

高等数学(上)模拟试题 E

一. 计算题(每小题 5 分, 共 90 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} \cos t dt \right)^2}{x^4}.$$

$$2. \int_{-2}^2 \frac{x^2 - x^5 \cos x}{2 + \sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$3. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx$$

$$4. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

$$5. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$6. \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

7. 给出 $I_n = \int \tan^n x dx$ 的递推公式.

8. 求曲线 $y = e^x, x = 1, x = 0$ 和 $y = 0$ 在第一象限所围成的图形的面积, 以及该图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得的两个旋转体的体积.

9. 计算由 $y = x^2$ 和 $y = x$ 两曲线在第一象限所围成的图形的面积, 以及该图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所形成的旋转体的体积.

10. 求解微分方程 $(y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0$.

11. 求解微分方程 $(y^2 - 3x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ 满足条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

12.. 求解微分方程 $(x-2) \frac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3$.

13. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = -3y + 8$.

14. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = y + xy^5$.

15. 求解微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$.

16. 求解微分方程 $y'' = (y')^3 + y'$.

17. 求微分方程 $y'' + 6y' + 13y = 0$ 的通解.

18. 求微分方程 $y'' + y = e^x + \sin x$ 的通解.

二. 证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

19. 证明: $\int_x^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_1^x \frac{1}{1+x^2} dx \quad (x > 0)$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 满足 $f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx$, 其中 $k > 1$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.