Partie 3 :

Question 1 :

$$R_n(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \|y - X\hat{\theta}\|_2^2$$

Etant donné $y = X\theta^* + \varepsilon$ et $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^{-T} y$

Nous substituons y dans le risque empirique

$$R_n(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \|X\theta^* + \varepsilon - X\hat{\theta}\|_2^2$$

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T (X\theta^* + \varepsilon) = \theta^* + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

$$\Rightarrow X\hat{\theta} = X\theta^* + X(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

Ainsi, $R_n(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \|X\theta^* + \varepsilon - (X\theta^* + X(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon\|_2^2$

$$= \frac{1}{n} \|\varepsilon - X(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon\|_2^2$$

$$= \frac{1}{n} \|(I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)\varepsilon\|_2^2$$

En prenant sur ε :

$$E(R_n(\hat{\theta})) = E_\varepsilon\left(\frac{1}{n} \|(I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)\varepsilon\|_2^2\right)$$

1 2 3 4

Question 2 :

La trace d'une matrice A^TA est la somme de ses éléments diagonaux :

$$tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{n} (A^TA)_{ii}$$

$$(A^TA)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} (A^T)_{ij} A_{ji} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} A_{ji} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2$$

Ainsi

$$tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2 = \sum_{(i,j)\in[1;n]^2} A_{ij}^2$$

Question 3 :

Montrons que $E_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\|A\varepsilon\|^2\right) = \frac{\sigma^2}{n} tr(A^TA)$

Notons que : $\|A\varepsilon\|^2 = (A\varepsilon)^T(A\varepsilon) = \varepsilon^TA^TA\varepsilon$

En prenant l'espérance sur ε :

$$E_\varepsilon(\|A\varepsilon\|^2) = E_\varepsilon(\varepsilon^TA^TA\varepsilon)$$

Puisque ε est un bruit gaussien centré avec une matrice de covariance $\sigma^2 I_n$

$$E_\varepsilon(\varepsilon^TA^TA\varepsilon) = \sigma^2 tr(A^TA)$$

Ainsi,

$$E_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\|A\varepsilon\|^2\right) = \frac{1}{n}\sigma^2 tr(A^TA)$$

Question 4 :

Montrons que $A^T A = A$, pour $A = I_n - X(X^T X)^{-1} X^T$

A est symétrique

$\rightarrow A^T = (I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)^T = I_n - X(X^T X)^{-1} X^T = A$

Donc

$$A^T A = AA = (I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)(I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)$$

$$= I_n - 2X(X^T X)^{-1} X^T + X(X^T X)^{-1} X^T$$

Sachant que $X^T X (X^T X)^{-1} = Id$

$$A^T A = I_n - X(X^T X)^{-1} X^T = A$$

Question 5 :

En utilisant les q° 1, 3 et 4 :

$$E(R_n(\hat{\theta})) = E_\varepsilon\left(\frac{1}{n} \| (I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)\varepsilon \|_2^2\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} tr\left((I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)^T (I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} tr(I_n - X(X^T X)^{-1} X^T)$$

Sachant que $tr(I_n) = n$ et $tr(X(X^T X)^{-1} X^T) = d$

$$E(R_n(\hat{\theta})) = \frac{n-d}{n} \sigma^2$$

Dossier

Chap

Compte

Montant ou Solde

Date

NOTE DE CONTRÔLE

Collaborateur | Chef de Mission

1 2 3 4

Question 6 :

D'après le résultat de la q°5 :

$$E\left(R_n(\hat{\theta})\right) = \frac{n-d}{n} \cdot \sigma^2$$

Donc :

$$\Rightarrow \quad E\left(\frac{\|y - X\hat{\theta}\|_2^2}{n-d}\right) = \frac{E\left(\|y - X\hat{\theta}\|_2^2\right)}{n-d} = \frac{n}{n-d} \times \frac{n-d}{n}\sigma^2$$

$$= \sigma^2$$