

高等数学(上)模拟试题 D

一. 计算题(每小题 5 分, 共 90 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}$.

2. $\int_1^2 x \log_2 x dx$.

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

4. $\int_1^e \sin(\ln x) dx$.

5. $\int_{-2}^0 \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$.

6. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

7. $\int_0^\pi (1 - \sin^3 x) dx$

8. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx$

9. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$

10. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$

11. 给出 $I_n = \int \sec^n x dx$ 的递推公式.

12. 求 $\int_0^2 f(x)dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 \leq x \leq 2 \\ \arctan x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$.

13. 求 $\int_1^4 f(x-2)dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

14. $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}dx$.

15. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

16. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx$

17. 求 $y = \frac{x^2}{2}$ 和 $x^2 + y^2 = 8$ 所围成的平面图形的面积以及该平面图形绕 x 轴旋转

所得的旋转体的体积.

18. 求 $y = x^3$ 和 $x = 2$ 以及 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转, 计算所得的两个旋转体的体积.

二. 证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $\int_{\frac{b+a}{2}}^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} f(a)$,

证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且单调递减, 证明: 对任意的 $a \in [0, 1]$, 都有

$$\int_0^a f(x)dx \geq a \int_0^1 f(x)dx.$$