

# Sistema de control de Filtro Pasa Bajo

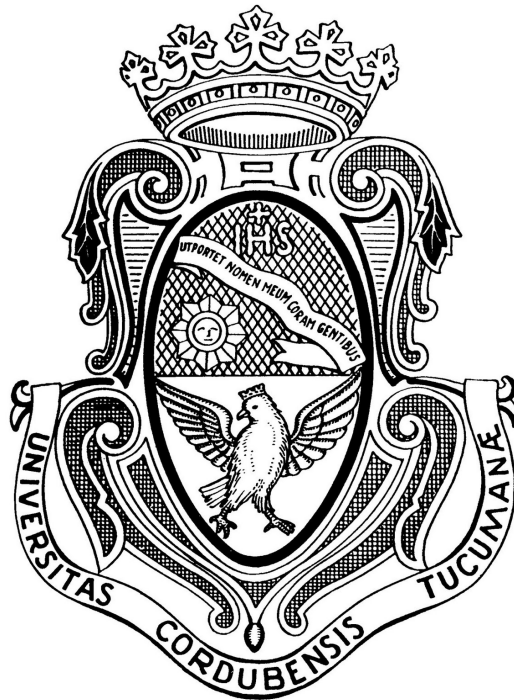
## Sallen Key de 2do Orden

---

Autores:

CORVALAN, Abel

BORGATELLO, Ignacio



<b>1. Definición del problema</b>	<b>3</b>
1.1 Introducción	3
1.2 Principio de funcionamiento del sistema	3
1.3 Descripción de qué se busca controlar y posibles perturbaciones	4
1.4 Forma de medición de la variable de salida	5
1.5 Acción de control	5
1.5.1 Acción de control proporcional	5
1.5.2 Acción de control derivativa	6
1.5.3 Acción de control integral	7
1.6 Variables del sistema con sus unidades de medida	7
1.7 No linealidades involucradas	8
1.8 Nivel de la señal de entrada y salida	8
<b>2. Análisis de la planta</b>	<b>9</b>
2.1 Modelo matemático	9
2.2 Diagrama de bloques	12
2.2.1 Definición	12
2.2.2 Diagrama de bloques del sistema	12
2.3 Función de transferencia	13
2.3.1 Definición	13
2.3.2 Diagrama de flujo de señal y algoritmo de Mason.	13
2.4 Análisis de estabilidad absoluta	18
2.5 Análisis de respuesta temporal	20
2.6 Verificación del modelo matemático a partir de la respuesta temporal	22
2.5 Determinación del tipo de sistema.	25
2.6 Determinación de polos dominantes	28
<b>3. Especificaciones de diseño</b>	<b>30</b>
3.1 Error en estado estable.	30
3.2 Definición del sobrepasamiento máximo.	30
3.3 Definición del tiempo de establecimiento.	31
3.4 Verificación de especificaciones realizables.	31
<b>4. Diseño del controlador.</b>	<b>31</b>
<b>5. Simulación</b>	<b>40</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>7. Bibliografía</b>	<b>45</b>

# 1. Definición del problema

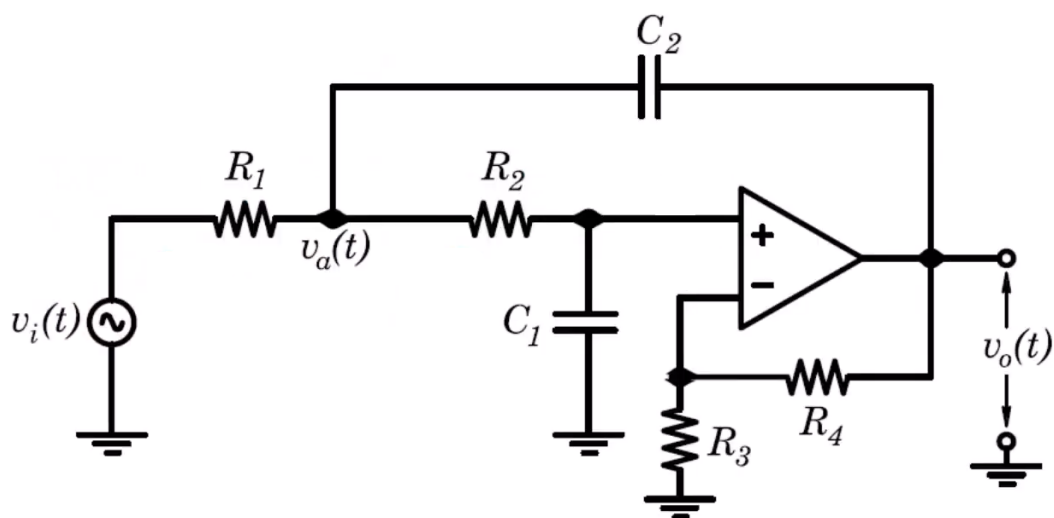
## 1.1 Introducción

La teoría de sistemas de control se centra en el análisis y diseño de componentes que interactúan en un sistema con el fin de lograr un comportamiento deseado. En este enfoque, la realimentación es un concepto clave, que consiste en medir las variables relevantes del sistema y utilizar esa información para controlar su comportamiento.

En cualquier proceso, es fundamental tener control sobre las diferentes variables para cumplir con los requisitos y garantizar condiciones óptimas de calidad durante y después de la utilización del sistema. Las variaciones pueden tener un impacto en la calidad, productividad y tiempo de ejecución. Solo a través de un sistema de control confiable es posible asegurar la precisión, velocidad y confiabilidad necesarias.

## 1.2 Principio de funcionamiento del sistema

Un filtro Sallen Key activo de segundo orden es un dispositivo diseñado para permitir exclusivamente el paso de frecuencias altas o bajas. Para este caso se controlará un filtro Sallen Key pasa bajo. Este tipo de filtro se caracteriza por su flexibilidad en cuanto a la tolerancia de los componentes utilizados. Sin embargo, para lograr un factor Q alto, se requieren componentes con valores extremos. El circuito está compuesto por dos condensadores, cuatro resistencias y un amplificador operacional. La configuración del circuit se muestra en la siguiente figura:



En el caso de frecuencias muy altas, los condensadores en el filtro Sallen Key actúan como cortocircuitos, lo que resulta en la conexión a tierra del terminal positivo del amplificador operacional. Debido a la realimentación positiva, el terminal negativo y la salida tendrán la misma tensión que el terminal positivo.

Por otro lado, en el caso de bajas frecuencias o señales de tensión continua, los capacitores se comportan como circuitos abiertos, lo que significa que las dos resistencias están conectadas en serie. Como no hay circulación de corriente a través de ellas, la tensión de entrada también estará presente en el terminal positivo del amplificador operacional y en su salida.

Para señales de muy altas frecuencias, la tensión de salida será cero, ya que el filtro atenuará estas frecuencias. En cambio, para frecuencias muy bajas, la salida del filtro no presenta atenuación significativa.

### 1.3 Descripción de qué se busca controlar y posibles perturbaciones

El objetivo principal del sistema es lograr que la señal de salida del filtro se mantenga en un valor de tensión específico. Además, el sistema debe ser capaz de compensar perturbaciones externas, como las variaciones en la red eléctrica de alimentación, para restablecer el voltaje deseado. Para lograr esto, es necesario implementar un sistema de realimentación que permita conocer el valor actual de la salida, compararlo con el valor deseado y tomar acciones en base a esa comparación.

Por lo tanto, deberemos contar con los siguientes puntos de medición de la magnitud física voltaje:

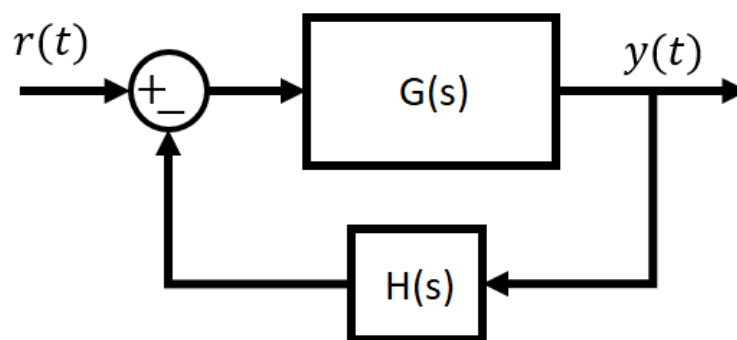
Variable de entrada: Voltaje de set [Volts]

Variable de salida: Voltaje de salida [Volts]

Al tener estos puntos de medición, se podrá implementar un sistema de control que funcione en base a la comparación entre el valor actual y el valor deseado, con el fin de mantener el voltaje de salida en el nivel requerido.

## 1.4 Forma de medición de la variable de salida

La señal de error se obtendrá al relacionar la señal de salida con la señal de entrada. Para lograr esto, se utilizará un amplificador restador inversor que permitirá comparar ambas variables mencionadas. La conexión de la señal de salida al comparador se realizará en el lazo de realimentación, que tendrá una función de transferencia unitaria, ya que no se requerirá acondicionar la magnitud para su operación. El modelo de realimentación de nuestro sistema se muestra en la figura a continuación:



Donde tenemos:

- $G(s)$  es la función de transferencia de la planta. Para nuestro caso  $G(s)$  será un sistema de segundo orden.
- $H(s)$  es la función de transferencia del lazo de realimentación. En este caso  $H(s)$  será la función transferencia unitaria.

## 1.5 Acción de control

La teoría de control nos brinda tres tipos de compensadores. Estos son elementos que se le agregan al sistema original para mejorar sus características de funcionamiento con el objetivo de satisfacer las especificaciones de diseño tanto en régimen transitorio como en estado estable.

### 1.5.1 Acción de control proporcional

Una acción de control es proporcional cuando la salida  $v(t)$  del mismo, es proporcional a la señal de error  $e(t)$ .

$$v(t) = K_p e(t)$$

Internamente la acción proporcional multiplica la señal de error por una constante  $K_p$  que determina la cantidad de acción proporcional que tendrá el controlador.

Esta acción de control intenta minimizar el error del sistema. Cuando el error es grande, la acción de control es grande y tiende a minimizar este error.

Aumentar la acción proporcional  $K_p$  tiene los siguientes efectos:

- a. Aumenta la velocidad de respuesta del sistema.
- b. Disminuye el error del sistema en régimen permanente.
- c. Aumenta la inestabilidad del sistema.

Para pequeñas variaciones de ganancia, aunque se logra un comportamiento aceptable en régimen transitorio, la respuesta de estado estable lleva implícita una magnitud elevada de error. Al tratar de corregir este problema, los incrementos de ganancia mejorarán las características de respuesta en estado estable en detrimento de la respuesta transitoria. Por lo anterior, el control P suele implementarse junto con algún otro elemento controlador.

### 1.5.2 Acción de control derivativa

Un control es de tipo derivativo cuando la salida del controlador  $v(t)$  es proporcional a la derivada del error  $e(t)$ .

$$v(t) = K_d \frac{\partial e(t)}{\partial t}$$

Donde  $K_d$  es la ganancia del control derivativo. La constante  $K_d$  puede escribirse en términos de  $K_p$ .

$$K_d = K_p T_d$$

Donde  $T_d$  es un factor de proporcionalidad ajustable que indica el tiempo de derivación.

La derivada del error es otra forma de llamar a la "velocidad" del error. La acción derivativa es anticipativa, es decir, la acción del controlador se adelanta frente a una tendencia de error (expresado en forma derivativa). Para que el control derivativo llegue a ser de utilidad debe actuar junto con otro tipo de acción de control, ya que en forma aislada, este no responde a errores de estado estable.

Aumentar la constante de control derivativa  $K_d$  tiene los siguientes efectos:

- a. Aumenta la estabilidad del sistema controlado.
- b. Disminuye la velocidad del sistema.
- c. El error en régimen permanente permanecerá igual.

Esta acción de control servirá, por lo tanto, para estabilizar una respuesta con característica de oscilación.

### 1.5.3 Acción de control integral

Un control es de tipo integral cuando la salida del controlador  $v(t)$  es proporcional a la integral del error  $e(t)$ :

$$v(t) = K_i \int e(t) dt$$

Donde  $K_i$  es la ganancia del control integral. La constante  $K_i$  puede escribirse en términos de  $K_p$ .

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

Donde  $T_i$  es un factor de proporcionalidad ajustable que indica el tiempo de integración.

El control integral tiende a reducir o hacer nulo el error de estado estable, ya que agrega un polo en el origen aumentando el tipo del sistema. Este tipo de controlador tiende a sobre corregir el error haciendo que la respuesta del sistema tenga características muy oscilatorias o incluso sea inestable, debido a la reducción de estabilidad relativa del sistema del sistema ocasionada por la adición del polo en el origen por parte del controlador. La integral se puede ver como la suma o acumulación de la señal de error. A medida que pasa el tiempo, pequeños errores se van sumando para hacer que la acción integral sea cada vez mayor.

Aumentar la acción integral  $K_i$  tiene los siguientes efectos:

- a. Disminuye el error del sistema en régimen permanente.
- b. Aumenta la inestabilidad del sistema.
- c. Aumenta la velocidad del sistema.

Esta acción de control servirá para disminuir el error en régimen permanente.

## 1.6 Variables del sistema con sus unidades de medida

Dentro de las variables intervinientes en el sistema podremos encontrar las siguientes:

- a. Tensión con unidad de medida: voltios [V].
- b. Corriente con unidad de medida: amperios [A].
- c. Resistencia con unidad de medida: ohms [ $\Omega$ ].

- d. Capacitancia con unidad de medida: Faradios [uF].

## 1.7 No linealidades involucradas

En general, el comportamiento de este filtro es lineal en su región de operación, es decir, su salida es proporcional a la entrada en esa región. Sin embargo, puede haber no linealidades en el filtro Sallen Key de segundo orden en ciertas condiciones. Algunas de estas no linealidades son:

- a. Sobrecarga del amplificador operacional: Si la señal de entrada al filtro es demasiado grande, puede hacer que los amplificadores operacionales saturen. Cuando un amplificador operacional se satura, su salida se estabiliza en uno de los extremos de su rango de operación, lo que resulta en una no linealidad en la salida del filtro.
- b. Deriva del componente: En algunos casos, los componentes del filtro, como los capacitores y las resistencias, pueden experimentar una deriva en sus valores debido a las variaciones de temperatura o a otros factores. Esto puede afectar el comportamiento del filtro, ya que los valores de los componentes afectan directamente el funcionamiento del circuito.
- c. Efectos no lineales de los componentes: En algunas aplicaciones, los componentes del filtro pueden operar en regiones no lineales, lo que puede afectar el comportamiento del filtro. Por ejemplo, los capacitores pueden tener una respuesta no lineal a la tensión o la frecuencia, lo que puede afectar la respuesta del filtro.

## 1.8 Nivel de la señal de entrada y salida

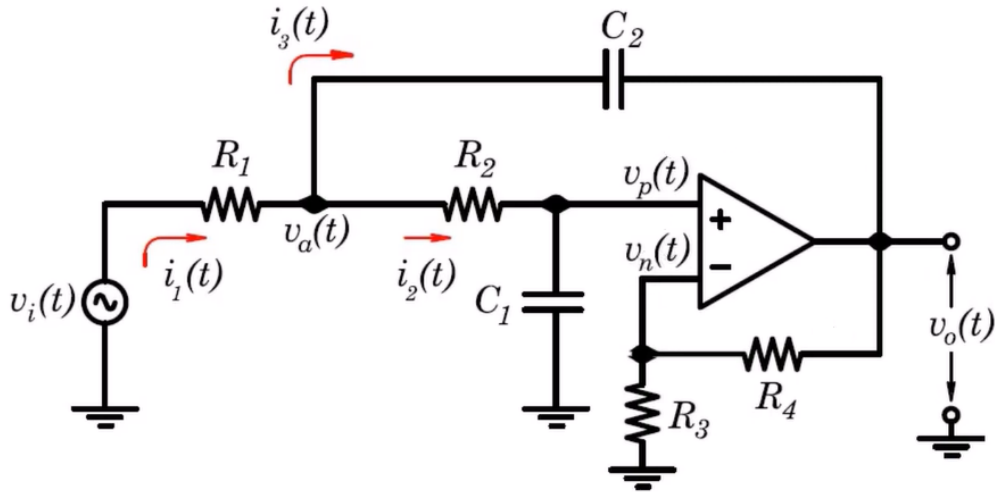
Para comprender el comportamiento del sistema, es necesario tener en cuenta los niveles o unidades que acompañan tanto la señal de entrada como de salida. De esta manera, tenemos que:

- a. Tensión de entrada, dicha magnitud se medirá en voltios [V] – Entrada –
- b. Tensión de set, dicha magnitud se medirá en voltios [V] – Entrada –
- c. Tensión de salida, dicha magnitud se medirá en voltios [V] – Salida –



## 2. Análisis de la planta

### 2.1 Modelo matemático



Planteando la ley de mallas de Kirchhoff, obtenemos:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

$$i_1(t) = \frac{v_i(t) - v_a(t)}{R_1}$$

$$i_2(t) = \frac{v_a(t) - v_p(t)}{R_2}$$

$$i_3(t) = C_2 \frac{d}{dt} (v_a(t) - v_o(t))$$

$$v_n(t) = v_p(t) = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_o(t)$$

escribimos entonces:

$$\frac{1}{K} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

reemplazamos en la ecuación de  $v_n(t)$  como:

$$v_n(t) = v_p(t) = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_o(t)$$

$$v_n(t) = v_p(t) = \frac{1}{K} v_o(t)$$

escribimos la ecuación de la tensión  $v_a(t)$  y su derivada:

$$v_a(t) = R_2 C_1 \dot{v}_p + v_p$$

$$\dot{v}_a(t) = R_2 C_1 \ddot{v}_p + \dot{v}_p$$

reemplazando las derivadas de  $v_p(t)$  tenemos:

$$v_a(t) = \frac{R_2 C_1}{K} \dot{v}_o(t) + \frac{1}{K} v_o(t)$$

$$\dot{v}_a(t) = \frac{R_2 C_1}{K} \ddot{v}_o(t) + \frac{1}{K} \dot{v}_o(t)$$

en la ecuación de mallas de Kirchhoff reemplazamos los valores de corrientes:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

$$i_1(t) = \frac{v_1(t) - v_a(t)}{R_1}$$

$$i_2(t) = \frac{v_a(t) - v_p(t)}{R_2}$$

$$i_3(t) = C_2 \frac{d}{dt} (v_a(t) - v_o(t))$$

por lo que obtenemos lo siguiente:

$$\frac{v_i - v_a}{R_1} = \frac{v_a - v_p}{R_2} + C_2 (\dot{v}_a - \dot{v}_o)$$

$$\frac{v_i}{R_1} - \frac{v_a}{R_1} = \frac{v_a}{R_2} - \frac{v_p}{R_2} + C_2 \dot{v}_a - C_2 \dot{v}_o$$

$$\frac{v_i}{R_1} - \frac{R_2 C_1}{K R_1} \dot{v}_o - \frac{1}{K R_1} v_o = \frac{C_1}{K} \dot{v}_o + \frac{1}{K R_2} v_o - \frac{1}{K R_2} v_o + \frac{R_2 C_1 C_2}{K} \ddot{v}_o + \frac{C_2}{K} \dot{v}_o - C_2 \dot{v}_o$$

$$v_i = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{K} \ddot{v}_o + \frac{R_1 C_1}{K} \dot{v}_o + \frac{R_2 C_1}{K} \dot{v}_o + \frac{R_1 C_2}{K} \dot{v}_o - \frac{K R_1 C_2}{K} \dot{v}_o + \frac{1}{K} v_o$$

$$v_i = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{K} \ddot{v}_o + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 - K R_1 C_2}{K} \dot{v}_o + \frac{1}{K} v_o$$

Transformando la ecuación en el dominio de Laplace obtenemos:

$$V_i(s) = s^2 \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{K} V_o(s) + s \frac{[R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - K)]}{K} V_o(s) + \frac{1}{K} V_o(s)$$

$$V_i(s) = \frac{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s[R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - K)] + 1}{K} V_o(s)$$

De esta forma tenemos el modelo matemático de nuestro filtro Sallen Key de 2do orden:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s[R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - K)] + 1}$$

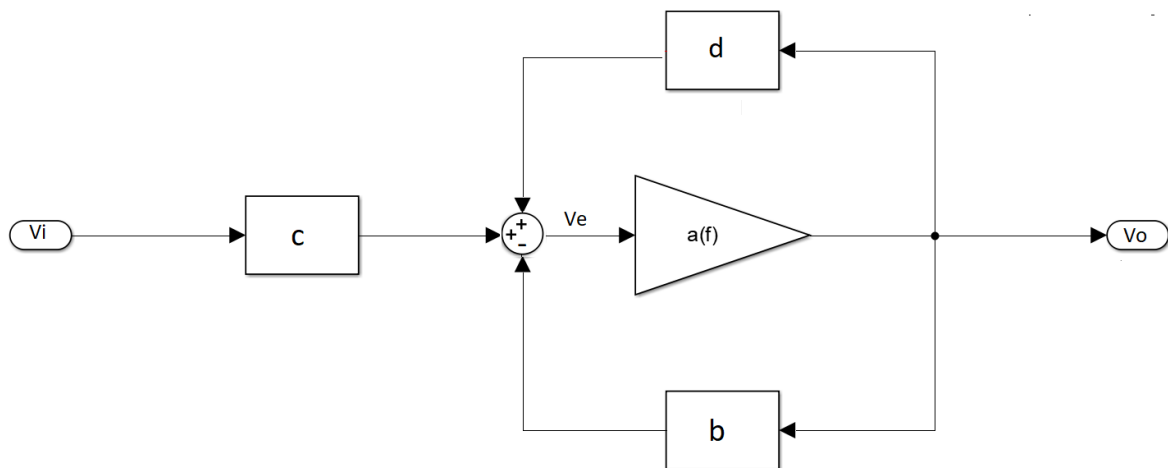
## 2.2 Diagrama de bloques

### 2.2.1 Definición

Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tal diagrama muestra las relaciones existentes entre los diversos componentes.

### 2.2.2 Diagrama de bloques del sistema

A continuación presentamos el diagrama de bloques de un filtro Sallen Key generalizado.



Del diagrama en bloque, la función transferencia puede ser fácilmente resuelta analizando:

$$Vo = a(f) Ve$$

$$Ve = c Vi + d Vo - b Vo$$

Resolviendo para la función transferencia generalizada obtenemos:

$$\frac{V_o}{V_i} = \left(\frac{c}{b}\right) \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{a(f)b} - \frac{d}{b}} \right]$$

## 2.3 Función de transferencia

### 2.3.1 Definición

La finalidad de representar un sistema de control en diagrama de flujo de señal no sólo es proveer una representación gráfica de las relaciones entre variables y subsistemas procedentes de un conjunto de ecuaciones; sino también de hacer posible obtener una función de transferencia equivalente (en forma racional formada por un único numerador y un único denominador, ya sea en forma de bloque o de rama) a la que por su importancia se le llamará función de transferencia de lazo cerrado y que está representada por  $T(s)$ .

En esta sección buscamos determinar la función transferencia de nuestra planta utilizando la técnica de algoritmo de Mason.

### 2.3.2 Diagrama de flujo de señal y algoritmo de Mason.

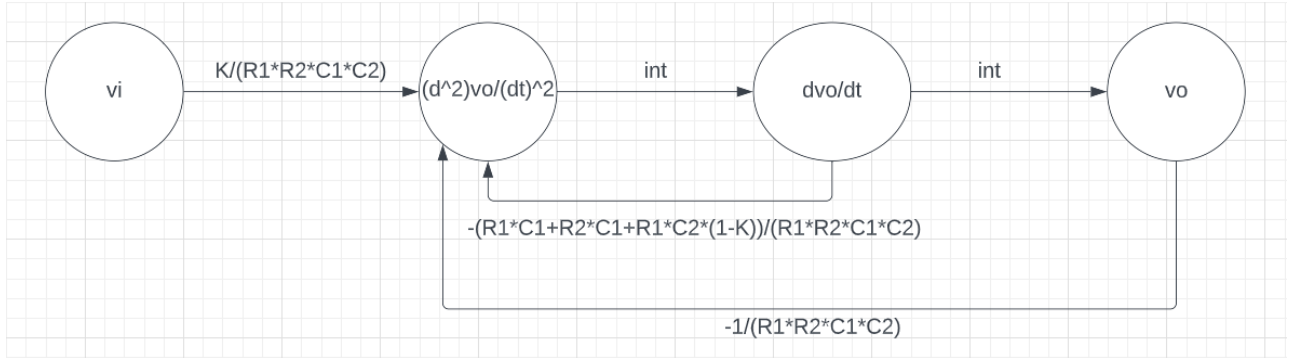
Realizaremos el diagrama de flujo de señal a partir de las ecuaciones que modela nuestro sistema. Por lo que tenemos:

$$v_i = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{K} \ddot{v}_o + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 - K R_1 C_2}{K} \dot{v}_o + \frac{1}{K} v_o$$

Despejando la derivada de mayor orden.

$$\ddot{v}_o = \frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_i - \frac{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - K)}{R_1 R_2 C_1 C_2} \dot{v}_o - \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_o$$

Luego realizamos el diagrama de flujo de señal de nuestra planta en base a la ecuación anterior.



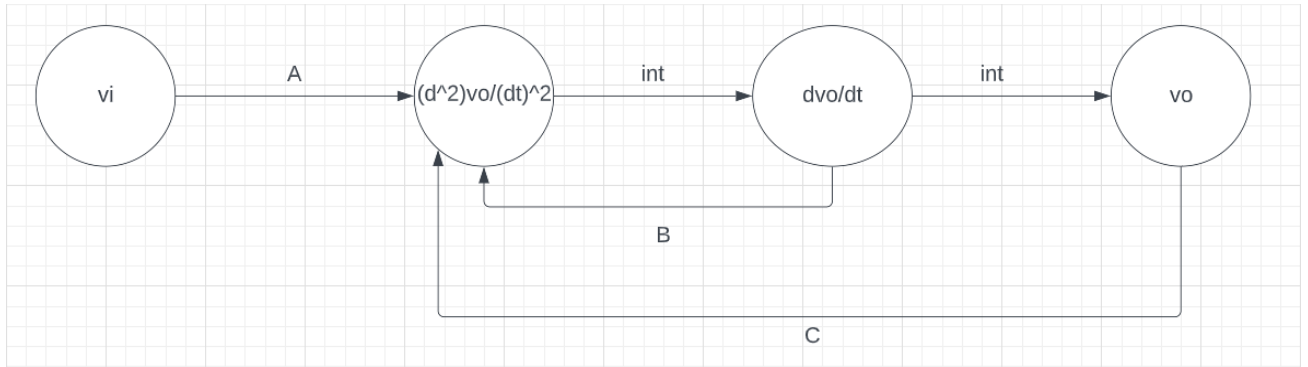
Si consideramos las ganancias como valores A, B y C para simplificar el diagrama:

$$A = \left( \frac{R_3 + R_4}{R_3} \right) \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

$$B = - \frac{\left[ R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 \left( 1 - \left( \frac{R_3 + R_4}{R_3} \right) \right) \right]}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

$$B = - \frac{[R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - K)]}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

$$C = - \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$



La fórmula del algoritmo de Mason es la siguiente:

$$T(s) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \dots + P_n\Delta_n}{\Delta}$$

Donde tenemos que:

$\Delta$ : Es el determinante.

$\Delta_n$ : Es el cofactor asociado a la trayectoria n.

$P_n$ : Es la ganancia de la trayectoria n considerada.

$T(s)$ : es la función transferencia de lazo cerrado.

En primera instancia definimos los caminos directos de nuestro diagrama.

Caminos directos:

$$P_1 = A \left( \frac{1}{s} \right) \left( \frac{1}{s} \right) = A \left( \frac{1}{s} \right)^2$$

Lazos cerrados:

$$L_1 = \left( \frac{1}{s} \right) B$$

$$L_2 = \left( \frac{1}{s} \right) \left( \frac{1}{s} \right) C = \left( \frac{1}{s} \right)^2 C$$

Cofactores:

$$\Delta_1 = 1$$

Determinante:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2)$$

Entonces la función transferencia por la fórmula del algoritmo de Mason es:

$$FT = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{A \left(\frac{1}{s}\right)^2}{1 - \left(\left(\frac{1}{s}\right) B + \left(\frac{1}{s}\right)^2 C\right)}$$

$$G(s) = \frac{\left(\frac{R_3 + R_4}{R_3}\right) \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \left(\frac{1}{s}\right)^2}{1 - \left(\left(\frac{1}{s}\right) \left(-\frac{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 \left(1 - \left(\frac{R_3 + R_4}{R_3}\right)\right)}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right) + \left(\frac{1}{s}\right)^2 \left(-\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right)\right)}$$

Lo que resulta en:

$$G(s) = \frac{260.6}{s^2 + 4s + 100}$$

A continuación se presenta el código el cual aplica el algoritmo de Mason realizado en Octave:



```
clear all; close all; clc

pkg load control

s= tf('s')

C1= 0.00001
C2= 0.00001
R1= 10000
R2= 10000
R3= 3300
R4= 5300
K_ = R3/ (R3+R4)
K= 1/ (K_)

A= K/ (R1*R2*C1*C2)
B= - (R1*C1+R2*C1+R1*C2* (1-K) ) / (R1*R2*C1*C2)
C= -1/ (R1*R2*C1*C2)

%Camino directos
M1= A* (1/s) * (1/s)

%Lazos cerrados
l1= (1/s) *B
l2= (1/s) * (1/s) *C

%Cofactor
D1= 1

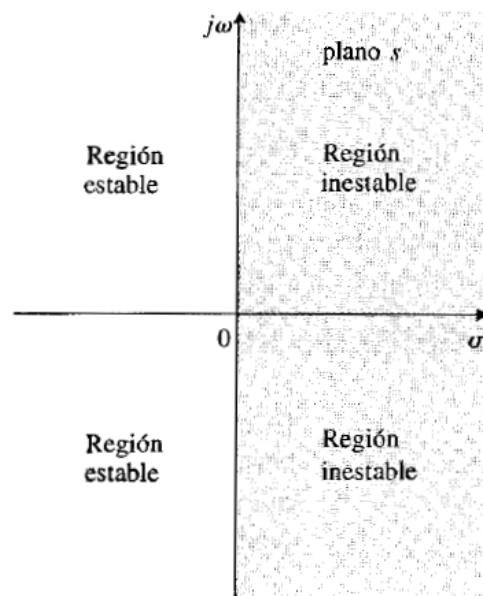
%Determinante
D= 1-(l1+l2)

%Funcion Transferencia
FT= minreal ( (M1*D1) /D)
```

## 2.4 Análisis de estabilidad absoluta

La estabilidad absoluta se refiere a la condición de si el sistema es estable o inestable, es una respuesta de si o no. Para el análisis del mismo verificamos la ubicación de las raíces de la ecuación característica del sistema.

La estabilidad de un sistema lineal, invariante con el tiempo, queda asegurada si todas las raíces del polinomio característico del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo (SPI) del plano complejo  $s$ .



Teniendo la función transferencia de la planta:

$$G(s) = \frac{260.6}{s^2 + 4s + 100}$$

Analizamos las raíces de la ecuación característica de la planta con el software Octave:

$$s^2 + 4s + 100 = 0$$

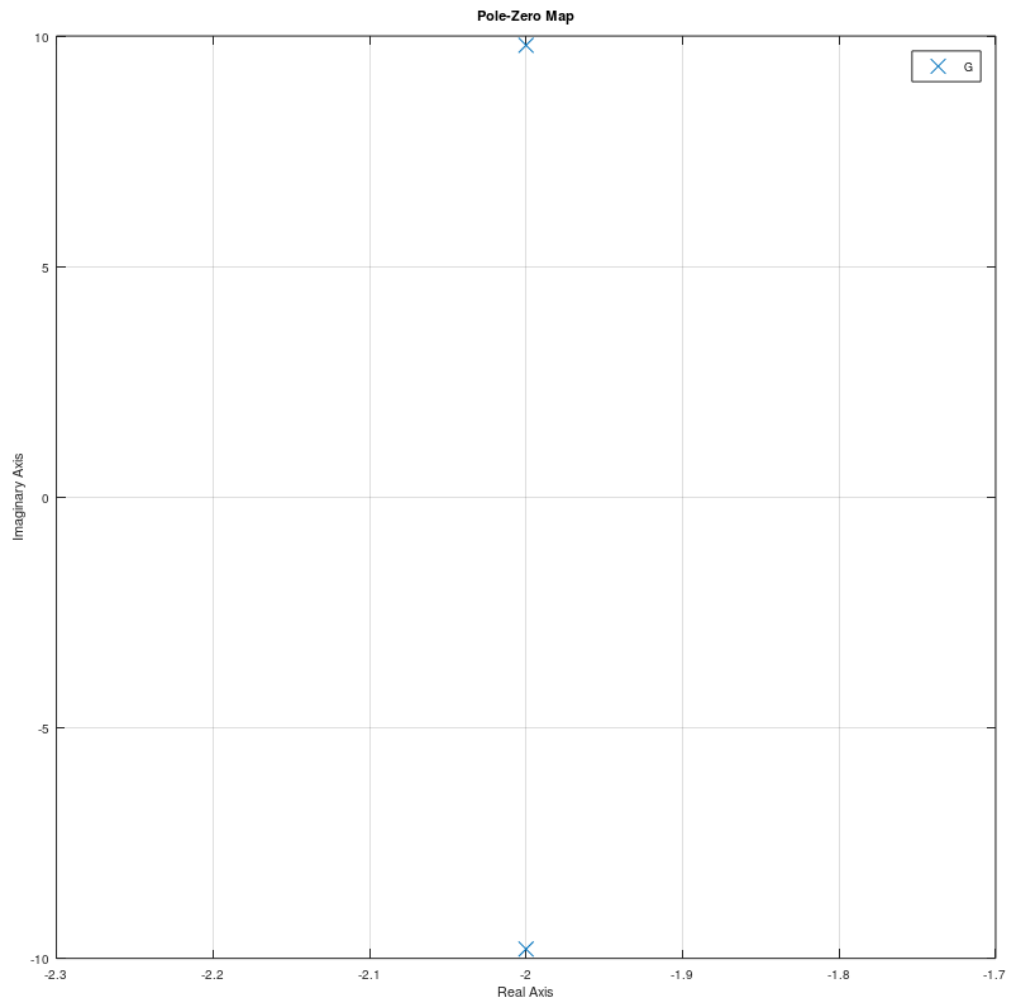
```
% Programa de análisis de estabilidad absoluta de planta %  
clear all; close all; clc  
pkg load control  
s= tf('s')  
G= 260.6/((s^2)+4*s+100)  
pole(G)  
pzmap(G)
```

Por lo tanto obtenemos las siguientes raíces de la ecuación característica.

$$s_1 = -2 + 9.8i$$

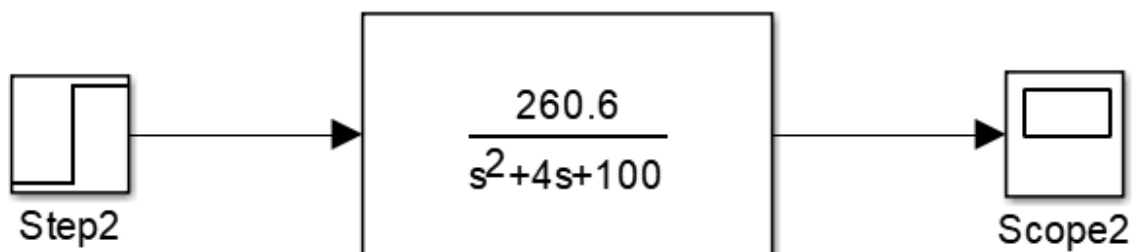
$$s_2 = -2 - 9.8i$$

Mediante el diagrama de polos y ceros observamos la ubicación de los mismos. Tenemos entonces dos polos complejos conjugados, sin presencia de ceros. Los polos de la función transferencia se ubican en el semiplano izquierdo complejo, por lo que podemos asegurar que nuestro sistema es estable BIBO (Bounded-Input/Bounded-Output) entrada acotada/salida acotada.

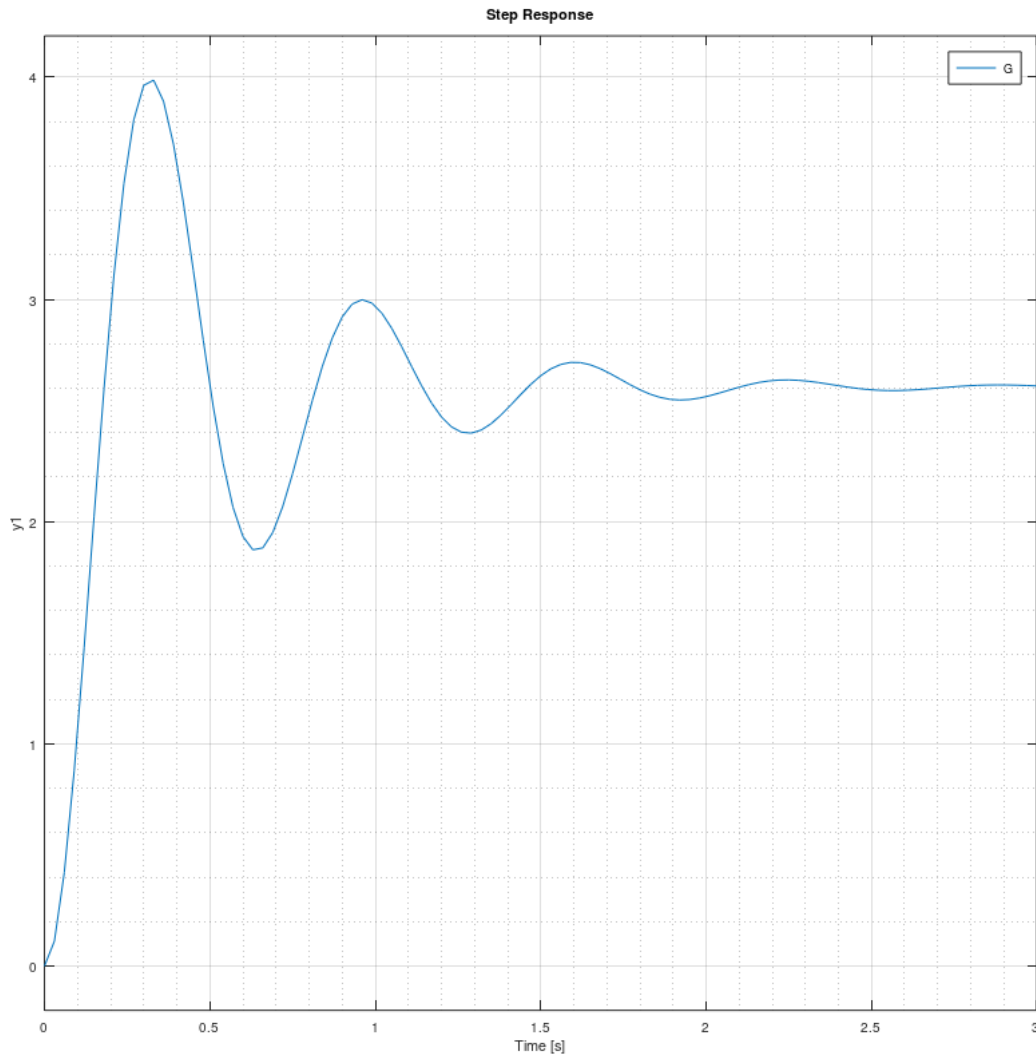


## 2.5 Análisis de respuesta temporal

Para simular la respuesta de nuestra planta a una entrada de escalón unitario realizamos el siguiente esquema:



Tenemos que la planta por ser un sistema de 2do orden su respuesta es como se muestra en la siguiente figura.



Sus valores característicos son extraídos mediante la figura anterior. Estos valores son los siguientes:

- Tiempo pico.

$$T_p = 0.31 \text{ seg}$$

- Amplitud pico máxima.

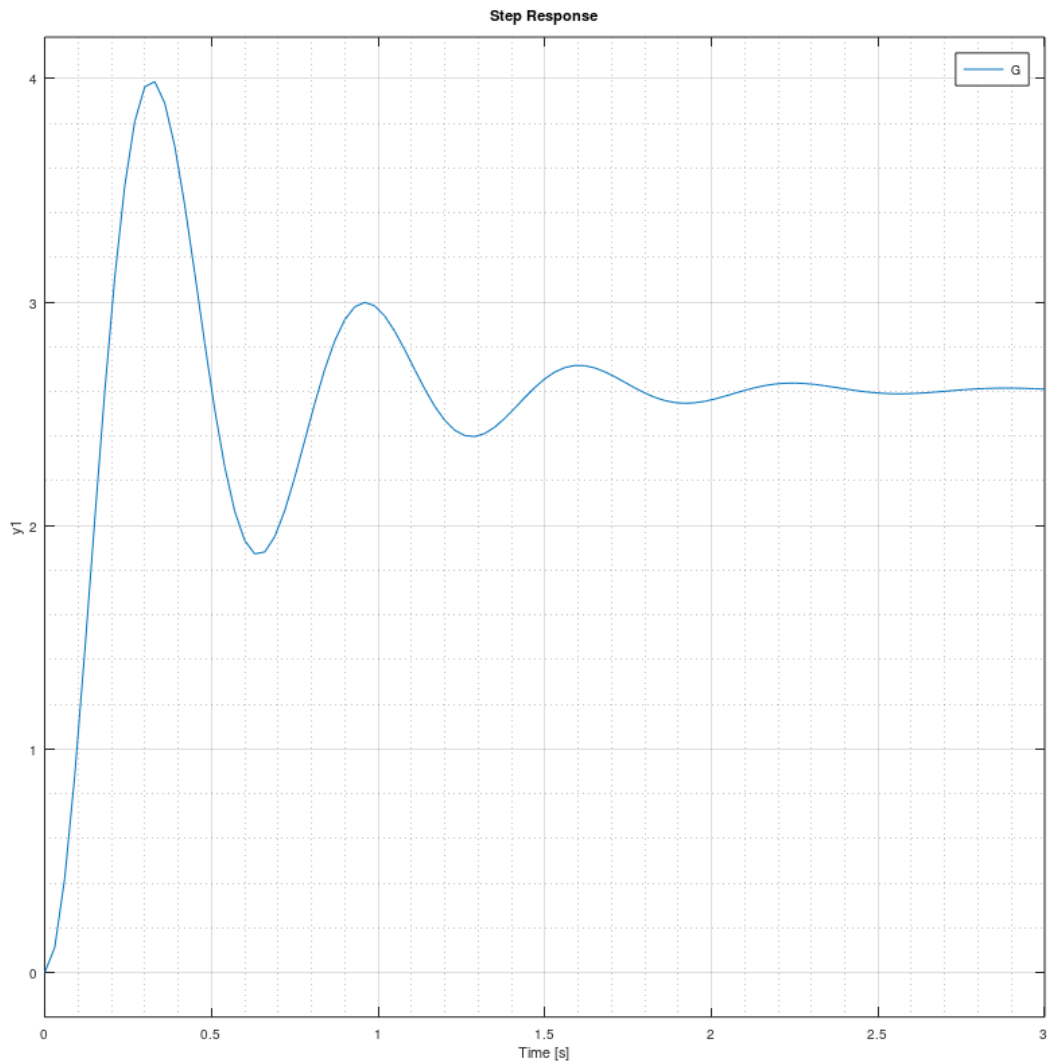
$$y_{max} = 3.97 \text{ V}$$

- Amplitud en estado estable.

$$y_{ss} = 2.61 \text{ V}$$

## 2.6 Verificación del modelo matemático a partir de la respuesta temporal

La respuesta al escalón unitario de nuestra planta a controlar es la siguiente:



Mediante el análisis de la respuesta del sistema ante un escalón unitario y con los valores característicos anteriormente mencionados planteamos una función de transferencia de 2do orden como la siguiente expresión:

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

Luego procedemos a calcular los valores de sobrepasamiento máximo.

- Sobrepasamiento máximo.

$$Mp = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}}$$

$$Mp = \frac{3.97 \text{ V} - 2.61 \text{ V}}{2.61 \text{ V}} = 0.52$$

- Psita.

$$psita = \sqrt{\frac{\ln^2(Mp)}{\pi^2 + \ln^2(Mp)}}$$

$$psita = \sqrt{\frac{\ln^2(0.52)}{\pi^2 + \ln^2(0.52)}} = 0.203$$

- Frecuencia de amortiguamiento.

$$\omega = \frac{\pi}{Tp} = \frac{\pi}{0.31 \text{ seg}} = 10.13 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

- Frecuencia no amortiguada.

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \text{psita}^2}} = \frac{10.13 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}}{\sqrt{1 - (0.203)^2}} = 10.34 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Para nuestra planta tendremos que la función transferencia aproximada mediante el análisis de la respuesta al escalón unitario será la siguiente:

$$G(s) = 2.61V \frac{\left(10.34 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)^2}{\left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)^2 s^2 + 2 \cdot 0.203 \left(10.34 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)^2 s + \left(10.34 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)^2}$$

$$G(s) = \frac{279.6 V}{s^2 + 4.206 s + 107.1}$$

A continuación se presenta el código de Octave el cual verifica el modelo matemático a partir de los valores característicos de la respuesta del sistema ante un escalón unitario:

```
clear all; close all; clc
pkg load control
s= tf('s')

%Aprox de FT
Tp= 0.31
ymax= 3.97
yss= 2.61
MP= (ymax-yss)/yss
MP_ = MP*100
psita= sqrt( ((log(MP))^2 / (pi^2 + (log(MP))^2 )) )
w= pi/Tp
wn= w/sqrt(1-(psita)^2)

FT1= yss*(wn)^2/(s^2+2*psita*wn*s+wn^2)
step(FT1); grid minor
```



## 2.5 Determinación del tipo de sistema.

Para determinar el tipo del sistema debemos analizar la cantidad de polos que tiene nuestra planta  $G(s)$  en  $s=0$ . Se formaliza el tipo de sistema con referencia a la forma de la función de transferencia de lazo abierto  $G(s)$ .

El tipo de sistema se puede verificar mediante el análisis de error en estado estable de la planta en lazo cerrado, para lo cual colocamos diferentes entradas de referencia (escalón unitario, rampa, parábola) al sistema en lazo cerrado. Luego se verifica el grado de desviación de la respuesta del sistema para las diversas entradas.

El significado físico de los diversos tipos de entradas aplicadas a los sistemas de control se interpreta de la siguiente forma: la entrada escalón le indica al sistema una referencia o un comportamiento constante, por ejemplo temperatura, posición. La entrada rampa supone una referencia que modifica su posición con respecto al tiempo, lo que equivale a una velocidad constante. La entrada parabólica sugiere una referencia que varía su velocidad.

El error en estado estable del sistema se escribe como:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)}$$

Entonces tenemos que  $e_{ss}$  depende del número de polos que  $G(s)$  tiene en  $s=0$ . Ahora proponemos diferentes entradas  $R(s)$  para el análisis de error (entrada escalón unitario, entrada rampa unitaria, entrada parabólica).

Para el caso en que la entrada  $R(s)$  sea un escalón unitario, tenemos que:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(1 + G(s))}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{(1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s))} = \frac{1}{(1 + K_p)}$$

Siendo:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

La constante de error escalón

$$e_{ss} (\text{escalón}) = \frac{1}{(1 + K_p)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{260.6}{s^2 + 4s + 100} = \frac{260.6}{100} = 2.606$$

$$e_{ss} (\text{escalón}) = \frac{1}{(1 + 2.606)} = 0.277$$

Para el caso en que la entrada  $R(s)$  sea una rampa, tenemos que:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2(1 + G(s))}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} (s + sG(s))} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}$$

$$e_{ss} (\text{rampa}) = \frac{1}{K_v}$$

Siendo:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

La constante de error rampa

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{260.6}{s^2 + 4s + 100} = 0$$

$$e_{ss}(\text{rampa}) = \infty$$

Para el caso en que la entrada  $R(s)$  sea una parábola, tenemos que:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^3(1 + G(s))}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} (s^2 + s^2 G(s))} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$

$$e_{ss}(\text{rampa}) = \frac{1}{K_a}$$

Siendo:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

La constante de error parabólica.

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{260.6}{s^2 + 4s + 100} = 0$$

$$e_{ss}(\text{parábola}) = \infty$$

A continuación se presenta el script de octave para el análisis del error de la planta sin el controlador.

```
% Programa de determinación de tipo de sistema %
clear all; close all; clc
pkg load symbolic
syms s real

G1= 260.6/((s^2)+4*s+100)

Kp= G1
Kv= simplify(s*G1)
Ka= simplify((s^2)*G1)

%evaluo s=0
s=0
eval(Kp)
eval(Kv)
eval(Ka)

%El error en estado estable para una entrada en escalón es ess=cte=1/(1+Kp)
%El error en estado estable para una entrada en escalón es ess=inf=1/Kv
%El error en estado estable para una entrada en escalón es ess=inf=1/Ka

ess_e= eval(1/(1+Kp))
ess_r= eval(1/Kv)
ess_p= eval(1/Ka)

ess_e = 0.277

ess_r = ∞

ess_p = ∞
```

## 2.5 Determinación de polos dominantes

Los polos dominantes de un sistema son aquellos que se encuentran más próximos al eje imaginario. Estos son los que determinan generalmente la respuesta transitoria.

Para determinar los polos dominantes llevamos a cabo la técnica de lugar de raíces mediante la cual podemos determinar todas las posibles raíces de una ecuación característica de  $1+G(s)H(s)=0$  cuando varía la ganancia  $K$  de ajuste y se utiliza para conocer el comportamiento total del sistema a lazo cerrado en régimen transitorio.

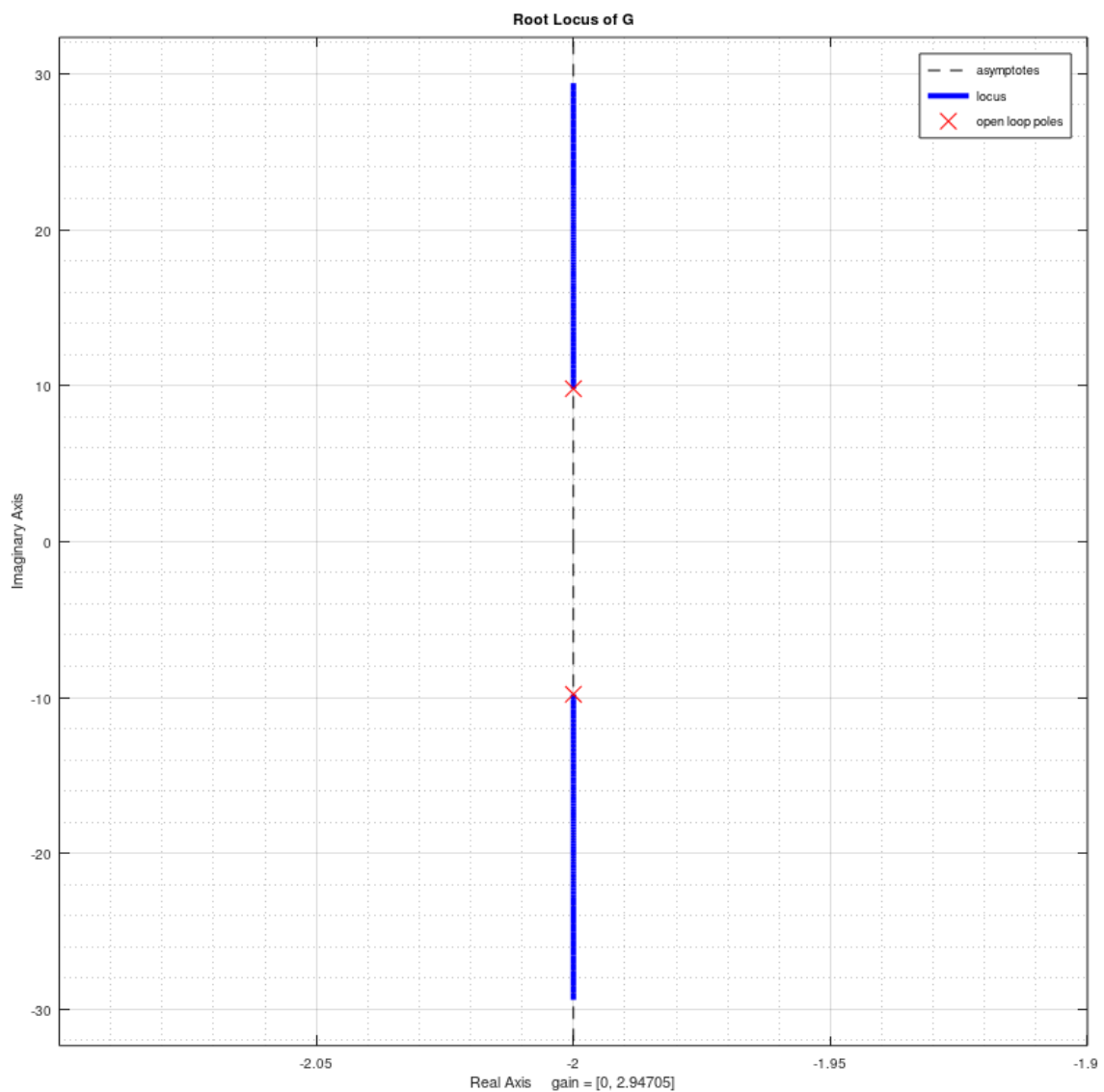
Con respecto a la representación analítica de un sistema en configuración en lazo cerrado.

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Cuya ecuación característica es:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

El lugar de raíces para nuestra planta es el siguiente.



Podemos determinar que los polos dominantes, los cuales son conjugados, se encuentran en  $s_1 = -2 + 9.8i$ ,  $s_2 = -2 - 9.8i$ , siendo estos los polos más lentos de nuestro sistema.

A continuación se presenta el script de octave para el análisis del lugar de raíces de la planta con realimentación unitaria sin el controlador.

```
clear all; close all; clc;
pkg load control
s= tf('s')

G= 260.6/((s^2)+4*s+100)
step(G); grid minor
rlocus(G)
```

### 3. Especificaciones de diseño

Un controlador o regulador PID es un dispositivo que permite controlar un sistema en lazo cerrado para que alcance el estado de salida deseado. El controlador PID está compuesto de tres elementos que proporcionan una acción Proporcional, Integral y Derivativa. Estas tres acciones son las que dan nombre al controlador PID que implementaremos.

La aplicación del control PID comprenderá el concepto de eliminación de polos dominantes, la cual consiste en la adición de ceros que tengan la misma ubicación que los polos dominantes.

#### 3.1 Error en estado estable.

Respecto al error en estado estable, se requiere un sistema de tipo 1, es decir que se tenga un error constante de la señal de salida con respecto a una entrada rampa. Para las entradas escalón unitario se requiere un error resultante cero y error para una entrada parábola, se requiere que el error sea infinito.

#### 3.2 Definición del sobrepasamiento máximo.

El sistema no debe tener sobrepasamiento en amplitud.

### 3.3 Definición del tiempo de establecimiento.

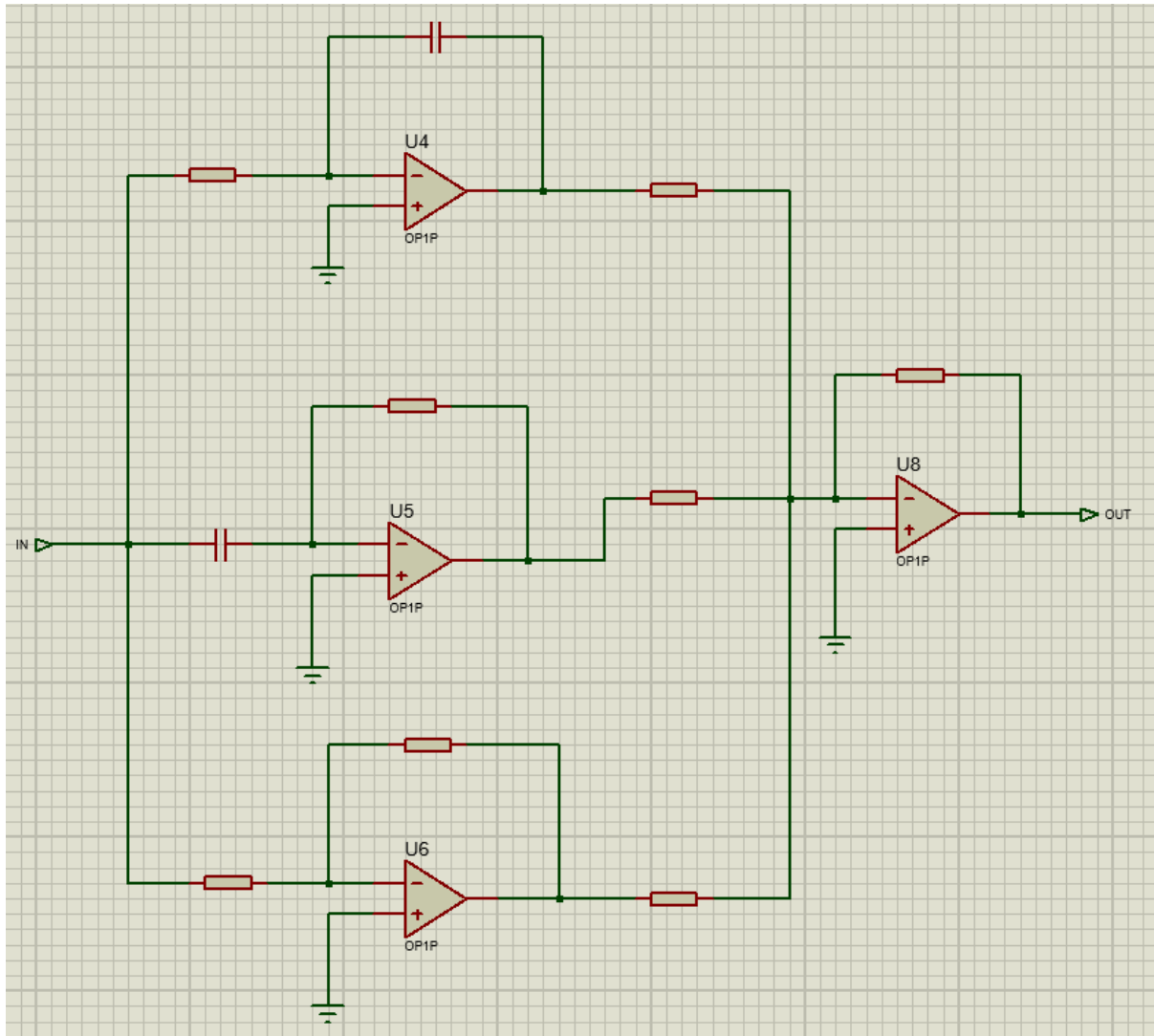
El tiempo de establecimiento debe ser  $t_s = 2$  seg.

### 3.4 Verificación de especificaciones realizables.

Con respecto al sobrepasamiento máximo tenemos que nuestra planta al agregar un controlador PID, el lugar de raíces no comprende ramas en las cuales tengamos raíces complejas conjugadas por lo que no podemos considerar un diseño en el que tengamos sobrepasamiento en el régimen transitorio.

## 4. Diseño del controlador.

Planteamos el diseño de un controlador PID para cancelar los polos dominantes en  $s_1 = -2 + 9.8i$ ,  $s_2 = -2 - 9.8i$ . El circuito de dicho controlador se presenta a continuación:



Este circuito del controlador se conforma de las siguientes etapas:

- Amplificador derivador inversor.
- Amplificador integrador inversor.
- Amplificador inversor.

Para el diseño de nuestro sistema consideramos la función transferencia de nuestra planta:

$$G(s) = \frac{260.6}{s^2 + 4s + 100}$$



Para el cual aplicamos un controlador PID con dicha función transferencia.

$$PID(s) = Kp \left( 1 + \frac{1}{Ti s} + Td s \right) = Kp \frac{Ti Td s^2 + Ti s + 1}{Ti s}$$

$$PID(s) = Kp \frac{Ti Td s^2 + Ti s + 1}{Ti s} = Kp Td \frac{s^2 + \frac{1}{Td} s + \frac{1}{Ti Td}}{s}$$

Con este controlador buscamos cancelar los polos dominantes de la planta. Los mismos tienen los siguientes valores:

$$p1 = -2 + 9.8 i$$

$$p2 = -2 - 9.8 i$$

Calculamos los valores  $Ti$  y  $Td$  de nuestro controlador PID, por lo que planteamos lo siguiente:

$$s^2 + \frac{1}{Td} s + \frac{1}{Ti Td} = s^2 + 4 s + 100$$

$$G(s) = \frac{260.6}{s^2 + 4 s + 100}$$

Luego:

$$\frac{1}{Td} = 4$$

$$Td = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{1}{Ti Td} = 100$$

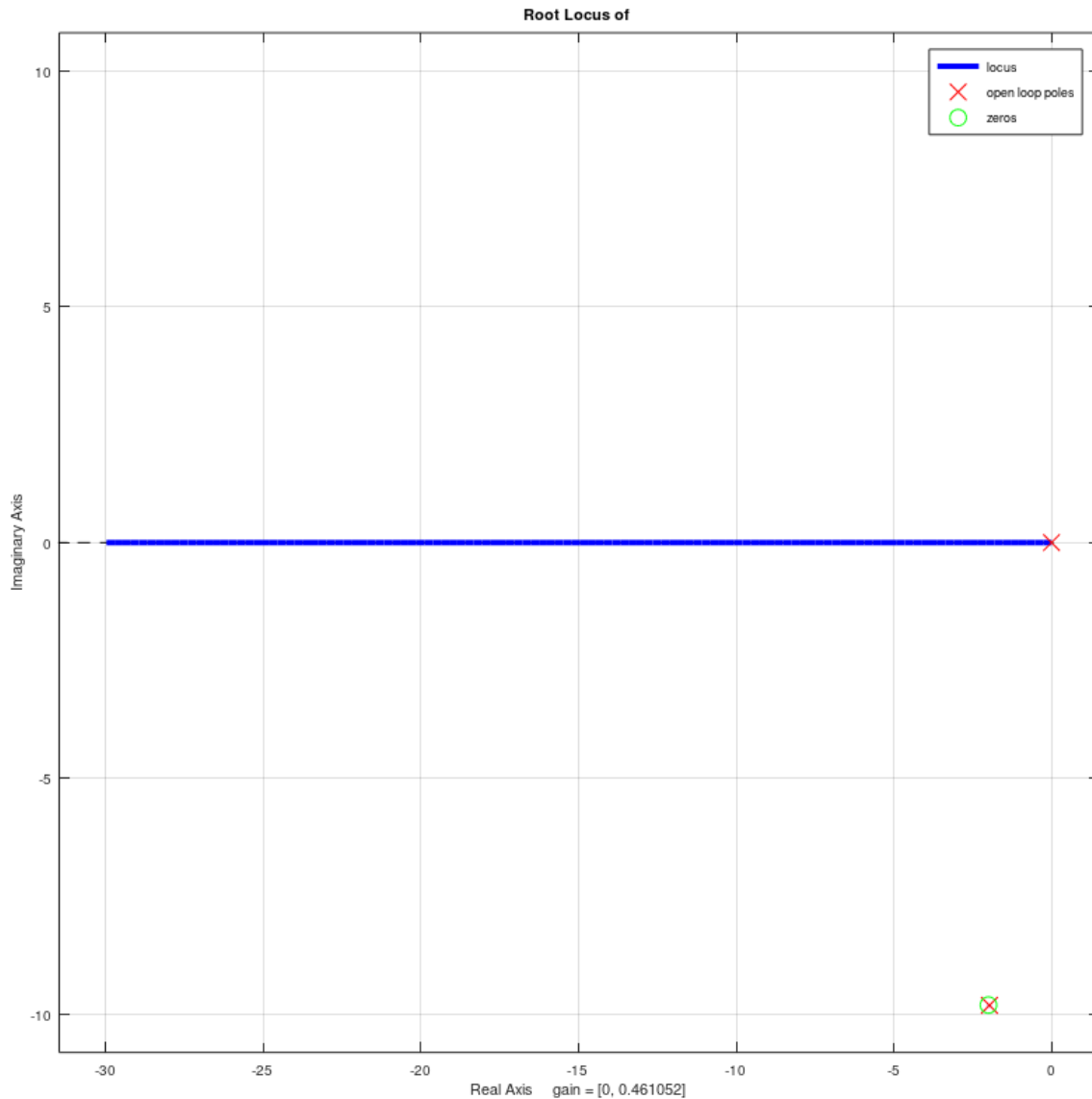
$$Ti = \frac{1}{0.25 \cdot 100} = 0.04$$

Por lo que la función transferencia de nuestro controlador PID, considerando  $K_p=1$  resulta:

$$PID(s) = K_p \cdot 0.25 \frac{s^2 + 4s + 100}{s}$$

$$PID(s) = 0.25 \frac{s^2 + 4s + 100}{s}$$

Mediante el análisis del lugar de raíces observamos lo siguiente:



Tenemos los polos cancelados en  $s_1 = -2 + 9.804i$  y un polo ubicado en  $s_2 = 0$ .

Para calcular la constante proporcional del controlador tomamos un punto  $s_1 = -2$  y operamos con la condición de módulo.

$$|G(s) H(s)| = \frac{1}{K}$$

$$\left| 0.25 \frac{s^2 + 4s + 100}{s} \frac{260.6}{s^2 + 4s + 100} \right| = \frac{1}{K}$$

$$\left| 0.25 \frac{260.6}{s} \right| = \frac{1}{K}$$

Valuamos en el punto  $s_1 = -2$ .

$$\left| 0.25 \frac{260.6}{-2} \right| = \frac{1}{K}$$

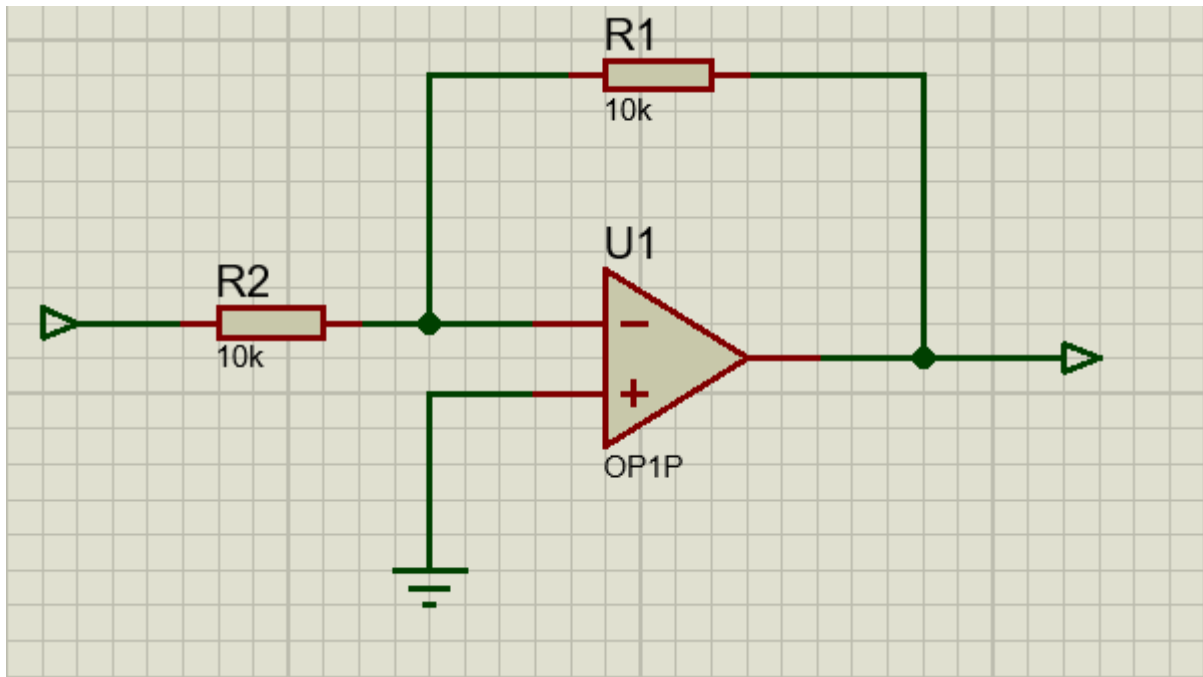
$$K = \frac{1}{32.57} = 0.03$$

Por lo tanto la constante proporcional de nuestro controlador PID será  $K_p = 0.03$ .

Aplicar el tipo de controlador PID convierte a nuestra planta en un sistema de tipo 1. Esto último nos hace tener un error en estado estable constante para una entrada rampa por lo que cumplimos con el requerimiento planteado con respecto al error de la planta.

Luego calculamos los componentes de las configuraciones de los amplificadores para conformar el controlador PID.

Amplificador inversor:

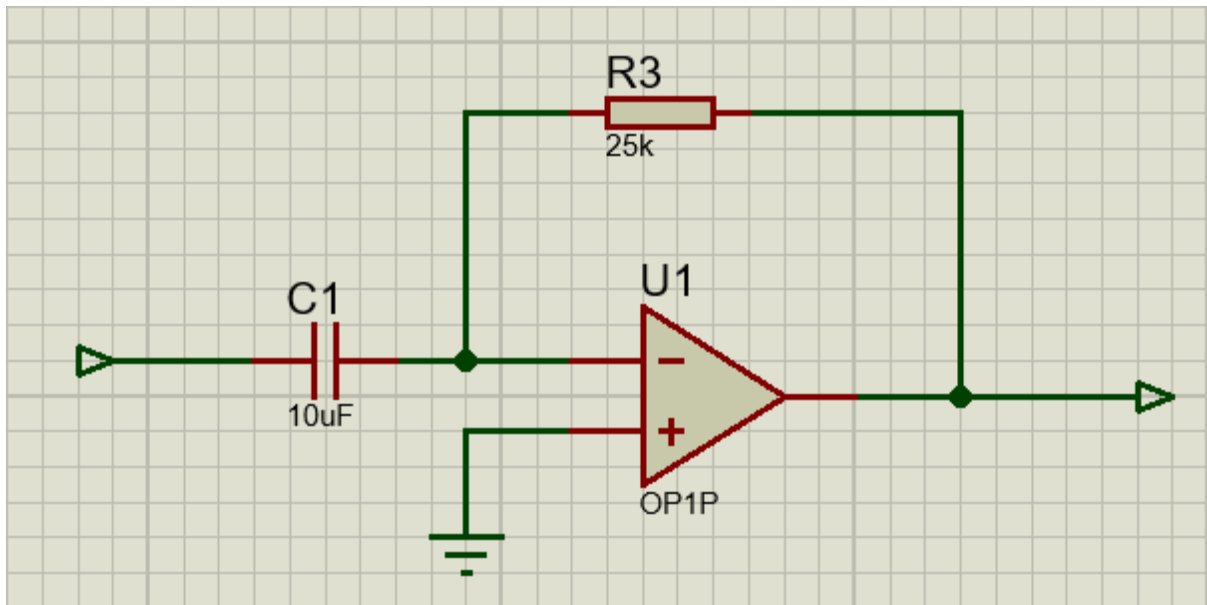


$$V_{out} = -\frac{R1}{R2} e(t)$$

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R1}{R2}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{4k\Omega}{4k\Omega} = -1$$

Amplificador integrador inversor:

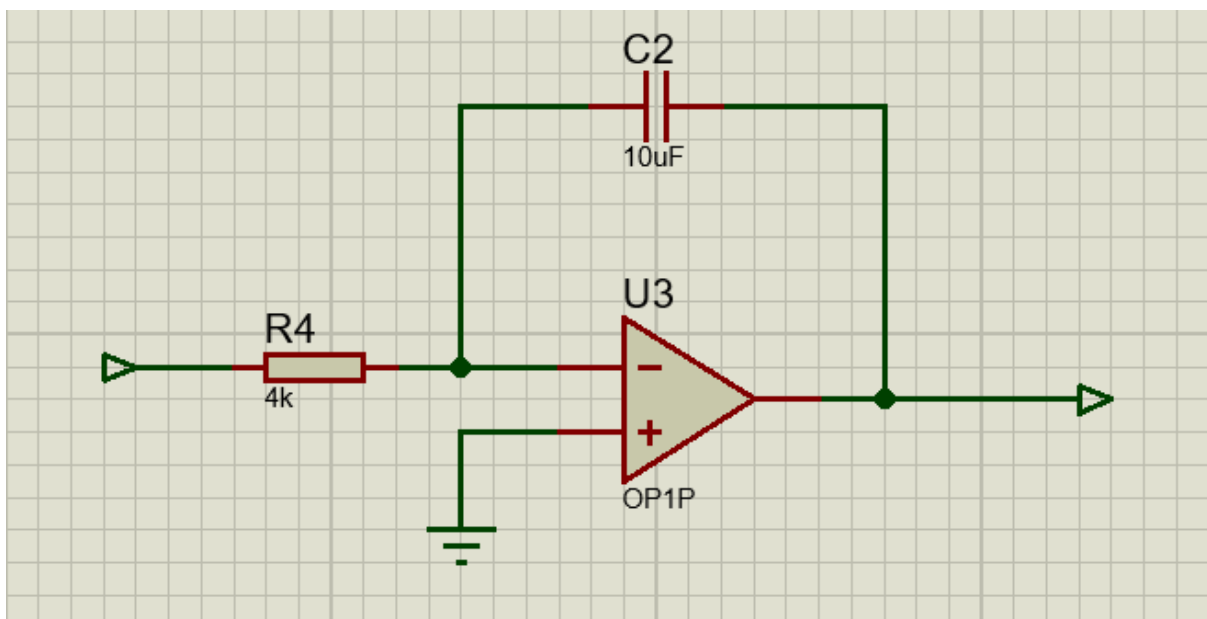


$$V_{out} = -\frac{1}{R3 C1} \int e(t) dt$$

$$Ti = R3 C1$$

$$Ti = 25k\Omega \cdot 10\mu F = 0.25$$

Amplificador derivador inversor:

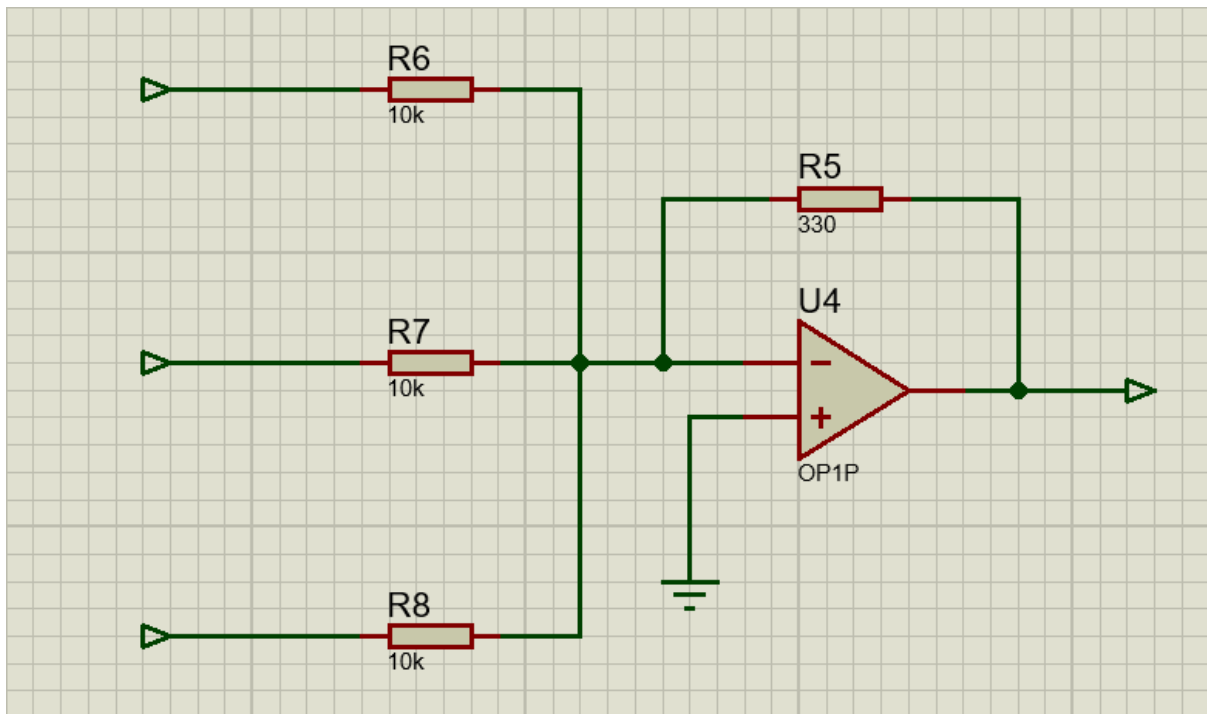


$$V_{out} = -R_4 C_2 \frac{d}{dt} e(t)$$

$$T_d = R_4 C_2$$

$$T_d = 4k\Omega \cdot 10\mu F = 0.04$$

Amplificador sumador inversor:



$$V_{out} = -R_5 \left( \frac{V_1(t)}{R_6} + \frac{V_2(t)}{R_7} + \frac{V_3(t)}{R_8} \right)$$

$$A_{v1} = -\frac{R_5}{R_6}$$

$$A_{v1} = -\frac{330\Omega}{10k\Omega} = -0.033$$

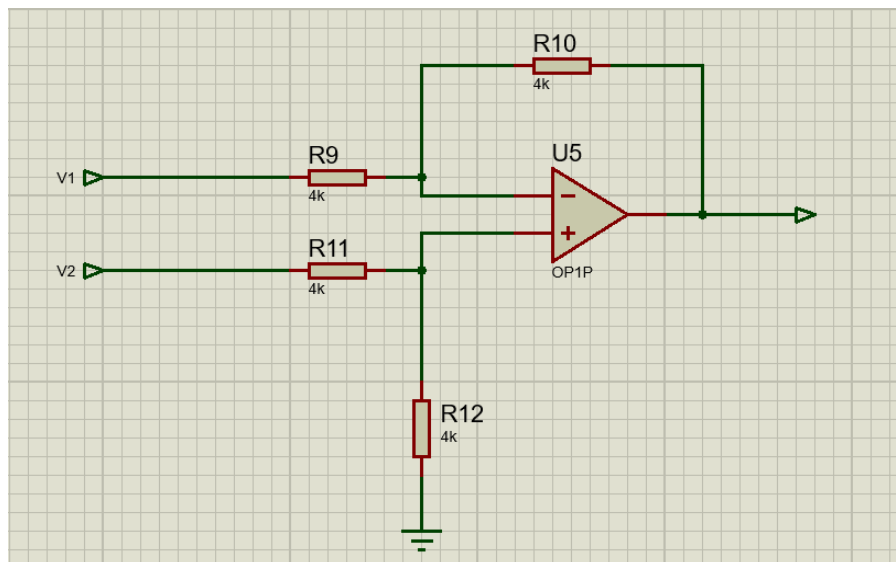
$$Av2 = -\frac{R5}{R7}$$

$$Av2 = -\frac{330\Omega}{10k\Omega} = -0.033$$

$$Av3 = -\frac{R5}{R8}$$

$$Av3 = -\frac{330\Omega}{10k\Omega} = -0.033$$

Amplificador restador:



## 5. Simulación

Para la simulación de nuestro sistema realizamos el siguiente circuito en el simulador Proteus. Colocamos en la entrada una fuente de tensión de 1V (volt) para realizar el escalón unitario.





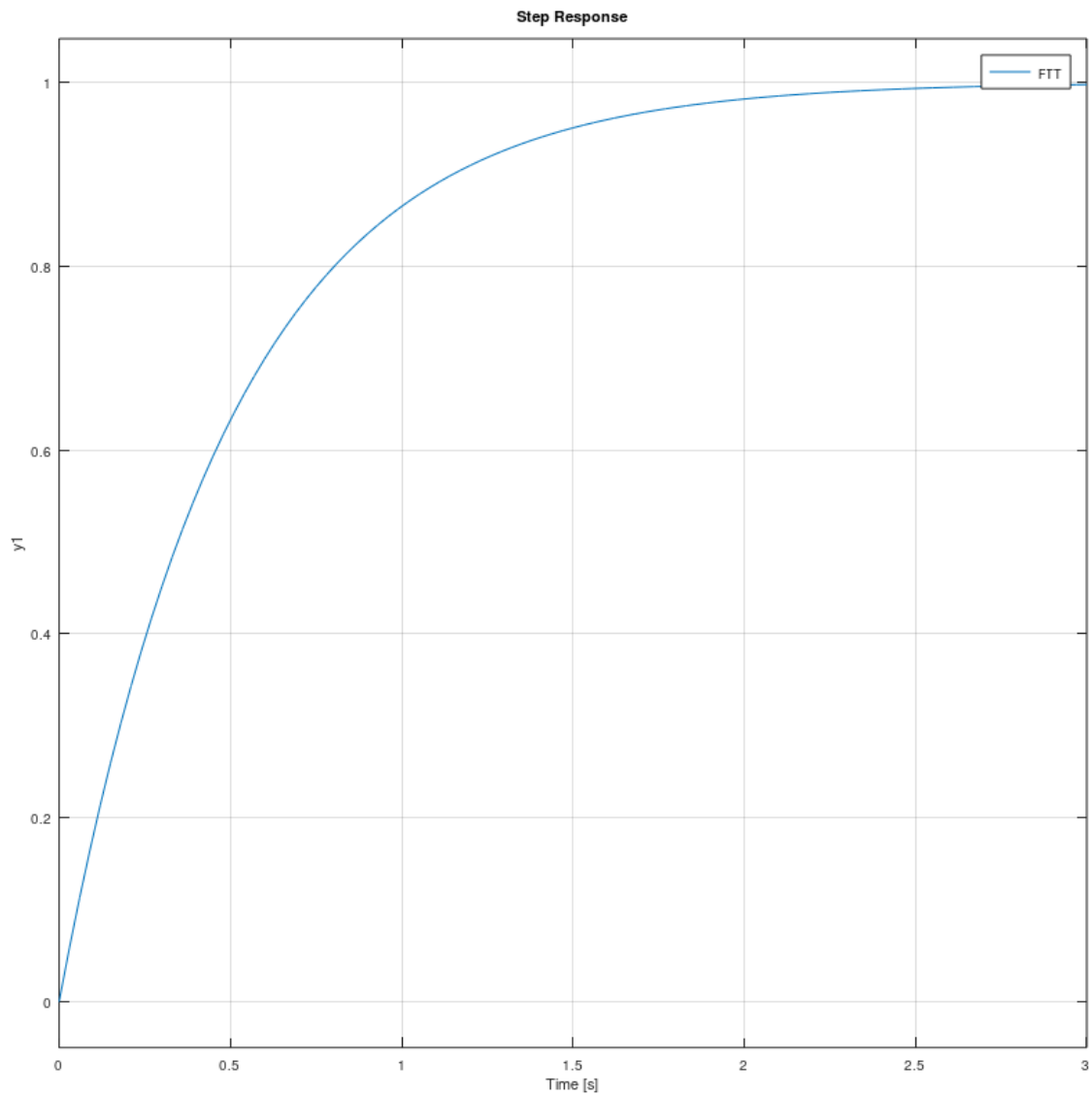
La respuesta de nuestra planta es representativa de un sistema de primer orden, con amplitud en estado estable de  $y_{ss} = 1V$  (voltio) sin sobrepasamiento. Se tiene un tiempo de establecimiento de  $t_s = 1,83$  seg, siendo este un tiempo menor al tiempo de establecimiento que se requería para el diseño de control.

A continuación se presenta el script de octave para el análisis de la respuesta de la planta con el controlador aplicado al mismo.

```
clear all; close all; clc
pkg load control
s= tf('s')
G= 260.6/((s^2)+4*s+100)

Td= 0.25
Ti= 0.04
PID= Td*((s^2)+(1/(Td))*s+(1/(Ti*Td)))/(s))

rlocus(PID*G)
sgrid(0.707, 1), grid minor
s1= -2
invK=abs((Td*((s1^2)+(1/(Td))*s1+(1/(Ti*Td)))/(s1)))*(260.6/((s1^2)+3.939*s1
+100)))
K2= 1/invK
FTT= feedback(K2*PID*G, 1)
pole(FTT)
step(FTT)
```



Por otro lado, verificamos las condiciones con respecto al error en estado estable al implementar nuestro controlador PID.

```
clear all; close all; clc
pkg load symbolic
syms s real
G1= 260/((s^2)+4*s+100)
Td= 0.25
Ti= 0.04
%PID= Td*((s^2)+(1/(Td))*s+(1/(Ti*Td)))/(s)
```

```

FTLA=
simplify((0.03)*(Td*((s^2)+(1/(Td))*s+(1/(Ti*Td)))/(s)))*(260/((s^2)+3.939*s
+100)))

%Kp= lim G(s)
%      s->0
Kp= FTLA

%Kv= lim s*G(s)
%      s->0
Kv= simplify(s*FTLA)

%Ka= lim (s^2)*G(s)
%      s->0
Ka= simplify((s^2)*FTLA)

%evaluo s=0
s=0
eval(Kp)
eval(Kv)
eval(Ka)

%El error en estado estable para una entrada en escalon para este sistema
debe ser ess=1/(1+Kp)=0
%El error en estado estable para una entrada en escalon para este sistema
debe ser ess=1/Kv=cte
%El error en estado estable para una entrada en escalon para este sistema
debe ser ess=(1/Ka)=inf

ess_e= eval(1/(1+Kp))
ess_r= eval(1/Kv)
ess_p= eval(1/Ka)

```

$$ess_e = 0$$

$$ess_r = 0.5128$$

$$ess_p = \infty$$

Por lo que concluimos que nuestro sistema con el controlador PID aplicado resulta en un sistema de tipo 1 como se requería. Al ser un sistema de tipo 1, tenemos que el error en estado estable para una entrada escalón unitario resulta cero, para una entrada rampa resulta constante y para una entrada parabólica resulta un error infinito.

## 6. Conclusiones

Se logró desarrollar el sistema de control para un filtro Sallen Key de segundo orden, con la particularidad de obtener una respuesta de primer orden. Para lograr esto, se llevó a cabo un estudio exhaustivo del lugar de raíces de la planta, lo que nos permitió identificar dos polos dominantes que resultaron ser polos conjugados. En base a esta información, durante el diseño del controlador PID se aplicó la técnica de eliminación de polos para su sintonización.

El diseño del controlador para el filtro Sallen Key pasa bajo resultó exitoso, logrando obtener una respuesta de primer orden según los requisitos establecidos. Mediante la verificación del modelo matemático y el análisis de la respuesta al escalón, se pudieron determinar parámetros clave como el sobrepasamiento máximo, el tiempo de establecimiento, la frecuencia de amortiguamiento y la frecuencia no amortiguada. Es importante destacar que el filtro Sallen Key exhibió diferentes comportamientos dependiendo del rango de frecuencia. A altas frecuencias, los capacitores actuaron como cortocircuitos, mientras que a bajas frecuencias o señales de corriente continua, los capacitores se comportaron como circuitos abiertos.

Para determinar el tipo de sistema, se llevó a cabo un análisis del número de polos en  $s=0$  en la función de transferencia de la planta. Además, se verificó el tipo de sistema evaluando el error del sistema en lazo cerrado para diferentes entradas de referencia.

## 7. Bibliografía

Kuo, Benjamin. (1996). SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO (7.<sup>a</sup> ed.).

Ogata, K. (1998). INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA (3.<sup>a</sup> ed.).

Dorf, R., & Bishop, R. (2005). Sistemas de control moderno (10.<sup>a</sup> ed.).

Hernández Gaviño R. (2010). Introducción a los sistemas de control (1.<sup>a</sup> ed.).

Bolton, W. (2001). Ingeniería de control (2.<sup>a</sup> ed.).