

高等数学(上)模拟试题 A

一. 填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 已知函数 $y = \sin[\sin(x^2)]$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.
2. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 的垂直渐近线是_____.
3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = x$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.
4. 已知 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x) \frac{\cos x}{x} dx =$ _____.
5. 计算 $\int_{-0.5}^{0.5} \frac{\arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____.

二. 选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ ($k > 0$) 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为()
A. 3 B. 2 C. 1 D. 0
2. 设 $f(x) = \frac{1+e^{-x}}{2+e^{-x}}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的()
A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点
3. 下列结论不一定成立的是()
A. 若 $f(x) \geq 0$, 且在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$;
B. 若 $[c, d] \subseteq [a, b]$, 则 $\int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$;

C. 若可积函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x tf(t)dt$ 也为奇函数;

D. 若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则对 $\forall a \in R$ 都有 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则条件① $f(a) = f(b)$ 是条件②存在

一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 的()

- A. 充分必要条件 B. 充分非必要条件
C. 必要非充分条件 D. 非充分非必要条件

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$ 的值是()

- A. 1 B. e C. $e^{\cot a}$ D. $e^{\tan a}$

三. 计算题(每小题 7 分, 共 56 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

2. 已知 $f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a - \sin^2 x}{a} \right)^a$, 求 $f'(x)$.

3. 计算 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$.

4. 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$.

5. $\int_{e^{-1}}^e |\ln x| dx$.

6. 求函数 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的极值点与拐点.

7. 计算 $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx$.

8. 求由参数方程 $\begin{cases} x = a(1 - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 确定的曲线在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

四. 证明题(每小题 7 分, 共 14 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 均存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

2. 设抛物线 $y = 4 - x^2$ 上有两点 $A(-1, 3)$ 和 $B(3, -5)$, 试在弧 AB 上求一点 $P(x, y)$, 使得 $\triangle PAB$ 的面积最大.