1. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

2. 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

3. 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

4. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

5. 设$\alpha(x)=x^3-3x+2$，$\beta(x)=c(x-1)^n$，试确定常数c和n的值，使得$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

6. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<b$，试证：在区间 (a,b) 内至少存在一点ξ，使得$t_1 f(x_1)+t_2 f(x_2)=(t_1+t_2)f(\xi)$，$t_1>0$，$t_2>0$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{5n+3}\sin\frac{2}{n}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)^n$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 3x+2x}{\sin 2x-3x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

13. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}(\sin 3x)^{\frac{1}{1+3\ln x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x-x^{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(3x-\sqrt{9x^{2}-12x+1}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$.

20. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(-1)^{n}+3^{n}}{2^{n}+3^{n}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{\frac{2}{x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+3x)}{\arctan(x^{2})}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{3}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{\sin x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{x-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

29. 已知 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析: 根据单调有界原理先证明该数列的极限存在.

1) 先用数学归纳法证明单调性:

a) 当 $n=1$ 时，$x_2=\sqrt{2+x_1}=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=x_1$，显然 $x_2>x_1$ 成立;

b) 不妨设 $n=k$ 时，$x_{k+1}>x_k$ 成立，则

$$x_{k+2}=\sqrt{2+x_{k+1}}>\sqrt{2+x_k}=x_{k+1},$$

即 $n=k+1$，仍有 $x_{k+2}>x_{k+1}$ 成立; 因此该数列单调递增.

2) 再用数学归纳法证明有界性:

a) 当 $n=1$ 时，$x_1=\sqrt{2}<5$ 显然成立;

b) 不妨设 $n=k$ 时，$x_k<5$ 成立，则

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+5}<5,$$

即 $n=k+1$，仍有 $x_{k+1}<5$ 成立; 因此该数列有上界.

综合 1)和 2)知，该数列的极限存在，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 两边同时取极限，则有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_n}=\sqrt{2+\lim_{n\to\infty}x_n},$$

即 $a=\sqrt{2+a}$，截得 $a=2$ 或 $a=-1$(舍).