Oscilador de Duffing y secciones de Poincaré

Rolando Salazar

[1] *Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora.*

29 de mayo de 2019

Resumen de la actividad 11 en la que se utiliza la ecuación de Duffing para represntar el movimiento de un oscilador con amortiguamiento y, además, se grafican las secciones de Poincaré para visualizar los estados del sistema dinámico.

1. Introducción

En esta actividad (última del curso) utilizaremos la ecuación de Duffing para la representación de un oscilador que no obecede la Ley de Hook y que tiene comportamiento caótico. Dicha ecuación es la siguiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma cos(\omega t)$$

donde α es la rigidez, δ el amortiguamiento, β la no linearidad, γ la aplitud de forzamiento y ω la frecuencia de forzamiento. Se tomarán valores para cada una de estas constantes, obteniendo así un sistema dinámico caótico como el que se ilustra en la figura 1. El sistema que estudiaremos se conoce más formalmente como el Oscilador de Duffing.

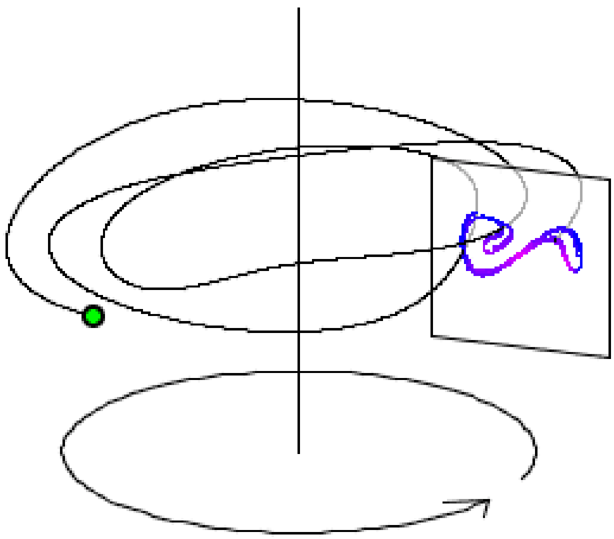

Figura 1: *Muestra del tipo de sistema que estamos estudiando.*

1.1. Teoría del Caos

La teoría del caos es un área muy importante del conocimiento humano, ya que tiene aplicaciones desde las ciencias exactas como la física y las matemáticas así como en ciencias no exactas como las ciencias biológicas y económicas. La teoría del caos trata los sistemas complejos y dinámicos que son extremadamente sensibles a las variaciones en sus condiciones iniciales. Aunque estos sistemas son deterministas, es decir, que su comportamiento puede ser determinado conociendo sus condiciones iniciales, pequeñas variaciones en esas condiciones iniciales pueden llevar a comportamientos completamente distintos e irregulares que no permiten la predicción a largo plazo.

Las ideas de la teoría del caos (o al menos sus primeras apariciones) datan desde la época de Newton. Cuando éste inventó las ecuaciones diferenciales y descubrió las leyes del movimiento. Con estos conceptos, Newton logró resolver problemas de dos cuerpos que interactúan mediante la gravedad. Sin embargo, su veradero interes se encontraba en sistemas de 3 cuerpos, los cuales después fueron estudiados por físicos y matemáticas que notaron su gran dificultad para resolverlos llegando a concluir que era imposible encontrar su solución.

No obstante, la historia de la teoría del caos tomó su mejor rumbo con la llegado de los ordenadores a mitad del siglo XX, ya que se empezó a graficar las soluciones de estos sistemas sin aparente solución mediante métodos numéricos. El personaje más notable que trabajó con estos problemas fue Edward Lorenz, quien (en 1963) se dio cuenta que al variar por muy poco las condiciones iniciales se obtenian soluciones muy diferentes.

2. Desarrollo de la actividad 11

Primero, se solicitó replicar la figura 2 mediante soluciones numéricas de la ecuación de Duffing en python. Los resultados se muestran en la figura 3, tomando $\alpha = -1$, $\delta = 0{,}3$, $\beta = 1$ y $\omega = 1{,}2$. Para realizar el análisis del sistema caótico, variaremos el valor de γ desde 0.20 hasta 0.65 usando un ancho de paso de 0.15. Obtendremos la solución a la posición del cuerpo en oscilación, se usará la función ode de la bibliota SciPy en Python 3, la cual utiliza el método de Runge Kutta 4 para resolver ecuaciones diferenciales. Con ello podremos graficar la posición contra tiempo y la velocidad contra tiempo del sistema (dos gráficas). Esto es, se graficarán las series de tiempo y los retrastos fase del oscilador de Duffing para los valores de γ especificados. Además, las condiciones inciales del sistema son $x(0) = 0$ y $\frac{dx}{dt}(0) = 0$. Las gráficas obtenidas para cada γ se muestran en el resto del documento.

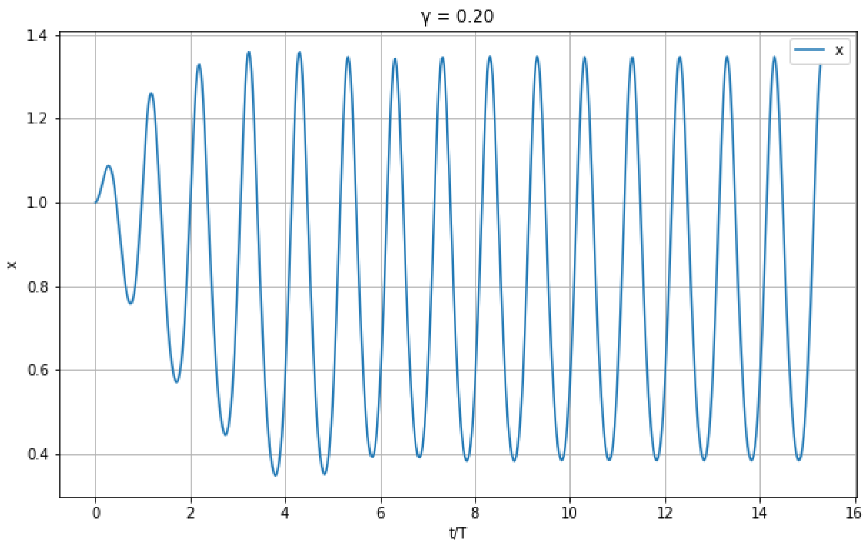

Figura 2: *Réplica 2.*

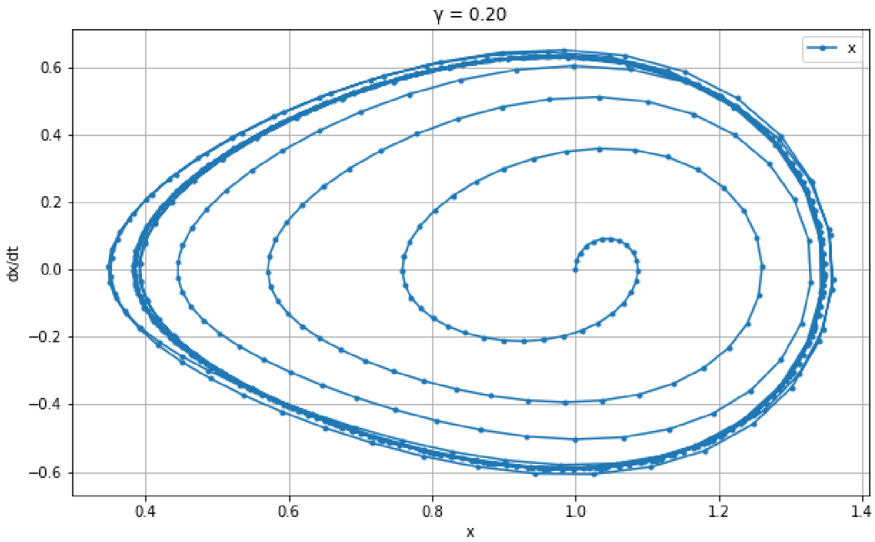

Figura 3: *Gráfica a replicar.*

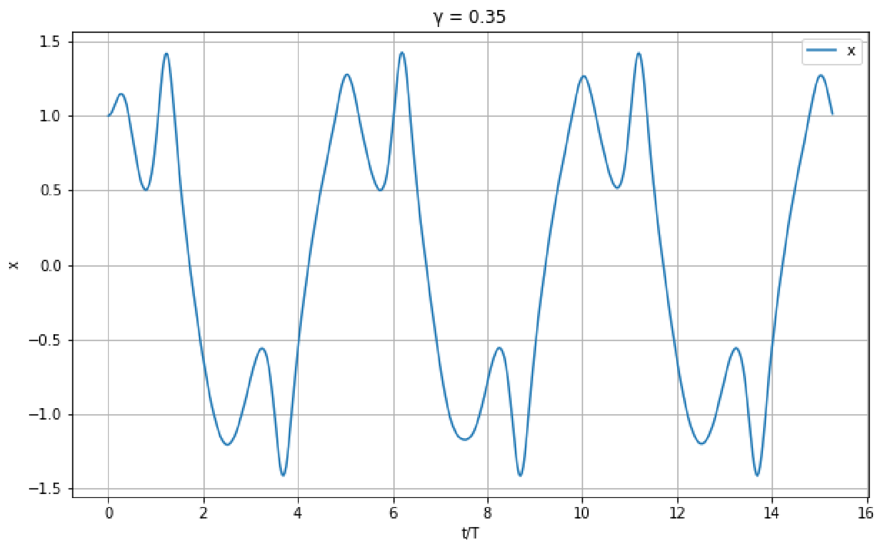

Figura 4: *Réplica 1.*

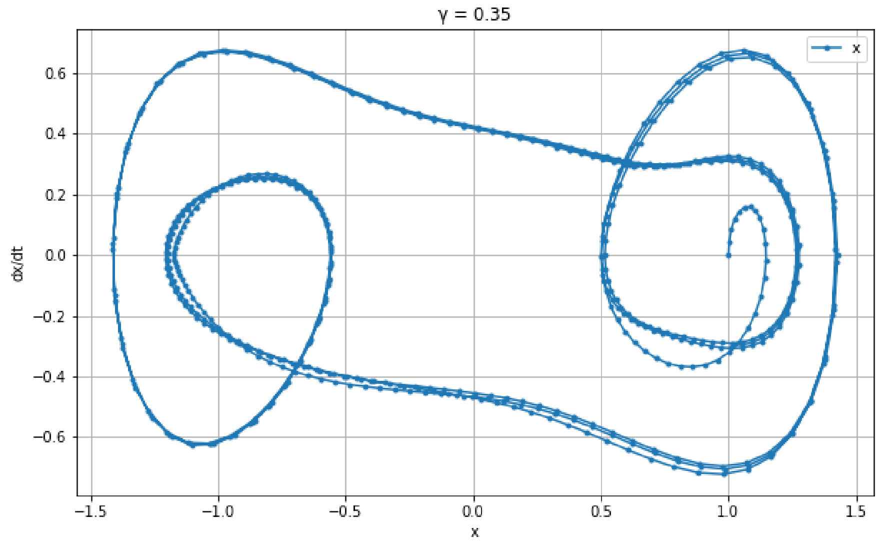

Figura 5: *2da gráfica a replicar.*

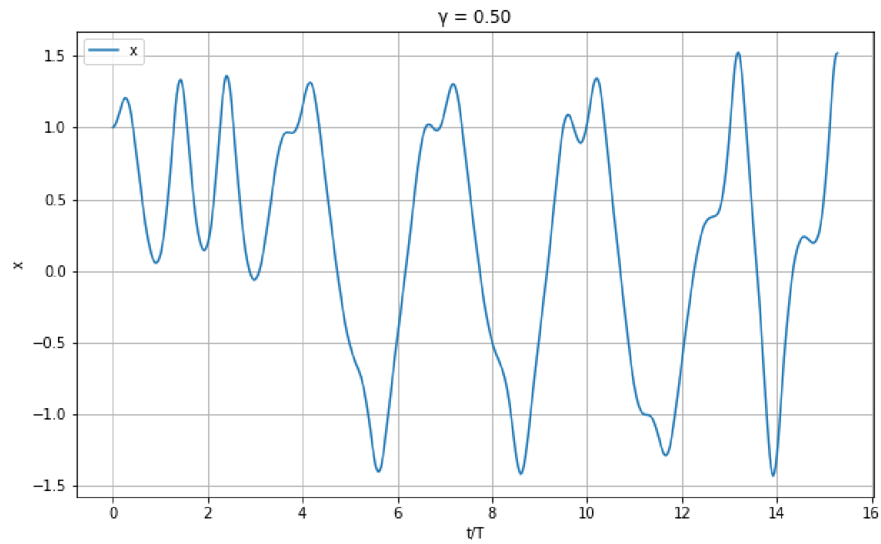

Figura 6: *Réplica 2.*

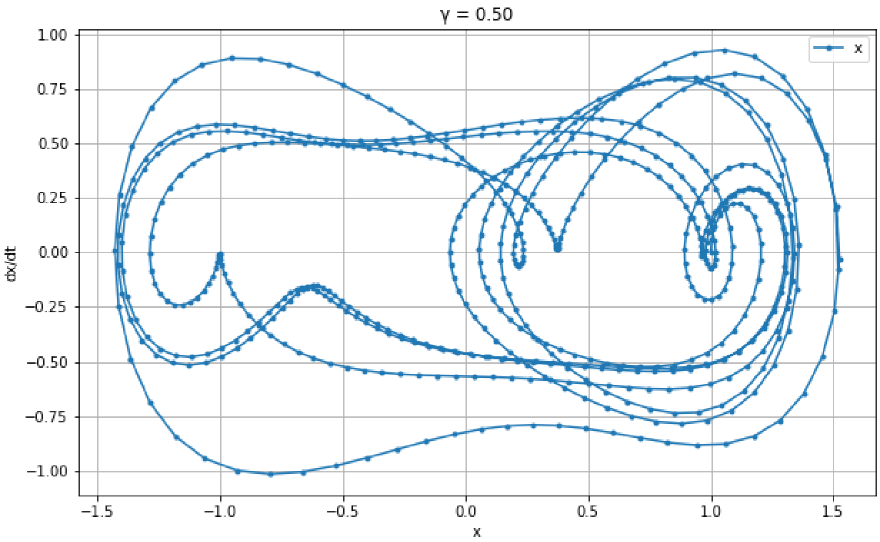

Figura 7: *Réplica 2.*

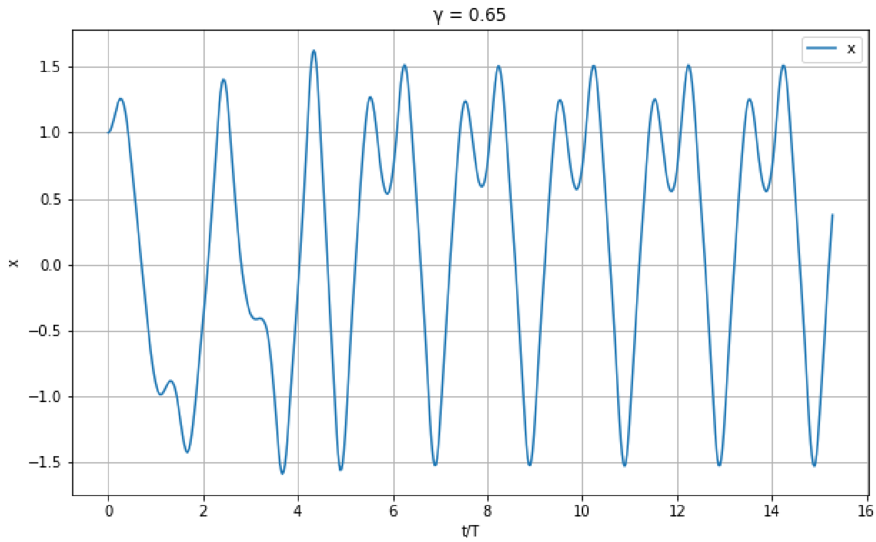

Figura 8: *Réplica 2.*

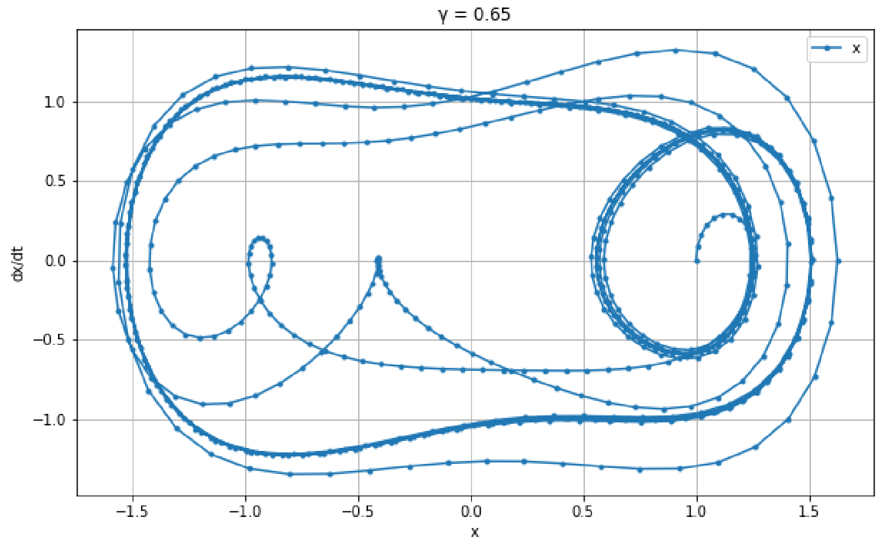

Figura 9: *Réplica 2.*

3. Conclusiones

Como se puede observar en las gráficas, al variar γ en tan solo 0.15 se obtienen comportamientos muy distintos al anterior. Todo indica que la idea fundamental de la teoría del caos aplica para este sistema, es decir, con una pequeña variación en la condiciones iniciales se consiguieron resultados diferentes, y eso que solo se varió un parámetro y no la velocidad ni posición inciales. Además, resolver la ecuación diferencial resultó muy sencillo con ayuda de la función ode de SciPy.