Exercices 1 solutions

TABLE DES MATIÈRES

1 PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

1.1 P1

1.1.1 *Enoncé*

Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires réelles suivantes.

- X_1 de loi uniforme sur $[0, 1]$.
- X_2 de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1.1.2 *Solution*

X_1 et X_2 sont des variables à densité. Pour tout x dans leur support, $p_{X_1}(x) = 1$, et $p_{X_2}(x) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} E[X_1] &= \int_0^1 x p_{X_1}(x) dx \\ &= \int_0^1 x dx \\ &= [\frac{x^2}{2}]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} E[X_2] &= \int_{-1}^{1} x p_{X_2}(x) dx \\ &= \int_{-1}^{1} x \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} [\frac{x^2}{2}]_{-1}^{1} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

On dit que X_2 est **centrée.**

1.2 P2

1.2.1 *Enoncé*

Calculer l'espérance et la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire suivant

$$Y = (Y_1, Y_2) \tag{3}$$

où

- Y_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p
- Y_2 suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
- On suppose Y_1 et Y_2 indépendantes.

1.2.2 *Solution*

Puisque Y_1 et Y_2 sont indépendantes, on sait que les termes non-diagonaux sont nuls. Il suffit donc de calculer les variances de Y_1 et Y_2.

On sait que la variance de Y_2 est σ^2 car c'est une loi normale (https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale).

Calculons la variance de Y_1 (https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Bernoulli). Son espérance vaut $E[Y_1] = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$. Pour calculer la variance on utilise le théorème de transfert.

Si X est une variable réelle à densité p_X, alors sous certaines hypothèses (qui sont vérifiées ici)

$$E[f(X)] = \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) p_X(x) dx \tag{4}$$

Appliqué à Y_2, cela donne :

$$\begin{aligned} Var[Y_1] &= E[(Y_1 - E[Y_1])^2] \\ &= (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p) \\ &= p(1-p)(p+1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned} \tag{5}$$

Finalement

$$Var(Y) = \begin{pmatrix} p(1-p) & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

1.3 P3

1.3.1 *Enoncé*

Calculer l'espérance et la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire suivant

$$Z = (Z_1, Z_2) \tag{6}$$

où

— Z_1 suit une loi uniforme sur $[1, 2]$

— $Z_2 = Z_1^2$.

1.3.2 *Solution*

On a $E[Z_1] = \frac{3}{2}$. On utilise à nouveau le théorème de transfert pour $E[Z_2]$.

$$\begin{aligned} E[Z_2] &= \int_1^2 x^2 p_{X_1}(x) dx \\ &= [\frac{x^3}{3}]_1^2 \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} Cov(Z_1, Z_2) &= \int_1^2 (x - \frac{3}{2})(x^2 - \frac{7}{3}) dx \\ &= \int_1^2 x^3 - \frac{7}{3}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2} dx \\ &= [\frac{x^4}{4}]_1^2 - \frac{7}{3}[\frac{x^2}{2}]_1^2 - \frac{3}{2}[\frac{x^3}{3}]_1^2 + \frac{7}{2} \\ &= \frac{15}{4} - \frac{7}{3} \times \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{7}{3} + \frac{7}{2} \\ &= \frac{15}{4} - 7 + \frac{7}{2} \\ &= \frac{15}{4} - \frac{14}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Var(Z_1) &= \int_1^2 (x - \frac{3}{2})^2 dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2 du \\ &= [\frac{u^3}{3}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
Var(Z_2) &= \int_1^2 (x^2 - \frac{7}{3})^2 dx \\
&= \int_1^2 x^4 - \frac{14}{3}x^2 + \frac{49}{9} dx \\
&= [\frac{x^5}{5}]_1^2 - \frac{14}{3}[\frac{x^3}{3}]_1^2 + \frac{49}{9} \\
&= \frac{31}{5} - \frac{14}{3}\frac{7}{3} + \frac{49}{9} \\
&= \frac{31}{5} - \frac{98}{9} + \frac{49}{9} \\
&= \frac{31}{5} - \frac{49}{9} \\
&= \frac{31 \times 9 - 49 \times 5}{45} \\
&= \frac{34}{45}
\end{aligned} \tag{10}$$

As the variance matrix is symmetric, we have :

$$Var(Z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{34}{45} \end{pmatrix}$$

2 CALCUL DIFFÉRENTIEL

2.1 C1

2.1.1 *Enoncé*

Calculer le gradient et la Hessienne en tout point des applications suivantes.

$$f_1 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 3 \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + \sin y \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 \sin y \end{cases}$$

$$f_4 = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x^2 y(z + 2) \end{cases}$$

2.1.2 *Solution*

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla_{(x,y)} f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{(x,y)} f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla_{(x,y)} f_2 = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ \cos y \end{pmatrix}$$

$$H_{(x,y)} f_2 = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla_{(x,y)} f_3 = \begin{pmatrix} 3x^2 \sin y \\ x^3 \cos y \end{pmatrix}$$

$$H_{(x,y)} f_3 = \begin{pmatrix} 6x \sin y & 3x^2 \cos y \\ 3x^2 \cos y & -x^3 \sin y \end{pmatrix}$$

2.2 C2 : Ordinary least squares

2.2.1 *Enoncé*

1) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Calculer le gradient de

$$f = \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ||x||^2 \end{cases}$$

où $||.||$ est la norme euclidienne.

2) Soit $X \in \mathbb{R}^{n,d}$, et $Y \in \mathbb{R}^n$. En utilisant la question précédente, calculer le gradient de

$$g = \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto ||X\theta - Y||^2 \end{cases}$$

C'est la fonction objectif du problème OLS.

2.2.2 *Solution*

1) Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $h \in \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} ||x+h||^2 &= \langle x+h, x+h \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle \\ &= ||x||^2 + \langle 2x, h \rangle + ||h||^2 \\ &= ||x||^2 + \langle 2x, h \rangle + o(h) \end{aligned} \tag{11}$$

Ainsi

$$\nabla_x f = 2x \tag{12}$$

2) Si on considère l'application r :

$$r = \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \\ \theta \mapsto X\theta - Y \end{cases}$$

alors $g = f \circ r$. Comme tout est différentiable, on en déduit qu'en notant L les jacobiennes :

$$L_\theta g = L_{X\theta - Y} f L_\theta r \tag{13}$$

ou bien on considérant le gradient (qui est la transposée de la jacobienne quand l'application est à valeurs dans $\mathbb{R}$) :

$$\nabla_\theta g = (L_\theta r)^T \nabla_{X\theta - Y} f \tag{14}$$

Or $L_\theta r = X$ (on le voit par calcul direct). Donc

$$\nabla_\theta g = 2X^T (X\theta - Y) \tag{15}$$