# 高等数学(上)模拟试题 B

**一. 填空题(每小题 3 分，共 30 分)**

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2(e^x - 1)} =$ ____________.

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0+} x^x =$ ______________.

3. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x) - f(a-2x)}{x} =$ __________.

4. 函数 $y = (\sin x)^{\cos x}$，则 $\dfrac{dy}{dx} =$ _________________.

5. 函数 $y = 2x - \ln x$ 的单调递增区间是___________.

6. 设 $\sin 2x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)dx =$ __________.

7. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x - x\right)^{\frac{1}{x^2}} =$ ___________.

8. 计算 $\int_{-1}^{1} x(1+x^{2005})(e^x - e^{-x})dx =$ ____________.

9. 已知函数 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{a}{1+x^2}dx = \pi$，则 $a =$ ____________.

10. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x) = x + \int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x) =$ __________.

**二. 计算题(每小题 7 分，共 49 分)**

1. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \sin(xy) = e$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. $\int\dfrac{(x-2)^2}{x(x-1)^2}dx$.

4. 试求 $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ 的递推公式($n$ 为自然数)，并计算 $\int_1^e (\ln x)^3 dx$.

5. 求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=1$ 的解.

6. 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解.

7. 求由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的平面图形的面积以及该图形绕 $y$ 轴旋转所得的旋转体的体积.

**三. 证明题(每小题 7 分，共 21 分)**

1. 设 $x>0$，试证明: $e^{2x}(1-x)<1+x$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0$， $f(0.5)=1$，

试证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

3. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)dx.$$