

FTML Exercices 2

Pour le 9 mars 2023

TABLE DES MATIÈRES

1	Ordinary least squares	1
1.0.1	Enoncé	1
2	Expected value as a minimization	1
2.0.1	Enoncé	1

1 ORDINARY LEAST SQUARES

1.0.1 Enoncé

On veut étudier quelques propriétés de la fonction objectif du problème OLS. Les question 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment.

Soit n et $d \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $X \in \mathbb{R}^{n,d}$, et $Y \in \mathbb{R}^n$. Calculer le gradient de

$$g = \begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \|X\theta - Y\|^2 \end{cases}$$

2) On veut montrer que la fonction g est convexe. Il y a de nombreuses méthodes pour cela mais ici utiliser les étapes suivantes :

- montrer que si $r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors $f \circ r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.
- montrer que toute norme sur \mathbb{R}^n est convexe.
- montrer que si $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe croissante et $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors $f = w \circ a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.
- conclure.

2 EXPECTED VALUE AS A MINIMIZATION

2.0.1 Enoncé

Soit X une variable aléatoire réelle ayant un moment d'ordre 2. Montrer que son espérance $E(X)$ est la quantité minimisant la fonction de variable réelle $t \mapsto E((X - t)^2)$