

FTML Exercices 4

Pour le 7 avril 2023

TABLE DES MATIÈRES

1	Convexité	1
2	Regression logistique	1

1 CONVEXITÉ

- Connaître les définitions de la section 2.3.1 de lecture_notes.pdf et la proposition 8 de la section 2.3.8.
- Essayer de prouver les exemples de propriétés indiquées dans le paragraphe **Examples**.

Pour certains, nous avons déjà vu les solutions dans les exercices 2. Pour certaines propriétés, c'est plus simple en considérant les dérivées ou les gradients (proposition 8 de la section 2.3.2)

2 REGRESSION LOGISTIQUE

We consider the logistic regression problem, in the following setting :

- $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$
- $\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$
- Logistic loss :

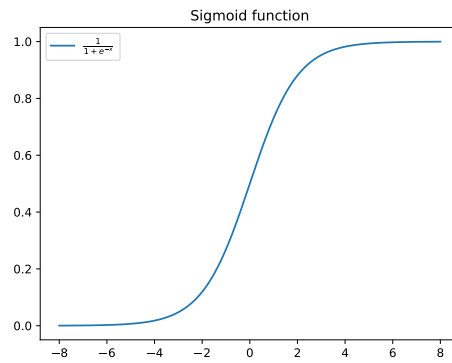
$$l(\hat{y}, y) = \log(1 + e^{-\hat{y}y}) \quad (1)$$

We also define the following function :

Definition 1. Sigmoid function

$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$



1] Show that σ is differentiable and that

$$\forall z, \sigma'(z) = \sigma(z)\sigma(-z) \quad (3)$$

2] Show that $l(\hat{y}, y)$ is strictly convex in its first argument, which means for fixed y , $\hat{y} \mapsto l(\hat{y}, y)$ is strictly convex. Using properties that relate convexity and the derivative of a function, and using the sigmoid function will be helpful.

3] Without regularization, the empirical risk writes :

$$R_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(x_i^T \theta, y_i) \quad (4)$$

— Show that $\theta \mapsto R_n(\theta)$ is convex

— Compute the gradient $\nabla_{\theta} R_n(\theta)$ of the empirical risk $R_n(\theta)$ in this setting.