

2014 高等数学(上)测试样题 F

一. 填空选择题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设 $\begin{cases} x = \int_0^t \sin u^2 du \\ y = \int_0^{t^2} \sin u du \end{cases} (t > 0)$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

2. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\cos \frac{1}{n} + \cos \frac{2}{n} + \cdots + \cos \frac{n-1}{n} + \cos 1 \right) =$ _____.

3. 反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ 的敛散性为_____.

4. 积分 $\int_{-1}^1 (x + \tan^2 x) \sin x dx =$ _____.

5. 曲线 $y = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$ 的垂直渐近线为_____;水平渐近线为_____.

6. 已知 $f(x) = x + \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) =$ _____.

7. 已知 $f(x) = x^2 + x \int_0^1 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$, 则 $f(x) =$ _____.

8. 已知 $\int_0^y e^t \sin t dt + \int_0^{x^2} \cos t dt = 1$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

9. 下列积分中收敛的是()

A. $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ B. $\int_{\frac{1}{100}}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ C. $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$ D. $\int_{100}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

10. 下列说法中正确的是()

A. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则有 $\int_a^b f(x) dx = 0$;

B. 若 $f(x)$ 是 (a, b) 上的连续函数, 则有 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;;

C. 若函数 $f'(x_0) = 0$, 则点 x_0 不一定是极值点;

D. 若两函数求导之后的函数相同, 则这两个函数相同.

三. 计算证明题(每小题 7 分, 共 70 分)

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x \arctan t dt \right)^2}{x^2}$.

12. 计算 $\int x \sqrt{x-1} dx$.

13. 计算 $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$.

14. 计算 $\int_0^1 e^x \cos x dx$.

15. 计算 $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

16. 求函数 $f(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 的极值以及单调区间.

17. 证明 $\int_1^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2} dx$.

18. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 可导, 且 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(t) dt = f(0)$, 证明至少存在一点

$\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

19. 求在第一象限内, 由曲线 $x = y^2$ 和直线 $y = x$ 围成的平面图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

20. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解.