەتۈر ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيە دددددد

1.1.2 ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيەلەر فورمۇلاسى

يىغىندى:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

كۆپەيمە:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

بىرلىك:

$$\sin^2x+\cos^2x=1$$

$$\sec^2x-\tan^2x=1$$

$$\cosh^2x-\sinh^2x=1$$

يېرىم بۇلۇڭ:

$$\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\tan^2x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=1-2\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\tan x=\frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)}$$

1.1.3 ھاسىلە فورمۇلاسى

$$(C)'=0$$

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x$$

$$(\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$

$$(\csc x)'=-\csc x\cdot\tan x$$

$$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}\ (a>0,a\neq 1)$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

1.1.4 ئىنتېگرال فورمۇلاسى

$$\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \ (\mu \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

1.2 سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.1 تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.2 تەڭ نسبەتلىك سانلار ئارقمۇ ئارقلىقى

1.2.3 سانلار قاتارى

1.2.4 سانلار قاتارى يىغىندىسى

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

دەرىجە فۇنكسىيەسىگە نسبەتەن ئوخشاش بولمىغان دەرىجە ئاستىدىكى ئوخشاش مونوتونلۇقتا ئاساسەن ئەڭ قىممەتنى تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ

ئىككىنچى باب

فۇنكسىيە ۋە لىمىت نەزەرىيىسى

2.1 فۇنكسىيە

فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى ئادەتتە ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ۋە زامانىۋى ئېنىقلىما دەپ ئىككىگە بۆلىنىدۇ. باياننىڭ ئۇقۇمىنىڭ باشلىنىش نۇقتىسى باشقىچە بولغاندىن باشقا ، فۇنكسىيەنىڭ ئىككى ئېنىقلىمىسى ئاساسەن ئوخشاش. ئەنئەنىۋى ئېنىقلىما ھەرىكەت ئۆزگىرىشى نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ. ، زامانىۋى ئېنىقلىما بولسا توپلام ۋە ئەكس ئېتىش نۇقتىسىدىن باشلىنىدۇ.

ئېنىقلىما 2.1.1: فۇنكسىيەنىڭ ئېنىقلىمىسى

خالىغان توپلام A دىكى ئېلېمېنت x گە نىسبەتەن، ماسلىق مۇناسىۋىتى f مەۋجۇت بولۇپ، بۇ x گە تەسىر قىلىغاندىن كېيىن ئېرىشكەن توپلام B نىڭ ئېلېمېنتى y بولسا، ئۇنداقتا $f(x)$ بولسا توپلام A دىن توپلام B غا بولغان ئەكس ئېتىش ھېساپلىنىدۇ. بۇنىڭدا y بولسا x نىڭ فۇنكسىيەسى دېيىلىدۇ. بۇنى

$$x :\rightarrow y \Leftrightarrow y = f(x)$$

ئارقىلىق خاتىرىلەشكە بولىدۇ.

فۇنكسىيە ئۇقۇمى ئۈچ دائىرىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ: ئېنىقلىما ساھەسى A ، قىممەت دائىرىسى B ۋە مۇناسىۋەت ئىپادىسى f

2.2 سانلار قاتارى

2.2.1 تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى

2.2.2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقى

2.2.3 سانلار قاتارى

2.3 لىمىت

2.3.1 لىمىت ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى

2.3.2 سانلار قاتارى لىمىتى

2.3.3 فۇنكسىيە لىمىتى

2.3.4 سانلار قاتارى ۋە فۇنكسىيە لىمىتى

2.4 فۇنكسىيە ئۈزلۈكسىزلىكى

2.4.1 فۇنكسىيە مونوتونلىقى

2.4.2 فۇنكسىيە ئۈزۈك نۇقتىسى

ئۈچىنچى باب

دىففېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرال

بۇ باپتىكى مۇھىم نۇقتىلار: دىففېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرال ماتېماتىكا پېنىدىكى ئەڭ يادرولۇق بىلىم نۇقتىسىنىڭ بىرى، شۇنداقلا ئۇ فىزىكا ئىلمىنىڭ ئاساسى. بۇ باپتا ھاسىلە ئۇقۇمىدىن باشلاپ دىففېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرالنىڭ ئەمەلىي قوللىنىشىغىچە بولغان مەزمۇنلار خاتىرلىنىدۇ. بۇ باپتا يەنە دىففېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرالغا ئائىت ھېسابلاشلار، تېئورېمىلار چۈشەندۈرىلىدۇ. بۇنىڭدىن سىرت دىففېرېنسىيال ۋە ئىنتېگرالنىڭ ماھىيىتى ۋە قوللىنىلىشىغا دائىر ئەمەلىي مىساللار تونۇشتۇرۇلىدۇ.

3.1 ھاسىلە ئۇقۇمى

تېزلىك ئۇقۇمى ھەممە كىشىگە ئەڭ تونۇش بولسا كېرەك، مەسىلەن ماشىنا تېزلىكى $60km/h$ دېگەندەك. بۇ يەردىكى $60km/h$ ئەمەلىيەتتە $16.67m/s$ بىلەن ئوخشاش. يەنى 1 سېكۇنتتا 16.67 مېتىر يۈتكىلىدۇ دېگەنلىك. تېزلىك قانداق قىلىپ ماڭغان يۈتكىلىشكە ئايلاندى؟ ماڭغان يۈتكىلىش قانداق قىلىپ تېزلىكنى مەۋجۇت قىلدى؟ جىسىم مەلۇم تېزلىككە يېتىش ئۈچۈن تىنىچ ھالەتتىن قوزغالسا، ئۇ نىشان تېزلىككە يەتكۈچە قانداق قىلىپ تېزلىنىشنى مەۋجۇت قىلدى؟ بۇنداق فىزىكلىق ھادىسىلەرنى تەتقىق قىلىشتا ھاسىلىگە تايانماي بولمايدۇ.

فۇنكسىيە $f(x)$ دە، ئىككى نۇقتا x_1, x_2 دىن ئۆتكەن سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى (يانتۇلۇق بۇلۇڭى α نىڭ تانگېنس قىممىتى) نى مۇنداق ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\tan\alpha = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

بىر نۇقتا x_0 نىڭ قوشنا دائىرىسى ئىچىدە، نۇقتا x_0 دىكى ئۇرۇنما سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنى مۇنداق ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\tan\alpha = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

گەرچە $\lim_{x\to x_0} x-x_0=0$ بولسىمۇ، $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))$ مۇ نۆلگە چەكسىز يېقىنلىشىدۇ، شۇڭا بۇلارنىڭ نىسبەتلىرى 0 بولۇپ كېتىشى ناتايىن.

ئېنىقلىما 3.1.1: ھاسىلە

فۇنكسىيە $f(x)$ ئېنتېرۋال I دا، ئۆزگەرگۈچى مىقدار x گە بولغان ئارتتۇقچە مىقدار Δx گە نىسبەتەن، ئېنتېرۋال I دىكى خالىغان بىر نۇقتا $x = x_0$ ئۈچۈن، $x_0 \in I, x_0+\Delta x \in I$ شەرتىنى قانائەتلەندۈرسە،فۇنكسىيەنىڭ ئارتتۇقچە مىقدارى $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ بولىدۇ،ئەگەر ئارتتۇقچە مىقدار $\Delta x\to 0$ بولغاندا، ئۇنىڭ Δy گە بولغان نىسبىتى مەۋجۇت بولسا، بۇ نىسبەتنى بىز $f(x)$ نىڭ x_0 نۇقتىدىكى ھاسىلىسى دەپ ئاتايمىز، ھەم ئۇنى $f'(x_0)$ قىلىپ خاتىرلەيمىز. بۇنىڭدا

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

تۆۋەندىكى جۈملىلەر تەڭداش:

- $y = f(x)$ نۇقتا x_0 دا ھاسىلىسى بار
- $y = f(x)$ نۇقتا x_0 دا ھاسىلىسى مەۋجۇت

☚ $f'(x) = A$ (A چەكلىك)

كۆرسەتمە

يەككە ھاسىلىسى بولسا، ئۇنىڭ ياكى سولدىكى ھاسىلىسىنى كۆرسىتىدۇ، مەسىلەن:

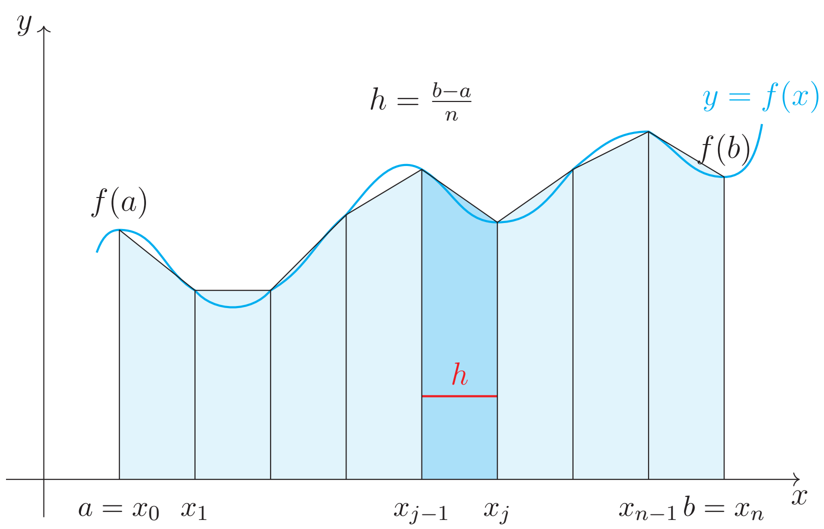
$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

3.1.1 فۇنكسىيە ھاسىلىسى

3.1.2 يۇقىرى دەرىجىلىك ھاسىلە

3.2 دىففېرېنسىيال



3.1-رەسىم: دىففېررېنسىئال

3.2.1 فۇنكسىيە دىففېرېنسىيالى

3.2.2 ھاسىلە فورمۇلىسى

دەرىجىلىك فۇنكسىيە

ئەسلىسى	ھاسىلىسى	ئەسلىسى	ھاسىلىسى
C	0	n^x	$n^x \ln n$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\ln x = \ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
x^n	nx^{n-1}	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{x^{-\frac{n-1}{n}}}{n}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$		

3.1-جەدۋەل: دەرىجىلىك فۇنكسىيە ھاسىلىسى

ترىگنومېترىيەلىك فۇنكسىيە

ئەسلىسى	ھاسىلىسى	ئەسلىسى	ھاسىلىسى
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccsc} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh x^2}$	$\operatorname{arcsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1-x^2}$

3.2-جەدۋەل: ترىگنومېترىيەلىك فۇنكسىيە ھاسىلىسى

3.3 دىففېرېنسىيال تېئورمىسى

3.3.1 فېرمات تېئورمىسى

3.3.2 لور تېئورمىسى

3.3.3 لاگرانج تېئورمىسى

3.3.4 كوشى تېئرمىسى

3.3.5 دىففېرېنسىيال ئوتتۇرا قىممەت تېئورمىسى

3.4 تەيلېر يېيىلمىسى

3.4.1 تەيلېر يېيىلمىسى

3.4.2 تەيلېر فورمۇلىسى

3.5 فۇنكسىيە خۇسۇسىيىتى

3.5.1 فۇنكسىيە يىلتىزى

3.5.2 فۇنكسىيە مونوتون رايونى

3.5.3 فۇنكسىيە ئېكستېرمۇم قىممىتى

3.5.4 فۇنكسىيە كۆپۈنگۈ ۋە پېتىنقى قىسمى

3.5.5 فۇنكسىيە بۇرۇلۇش نۇقتىسى

3.6 ياي دىففېرېنسىيالى

3.6.1 ياي دىففېرېنسىيالى

3.6.2 ئەگرىلىك

3.6.3 ئەگرىلىك رادىئۇس

تۆتىنچى باب

ئېنىق ئىنتېگرال ۋە ئېنىقسىز ئىنتېگرال

4.3 ئىنتېگرال قوللىنىلىشى

4.3.1 يۈز

4.3.2 ھەجىم

4.3.3 ئوتتۇرىچە قىممەت

4.3.4 ئۇزۇنلۇق

4.3.5 ئىنتېگرال جەدۋىلى

بەشنچى باب

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە

ئالتىنچى باب

كۆپ ئۆزگەرگۈچىلىك فۇنكسىيە ئىنتېگرالى

يەتتىنچى باب

چەكسىز قاتار

> **بۇ باپتىكى مۇھىم نۇقتىلار:** مۇسبەت قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقىنى سېلىشتۇرۇپ ئېنىقلاش ئۇسۇلى، نىسبەت قىممىتى ئېنىقلاش ئۇسۇلى، يىلتىز قىممىتىنى ئېنىقلاش ئۇسۇلى، گىرەلەشمە قاتارنىڭ لېبنىز ئېنىقلاش ئۇسۇلى. قىيىن نۇقتا خالىغان قاتارنىڭ ئابىل پەرقلەندۈرۈش ئۇسۇلى ۋە دىرىكلېي پەرقلەندۈرۈش ئۇسۇلى قاتارلىقلار.

7.1 ئاساسىي ئۇقۇملار

ھەرقانداق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ غا نىسبەتەن، ئۇنىڭ خالىغان ئېلېمېنتلىرىنىڭ چېكى بولسا، بىز بۇنى **چېگرىلانغان** دەپ ئاتايمىز. يەنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادە قۇرۇلىدۇ:

$$A_k \leq a_{k+n} \leq B_k, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$$

دېمەك يۇقىرىدىكى A_k, B_k لار بۇ سانلارنىڭ **ئېنىق چېكى** دەپ ئاتىلىدۇ.
بۇنىڭدا A_k ئېنىق ئاستا چېكى دېيىلىدۇ ھەم $A_k = inf\{a_{k+n}\}, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$ قېلىپ خاتىرىلىنىدۇ، ئوخشاشلا B_k ئېنىق ئۈستى چېكى دېيىلىدۇ ھەم $B_k = sup\{a_{k+n}\}, (k = 1, 2, ..., n = 1, 2, ..., n > k)$ قېلىپ خاتىرىلىنىدۇ. بۇ يەردىكى ئېنىق چېكى مۇقىم ئەمەس بولۇپ، شۇڭا ئىندېكسى k قوشۇپ يېزىلىدۇ. بۇ خۇددى مەلۇم بىر سانىنىڭ بەشتىن كىچىك بولسا، ئۇ سانىنىڭ ئالتىدىنمۇ كىچىك، يەتتىدىنمۇ كىچىك، ... ، بولىدىغانلىقى بىلەن ئوخشاش مەنىدە.
ئەگەر يۇقارقى سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى يىغىلسا، ئۇنىڭ لىمىتى چوقۇم مەۋجۇت بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن ئۇنىڭ لىمىتى ۋە ئېنىق چېكى ئوتتۇرىسىدا مۇنداق مۇناسىۋەت ئىپادىسى قۇرۇلىدۇ:

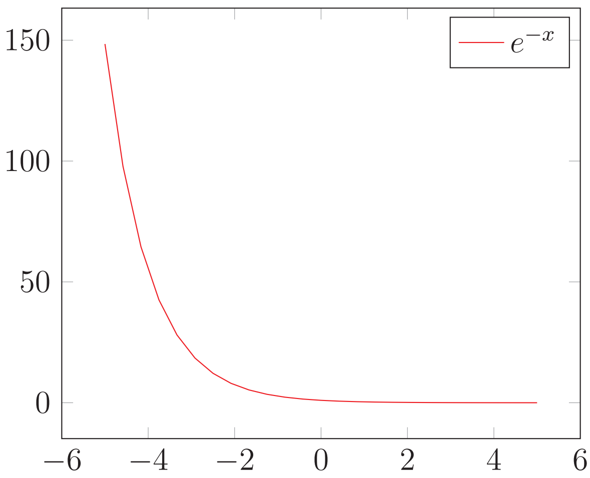
$$A = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} inf\{a_{k+n}\}$$
$$B = \lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} sup\{a_{k+n}\}$$

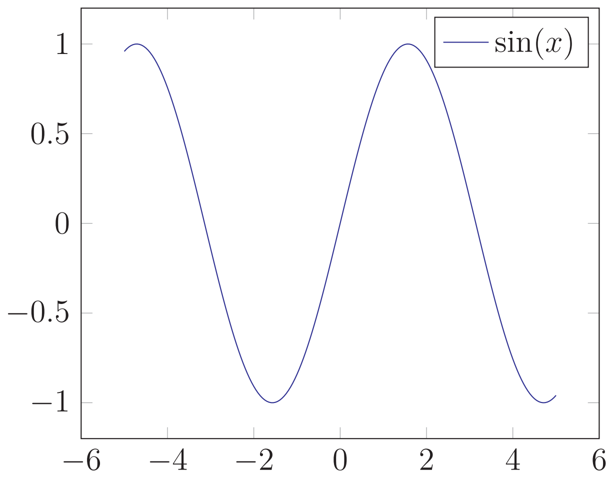
دېمەك، بۇيەردىكى A, B لار $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ نىڭ ئاستى لىمىتى ۋە ئۈستى لىمىتى دەپ ئاتىلىدۇ. شۇنىڭ بىلەن يىغىلىدىغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ۋە ئۇنىڭ چېگرىسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت لىمىت بىلەن باغلانغان بولىدۇ. سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ لىمىتى ۋە ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى لىمىتلىرىنى ئارىلاشتۇرۇۋېتىشكە بولمايدۇ. ئاستى ئۈستى لىمىتلىرىنى مەۋجۇت بولسا سانلارنىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولۇشى ناتايىن. مەسىلەن تۆۋەندىكى رەسىمدە:

سىنۇس فۇنكسىيەلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ لىمىتى يوق، ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى چېكى بار، 1 ۋە -1 دەل ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى چېكى، شۇنداقلا ئۇنىڭ ئاستى ئۈستى لىمىتلىرى بار. ئوخشاشلا سول تەرەپتىكى رەسىمدىكىدەك، e^{-x} فۇنكسىيەلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ ئاستى چېكى بار، ئاستى لىمىتى بار يەنى 0 ، ئەمما ئۈستى لىمىتى يوق. شۇڭا ئۆزگەرگۈچى مىقدار x چەكسىزلىككە يۈزلەنگەندە ئۇنىڭ لىمىتى بار، بۇ دەل ئۇنىڭ ئاستى لىمىتى.

7.1.1 قاتار

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرسىدە سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ھەققىدە مۇناسىۋەتلىك بىلىملەرنى دەسلەپ ئۆگەنگەنمىز. ئۇ ۋاقىتتا پەقەت چەكلىك ئەزالىق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئۈستىدە، يەنە كېلىپ تەڭ ئايرىملىق ۋە تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئۈستىدىلا ئۆگىنىش ئېلىپ بېرىلاتتى. ئەمدىكى مەزمۇندا چەكسىز بولغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى «قاتار» ئۈستىدە مۇلاھىزە ئېلىپ بارىمىز.





ئالدىنقى مەزمۇنلاردا سانلار قاتارى ھەقتە مەزمۇنلار خاتىرلەنگەن ئىدى. بولۇپمۇ تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقمۇ-ئارقلىق ۋە تەڭ نسبەتلىك سانلار ئارقمۇ-ئارقلىق ئۇستىدە تەپسىلي نۇقتىلار يېزىلدى. ئەمدى بۇ باپتا قاتار ئۇقۇمى بىلەن تونۇشۇپ چىقمىز. قاتار دېگەن نۇرغۇنلىغان ئېلمېنتلارنىڭ يىغىندىسىدىن تەركىپ تاپقان ئىپادە بولۇپ، چەكسىز قاتار بولسا چەكسىز ئېلمېنتلار قاتارىنى كۆرستىدۇ.

ئېنىقلىما 7.1.1: قاتار

خالىغان سانلار ئارقمۇ-ئارقلىق $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ نىڭ ئېلمېنتلىرىنى قوشۇش ئەملى بىلەن ئۇلاپ يېزىپ ھاسل بولغان ئىپادە چەكسىز قاتار دەپ ئاتىلىدۇ(قسقارتىلىپ قاتار دېيىلىدۇ).ماتېماتىكىدا

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

قىلىپ خاتىرلىنىدۇ.

ئېنىقلىمىدىكى u_n قاتارنىڭ **ئومۇمي ئەزاسى** دەپ ئاتىلىدۇ. ئالدىنقى n ئەزاسىنىڭ يىغىندىسى **قىسمەن يىغىندى** دەپ ئاتىلىدۇ، ھەم $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ قىلىپ خاتىرلىنىدۇ.

ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار ئەگەر قاتارنىڭ ئومۇمي ئەزاسى u_n تۇراقلىق سان بولسا، بۇ خىلدىكى قاتارنىڭ ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار دەپ ئاتايمىز. مەسىلەن: $\sum_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ $\sum_{n=1}^{\infty} = 1 + 2 + ... + n + ...,$ ئادەتتىكى ئەزالىق قاتار ھېساپلىنىدۇ.

7.1.2 قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ۋە خۇسۇسىيىتى

يىغىلىشچانلىقى ئەگەر قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n نىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولسا، بۇ قاتار **يىغىلىدۇ** دەپ ئاتىلىدۇ. يەنى، ئەگەر $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ، ئۇنداقتا $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. ئەگەر قاتارنىڭ قىسمەن يىغىندىسى S_n نىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولمىسا، ئۇنداقتا بۇ قاتار **يىراقلىشىدۇ** دەپ ئاتىلىدۇ.
قاتارنىڭ يىغىلىش ۋە يىراقلىشىشنىڭ يۈزەكى مەنىسى بولسا، يىغىلغاندا ئۇنىڭ يىغىندىسىنىڭ چېكى بار، يىراقلاشقاندا ئۇنىڭ يىغىندىسىنىڭ چېكى يوق.

خۇسۇسىيىتى قاتارنىڭ ئېنىقلىمىسى ۋە يىغىلىشچانلىقىغا ئاساسەن تۆۋەندىكى بىرقانچە خۇسۇسىيەتلەرگە ئېرىشەلەيمىز.

خۇسۇسىيەت 7.1.1: قاتار يىغىلىشنىڭ زۆرۈر شەرتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ يىغىلسا، ئۇنىڭ ئومۇمي ئەزاسىنىڭ لىمىتى $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ چوقۇم مەۋجۇت ھەم نۆلگە تەڭ.

بۇنىڭ سەۋەبىنى قاتارنىڭ قسمەن يىغىندىسى S_n دىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ.
ئېنىقلىمىغا ئاساسەن قاتار يىغىلسا ئۇنىڭ قسمەن يىغىندىسىنىڭ لىمىتى بار ئىدى، $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ ھەم $u_n = S_n - S_{n-1}$ شۇڭا $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.
شۇنى ئەسكەرتىشكە تېگىشلىكى بۇ پەقەت زۆرۈر شەرت، يېتەرلىك شەرت ئەمەس، شۇڭا ئومۇمىي ئەزانىڭ لىمىتى 0 بولسا، قاتارنىڭ لىمىتى مەۋجۇت بولۇشى ناتايىن. مەسىلەن تۆۋەندىكى قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزا لىمىتى بار يەنى $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$، ئەمما قاتار يىغىلمايدۇ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = +\infty$$

خۇسۇسىيەت 7.1.2: يىغىلىشچان قاتارنىڭ سىزىقلىق خۇسۇسىيتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ۋە $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ يىغىلسا، ئۇلارنىڭ سىزىقلىق ھېساپلاشلىرى

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n \pm \beta v_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

ئوخشاشلا يىغىلىدۇ. بۇ يەردە α, β لار خالىغان ھەققىي سان.

بۇ خۇسۇسىيەتكە ئىسپاتلاش ياكى چۈشەنچە بېرىلمەيدۇ، چۈنكى سىزىقلىق ئالگېبرادىكى ئىدىيە بويىچە تۆرقلىق سان بىلەن سىزىقلىق ھېساپلاش ئېلىپ بېرىلغان قاتارنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى ئۆزگەرمەيدۇ.

خۇسۇسىيەت 7.1.3: يىغىلىشچان قاتارنىڭ تىرناق خۇسۇسىيتى

ئەگەر قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ يىغىلسا، ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزالىرىنىڭ خالىغان يېرىگە خالىغان تىرناق قويسا، ئۇنىڭ يىغىلىشچانلىق ئۆزگەرمەيدۇ. يەنى $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلسا، $(u_1 + u_2 + ... + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + ...+) + ...$ ئوخشاشلا يىغىلىدۇ.

تىرناقنىڭ ماتېماتىكىدىكى رولى ئەمەللەر تەرتىپىنى ئۆزگەرتىش بولغاچقا، بۇ يەردىكى تىرناق خۇسۇسىيتى دەل يىغىلىشچانلىق، قاتار ئۇنىڭ ئەزالىرىنىڭ جەملىنىش تەرتىپى بىلەن مۇناسىۋەتسىزلىكى چۈشەندۇرۇپ بېرىدۇ. بۇ خۇسۇسىيەتمۇ كۆپ ئىشلىتىلىدۇ.
مەسىلەن $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... + 1 - 1 + ...$ بۇ قاتار يىغىلمايدۇ، لىمىتى مەۋجۇت ئەمەس. ئەمما ھەر ئىككى ئومۇمىي ئەزاسىنى تىرناققا ئالساق $\sum_{n=1}^{\infty} (1-1) + (1-1) + ... + (1-1) + ... = 0 + 0 + ..0 + .. = 0$
دېمەك تىرناق ئالغاندىن كېيىن يىغىلمايدىغان قاتار يىغىلىدىغان بولۇپ قالدى. شۇڭا تىرناقنىڭ رولىنى بوش چاغلاشقا بولمايدۇ ھەم قالايمىقان تىرناق قويۇشقىمۇ بولمايدۇ.

كۆرسەتمە

گېئومېترىيەلىك قاتار تولىمۇ مۇھىم قاتارلارنىڭ بىرى بولۇپ، ئىنتايىن كۆپ ئۇچرايدۇ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ...(a \neq 0)$$

ئالدىنقى n ئەزا يىغىندىسى $(q \neq 1)$ ، $S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ شۇڭا بۇنىڭ يىغىلىشچانلىق ۋە يىراقلىشىشچانلىقى تۆۋەندىكىچە بولىدۇ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} |q| < 1, & \text{يىغىلىدۇ} \\ |q| \geqslant 1, & \text{يىراقلىشىدۇ} \end{cases}$$

7.1.3 مۇسبەت قاتار

خالىغان قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ئەگەر ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى u_n بىردەك مۇسبەت بولسا، بۇ قاتارنى مۇسبەت قاتار دەپ ئاتايمىز. يەنى

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0$$

ئەگەر بىردەك مەنپىي بولسا، بۇ قاتارنى مەنپىي قاتار دەپ ئاتايمىز. مۇسبەت قاتارمۇ قاتار بولۇش سۈپىتى بىلەن، ئالدىنقى مەزمۇندىكى خۇسۇسىيەتلەرنى تامامەن كۆچۈرۈپ ئەكىلىشكە بولىدۇ.

مۇسبەت قاتارنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسىمۇ مۇسبەت بولىدۇ، ھەم ئاشقۇچى فۇنكسىيە خۇسۇسىيەتتە بولىدۇ.(بۇ دەل مۇسبەت سانغا مۇسبەت سان قىتىلسا چوقۇم مۇسبەت بولىدىغانلىقىنىڭ مىسالى).

تېئورما 7.1.1: مۇسبەت قاتار يىغىلىشچانلىقىنىڭ يېتەرلىك زۆرۈر شەرتى

ئەگەر مۇسبەت قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ يىغىلسا، ئۇنىڭ قىسمىي يىغىندىسىنىڭ چېكى بار. يەنى

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ يىغىلىدۇ } \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ قىسمىي يىغىندىنىڭ چېكى بار}$$

دېمەك، مۇسبەت قاتارغا نىسبەتەن، ئەگەر ئۇ يىغىلسا ئۇنىڭ ئالدىنقى n ئەزا يىغىندىسىنىڭ چېكى بولسىلا كۇپايە. سەۋەبى مۇسبەت قاتارنىڭ قىسمىي يىغىندىسى ئاشقۇچى فۇنكسىيەدۇر.

مۇسبەت قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى مۇسبەت قاتار كەڭ قوللىنىلىدىغان بولۇپ، ئۇنىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش تولىمۇ مۇھىم. تۆۋەندە بىرقانچە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇلى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز.

تېئورما 7.1.2: سېلىشتۇرۇپ ئېنىقلاش ئۇسۇلى

ئەگەر ئىككى مۇسبەت قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ئەگەر مەلۇم ئەزادىن باشلاپ بارلىق ئەزالاردا $u_n \leq v_n$ قۇرۇلسا، ئۇنداقتا:

ئەگەر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ يىغىلسا $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ مۇ يىغىلىدۇ

ئەگەر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ يىراقلاشسا $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ مۇ يىراقلىشىدۇ

بۇنىڭ يۈزەكى مەنىسى: چوڭى يىغىلسا كىچىكمۇ يىغىلىدۇ، كىچىكى يىراقلاشسا چوڭىمۇ يىراقلىشىدۇ.

1 ـ مەشىق

گارمونىك قاتار $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش.

$$\because x > 0, x > \ln(1+x), \quad \therefore \frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ھەم يەنە $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

شۇڭا $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ يىراقلىشىدۇ. شۇڭا $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مۇ يىراقلىشىدۇ.

تېئورما 7.1.3: نىسبەتلىك ئېنىقلاش ئۇسۇلى(دالانبېرت ئۇسۇلى)

مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ قوشنا ئومۇمىي ئەزالىرىنىڭ نىسبىتى ئارقىلىق ھۆكۈم قىلىش. يەنى

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}<1, & \text{يىغىلىدۇ}\\ =1, & \text{بىلگىلى بولمايدۇ}\\ >1, & \text{يىراقلىشىدۇ}\end{cases}$$

بۇ يەردىكى نىسبەت دەل ئۇنىڭ چوڭ كىچىكلىكىنىڭ بىۋاستە ئىپادىسىدۇر. نىسبىتى چوڭ، دېمەك كېيىنكى ئەزا ئالدىنقىسىدىن چوڭ، يەنى ئەزالار ئېشىۋاتقانلىقىنىڭ بەلگىسى. ئەلۋەتتە ئۇ بارغانسېرى يىراقلىشىدۇ.

2 ـ مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n n!}{n^n}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ. بۇيەردە $a\neq 0$

شۇڭا $u_n=\frac{|a|^n n!}{n^n}$،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=|a|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{n}{n+1}}=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{n}{n+1}-1)}=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-n}{n+1}-1)}=|a|e^{-1}=\frac{|a|}{e}$$

شۇڭا a ۋە e نىڭ چوڭ كىچىكلىكى بويىچە ھۆكۈم قىلىمىز.

ئەگەر e $<|a|<$ 0 ئۇندىاقتا يىغىلىدۇ.

ئەگەر e $\geq$ $|a|$ يىراقلىشىدۇ.

تېئورما 7.1.4: (كوشى ئۇسۇلى)يىلتىزلىك ئېنىقلاش ئۇسۇلى

مۇسبەت قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ئومۇمىي ئەزا يىلتىز ئارقىلىق ھۆكۈم قىلىش. يەنى

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}<1, & \text{يىغىلىدۇ}\\ =1, & \text{بىلگىلى بولمايدۇ}\\ >1, & \text{يىراقلىشىدۇ}\end{cases}$$

ناۋادا قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ يىغىلىدىغان قاتار ئۇندىاقتا:

ئەگەر ئۇنىڭ مۇتلەق قىممەت قاتارى $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ مۇ يىغىلسا، بۇ قاتارنى **مۇتلەق يىغىلىشچان قاتار** دەيمىز.

ئەگەر مۇتلەق قىممەت قاتارى يىغىلمىسا **شەرتلىك يىغىلىشچان قاتار** دەيمىز.

3 ـ مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

شۇڭا $u_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$،

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(n\sin\frac{1}{n}-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}}=e^{-\frac{1}{6}}<1$$

شۇڭا يىغىلىدۇ.

يۇقارقى كوشى ئېنىقلاش ئۇسۇلىدىكى مىساللاردىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئومۇمىي ئەزا شەكلى a^n, n^n بولغان قاتارلاردا كۆپ ئىشلىتىلىدۇ، قىسقىسى كوشى ئۇسۇلىدا دەرىجىنى يوقاتقىلى بولىدۇ.

تېئورما 7.1.5: ئىنتېگرال ئۆسۇلى

ئەگەر مۇسبەت قاتار

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

غا نىسبەتەن، ئىنتېرۋال $[1,+\infty]$ دا مونوتون كېمەيگۈچى فۇنكسىيە $f(x)$ مەۋجۇت بولسا، ھەمدە $u_n = f(n)$ بولسا, ئۇنداقتا بۇ مۇسبەت قاتار ۋە غەيرىي نورمال ئىنتېگرال

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

ئوخشاش خۇسۇسىيەتتە بولىدۇ، يەنى ئۇلارنىڭ يىغىلىش ۋە يىراقلىشىش خۇسۇسىيىتى ئوخشاش.

يۇقارقى تېئورمدا، بىۋاستە فۇنكسىيەدىن پايدىلىنىپ قاتارنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىشتا ناھايىتى كۆپ ئىشلىتىلىدۇ. نۇرغۇن مەسىلىلەرنى مۇشۇنىڭدىن پايدىلىنىپ يېشىشكە بولىدۇ.

4 ـ مەشىق

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقى.

ئەگەر سېلىشتۇرۇش ئۇسۇلى ياكى نىسبەت ئۇسۇلى ئىشلەتسەك، ياكى بولمىسا كوشى ئۇسۇلى ئىشلەتسەك يۇقارقى قاتارنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئېنىقلاپ چىققىلى بولىسمۇ، ئىنتېگرال ئۇسۇلى ئارقىلىق تېخىمۇ تېز ھەم چۈشىنىشلىك ئېنىقلاپ چىققىلى بولىدۇ.
فۇنكسىيە $f(x) = \frac{1}{x^p}$
ئېنىقكى $u_n = f(n)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\begin{cases} \ln(n) = +\infty, & p=1, \text{يىراقلىشىدۇ} \\ \frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1, \text{يىغىلىدۇ} \\ +\infty, & p<1, \text{يىراقلىشىدۇ} \end{cases} \end{cases}$$

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى ئىنتېگرال ئۇسۇلىنى پىششىق بىلىش زۆرۈردۇر، چۈنكى ئۇ قاتار بىلەن فۇنكسىيەنى باغلاپ تۇرىدۇ.

7.1.4 ئالماش قاتار ۋە خالىغان قاتار

ئالماش قاتار دېگەن پىلوس مىنوس ئەزالىرى ئالمىشىپ كېلىدىغان قاتارنى كۆرسىتىدۇ. چۈنكى -1 ئۆز ئۆزى كۆپەيگەندە ئالامىتى ئۆزگىرىدىغان بولغاچقا، شۇڭا ئالماش قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 + ... + (-1)^{n+1}u_n + ...$$
$$u_n > 0, (n = 1, 2, ...)$$

ئالماش قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشتا تۆۋەندىكى بىرلا ئۇسۇلنى ئىگەللەش يېتەرلىك.

تېئورما 7.1.6: لېيبنىز ئېنىقلاش ئۇسۇلى

ئەگەر ئالماش قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ تۆۋەندىكى ئىككى شەرتنى ھازىرلىسا:

- $\forall n \in N^+, u_n \geq u_{n+1}$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

ئۇنداقتا بۇ ئالماش قاتار $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ يىغىلىدۇ.

بىرىنچى شەرتتىن بۇ قاتارنىڭ كېمەيگۈچى قاتار ئىكەنلىكىنى كۆرۈۋالغىلى بولىدۇ. ئىككىنچى خۇسۇسىيەتتىن بۇقاتارنىڭ 0 گە يىغىلىدىغانلىقى چىقىپ تۇرۇپتۇ.

5 ـ مەشىق

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ نىڭ يىغىلىشچانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

ئەمدى $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ بولغاندا، $f'(x) = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0, (x \geq 2)$

دېمەك، $f(x)$ نىڭ ھاسىلىسى 0 دىن كىچىك، مونوتون كېمەيگۈچى فۇنكسىيە،

شۇڭا $u_n = f(n) > f(n+1) = u_{n+1}$ شەرتىنى قانائەتلەندۈرىدۇ، شۇڭا بۇ قاتار يىغىلىدۇ.

خالىغان قاتار بۇ يەردىكى خالىغان سۆزى قاتارنىڭ ئەزاسىنىڭ خالىغان ئىكەنلىكىنى بىلدۈرىدۇ. يەنى مەيلى قاتارنىڭ ئەزاسى مۇسبەت ياكى مەنپىي ۋە ياكى نامەلۇم سان بولسۇن، خالىغان قاتار ئۇقۇمىغا تەۋە. لېكىن ئەمەلىي قوللىنىشتا كۆپ ھاللاردا مەلۇم ئورتاق خۇسۇسىيەتكە ئىگە، مەيلى قانداق بولسۇن بۇ يەنىلا كونكرېت مەسىلىگە تايىنىدۇ.

7.2 فۇنكسىيە قاتارى

7.2.1 فۇنكسىيە قاتارى

فۇنكسىيە قاتارى كەڭ دائىرىدىكى قاتارنى ئۆزئىچىگە ئالغان بولۇپ، بىر قەدەر ئومۇملىقىقا ئىگە. دېگىنىمىز ئومۇمىي ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى بولغان قاتارنى كۆرستىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ شەكلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$
$$u_n(x), (n = 1, 2, \ldots)$$

ئوخشاشلا فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزا، قىسمىي يىغىندا قاتارلىقلار ئالدىنقى باپتىكى ئېنىقلىما بىلەن ئوخشاش، شۇڭا قايتا تەكرارلانمايدۇ.

فۇنكسىيە قاتارى بىلەن ئادەتتىكى قاتارنىڭ ماھىيەتلىك پەرقى دەل ئۇنىڭ ئومۇمىڭ ئەزاسىدا. ئادەتتىكى قاتارنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى تۇراقلىق سان بولىدۇ. فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئادەتتىكى ئەزاسى مەلۇم ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيەسى بولىدۇ. مەيلى ئادەتتىكى قاتار بولسۇن ياكى فۇنكسىيە قاتار بولسۇن، ئۇلار ئوخشاش قائىدە قانۇنىيەتلەرگە بويسۇنىدۇ. ئاددى قىلىپ ئېيتقاندا، فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئۆزگەرگۈچى مىقدارى مەلۇم بىر ئېنىق قىممەتنى ئالغاندا دەل ئادەتتىكى قاتار بولىدۇ.

7.2.2 دەرىجىلىك قاتار

شەكلى $\ldots + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_n)^n$ بولغان قاتارنى دەرىجىلىك قاتار دەپ ئاتايمىز. ئەگەر بۇيەردىكى $x_0 = 0$ بولغاندا، قاتارنىڭ شەكلى $\ldots + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ بولىدۇ. دېمەك سىزىقلىق ئالماشتۇرۇش $t = x - x_0$ ئارقىلىق ئادەتتىكى دەرىجىلىك قاتارنىڭ $\ldots + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ شەكلىگە ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ. شۇڭا بۇ بۆلەكتىكى دەرىجىلىك قاتار پەقەت $x_0 = 0$ بولغان ئادەتتىكى دەرىجىلىك قاتارنىلا كۆرستىدۇ. ئەلۋەتتە دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش يىغىلماسلىق خۇسۇسىيەتلىرى ئىلگىرىكى بىلەن بىردەك، تۆۋەندە بىرنەچچە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇللىرى خاتىرلەندى.

تېئورما 7.2.1: ئابىل بىرىنچى تېئورمىسى

ئەگەر دەرىجىلىك قاتار $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مەلۇم بىر نۇقتا $x = x_0, (x_0 \neq 0)$ دە يىغىلسا، ئۇنداقتا بارلىق $|x| < |x_0|$ نۇقتىلاردا، بۇ دەرىجىلىك قاتار مۇتلەق يىغىلىدۇ.ئەگەر مەلۇم بىر نۇقتا $x = x_0$ دە يىراقلاشسا، ئۇنداقتا بارلىق $|x| > |x_0|$ نۇقتىلاردا قاتار يىراقلىشىدۇ.

ئابېل تېئورېمىسىدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئەگەر قاتار مەلۇم نۇقتا x_0 دە يىغىلسا، ئۇنداقتا $\frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{3}, \ldots,$ نۇقتىلاردا تامامەن يىغىلىدۇ. دېمەك ئېنىق بىر دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىدىغان نۇقتىسى پەقەت بىردىن-بىر ئەمەس. ئەمما مۇشۇ يىغىلىشچان نۇقتىلارنىڭ مۇتلەق قىممىتىنىڭ ئەڭ يۇقىرى چېكى بولىدۇ، بىز بۇ چېكنى دەرىجىلىك قاتارنىڭ **يىغىلىش رادىئۇسى** دەپ ئاتايمىز، ئادەتتە R ھەرپى بىلەن ئىپادىلەيمىز. يىغىنچاقلىساق:

$$\sup\{\text{بارلىق يىغىلىشچان نۇقتىلارنىڭ مۇتلەق قىممىتى}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\} = R$$

$$|x| < R \quad \text{يىغىلىدۇ}$$

$$|x| > R \quad \text{يىراقلىشىدۇ}$$

$$|x| = R \quad \text{بېلگىلى بولمايدۇ}$$

دېمەك، رادىئۇس ئېنىقلانغاندىن كېيىن، يېپىق ئىنتېرۋال $(-R, +R)$ نى قاتارنىڭ **يىغىلىش ئىنتېرۋالى** دەپ ئاتايمىز. رادىئۇس نۇقتىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئىنتېرۋال، قاتارنىڭ **يىغىلىش دائىرىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.
رادىئۇس نۇقتىسىدا، قاتارنىڭ يىغىلىشچانلىقى ئايرىم ھۆكۈم قىلىنىشى كېرەك. ئەگەر رادىئۇس نۇقتىسى $x = -R, x = +R$ دا قاتار يەنىلا يىغىلسا، قاتارنىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋالى ئوچۇق ئىنتېرۋال بولىدۇ، يەنى $[-R, +R]$، بۇ ئارقىلىق قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرىسى ئېنىقلىغىلى بولىدۇ.

تېئورېما 7.2.2: كوشى خادامارد تېئورېمىسى

دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n\to}^{\infty} a_n x^n$ غا نىسبەتەن، $\sup\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ بولسا، ئۇنداقتا بۇ قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى:

$$R = \frac{1}{\rho} = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \end{cases}$$

ئادەتتە يۇقارقى تېئورېمىدىن پايدىلىنىپ دەرىجىلىك قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسىنى تاپقىلى بولىدۇ. بولۇپمۇ بۇيەردە $\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ بويىچە ئېلىنسا بولىدۇ.

مەشىق 6 ــ

قاتار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ نىڭ يىغىلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

رادىئۇس تېپىش فورمۇلىسىدىن بىلىۋالغىلى بولىدۇكى:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n2^{n+1}}{(n+1)2^n}| = 2\lim_{n\to\infty} |\frac{n}{n+1}| = 2$$

شۇڭا قاتارنىڭ يىغىلىش رادىئۇسى $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$ يىغىلىش ئىنتېرۋالى $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ بولىدۇ.
ئەگەر $x = +\frac{1}{2}$ بولغاندا، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ شۇڭا بۇ نۇقتىدا قاتار يىراقلىشىدۇ.
ئەگەر $x = -\frac{1}{2}$ بولغاندا، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ شۇڭا بۇ نۇقتىدا قاتار يىغىلىدۇ.
شۇنىڭ ئۈچۈن قاتارنىڭ يىغىلىش دائىرىسى $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ئويلىنىش: فۇنكسىيە $f(x)$ نى، دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ بىلەن ئىپادىلەش مۇمكىنمۇ؟

7.2.3 فۇنكسىيەلىك يېيىش

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نى، دەرىجىلىك قاتار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ بويىچە يايغىلى بولسا، يەنى $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ئۇنداقتا بۇ قاتار، فۇنكسىيەنىڭ يېيىلمىسى دەپ ئاتىلىدۇ. داڭلىق تەيلور يېيىلمىسى دەل مۇشۇنداق يېيىشتۇر.

ئېنىقلىما 7.2.1: تەيلور قاتارى

ئەگەر خالىغان دەرىجىدە ھاسىلىسى بار بولغان فۇنكسىيە $f(x)$ نى، يىغىلىش رادىئۇسى R بولغان نۇقتا x_0 نىڭ يىغىلىش ئىنتېرۋالى $(x_0 - R, x_0 + r)$ دا دەرىجىلىك فۇنكسىيە بويىچە يايغىلى بولسا، ئۇنداقتا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ، نۇقتا x_0 دىكى تەيلور قاتارى دەپ ئاتايمىز. ئادەتتە $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ $f(x)$ قىلىپ خاتېرلەيمىز. ئەگەر $x_0 = 0$ بولغاندا، بۇ قاتارنىڭ فۇنكسىيەنىڭ ماكرووۋن قاتارى دەپ ئاتايمىز.

بۇ بىزگە قانداق قۇلايلىق ئېلىپ كىلىدۇ دىگەندە، مەيلى بىر مۇرەككەپ فۇنكسىيە بولسۇن، ئۇنى ئاددىي بولغان نۇرغۇن ئۇششاق فۇنكسىيەلەرگە پارچىلىغىلى بولىدىغانلىقىنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ. بۇ خىل ئىدىيە دەل كىيىنكى مەزمۇندىكى فۇريې قاتارى، فۇريې ئالماشتۇرۇشى قاتارلىقلاردا كەڭ ئۇچرايدۇ.

كۆپ ئىشلىتىلىدىغان تەيلور يېيىلمىلار ئېلمىنتار فۇنكسىيەلەرنىڭ كۆپىنچىسى چەكسىز ھاسىلىسى بار بولۇپ، ئۇلارنى 0 نۇقتىدا دەرىجىلىك قاتارغا يايغاندا، بىرتۈركۈم گۈزەل نەتىجىلەرگە ئېرىشەلەيمىز، ئاساسلىقى تۆۋەندىكىچە:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$
2. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1.$
3. $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1.$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leqslant 1.$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

$$\begin{cases} x \in (-1,1), & \alpha \leqslant -1 \\ x \in (-1,1], & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1,1], & \alpha > 0 \end{cases}$$

.

6. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ -\infty < x < +\infty.$
7. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ -\infty < x < +\infty.$

ئادەتتىكى فۇنكسىيىلەر مەلۇم ئىنتېرۋالدا يىغىلسا، ئۇنداقتا ئۈستىدىكى يەكۈنلەر بويىچە فۇنكسىيە قاتارغا يېيىشقا بولىدۇ.

7 ـ مەشىق

فۇنكسىيە $f(x) = \arctan x$ نىڭ $x = 0$ بولغاندىكى فۇنكسىيە يېيىلمىسىنى تېپىڭ.

$$.f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad, |-x^2| < 1$$

شۇڭا، ئاۋال ئىنتېگىراللاپ كېيىن دىففېرىنسىئاللاش ئارقىلىق:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

7.3 ترىگونومېترىيىلىك قاتار

فۇرىيېر قاتارى ترىگونومېترىيىلىك قاتار، ئادەتتە فۇرىيېر قاتارنى ترىگونومېترىيىلىك قاتارمۇ دەپ قويىدۇ. ئەمما ترىگونومېترىيىلىك قاتار فۇرىيېر قاتارى ئەمەس، شۇڭا بىز بۇ بۆلەكتە ئاۋال ترىگونومېترىيىلىك قاتار بىلەن تونۇشۇپ چىقايلى، شۇ ئارقىلىق فۇرىيې قاتارنى چۈشىنىشىمىز تېخىمۇ ئاسانلاشقۇسى.

7.3.1 ترىگونومېترىيىلىك قاتار

شەكلى تۆۋەندىكىدەك:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

بولغان قاتارنى ترىگونومېترىيىلىك قاتار دەپ ئاتايمىز.
قىسقىسى ترىگونومېترىيىلىك قاتارنىڭ ئېنىقلىمىسىدا كۆرۈنۈپ تۇرۇپتىكى، ترىگونومېترىيىلىك قاتار ئىلگىرى خاتىرلەنگەن فۇنكسىيە قاتارنىڭ ئالاھىدە بىر تۈرى، بۇنىڭدا فۇنكسىيە پەقەت سىنۇس ۋە كوسىنۇس فۇنكسىيەلەرنىڭ ئاددىي سىزىقلىق بىرىكمىسى خالاس.
سىنۇس كوسىنۇس فۇنكسىيەلىرنىڭ دەۋرىيلىك خۇسۇسىيىتىدىن تۆۋەندىكىدەك خۇسۇسىيەتكە ئېرىشىمىز:

ئېنىقلىما 7.3.1: ئورتوگونال فۇنكسىيە

ئەگەر ئىككى فۇنكسىيە $f(x)$ ۋە $g(x)$ تۆۋەندىكى ئىپادە قۇرۇلسا،

$$\int_a^b f(x)g(x) = 0$$

ئۇنداقتا بۇ ئىككى فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $[a, b]$ دە ئورتوگونال دەپ ئاتىلىدۇ.

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىستېمىسى $\ldots \cos nx, \sin nx, \ldots, \ldots, \sin 2x, \cos 2x, \sin x, \cos x, 1$ ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ دا ئورتوگونال.

ئورتوگونال ئۇقۇمىنىڭ چۈشىنىشلىك ئىپادىلىنىشى: تىك كېسىشىش.
فۇنكسىيە تىك كېسىشتى دېمەك، فۇنكسىيە ئىنتېرۋالدا ئىنتېگرالى نۆل بولىدۇ، ئەگەر بۇ فۇنكسىيەدىن تۈزۈلگەن بوشلۇق بار بولسا، ئورتوگونال فۇنكسىيە سىستېمىسى دەل بۇ بوشلۇقنىڭ ئاساسىي بولىدۇ. دېمەك ئاساس فۇنكسىيەلەردىن پايدىلىنىپ بۇ بوشلۇقتىكى خالىغان فۇنكسىيەنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ. داڭلىق ھىلبېرت بوشلۇقى دەل مۇشۇنىڭ كېڭەيتىلىشى.

7.3.2 فۇرىيېر قاتارى

ئاۋال تۆۋەندىكى ئېنىقلىمىنى كۆرۈپ چىقايلى.

تېئورما 7.3.1: ترىگونومېترىيىلىك قاتار تېئورمىسى

دەۋرىيلىك قاتارئەگەر خالىغان فۇنكسىيە $f(x)$ نى $[-\pi, \pi]$ دائىرە ئىچىدە تەكشى يىغىلىدىغان تروگونومېتريىلىك قاتار شەكلىدە يايغىلى بولسا، يەنى:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), |x| < \pi$$

ئۇنداقتا بۇ قاتارنىڭ بارلىق كويفىيىنسىتلىرى بىردىنبىر ئېنىق بولىدۇ. يەنى:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, 3, \ldots$$

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نى ئىنتېرۋال $[-\pi,\pi]$ ئىچىدە ئىنتېگرالللىغىلى بولسا، ئۇنداقتا:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, 3, \ldots$$

نى فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ فۇرىيې كوئېففىتسىپنتى دەپ ئاتايمىز. فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيې كوئېففىتسىپنتى بىلەن تۈزۈلگەن تروگونومېترىيىلىك قاتار دەل فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيې قاتارى دەپ ئاتىلىدۇ.
يۇقىرىدا فۇنكسىيە $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-\pi,\pi]$ ئىچىدە ئىنتېگرالللىغىلى بولىدۇ دېگەن، ناۋادا ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ دەۋرىيسى $2l$ بولۇپ $[-l,l]$ ئىچىدە فۇرىيې قاتارى بويىچە يايساقلا بولىدۇ، بۇ يەردىكى l كەڭ مەنىدە بولۇپ، π دىن باشقا ھەرقانداق سان بولسا بولىدۇ. بىز مىقدار ئالماشتۇرۇش، تاق-جۈپ يېيىش قاتارلىق تاكتىكىلاردىن پايدىلىنىپ بۇنىمۇ ئەمەلگە ئاشۇرالايمىز.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, 3, \ldots$$

فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىلىشچانلىقى خالىغان فۇنكسىيەنى فۇرىيې قاتارى بىلەن يايغىلى بولمايدۇ، دەۋرىي ھەم يىغىلىشچان بولۇش شەرتى قاتتىق شەرت بولۇپ، فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىلىشچانلىقىنى تەتقىق قىلىشقا توغرا كېلىدۇ. شۇڭا تۆۋەندىكى ئېنىقلىمىنى كۆرۈپ چىقايلى.

تېئورما 7.3.2: يىغىلىش تېئورمىسى

ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ دەۋرىيسى 2π بولغان ھەم $[-\pi,\pi]$ دا سىلىق بولسا، ئۇنىڭ فۇرىيې قاتارى يىغىلىدۇ، ھەمدە فۇرىيې قاتارىنىڭ يىغىندى فۇنكسىيەسى:

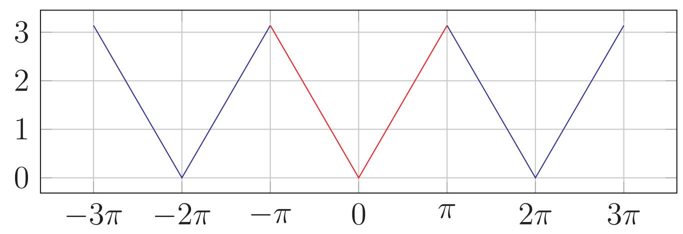
$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ئۈزلۈكسىز سىلىق نۇقتىدا} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{ئۈزۈلۈش نۇقتىدا} \\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi \end{cases}$$

تېئورمىدا دېمەكچى، دەۋرىي بولۇپلا قالماي سىلىق بولۇشى شەرت، يەنى ھېچقانداق ئۈزۈلۈش نۇقتىسى بولماسلىقى كېرەك. ئادەتتە فۇنكسىيەنى فۇرىيې قاتارغا يايغاندا، ئېنىقلىما ساھەسىنى كېڭەيتىشمۇ مۇمكىن، بۇنىڭدا فۇنكسىيەنىڭ جۈپ-تاقلىقى بويىچە كېڭەيتىشكە بولىدۇ.

8 ـ مەشىق

فۇنكسىيە $f(x) = |x|, (-\pi \le x \le \pi)$ نى فۇرىيې قاتارغا يېيىڭ.

رەسىمدىكىدەك، دەۋرىي فۇنكسىيە گە يايىمىز. شۇڭا:



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \pi$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(nx)dx = 0$$

شۇنىڭ ئۈچۈن:

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad |x| \le \pi$$

7.3.3 فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى

ئالدىنقى مەزمۇنلاردا فۇرىيې قاتارى خاتىرلەندى، ئەمدى بىز يەنە بىر مۇھىم نۇقتا **فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى** ھەققىدە توختىلىپ ئۆتىمىز. خالىغان دەۋرىيسى $2l$ بولغان دەۋرىي فۇنكسىيەنىڭ فۇرىيې قاتارى:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}) \tag{7.1}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,2,\ldots \tag{7.2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,3,\ldots \tag{7.3}$$

كۆرسەتمە

ئەيلېر فورمۇلىسى كەڭ ئىشلىتىلىدىغان فورمۇلا بولۇپ، كومپلېكس ئۆزگەرگۈچى فۇنكسىيەدىكى ئىنتايىن مۇھىم فورمۇلانىڭ بىرىدۇر. مەلۇمكى i مەۋھۇم سان بىرلىكىدۇر، يەنى $i^2=-1$
ئەيلېر فورمۇلىسى:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

بۇنى تەيلور يېيىلمىسى ئارقىلىق كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانى قىسقارتىلدى.

فورمۇلا $1.1-1.3$ لارنى ئەيلېر فورمۇلىسى بىلەن بىرىكتۈرسەك:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)-\frac{ib_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right]\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right]\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right]\\
&=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}+C_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right]\\
&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}.\\
C_0&=\frac{a_0}{2}, C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}, C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}
\end{aligned}$$

دىمەك

$$C_n=\frac{1}{2l}\left[\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx-i\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx$$

C_n مۇ تېپىلدى، فۇرىيې قاتارى مەزمۇنىدا فۇنكسىيە دەۋرىنى $T=2l$ دېگەن. شۇڭا $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ ئىچىدە، فۇنكسىيە $f(x)$ نى يۇقىرىدا كەلتۈرۈپ چىقارغان فۇرىيې قاتارى فورمۇلىسى بويىچە مۇنداق يېزىشقىمۇ بولىدۇ:

$$f_T(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{i\frac{2n\pi x}{T}}$$

فىزىكىلىق بىلىملەرگە ئاساسەن، بۇلۇڭلۇق تېزلىك ω ۋە دەۋرىي T ۋە چاستوتا f ئوتتۇرىسىدا مۇنداق مۇناسىۋەت بار:

$$\Delta\omega=\omega=\frac{2\pi}{T},\quad \Delta\omega=\omega_n-\omega_{n-1}$$

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega},\quad f=\frac{1}{T}=2\pi\omega$$

شۇڭا يەكۈنلەشكە بولىدۇكى:

$$
\begin{aligned}
f_T(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x} \\
C_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\
f_T(x) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right)e^{in\omega x}
\end{aligned}
$$

ئۈستىدىكى ئۈز نۆۋەتتە يەنە فۇرىيې دەرىجىلىك قاتارى دەپ ئاتىلىدۇ، چۈنكى بۇنىڭ بارلىق ئەزالىرى e نىڭ دەرىجىسىنىڭ ۋەزنىلىك يىغىندىلىرىدىن تۈزۈلىدۇ.

> يۇقارقى فورمۇلا ۋە ئەيلېر فورمۇلاسىنىڭ گېئومېترىيەلىك مەنىسىدىن بىلىۋېلىشقا بولىدۇكى، فۇنكسىيە $f(x)$ نى نۇرغۇن چەمبەر بويىلما ھەركەت ياپلىرىنىڭ ۋەزنىلىك يىغىندىسى دەپ قاراشقىمۇ بولىدۇ. ئەلۋەتتە بۇ فورمۇلا سىزىقلىق ئالگېبرادىكى بىلىملەر بىلەن تامامەن بىردەك.يەنى: سىزىقلىق بوشلۇقتا بىز بىر گورۇپپا ئاساس ۋېكتورلارنى تاللاپلا، بۇ بوشلۇقتىكى بارلىق ۋېكتورلارنى مۇشۇ ئاساس ۋېكتورلارنىڭ سىزىقلىق بىرىكمە شەكلىدە ئىپادىلەپ چىقالايمىز.

ئادەتتە نۇرغۇن فونكسىيەلەرنىڭ دەۋرىيسى T ئېنىق مەۋجۇت بولمايدۇ، ئەمما بىز بۇلارنىڭ دەۋرىيسىنى چەكسىز دەپ قارىۋالساقلا بولىدۇ. شۇڭا ئۈستىدىكى: $\lim_{T\to+\infty} f_T(x) = f(x)$

$$
f(x) = \lim_{T\to+\infty} f_T(x) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right)e^{in\omega x}
$$

لىمىت نەزەرىيەسى ئاساسىدا بۇ ئىپادىگە قارىتا ئاددىيلاشتۇرۇش ئېلىپ بارىمىز. دەۋرىيسى چەكسىزلىككە قاراپ ماڭدى، دىمەك بۇلۇڭلۇق تېزلىكى نۆلگە قاراپ ماڭدى دېگەنلىك.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-in\omega x}dx\right)e^{in\omega x} \\
&= \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\omega_n x}dx\right)\Delta\omega
\end{aligned}
$$

چۈنكى $\Delta\omega \to 0(T \to +\infty)$ ۋەجىدىن، تۆۋەندىكىدەك ھادىسە مەۋجۇت:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\omega \to 0(T \to +\infty) \\
&\therefore \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \\
&\omega_n = n\omega \to \omega = \omega_n - \omega_{n-1} \\
&\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)e^{-i\omega_n x}dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)
\end{aligned}
$$

شۇڭلاشقا:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
\therefore f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega
\end{aligned}
$$

مانا ئەڭ ئاخىرىدىكى فورمۇلانى بىز فۇرىيې ئىنتېگرال فورمۇلاسى دەيمىز.
ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-\infty, +\infty]$ مۇتلەق ئىنتېگراللىغىلى بولسا، يۇقىرىدىكى $F(\omega)$ نى بىز فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى دەيمىز. ھەم تۆۋەندىكىدەك خاتىرىلەيمىز:

$$F(\omega) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

مانا بۇ فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى.
ئالماشتۇرۇشتىن كېيىنكى فۇنكسىيەنى ئەسلىي فۇنكسىيە بىلەن بىرلەشتۇرۇپ كېلىپ چىققان ئالماشتۇرۇشنى فۇرىيې تەتۇر ئالماشتۇرۇشى دەپ ئاتايمىز. ھەم تۆۋەندىكىدەك خاتىرلەيمىز:

$$f(x) = F^{-1}[F(\omega)]$$
$$f(x) = F^{-1}[F(\omega)]$$
$$F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

فۇرىيې قاتارى ۋە فۇرىيې ئالماشتۇرىشىنىڭ مۇناسىۋىتى: فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ھەرقانداق دەۋرىي فۇنكسىيەنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ، ئەگەر فۇنكسىيە دەۋرىي فۇنكسىيە ئەمەس بولسا، ئۇنداقتا ئۇنىڭ دەۋرى چەكسىز ئېنتېرۋال ئىچىدە بولىدۇ. دەۋرى چەكسىزلىككە ماڭسا بۇلۇڭلۇق تىزلىق 0 گە قاراپ ماڭىدۇ شۇنداقلا ئاساس چاستوتىسى 0 گە قاراپ ماڭىدۇ، بۇ ۋاقىتتا چاستوتىسى داۋاملىق دىسكرېت ھالەتتە بولماي ئۈزلۈكسىز ھالەتتە بولىدۇ دە فۇرىيې ئالماشتۇرىشى ئارقىلىق داۋاملىق تەھلىل قىلغىلى بولىدۇ.

فۇرىيېنىڭ قىياسى: ھەرقانداق دەۋرىي فۇنكسىيەنى تروگونومېترىيىلىك فۇنكسىيەلەرنىڭ يىغىندىسى يەنى فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولىدۇ.

7.3.4 دىسكرېت فۇرىيې ئالماشتۇرىشى

يۇقىرىدىكى كۆپلىگەن باسقۇچلاردىن كېيىن، بىز ئېرىشكەن فۇرىيې دەرىجىلىك قاتارى ۋە فۇرىيې ئالماشتۇرىشى تۆۋەندىكىدەك:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}$$
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

ئەمما ھېساپلاش ماشىنىسى پەقەت چەكلىك ئېقىمدىكى ئۆچۈرلارنى بىرتەرەپ قىلالايدۇ، يەنە كېلىپ ئۈزلۈكسىز دائىرىدىكى ئۆچۈرلارنى ئەسلا بىر تەرەپ قىلالمايدۇ. شۇڭا فۇرىيې ئالماشتۇرشنى چوقۇم چەكلىك بولغان دىسكرېت ھالەتكە ئايلاندۇرۇش كېرەك.

$$e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$$

دىسكرېت ئالماشتۇرىشى بىرتەرەپ قىلىدىغىنى دىسكرېت دەۋرىي سىگنال. ئالايلۇق بىر سىگنال تەرتىپلىرى $\{x[1], x[2], x[3], \ldots\}$ دەۋرىيسىنى D دەپ قارايلى، ئۇنداقتا خالىغان پۈتۈن سان r غا نىسبەتەن، بىر پۈتۈن دەۋرىي ئىچىدىكى سىگناللار تەڭداش، يەنى $x[n] = x[n + rD]$.
ئۈزلۈكسىز سىگنال مەيدانىدا فۇرىيې بوشلۇقىدىكى ئاساس $e^{ki\omega t}$ بولۇپ، k پۈتۈن سانى ئىپادىلەپ ئوخشىمىغان ئاساسنى بەلگىلەپ قويىدۇ، t بولسا ۋاقىت ئۈزلۈكسىز مىقدارى.
ھازىر بىزنىڭ قىلىدىغىنىمىز دىسكرېت ھەم دەۋرىي سىگنال، دەۋرىيسى D ، شۇڭا ۋاقىت مىقدار دىسكرېت سىگنال تەرتىپى n گە ئايلىنىدۇ. شۇنىڭ بىلەن بۇ دىسكرېت بوشلۇقتىكى ئاساس $e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$ غا ئۆزگىرىدۇ. شۇڭا فۇرىيې ئالماشتۇرىشى تۆۋەندىكىدەك ئۆزگىرىدۇ:
ئۈزلۈكسىز: ئەسلىدىكى سىگنال $f(x)$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ki\omega t}dt, k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ki\omega t}$$

دىسكرېت: ئەسلىي سىگنال $x[n]$

$$X_k = \sum_{n=0}^{D-1} x[n]e^{-ki\frac{2\pi}{D}n}$$
$$x[n] = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} X_k e^{ki\frac{2\pi}{D}n}$$

بۇ يەكۈنگە ئەيلېر فورمۇلاسىنى بىرلەشتۈرۈپ $w = e^{2\pi i/D} = \cos\frac{2\pi}{D} - i\sin\frac{2\pi}{D}$ $x = FX$ شەكلىدىكى سىزىقلىق تەڭلىمىلەر سىستېمىسىغا ئېرىشەلەيمىز، يەنى:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[X-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

ئەلۋەتتە، ئۈستىدىكى ماترىسسا ۋاندېرموند ماترىسسا ۋە ياكى فۇرىيې ماترىسسا دەپمۇ ئاتىلىدۇ. مۇشۇ ماترىسسانىڭ خۇسۇسىيىتى دەل دىسكرېت فۇرىيې ئالماشتۇرۇشنىڭ ئالاقە رەقەملىك ئۈچۈرنى بىرتەرەپ قىلغىلى بولىدىغان بولمايدىغانلىقىنى بەلگىلەپ قويىدۇ. ناۋادا بۇ ماترىسسانىڭ شەكلى ئىنتايىن مۇرەككەپ ھەتتا ئەكس ماترىسساسى مەۋجۇت ئەمەس، ئۇنداقتا بۇنىڭ چوڭ كېرىكى قالمايدۇ. ئەلۋەتتە، بۇ ماترىسسانىڭ ئۆزى ياكى ئەكس ماترىسساسىنىڭ ھېساپلاشلىرىنى تېز ئېلىپ بېرىش ئۈچۈن مەيدانغا **تېز فۇرىيې ئالماشتۇرۇشى** مەيدانغا كىلىدۇ. قىسقىسى دىسكرېت فۇرىيې ئوڭ-تەتۈر ئالماشتۇرۇشلىرىنى ھېساپلاشتا ئىشلىتىلىدۇ.

9 ـ مەشىق

كۆۋادرات دولقۇننى دەۋرىيسى 2π بولغان سىگنالنىڭ ئىنتېرۋال $[-\pi, \pi]$ ئىچىدىكى فۇنكسىيە ئىپادىسى تۆۋەندىكىچە:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

فۇرىيې قاتارى فورمۇلىسىگە ئاساسەن، ھېساپلاپ چىقىشقا بولىدۇكى:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

شۇڭا بۇ سىگنالنىڭ فۇرىيې قاتارى ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى مۇنداق:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin\frac{n\pi x}{l}) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1-\cos n\pi}{n}\sin nx)$$

سەككىزىنچى باب

دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

تەڭلىمە ئۇقۇمى باشلانغۇچ ماتېماتىكىسىدا ئەڭ بۇرۇن ئۇچرايدۇ. ئىلگىرىكى مەزمۇنلاردا فۇنكسىيە، ھاسىلە ئۇقۇمى، دىففېرېنسىئال ۋە ئىنتېگرال ئۇقۇملىرىنى ئىگىلىگەندىن كېيىن مۇشۇلارنىڭمۇ تەڭلىمىگە ئائىت قوللىنىشلىرىنى بىلىش ئۈچۈن، شۇنداقلا تۇرمۇشتىكى ئەمەلىي مەسىلىلەرنىڭ ئېھتىياجى ئۈچۈن تۆۋەندە يېڭى بىر بىلىم نۇقتىسى بىلەن تونۇشۇپ چىقىمىز. بۇ باپتا بىر قەدەر قىيىن بولغان نۇقتا **دىففېرېنسىئال تەڭلىمە** ھەققىدە دەسلەپكى بىلىملەرنى ئۆگىنىپ چىقايلى.

8.1 دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

دىففېرېنسىيال تەڭلىمە نامەلۇم فۇنكسىيەنىڭ ھاسىلىسى بىلەن ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئوتتۇرىسىدىكى مۇناسىۋەت سىستېمىسىنى تەسۋىرلەيدىغان تەڭلىمىنى كۆرسىتىدۇ. دىففېرېنسىئال تەڭلىمىنىڭ يېشىمى تەڭلىمىگە ماس كېلىدىغان فۇنكسىيە بولىدۇ. ھالبۇكى، ئېلېمېنتار ماتېماتىكىنىڭ ئالگېبرالىق تەڭلىمىسىنىڭ يېشىمى تۇراقلىق سانلىق قىممەتتۇر.

8.1.1 ئاساسىي ئۇقۇم

ئېنىقلىما 8.1.1: دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

نامەلۇم فۇنكسىيە ۋە نامەلۇم فۇنكسىيە ھاسىلىسىنىڭ ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئىپادىلەيدىغان تەڭلىمە. يەنى فۇنكسىيە ھاسىلىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان تەڭلىمە دىففېرېنسىئال تەڭلىمە دەپ ئاتىلىدۇ. بۇنى

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

ئارقىلىق خاتىرىلەشكە بولىدۇ.

دىففېرېنسىئال تەڭلىمىدىكى نامەلۇم فۇنكسىيە ھاسىلىسىنىڭ دەرىجىسى، دىففېرېنسىئال تەڭلىمىنىڭ **دەرىجىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

دىففېرېنسىئال تەڭلىمىنىڭ يېشىمى ئەگەر فۇنكسىيە $y = \phi(x)$ نىڭ n دەرىجىلىك ئۇزلۇكسىز ھاسىلىسى $\phi^n(x)$ ، بېرىلگەن ئىنتېرۋال I دا مەۋجۇت ھەم تەڭلىمە

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$$

نى قانائەتلەندۈرسە، ئۇنداقتا فۇنكسىيە $y = \phi(x)$ تەڭلىمە

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$$

نىڭ ئىنتېرۋال I دىكى **يېشىمى** دەپ ئاتىلىدۇ.

ئومۇمىي يېشىمى ئەگەر دىففېرېنسىئال تەڭلىمە يېشىمى خالىغان تۇراقلىق سانى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھەمدە خالىغان تۇراقلىق سانىنىڭ سانى تەڭلىمە دەرىجىسى بىلەن تەڭ بولغاندا، بۇ يېشىمنى تەڭلىمىنىڭ **ئومۇمىي يېشىمى** دەپ ئاتايمىز.

ئالاھىدە يېشىمى دىففېرېنسىئال تەڭلىمە ئومۇمىي يېشىمىدىكى خالىغان تۇراقلىق سانىنى مۇقىم بېكىتكەندىن كېيىن ئېرىشكەن يېشىمنى، **ئالاھىدە يېشىمى** دەپ ئاتايمىز.

8.1.2 ئاساسىي تەڭلىمىلەر

- **دەسلەپكى قىممەت شەرتى**
ئەگەر $x = x_0$ بولغاندىكى فۇنكسىيە ۋە ئۇنىڭ ھاسىلىسىنىڭ قىممىتى y_0, y_0' بېرىلگەن بولسا، بۇنداق شەرتلەرنى بىز تەڭلىمىنىڭ دەسلەپكى قىممەت شەرتى دەپ ئاتايمىز.

- **بىرىنچى دەرىجىلىك دەسلەپكى قىممەت مەسىلىسى**
تەڭلىمە $y' = f(x, y)$ نىڭ دەسلەپكى شەرت $y|_{x=x_0} = y_0$ ئاستىدىكى ئالاھىدە يېشىمنى تېپىش مەسىلىسىنى كۆرسىتىدۇ. يەنى:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

- **ئىككىنچى دەرىجىلىك دەسلەپكى قىممەت مەسىلىسى**
تەڭلىمە $y'' = f(x, y, y')$ نىڭ دەسلەپكى شەرت $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0'$ ئاستىدىكى ئالاھىدە يېشىمنى تېپىش مەسىلىسىنى كۆرسىتىدۇ. يەنى:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$$

- **ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە**
شەكلى تۆۋەندىكىدەك بولغان تەڭلىمىنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە دەپ ئاتايمىز:

$$y' = f(x)g(y)$$

بۇنى يېشىشتە، ئوخشاش مىقدارلارنى بىر تەرەپكە يىغىپ ئىنتېگراللىساقلا بولىدۇ.

شەكلى $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$ كە ئوخشاش تەڭلىمىدە،(a, b, cلار بىرلا ۋاقىتتا نۆل ئەمەس). $u = ax + by + c$ ئۇنداقتا $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ بولىدۇ، بۇنى ئەسلىدىكى تەڭلىمىگە ئېرىكتۈرگەندە $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + bf(u)$ گە ئېرىشىمىز، بۇ دەل ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە.

10 ـ مەشىق

تەڭلىمە $\frac{dy}{dx} = 2xy$ نى يېشىڭ.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ بىر ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە.

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx, \ln|y| = x^2 + C, |y| = e^{x^2+C}$$

$$\therefore y = \pm e^{x^2} e^C = \pm C_1 e^{x^2} = C_2 e^{x^2}$$

- **بىر جىنسلىق تەڭلىمە**
شەكلى $y' = f(x, y) = \phi(\frac{y}{x})$ بولغان تەڭلىمە بىر جىنسلىق تەڭلىمە دەپ ئاتىلىدۇ.
بۇنى يېشىشنىڭ باسقۇچلىرى:

$$u = \frac{y}{x}, y = xu, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

شۇنىڭ بىلەن:

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u), \quad \therefore x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u) - u$$

بۇنى پارچىلىغىلى بولىدىغان تەڭلىمە يېشىش ئۇسۇلى بويىچە يېشىشكە بولىدۇ.

شەكلى $\frac{A_1x+B_1y}{A_2x+B_2y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ بولغان تەڭلىمنى، تەڭلىكنىڭ ئىككى تەرىپىگە x نى بۆلۈش ئارقىلق بىر جىنسلىق تەڭلىمىگە ئېرىشەلەيمىز.

شەكلى $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ بولغان تەڭلىمىدە، ئاۋال تۇراقلىق سان C نى $x=X+h, y=Y+k$ ئارقىلق ئالماشتۇرۇش ئېلىپ بارغاندا،

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{A_1X+B_1Y+A_1h+B_1k+C_1}{A_2X+B_2Y+A_2h+B_2k+C_2}$$

بۇنىڭدا مۇۋاپىق سان h,k بىلەن $A_1h+B_1k+C_1=A_2h+B_2k+C_2=0$ نى قانائەتلەندۇرۇپ، بىر جىنسلىق تەڭلىمىگە ئېرىشەلەيمىز. بۇ ۋاقىتتا $\frac{B_2}{B_1}\neq\frac{A_2}{A_1}$ بولغاندا تېپىپ چىقىشقا بولىدۇكى

$$\begin{cases} k=\dfrac{A_1C_2-A_2C_1}{A_2B_1-A_1B_2} \\ h=\dfrac{A_1B_1C_2-A_2B_1C_1+A_1A_2B_1C_1-A_1^2B_2C_1}{A_1^2B_2-A_1A_2B_1} \end{cases}$$

ئەگەر $\lambda=\frac{B_2}{B_1}=\frac{A_2}{A_1}$ بولغاندا، $A_1x+B_1y=v$ قىلىپ خاتىرلىۋالساق، كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇكى

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=A_1+B_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=A_1+B_1\frac{v+C_1}{\lambda v+C_2}=\frac{(A_1\lambda+B_1)v+A_1C_2+B_1C_1}{\lambda v+C_2}$$

بۇنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە بويىچە يېشىمىز.

مەشىق 11 ـ

تەڭلىمە $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ نى يېشىڭ.

ئەزا يۆتكەش ئارقىلىق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$ گە ئېرىشەلەيمىز.

سول تەرەپ سۈرئەت مەخرەجنى x^2 غا بۆلۈش ئارقىلىق $\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}=\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy-x^2}{x^2}}$ گە ئېرىشەلەيمىز.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ $\frac{y}{x}$ شەكلىدىكى بىر جىنسلىق تەڭلىمە. ئەگەر $\frac{u^2}{u-1}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1}-u=\frac{u}{u-1},\therefore\frac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\therefore\int\frac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},u-\ln u=\ln x+C,\ln xu=u+C$$

نەتىجىدە $u=\frac{y}{x}$ نى ئالماشتۇرساق $\ln y=\frac{y}{x}+C$، شۇڭا $y=Ce^{\frac{y}{x}}$

8.2 ئادەتتىكى دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

ئادەتتىكى دىففېرېنسىيال تەڭلىمە (ODE) دېگىنى دىففېرېنسىيال تەڭلىمىدىكى نامەلۇم مىقدار يەككە ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيەسى ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىدۇ. ئەڭ ئاددىي ئادەتتىكى دىففېرېنسىيال تەڭلىمە، نامەلۇم مىقدار بىر ھەقىقىي سان ياكى كومپلېكس ساننىڭ فۇنكسىيىسى بولۇشى مۇمكىن، لېكىن نامەلۇم مىقدار بىر ۋېكتور فۇنكسىيىسى ياكى ماترىتسا فۇنكسىيىسى بولۇشى مۇمكىن، كېيىنكىسى ئادەتتىكى دىففېرېنسىئال تەڭلىمىدىن تەركىب تاپقان تەڭلىملەر سىستېمىغا ماس كېلىدۇ. ئەڭ كۆپ ئۇچرايدىغان ئىككى

خلى بىرىنچى تەرتىپلىك دىففېرېنسىيال تەڭلىمە ۋە ئىككىنچى تەرتىپلىك دىففېرېنسىيال تەڭلىمىدىن ئىبارەت.

8.2.1 سىزىقلىق دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

شەكلى $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ بولغان تەڭلىمە بىرىنچى تەرتىپلىك سىزىقلىق دىففېرېنسىيال تەڭلىمە دېيىلىدۇ. تەڭلىمىدىكى نامەلۇم فۇنكسىيە y ۋە ئۇنىڭ ھاسىلىسىنىڭ دەرىجىسى بىرىنچى دەرىجە.
ئەگەر $Q(x) = 0$ بولغاندا، بۇ بىرىنچى تەرتىپلىك بىر جىنسلىق دىففېرېنسىيال تەڭلىمە دېيىلىدۇ. بۇ ۋاقىتتا

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\,\mathrm{d}x, \ln y = \int P(x)\,\mathrm{d}x + C', y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \cdot e^{C'}, y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

ئەگەر $Q(x) \neq 0$ بۇنى **تۇراقلىق سانني ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلى** ئارقىلىق يېشىشكە بولىدۇ. بۇنىڭ قەدەم باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىچە:
ئەگەر $Q(x) = 0$ بولغاندا، تەڭلىمە يېشىمى $y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ بولاتتى، ئەمما $Q(x) \neq 0$ بولغاچقا، بۇيەردىكى تۇراقلىق سان C دەل x نىڭ فۇنكسىيەسى بولىدۇ، شۇڭا $y = ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ بولغاندا، بۇنى ئەسلى تەڭلىمىگە باغلاش ئارقىلىق

$$u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} - ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}P(x) + P(x)ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)$$

گە ئېرىشەلەيمىز. يەنى $u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)$ بۇنى u' گە نىسبەتەن ئىنتېگراللىساق

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$$

ئاخىردا بۇنى ئەسلى تەڭلىمىگە باغلاش ئارقىلىق فورمۇلا

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)}$$

گە ئېرىشەلەيمىز. دېمەك بىر جىنسلىق بولمىغان تەڭلىمىنىڭ يېشىمى، بىر جىنسلىق تەڭلىمىنىڭ ئورتاق يېشىمىگە بىر جىنسلىق بولمىغان تەڭلىمىنىڭ خاس يېشىمىنى قوشقانغا باراۋەر.

12 ـ مەشىق

تەڭلىمە $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+y}$ نى يېشىڭ.

تەڭلىمىدە y نى ئاجرىتىپ چىقارغىلى بولمايدۇ، چۈنكى بۇ ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە ئەمەس. بۇنى شەكىل ئۆزگەرتىش ئارقىلىق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x$ گە ئېرىشەلەيمىز. بۇ دەل سىزىقلىق دىففېرېنسئال تەڭلىمە.
بۇنىڭدا $x + y = u$ قىلىپ خاتىرلۇۋالساق،

$$y = u - x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u}{u}, \frac{u}{1+u}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

بۇنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە بويىچە بىرتەرەپ قىلساق بولىدۇ.

8.2.2 بېرنوئېل تەڭلىمىسى

شەكلى $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n$ بولغان تەڭلىمىنى بېرنوئېل تەڭلىمىسى دەپ ئاتايمىز. بۇنىڭدا، ئەگەر $0 = y$ بولسا دەل بىر جىنسلىق تەڭلىمە، $y = 1$ بولسا ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە ھېساپلىنىدۇ.بېرنوئېل تەڭلىمىسىنى يېشىشنىڭ ئۇسۇلى تۆۋەندىكىچە:

ئالدى بىلەن شەكىل ئۆزگەرتىمىز، يەنى $y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

بۇنىڭدا $y^{1-n}=z$ دەپ خاتىرىلۇۋالساق، $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ بولىدۇ.

شۇڭا $\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ گە ئېرىشەلەيمىز.

بۇنى ئەسلىدىكى تەڭلىمىگە باغلىساق:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n$$

بۇنىڭدىن كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز:

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+P(x)z=Q(x)$$

،

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

دېمەك سىزىقلىق دىففېرېنسىئال تەڭلىمىگە ئايلاندى.

13 ـ مەشىق

تەڭلىمە $y\,\mathrm{d}x=(1+x\ln y)x\,\mathrm{d}y$ $(y>0)$ نى يېشىڭ.

كەسىر شەكلىگە ئايلاندۇرساق:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{(1+x\ln y)x}{y}=\frac{1}{y}x+\frac{\ln y}{y}x^2$$

بېرنوئىل تەڭلىمىسىدە:

$$x'+P(x)x=Q(x)x^n, x'-\frac{1}{y}x=\frac{\ln y}{y}x^2$$
$$P(x)=-\frac{1}{y}, Q(x)=\frac{\ln y}{y}$$

تەڭلىكنىڭ ئىككى تەرىپىنى x^{-2} گە كۆپەيتسەك:

$$x^{-2}x'-\frac{1}{y}x^{-1}=\frac{\ln y}{y},\quad z=x^{-1},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

ئەسلى تەڭلىمىگە باغلىساق:

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}z=\frac{\ln y}{y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}z=-\frac{\ln y}{y}$$

فورمۇلا ئارقىلىق:

$$\begin{aligned}
z&=e^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\cdot\left(\frac{\ln y}{y}\right)+C\right)\\
&=\frac{1}{y}(-\int\ln y\,\mathrm{d}y+C)\\
&=\frac{1}{y}(-y(\ln y-1)+C)\\
&=-\ln y+1+\frac{C}{y}\\
\therefore x&=\frac{y}{-y\ln y+y+C}
\end{aligned}$$

8.2.3 تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

ئادەتتە بەزى يۇقىرى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرنى تۆۋەن دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرنى چۈشۈرۈپ يېشىشكە بولىدۇ ، بىز بۇنداق دەرىجىسىنى تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان تەڭلىمىلەرنى تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان دىففېرېنسىئال تەڭلىمە دەيمىز.

☛ $y^{(n)} = f(x)$

تەڭلىمىنىڭ ئوڭ تەرىپىدە پەقەت x لا بار بولىغان فۇنكسىيە.

بۇ خىلدىكى تەڭلىمىدە، ئارقمۇ-ئارا ھاسىلىسىنى ھېساپلىغاندا n دانە تۇراقلىق مىقدارنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئورتاق يېشىمگە ئېرىشەلەيمىز. تۆۋەندىكى مىسالدا بىرىلگەندەك:

14 ـ مەشىق

تەڭلىمە $y''' = e^{2x} - \cos x$ نى يېشىڭ.

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1, y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2$$
$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

☛ $y'' = f(x, y')$

بۇ خىلدىكى تەڭلىمىدە y'', y', x لەر بار، ئەمما y يوق. بۇنداق تەڭلىمىلەردە $y' = p$ قىلىپ خاتىرلىشىۋالساق، $y'' = p'$ بولىدۇ، بۇنى ئەسلى تەڭلىمىگە باغلىساق، p غا مۇناسىۋەتلىك بىرىنجى دەرىجىلىك تەڭلىمىگە ئېرىشەلەيمىز.

15 ـ مەشىق

تەڭلىمە $(1 + x^2)y'' = 2xy'$، دەسلەپكى شەرتى $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$

$$y' = p, y'' = p', (1 + x^2)p' = 2xp$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x}{1 + x^2}\mathrm{d}x$$
$$\ln p = \ln(1 + x^2) + C', p = C(1 + x^2)$$
$$y' = 3(1 + x^2), y = x^3 + 3x + 1$$

☛ $y'' = f(y, y')$

بۇ خىلدىكى تەڭلىمىدە y'', y', y لەر بار، ئەمما x يوق.

بۇ خىلدىكى تەڭلىمىلەردە، ئالدىنقىسىغا ئوخشاش $y' = p$ قىلىپ خاتىرلىشىۋالساق،

$$y'' = p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

بۇنى ئاجراتقىلى بولىدىغان تەڭلىمە بويىچە يېشىشكە بولىدۇ.

8.3 يۇقرى دەرىجىلىك سىزىقلىق دىففېرېنسىئال تەڭلىمە

8.3.1 يۇقرى دەرىجىلىك تەڭلىمە

بىرىنجى پاراگىرافتا ئادەتتىكى دىففېرېنسىئال تەڭلىمە خاتىرلەندى.

ئىككىنچى پاراگىرافتا تۆۋەنلەتكىلى بولىدىغان تەڭلىمىلەر خاتىرلەندى.

بۇ بۆلەكتە شەكلى $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y = 0$ ۋە $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y = f(x)$ بولغان n دەرىجىلىك تەڭلىمە تونۇشتۇرىلىدۇ.

8.3.2 ئەيلېر تەڭلىمىسى

ئېنىقلىما 8.3.1: ئەيلېر تەڭلىمىسى

شەكلى

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

بولغان تەڭلىمە ئەيلېر تەڭلىمىسى دەپ ئاتىلىدۇ.

تەڭلىمىدە p, q لار ئېنىق بولغان تۇراقلىق سان، $f(x)$ ئېنىق بولغان فۇنكسىيە. ئەيلېر تەڭلىمىسىنى يېشىشتە تۆۋەندىكىدەك ئىككى باسقۇچقا بۆلۈشكە بولىدۇ.

ئەگەر $x>0$ بولسا:

$x=e^t$ دەپ خاتىرلەپ ئالساق، $t=\ln x$ بولىدۇ.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}&=\frac{1}{x},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
&=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

تەڭلىمە $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=f(e^t)$ گە ئايلىنىدۇ، ئاخىرىدا $t=\ln x$ بىلەن قايتۇرساق تەڭلىمە يېشىمىگە ئېرىشەلەيمىز.

ئەگەر $x<0$ بولسا، $x=-e^t$ قىلىپ خاتىرلەپ ئالساق، ئۈستىدىكى ئۇسۇل بىلەن يېشىمىگە ئېرىشەلەيمىز.

16 ـ مەشىق

تەڭلىمە $x>0$، $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0,$ نى يېشىڭ.

بۇۋاستە فورمۇلادىن پايدىلانساق، $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0$

شۇڭا $y''+3y'+2y=0$

خاراكتېرلىگۈچى تەڭلىمىسى:

$$\lambda^2+3\lambda+2=0,\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$$

$$\therefore y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

ئاخىرىدا $x=e^t$ بىلەن ئالماشتۇرساق:

$$y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$$

ئىككىنچى قىسىم

ئالگېبرا

توققۇزىنچى باب

دېتېرمىنانت

ئونىنچى باب

ۋېكتور

ئون بىرىنچى باب

ماترىسسا

11.3 ئالاھېدە ماترىسسالار

11.3.1 ئېلمېنتار ماترىسسا

11.3.2 تەتۈر ماترىسسا

11.3.3 تەڭداش ماترىسسا

11.3.4 سىممېتىرىك ماترىسسا

11.3.5 ئوخشاش ماترىسسا

11.3.6 ئورتوگونال ماترىسسا

ئۈچىنچى قىسىم

ئېھتىماللىق نەزەرىيىسى

مەشقلەرنىڭ پايدىلىنىش جاۋاب كودى

پایدبلانملار

[1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The LaTeX Companion*. Addison-Wesley Reading Mass, 2004.

[2] Hubert Partl, Irene Hyna, and Elisabeth Schlegl. https://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/english

[3] Jean Pierre Casteleyn. Visual TikZ (version 0.62). IUT Génie Thermique et Énergie, 2016

[4] Leslie Lamport. LaTeX: A Document Preparation System, 2nd edition. Addison-Wesley Reading Mass, 1994.

[5] Till Tantau. TikZ PGF Manual, 2010. http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/.

[6] URL https://texample.net/

[7] URL https://www.latex-project.org

[8] URL https://python.org/

[9] URL https://www.latexstudio.net/