

Exercices 1

TABLE DES MATIÈRES

1	Probabilités et statistiques	1
1.1	P1	1
1.1.1	Enoncé	1
1.2	P2	1
1.2.1	Enoncé	1
1.3	P3	2
1.3.1	Enoncé	2
2	Calcul différentiel	2
2.1	C1	2
2.1.1	Enoncé	2
2.2	C2 : Ordinary least squares	2
2.2.1	Enoncé	2

1 PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

1.1 P1

1.1.1 Enoncé

Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires réelles suivantes.

- X_1 de loi uniforme sur $[0, 1]$.
- X_2 de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1.2 P2

1.2.1 Enoncé

Calculer l'espérance et la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire suivant

$$Y = (Y_1, Y_2) \quad (1)$$

où

- Y_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p
- Y_2 suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
- On suppose Y_1 et Y_2 indépendantes.

1.3 P3

1.3.1 Enoncé

Calculer l'espérance et la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire suivant

$$Z = (Z_1, Z_2) \quad (2)$$

où

- Z_1 suit une loi uniforme sur $[1, 2]$
- $Z_2 = Z_1^2$.

2 CALCUL DIFFÉRENTIEL

2.1 C1

2.1.1 Enoncé

Calculer le gradient et la Hessienne en tout point des applications suivantes.

$$f_1 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 3 \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + \sin y \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 \sin y \end{cases}$$

$$f_4 = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x^2 y (z + 2) \end{cases}$$

2.2 C2 : Ordinary least squares

2.2.1 Enoncé

1) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Calculer le gradient de

$$f = \begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

2) Soit $X \in \mathbb{R}^{n,d}$, et $Y \in \mathbb{R}^n$. En utilisant la question précédente, calculer le gradient de

$$g = \begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \|X\theta - Y\|^2 \end{cases}$$

C'est la fonction objectif du problème OLS.