Partie 2 :

Question 0 :

Prenons la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$$

$f'(x) = 3x^2$ et pour $x_0 = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

Or, $f(x_0) = 0$ n'est pas un extremum local.

Question 1 partie (M) :

Soit $Y|X=x \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f_{Y|X=x}(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad , y \geqslant 0$$

L'espérance conditionnelle est :

$$E(Y|X=x) = \int_0^{+\infty} y \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda}$$

Or la médiane qui minimise la perte absolue est :

$$\text{Médiane}(Y|X=x) = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$\frac{1}{\lambda} \neq \frac{\ln(2)}{\lambda}$, donc $f_{P^*_{absolute}} \neq f_{P^*_{squared}}$

Question 2 :

Nous devons trouver $f_{P^*_{absolute}}$ qui minimise la perte absolue espérée :

$$f_{P^*_{absolute}}(x) = \arg\min_{z \in \mathbb{R}} E(|Y-z| \mid X=x)$$

$$= \arg\min_{z \in \mathbb{R}} g(z)$$

Trouvons le minimum de $g(z)$

$$\frac{d\, g(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{+\infty} |y-z| \, p_{Y|X=x}(y) \, dy$$

$$\frac{d}{dz} |y-z| = \begin{cases} -1 & \text{si } y < z \\ 1 & \text{si } y > z \end{cases}$$

Dossier

Chap

Compte

Montant ou Solde

Date

NOTE DE CONTRÔLE

Collaborateur | Chef de Mission

Ainsi:

$$\frac{d}{dz} g(z) = \int_{-\infty}^{z} (-1)\, p_{Y|X=x}(y)\, dy + \int_{z}^{+\infty} p_{Y|X=x}(y)\, dy$$

En mettant l'égalité à zéro on obtient:

$$\int_{-\infty}^{z} p_{Y|X=x}(y)\, dy = \int_{z}^{+\infty} p_{Y|X=x}(y)\, dy$$

Cela implique que z doit être la médiane de la distribution $p_{Y|X=x}(y)$:

$$\int_{-\infty}^{z} p_{Y|X=x}(y)\, dy = \frac{1}{2}$$

Donc $f_{\text{absolute}}(x) = \text{Médiane}(Y|X=x)$