

高等数学(上)模拟试题 C

一. 填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ _____.

2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x} =$ _____.

3. 设 $\int f(x)dx = \sin x + c$, 则 $\int f^{(4)}(x)dx =$ _____.

4. 计算 $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-1}} dx =$ _____.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos^2 \frac{n\pi}{n} \right) =$ _____.

二. 选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷小量, 则不是无穷小量的是()

A. $\alpha(x) + \beta(x)$ B. $\alpha^2(x) + \beta(x)$ C. $\ln[1 + \alpha(x)\beta(x)]$ D. $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

2. 设 $f(x)$ 在 $U(0, \delta)$ 内连续, 且 $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则点 $x = 0$ 是

$f(x)$ 的()

A. 极大值点 B. 极小值点 C. 不是驻点 D. 是驻点但不是极值点

3. 曲线 $y = 2x + \frac{\ln x}{x-1} + 4$ 的渐近线的条数为()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

4. 设在 $[0, 1]$ 上 $f(x)$ 二阶可导且 $f''(x) > 0$, 则()

A. $f'(0) < f'(1) < [f(1) - f(0)]$ B. $f'(0) < [f(1) - f(0)] < f'(1)$

C. $[f(1) - f(0)] < f'(0) < f'(1)$ D. $f'(1) < f'(0) < [f(1) - f(0)]$

5. 下列积分收敛的是()

A. $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ B. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$ C. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ D. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

三. 计算题(每小题 7 分, 共 49 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos 2x}{x \tan x}$.

2. 计算 $\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx$.

3. 计算 $\int \frac{1-x^4}{x(1+x^4)} dx$.

4. 计算 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

5. 计算 $\int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{\sin x}{1+x^4} + \sqrt{1-x^2} \right) dx$.

6. 在半径为 R 的球内, 求体积最大的内接圆柱体的高.

7. 求由曲线 $x = y^2$ 与 $y = x - 2$ 所围成的平面图形的面积以及该平面图形绕着 y 轴旋转所得的旋转体的体积.

四. 证明题(每小题 7 分, 共 21 分)

1. 设 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 其中 $f(x)$ 在上二阶可导且有 $f(2) = 0$, 试证: 存在 $\xi \in (1, 2)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.

2. 设 $x > 1$, 证明: $(x^2 - 1) \ln x > (x - 1)^2$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可微但无界, 试证明: $f'(x)$ 在 (a, b) 内无界.