

# FTML Exercices 2

Pour le 9 mars 2023

## TABLE DES MATIÈRES

1	Ordinary least squares	1
1.0.1	Enoncé	1
2	Expected value as a minimization	1
2.0.1	Enoncé	1

## 1 ORDINARY LEAST SQUARES

### 1.0.1 Enoncé

On veut étudier quelques propriétés de la fonction objectif du problème OLS. Les question 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment.

Soit  $n$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ .

1) Soit  $X \in \mathbb{R}^{n,d}$ , et  $y \in \mathbb{R}^n$ . Calculer le gradient de

$$g = \begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \|X\theta - y\|^2 \end{cases}$$

2) On veut montrer que la fonction  $g$  est convexe. Il y a de nombreuses méthodes pour cela mais ici utiliser les étapes suivantes :

- montrer que si  $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  est linéaire et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, alors  $f \circ s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe.
- montrer que toute norme sur  $\mathbb{R}^n$  est convexe.
- montrer que si  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe croissante et  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, alors  $u = w \circ a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe.
- montrer que si  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, alors si  $\beta \in \mathbb{R}^n$ , l'application  $f : x \mapsto u(x + \beta)$  est convexe.
- conclure.

## 2 EXPECTED VALUE AS A MINIMIZATION

### 2.0.1 Enoncé

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ayant un moment d'ordre 2. Montrer que son espérance  $E(X)$  est la quantité minimisant la fonction de variable réelle  $t \mapsto E((X - t)^2)$