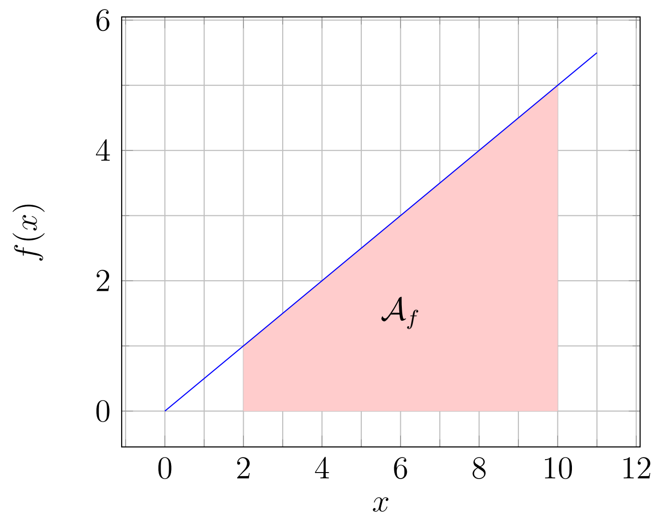
Méthode des trapèzes - démonstration graphique

RM de Maths

2023-2024

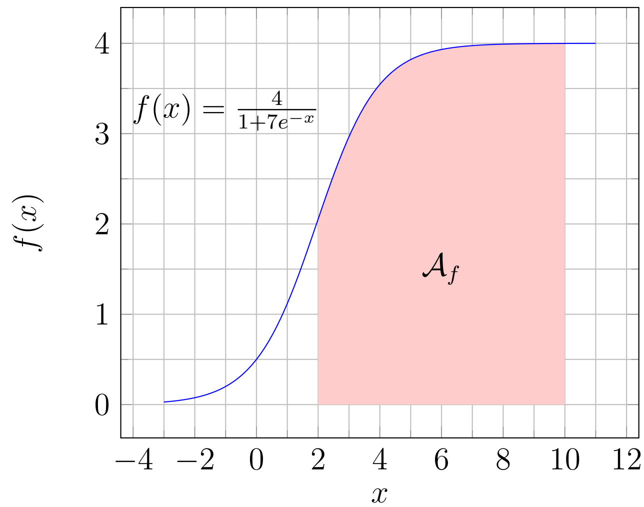
1 Introduction

L'intégrale d'une fonction f est une opération mathématique dont la signification graphique serait la quantification de l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$. Par exemple, voici $f : x \mapsto \frac{1}{2}x$, et $\mathcal{A}_f = \int_2^{10} f(x)\, dx$:



Dans ce cas, l'aire sous la courbe entre 2 et 10 s'obtiendrait facilement par $\mathcal{A}_f = \frac{10\times5}{2} = 25$

Pour des fonctions différentes, le calcul d'intégrale peut s'avérer être plus difficile. Prenons l'exemple de $f : x \mapsto \frac{4}{1+7e^{-x}}$:

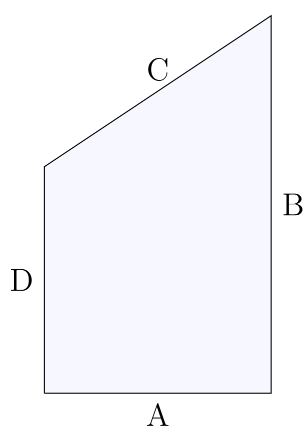


L'approche géométrique semble être délicate dans ce cas. Mais si l'on s'autorise quelques approximations, par des trapèzes, nous pouvons nous en sortir !

2 Trapèzes ? Mais qu'est-ce que c'est que ce truc là ?

Puisque la courbe de la fonction est compliquée, nous déciderons d'approcher cette dernière par une série de trapèzes.

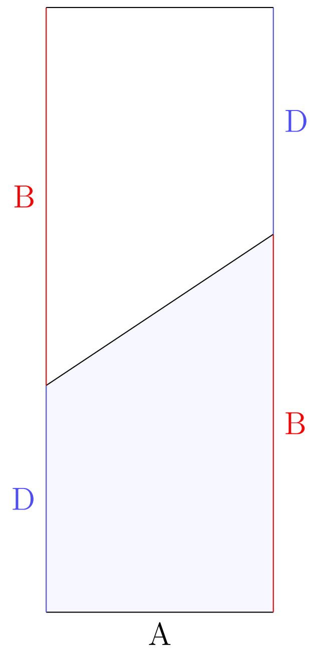
Non non, nous ne parlons pas du muscle, concentre-toi garçon, l'anatomie te rend fou. Un trapèze est un quadrilatère caractérisé par l'existence de deux côtés parallèles, appelés **bases**. Son aire est obtenue de la façon suivante :



$$\mathcal{A}_{\text{trapèze}^1} = A \times \frac{B+D}{2}$$

Pour ceux qui souhaitent s'en convaincre, voici une démonstration géométrique :

[1]Rmq : on parle ici de **trapèze rectangle** pour être rigoureux, ce sera le type de trapèze systématiquement utilisé en P1.

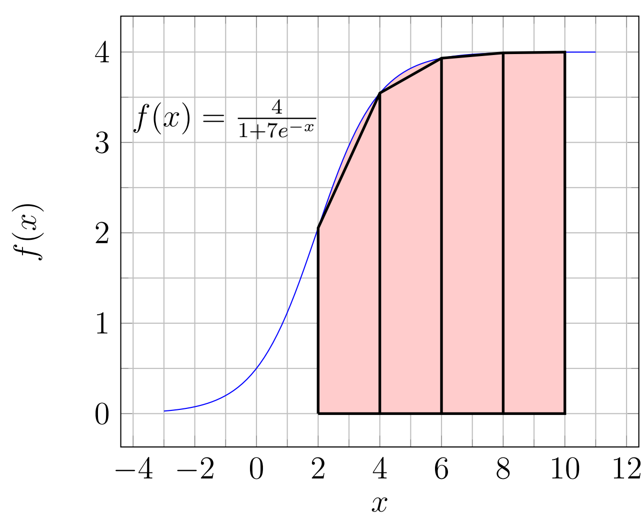


Nous pouvons voir que l'aire du trapèze est la moitié de l'aire du rectangle de largeur A et de longueur $B + D$:

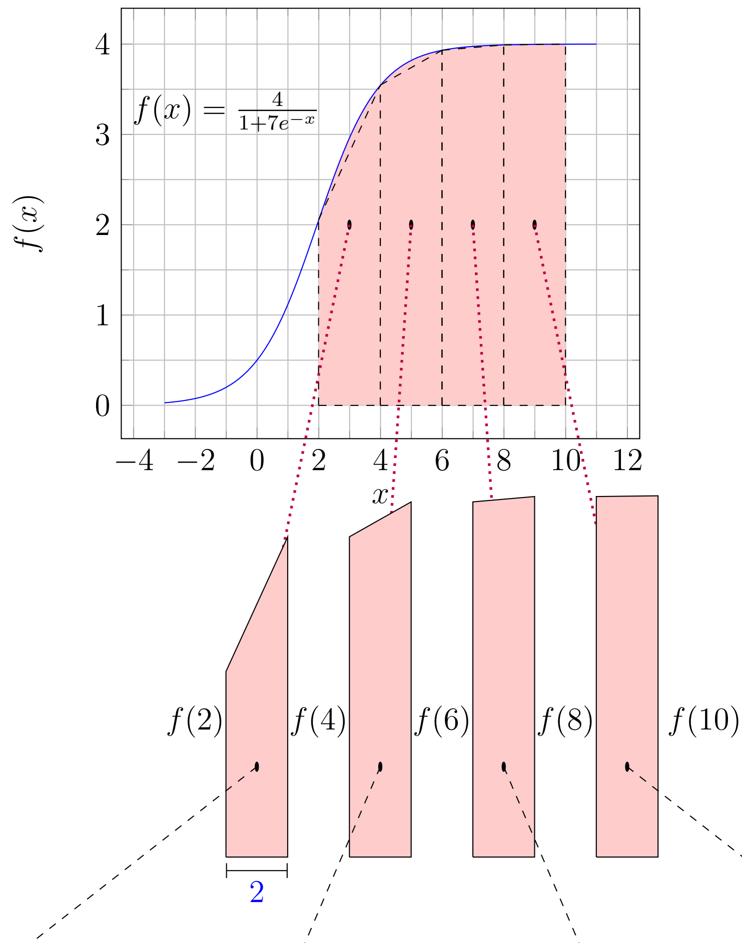
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\mathcal{A}_{rectangle} \\ &= \frac{1}{2} \times [A \times (B + D)] \\ &= A \times \frac{B + D}{2} \qquad \text{CQFD, } \blacksquare\text{, trivialement trivial}\end{aligned}$$

3 Méthode des trapèzes (il était temps, t'en avais des choses à raconter)

Nous allons donc approcher la courbe de la fonction par une série de trapèzes, comme suit :



Et puis, si l'on joue un peu avec ces trapèzes :



$$\underbrace{2 \times \frac{f(2)+f(4)}{2} \quad + \quad 2 \times \frac{f(4)+f(6)}{2} \quad + \quad 2 \times \frac{f(6)+f(8)}{2} \quad + \quad 2 \times \frac{f(8)+f(10)}{2}}_{\mathcal{A}_f \approx \int_2^{10} f(x)\ dx}$$

Essayons de rendre ce calcul plus lisible :

$$\begin{aligned}
\int_2^{10} f(x)\ dx &\approx 2 \times \frac{f(2)+f(4)}{2} + 2 \times \frac{f(4)+f(6)}{2} + 2 \times \frac{f(6)+f(8)}{2} + 2 \times \frac{f(8)+f(10)}{2} \\
&\approx 2 \times \left(\frac{f(2)+f(4)}{2} + \frac{f(4)+f(6)}{2} + \frac{f(6)+f(8)}{2} + \frac{f(8)+f(10)}{2} \right) \\
&\approx 2 \times \left(\left(\frac{f(2)}{2} + \frac{f(4)}{2} \right) + \left(\frac{f(4)}{2} + \frac{f(6)}{2} \right) + \left(\frac{f(6)}{2} + \frac{f(8)}{2} \right) + \left(\frac{f(8)}{2} + \frac{f(10)}{2} \right) \right) \\
&\approx 2 \times \left(\frac{f(2)}{2} + f(4) + f(6) + f(8) + \frac{f(10)}{2} \right)
\end{aligned}$$

4 Généralisation de la méthode des trapèzes

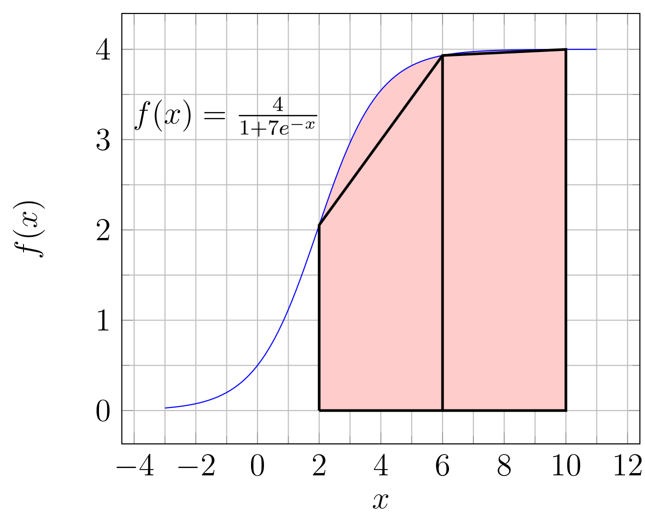
L'approximation de l'intégrale peut se voir de deux façons différentes, selon tes préférences. Dans tous les cas, il faut bien comprendre que le résultat obtenu ne peut être qu'une **approximation** de la valeur exacte !

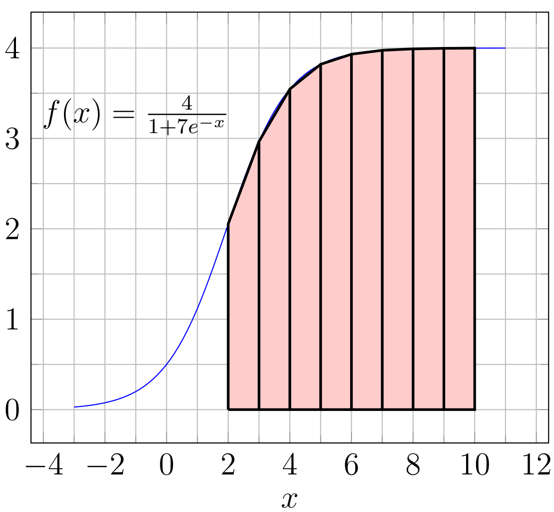
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &\approx h \times \left(\frac{f(x_1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \\ &\approx h \times \left(\frac{f(x_1)}{2} + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)\end{aligned}$$

h est ce qu'on appelle le **"pas"**. Il correspond à la hauteur des trapèzes. Il faut faire attention à prendre un pas toujours constant, puisque l'objectif est de **factoriser** par ce pas h.[2]

5 Remarque pas piquée des hannetons

Si tu te sens à l'aise avec cette méthode, tu devrais pouvoir remarquer que la hauteur qu'on choisit pour les trapèzes impactera directement l'erreur due à l'approximation. Pour te l'illustrer, voici deux situations différentes :





Ainsi, si dans la vie de tous les jours, tu as besoin de cette méthode[3], nous te conseillons de prendre un pas relativement petit, si tu souhaites minimiser ton erreur !

[2] Tu pourrais me dire "ouiiii mais on pourrait très bien prendre des trapèzes de hauteurs différentes, ça nous permettrait d'être plus précis". Oui, tu as raison, mais en même temps, la méthode des trapèzes est une approximation dont l'objectif est surtout de calculer relativement rapidement une intégrale. Soit tu as le soucis du détail, et tu calcules $\int_2^{10} f(x)\ dx$, soit tu approximes, et dans ce cas, tu **restes** dans l'approximation. D'autant plus qu'ici, nous n'avons que 4 trapèzes, donc on aurait pu se permettre de faire l'effort de prendre des hauteurs différentes. Mais quand il y en a plus...

[3] Je sais pas moi, tu en auras peut-être besoin pour déterminer le volume de lait que tu ajoutes dans ton bol de céréales (avant les céréales bien sûr), à partir du débit que tu auras préalablement déterminé à l'aide de la formule de φsik $Q = Sv$, la vitesse v étant connue puisque tu détiens un radar portable !