附 录

2007—2008 学年第一学期线性代数期末考试试卷

一、**填空题**(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上)

(1)三阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = ________.

(2)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,则 $|\boldsymbol{AB}|$ = ________.

(3)已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ = ________.

(4)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ = ________.

(5)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & a & 2 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$,且线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解,则 a = ________.

二、**选择题**(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中括号内)

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则(　　).

A. 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

B. 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

C. 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

D. 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$,而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于(　　).

A. a　　B. $\dfrac{1}{a}$　　C. a^{n-1}　　D. a^n

(3)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则必有(　　).

A. $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　B. $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$　　C. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(4)n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

A. 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量,它不能由其余向量线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能由其余向量线性表示

(5)已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解必是(　　).

A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

三、**计算题**(本题共 3 小题,每小题 10 分,满分 30 分,要求写出演算过程或步骤)

1. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 设三阶方阵 A 和 B 满足关系式 $AB=2A+B$，且 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $(A-E)^{-1}$.

3. 求线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-0.5 \end{cases}$$

四、解答题(本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分，要求写出演算过程或步骤)

1. 设 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,3)^T$，$\alpha_3=(1,3,t)^T$.

(1)当 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关?

(2)当 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关?

(3)当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将 α_3 表示为 α_1 和 α_2 的线性组合.

2. λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

(1)有唯一解? (2)无解? (3)有无穷多个解? 并求通解.

五、证明题(本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分)

1. 设 $b_1=3a_1+2a_2$，$b_2=a_2-a_3$，$b_3=4a_3-5a_1$，且向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，证明：向量组 b_1,b_2,b_3 也线性无关.

2. 设 $A=E-\xi\xi^T$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，ξ 是 n 维非零列向量，ξ^T 是 ξ 的转置，证明：$A^2=A$ 的充分必要条件是 $\xi^T\xi=1$.

2007—2008 学年第一学期线性代数期末考试试卷标准答案

一、(1)48； (2)2； (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$； (5)$-1$.

二、(1)B (2)C (3)C (4)D (5)B

三、

1. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(3 分)

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(6 分)

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(9 分)

$$=(-1)^{n-1}(n-1)$$ (10分)

2. 原方程$\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$ (5分)

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$ (10分)

3. 对方程组的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ (5分)

由此得齐次线性方程组(导出组)的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$$ (7分)

非齐次线性方程组的特解为

$$\boldsymbol{\xi}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}$$ (9分)

于是所求方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\xi}\quad(\text{其中 }k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数})$$ (10分)

四、1. 设有数组 k_1,k_2,k_3，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

$$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ (1分)

于是有方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+3k_3=0\\k_1+3k_2+tk_3=0\end{cases}$$ (2分)

其系数矩阵行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5$$ (3分)

(1)当 $t\neq5$ 时，$D\neq0$，方程组只有零解：$k_1=k_2=k_3=0$. 此时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. (5分)

(2)当 $t=5$ 时，$D=0$，方程组有非零解，即存在不全为 0 的常数 k_1,k_2,k_3，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$. 此时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. (7分)

(3)当 $t=5$ 时，对方程组的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

令 $k_3=1$，解得 $k_1=1,k_2=-2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$. (10分)

2. (1) $\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2\neq0$，即 $\lambda\neq1,-2$ 时，方程组有唯一解. (4分)

(2)当 $\lambda=-2$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&4\\0&-3&3&6\\0&0&0&3\end{array}\right)$$ (6分)

方程组无解.

(3)当 $\lambda=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

方程组有无穷多个解，通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$ (10分)

五、1. 证明 因为

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{pmatrix}$$ (4分)

且 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关 (6分)

又

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$　　　　(8 分)

故向量组 b_1, b_2, b_3 也线性无关.　　　　(10 分)

2. 证明　$A^2 = (E-\xi\xi^T)(E-\xi\xi^T) = E - 2\xi\xi^T + \xi\xi^T\xi\xi^T$

$= E - 2\xi\xi^T + (\xi^T\xi)\xi\xi^T$　　　　(2 分)

$A^2 = A \Leftrightarrow E - 2\xi\xi^T + (\xi^T\xi)\xi\xi^T = E - \xi\xi^T \Leftrightarrow (\xi^T\xi - 1)\xi\xi^T = O$　　　　(4 分)

由最后的等式立即得知,$\xi^T\xi = 1$ 是 $A^2 = A$ 的充分条件.　　　　(6 分)

再对最后的等式两边依次左乘 ξ^T 右乘 ξ,得到 $(\xi^T\xi - 1)(\xi^T\xi)^2 = O$,由于 ξ 是非零向量,因此 $\xi^T\xi \neq O$,所以 $\xi^T\xi = 1$ 又是 $A^2 = A$ 的必要条件.　　　　(10 分)