

FTML Exercices 3 solutions

Pour le 24 mars 2023

TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|-----|------------------------------|---|
| 1 | Risques de Bayes | 1 |
| 1.1 | Exemple 1 (penalty) | 1 |
| 1.2 | Exempler 2 : Spotify streams | 1 |
| 2 | Estimateurs et espérances | 2 |
| 2.1 | 1 | 2 |
| 2.2 | 2 : apprentissage supervisé | 2 |

1 RISQUES DE BAYES

1.1 Exemple 1 (penalty)

On utilise la 01 loss, donc on sait que le prédicteur de Bayes prédit, pour une valeur x de X , la sortie la plus probable. Il prédit donc 1 si $X = 1$, et 0 si $X = 0$.

Pour calculer le risque de Bayes, c'est le même calcul que l'exercice 1 du cours magistral 3 avec l'estimateur f_1 et

- $p = 0.6$
- $q = 1 - p$

Ainsi :

$$\begin{aligned} R(f_1) &= E[l(Y, f(X))] \\ &= 1 \times P(Y \neq f(X)) + 0 \times P(Y = f(X)) \\ &= P(Y \neq f(X)) \\ &= P((Y \neq f(X)) \cap (X = 1)) + P((Y \neq f(X)) \cap (X = 0)) \\ &= P((Y \neq f(X)) | X = 1)P(X = 1) \\ &\quad + P((Y \neq f(X)) | X = 0)P(X = 0) \\ &= \frac{1}{2}P((Y = 0) | X = 1) + \frac{1}{2}P((Y = 1) | X = 0) \\ &= \frac{1}{2}(1 - p) + \frac{1}{2}q \\ &= 0.4 \end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Exempler 2 : Spotify streams

On utilise la squared loss, donc on sait que le prédicteur de Bayes prédit, pour une valeur x de X , l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X = x$. Pour une valeur x donnée, Y suit une loi binomiale de paramètres $n_Y(x) = 3^x$ et $p_Y(x) = 0.5$. L'espérance de cette variable conditionnelle est $n_Y(x)p_Y(x) = 0.5n_Y(x)$, qui est donc la prédiction faite par le prédicteur de Bayes. Calculons maintenant le risque de

Bayes. Pour cela, on utilise à nouveau la loi de l'espérance totale pour calculer dans un premier temps le "risque conditionnel" : l'espérance de la loss sachant X . Etant donnée une valeur x de X , on remarque que l'espérance de l'erreur est

$$\begin{aligned} E[l(Y, f^*(X))|X = x] &= E[(Y - f^*(X))^2|X = x] \\ &= E[(Y - E[Y|X])^2|X = x] \\ &= \text{Var}[Y|X = x] \\ &= n_Y(x)p_Y(x)(1 - p_Y(x)) \\ &= 3^x/4 \end{aligned} \quad (2)$$

Pour calculer le risque de Bayes, il nous suffit, avec le théorème de l'espérance totale, de calculer l'espérance de $E[l(Y, f^*(X))|X = x]$. Mais on connaît la loi de X qui est discrète et suit une loi binomiale de paramètres $n_X = 20$ et $p_X = 0.2$. Ainsi, ce calcul d'espérance est une simple somme.

$$\begin{aligned} R^* &= \sum_{x=0}^{n_X} P(X = x) E[l(Y, f^*(X))|X = x] \\ &= \sum_{x=0}^{n_X} \binom{n_X}{x} p_X^x (1 - p_X)^{n_X - x} n_Y(x)/4 \\ &= \sum_{x=0}^{20} \binom{20}{x} (0.2)^x (0.8)^{20-x} 3^x/4 \end{aligned} \quad (3)$$

Et on calcule cette somme numériquement pour arriver au résultat (c'est ce que fait la fonction `compute_bayes_risk()` dans la solution du tp).

2 ESTIMATEURS ET ESPÉRANCES

2.1 1

On utilise la linéarité de l'espérance.

$$\begin{aligned} E[S_n] &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X] \\ &= E[X] \end{aligned} \quad (4)$$

Un exemple de simulation est donné dans la solution de l'exercice 1 du tp 1.

2.2 2 : apprentissage supervisé

Voir `lecture_notes.pdf` section 3.1.8.