

Sistemas de Control II - Tarea 1 (Laboret)

Corvalán, Abel Nicolás

1 Introducción

En este trabajo, se analiza un sistema de control discreto basado en un retenedor de orden cero (ZOH), estudiando su estabilidad, error en estado estacionario y respuesta temporal ante diferentes entradas. A través de herramientas como la transformada Z y el lugar de las raíces, se evalúa el comportamiento del sistema tanto en lazo abierto como en lazo cerrado, considerando el efecto del tiempo de muestreo T_s y con una modificación del mismo. Este análisis es fundamental para entender las limitaciones y ventajas de los sistemas discretos en aplicaciones prácticas, donde el muestreo y la discretización introducen desafíos adicionales en el diseño de controladores.

2 Objetivo

Los objetivos de este trabajo son los siguientes:

Respecto del modelado y discretización:

- Obtener la función de transferencia discreta $G_D(z)$ de un sistema continuo $G(s)$ utilizando un retenedor de orden cero (ZOH) y un tiempo de muestreo T_s .
- Analizar el mapa de polos y ceros del sistema discretizado y compararlo con el sistema original.

Respecto a la estabilidad y error en estado estacionario:

- Determinar el tipo de sistema y calcular el error en estado estacionario para entradas escalón, rampa y parábola.
- Evaluar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el lugar de las raíces y el margen de ganancia.

Respecto al efecto del tiempo de muestreo:

- Investigar cómo el aumento del periodo de muestreo T_s afecta la estabilidad relativa y la respuesta temporal del sistema.
- Verificar la influencia de T_s en la ubicación de polos y ceros en el plano Z .

3 Desarrollo

3.1 Retenedor de Orden Cero (ZOH)

El **ZOH (Zero-Order Hold)** es un método de conversión analógico-digital que mantiene constante el valor de la señal de entrada durante cada periodo de muestreo T .

Si se tiene una señal analógica $x(t)$. El sistema muestrea en tiempo $t = kT$ y mantiene ese valor hasta el siguiente muestreo.

El retenedor de Orden Cero (ZOH) se modela con la siguiente expresión:

$$h_{ZOH}(t) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

En el dominio de Laplace, es equivalente a un filtro que suaviza la señal.

3.2 Error en estado estacionario

El análisis del error de estado estacionario se estudia mediante la función de transferencia del error al igual que en tiempo continuo, pero aplicando ahora el teorema del valor final (TVF) de la transformada Z al error. Sea el sistema de la figura con realimentación unitaria donde se define el error como

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

A continuación se muestra el esquema de la planta con realimentación unitaria.

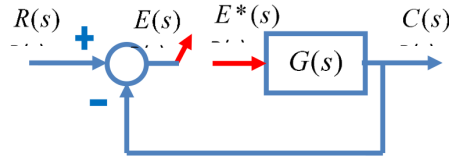


Figure 1: Función de transferencia del error

El error estacionario en los instantes de muestreo es:

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT)$$

en Transformada Z se tiene:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)}$$

Por aplicación del TVF, resulta:

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} E(z)$$

Siempre que el sistema de lazo cerrado sea estrictamente estable.

3.3 Tipo de sistema

Si se escribe la expresión factorizada de la función de lazo abierto.

$$G(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - c_i)}{(z - 1)^N \prod_{i=1}^{n-N} (z - p_i)} \quad c_i, p_i \neq 1$$

Donde N es el Tipo de sistema, o sea la cantidad de integradores puros y es menor o igual al orden n. El procedimiento es similar a su contrapartida de tiempo continuo con la diferencia de que:

1. Los integradores se encuentran en $z = 1$.
2. Se multiplica por $(z - 1)/z$ en lugar de s .
3. El límite se toma para $z \rightarrow 1$ en lugar de $s \rightarrow 0$.
4. El periodo de muestreo T aparece explícitamente en algunos.

A continuación se encuentran los valores característicos de los errores para los diferentes tipos de sistemas en base al error en estado estacionario:

Resumen de errores			
Tipo	Escalón unitario $1(t)$	Rampa $t \cdot 1(t)$	Parábola $\frac{t^2}{2} 1(t)$
0	$e_{ss}^* = \frac{1}{1 + K_p}$ $K_p^* = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$	∞	∞
1	0	$e_{ss} = 1/K_v$ $K_v^* = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G(z)]$	∞
2	0	0	$e_{ss} = 1/K_a$ $K_a^* = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 G(z)]$

Figure 2: Resumen de errores

3.4 Estabilidad en sistemas digitales

3.4.1 Estabilidad asintótica (Fuerte)

Un sistema es asintóticamente estable si:

- Todos sus polos están dentro del círculo unitario ($|z| < 1$).
- La respuesta del sistema decae exponencialmente a cero con el tiempo ($n \rightarrow \infty$).

3.4.2 Estabilidad marginal (No Asintóticamente Estable)

Un sistema es marginalmente estable (no asintóticamente estable) si:

- Tiene polos simples (multiplicidad= 1) sobre el círculo unitario ($|z| = 1$), como $z = 1$, $z = -1$, $z = e^{j\theta}$.
- No decae a cero, pero tampoco diverge. Su respuesta permanece acotada (oscila o permanece constante).

Cuando un sistema es marginalmente estable, en la práctica se considera inestable ya que:

- Perturbaciones pequeñas (ruido, errores de modelado) pueden hacer que el sistema se desvíe y no regrese al equilibrio.
- No hay convergencia a cero, solo una respuesta acotada (lo cual no es deseable en control, donde se busca que el error tienda a cero).

3.4.3 Inestabilidad

Un sistema es inestable si:

- Tiene al menos un polo fuera del círculo unitario ($|z| > 1$). Respuesta diverge.
- Tiene polos múltiples sobre el círculo unitario. Respuesta crece sin límite.

3.4.4 Margen de ganancia

El margen de ganancia es una medida de estabilidad relativa que indica cuánto puede aumentar la ganancia de un sistema en lazo abierto antes de que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable.

Se define como el inverso de la magnitud de la función de transferencia en lazo abierto $L(j\omega)$ evaluada en la frecuencia de cruce de fase ω_ϕ , donde el ángulo de fase es -180° .

$$MG = \frac{1}{|L(j\omega_\phi)|}$$

Si se tiene que:

- $MG > 1$: El sistema es estable (puede tolerar un aumento en la ganancia sin volverse inestable).
- $MG = 1$: El sistema está en el límite de estabilidad.
- $MG < 1$: El sistema es inestable:

3.5 Sistema a lazo abierto

- Obtener la función de transferencia continua $G(s)$.

En base a los polos y ceros dados $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ y $z_1 = -10$ y ganancia $K = 5$.

$$G(s) = \frac{5s + 50}{s^2}$$

- Hallar la Función Transferencia discreta de lazo abierto $G_D(s)$ del sistema de la figura con un Retentor de Orden Cero (ZOH) a la entrada y el tiempo de muestreo asignado $T_s = 0.22seg$.

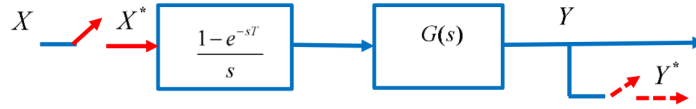


Figure 3: Sistema continuo con ZOH a la entrada y muestreador ficticio a la salida

La Función Transferencia discreta es la siguiente:

$$G_D(s) = \frac{2.31z + 0.11}{z^2 - 2z + 1}$$

- Dibujar el mapa de polos y ceros del sistema continuo y el discreto.

Mapa de polos y ceros del sistema continuo $G(s)$:

En base al mapa de polos y ceros presentado se tiene que el sistema es inestable ya que se tienen 2 polos en el origen. Con un solo polo en el origen el sistema para entradas acotadas como el escalón diverge (inestabilidad en régimen permanente). En este caso se tiene un polo de segundo orden en el origen lo que asegura la inestabilidad ya que su respuesta natural incluye términos que crecen indefinidamente con el tiempo.

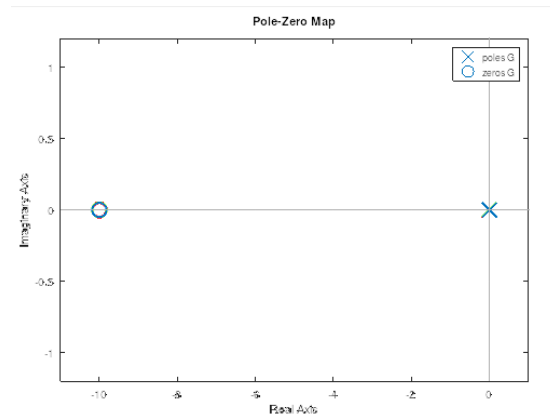


Figure 4: Mapa de polos y ceros

Mapa de polos y ceros del sistema discreto:

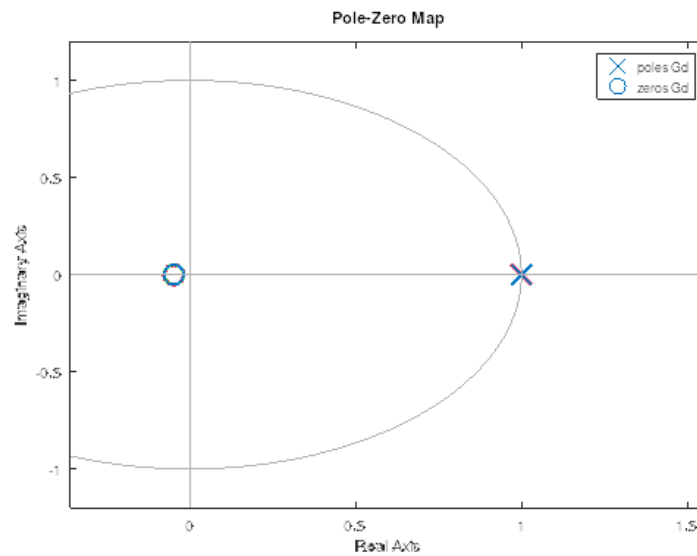


Figure 5: Mapa de polos y ceros del sistema discreto

Los polos y el cero del sistema muestreado tienen los siguientes valores:

- $z_1 = -0.0476$
- $p_1 = p_2 = 1$

El mapa de polos y ceros dado nos permite asegurar que el sistema discreto es inestable ya que se tiene un polo doble sobre el círculo unitario. La

respuesta tiene términos que crecen sin límite ($n 1^n = n$). El cero tiene influencia casi nula

- ¿Qué ocurre con el mapa si se multiplica por 10 el periodo de muestreo (T_s)?

Se obtiene la siguiente función transferencia discretizada con un tiempo de muestreo $10 T_s$:

$$G_{D1}(z) = \frac{132z + 110}{z^2 - 2z + 1}$$

Si se multiplica el periodo T_s por 10, los polos se desplazan en dirección contraria al origen del sistema de coordenadas. Los polos se mueven sobre el círculo unitario debido a la transformación al dominio Z .

$$z = e^{sT}$$

Al aumentar el periodo de muestreo $T = 10T_s$, los polos cambian de fase (toman valor complejo distinto de cero) manteniendo su módulo $|z| = 1$. Esto es:

$$z = e^{s10T_s}$$

El cero con valor $z_1 = -10$, se mueve con característica no lineal en el plano Z . Los nuevos valores de polos y el cero son los siguientes:

- $z_1 = -0.8333$
- $p_1 = 1$
- $p_2 = 1$

De esta forma el sistema responde más rápidamente a los cambios en la entrada. El desplazamiento de los polos dan característica de mayor estabilidad al sistema.

- Obtener la respuesta al escalón del sistema discreto y determinar si es estable.

Respuesta al escalón del sistema continuo:

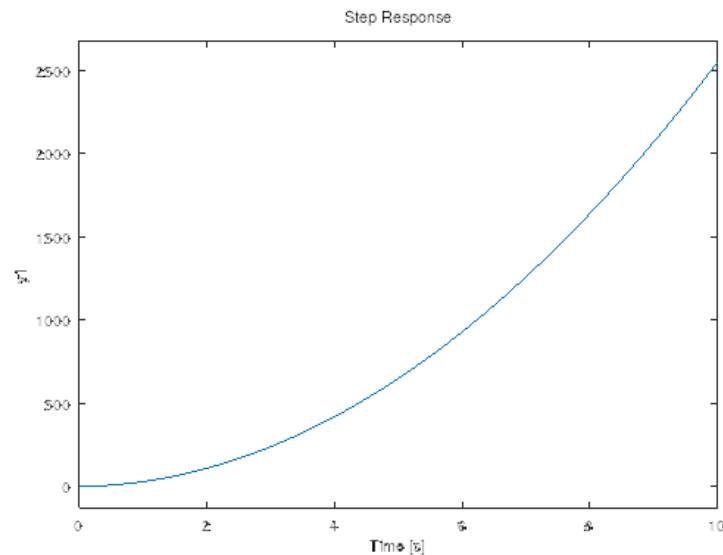


Figure 6: Respuesta al escalón del sistema continuo

Se tiene una respuesta al escalón no estable. El valor de amplitud crece indefinidamente.

Respuesta al escalón del sistema discreto con $T_s = 0.22\text{seg}$:

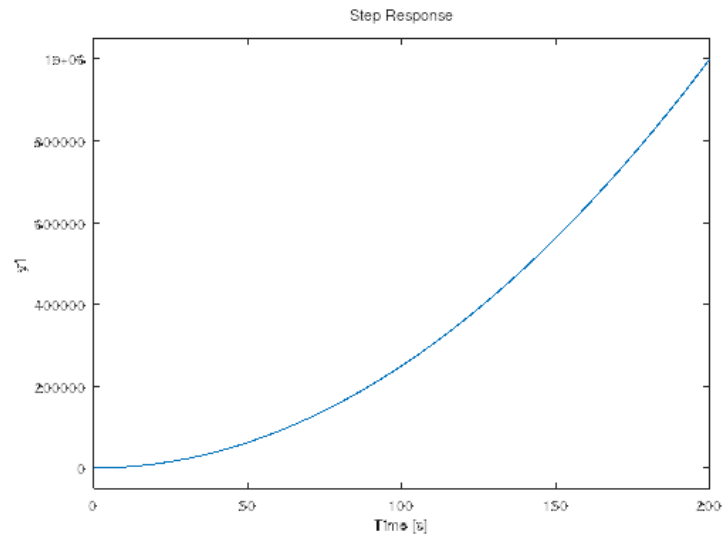


Figure 7: Respuesta al escalón del sistema discreto $G_D(z)$ con $T_s = 0.22\text{seg}$

Se tiene una respuesta al escalón con características iguales a la del sistema continuo.

Respuesta al escalón del sistema discreto con $T_s = 2.2\text{seg}$.

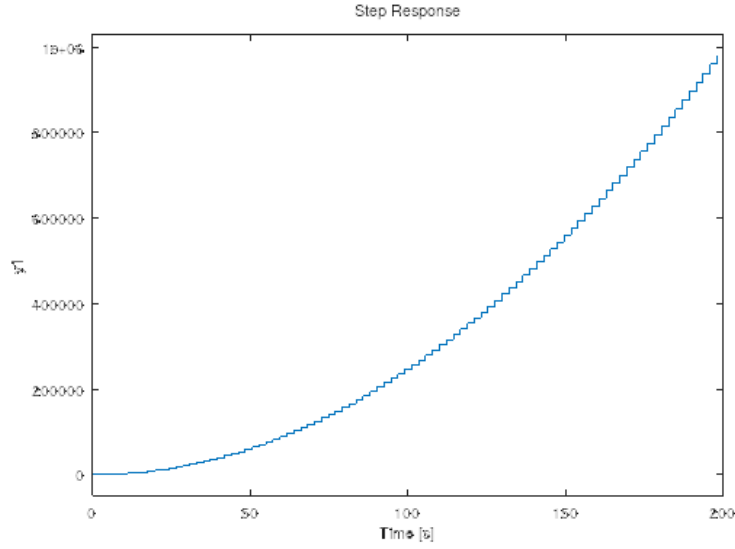


Figure 8: Respuesta al escalón del sistema discreto $G_D(z)$ con $T_s = 2.2\text{seg}$

Se tiene que la respuesta del sistema muestreado es inestable. Resulta más difícil recuperar la señal con filtros debido a que el tiempo de muestreo es mayor que en el caso anterior.

3.6 Sistema discreto

- Determinar el tipo de sistema.

Se obtiene la Función Transferencia del sistema discretizado.

$$G_d(z) = \frac{2.31z + 0.11}{z^2 - 2z + 1}$$

Se determina el tipo del sistema a partir del valor del error en estado estable para diferentes entradas (escalón unitario, rampa, parábola). Se calculan las constantes del error:

- Constante para el error a una entrada escalón unitario:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_d(z) = \infty$$

$$K_p = \infty$$

- Constante para el error a una entrada rampa:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T_s} G_d(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{0.22} \frac{2.31z + 0.11}{z^2 - 2z + 1}$$

$$K_v = \infty$$

- Constante para el error a una entrada parabólica:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{T_s^2} G_d(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{(0.22)^2} \left(\frac{2.31z + 0.11}{z^2 - 2z + 1} \right)$$

$$K_a = 50$$

Se calcula el valor del error en estado estable para cada una de las entradas propuestas:

$$e_{ss \text{ escalon}} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ss \text{ escalon}} = 0$$

$$e_{ss \text{ rampa}} = \frac{1}{K_v} = 0$$

$$e_{ss \text{ rampa}} = 0$$

$$e_{ss \text{ parabola}} = \frac{1}{K_a} = 0.02$$

$$e_{ss \text{ parabola}} = 0.02$$

Dados los valores de los errores, se concluye que el sistema es de tipo 2.

- Determinar la constante de error de posición K_p y el error ante un escalón y verificar mediante la respuesta al escalón de lazo cerrado del sistema discreto como se muestra.

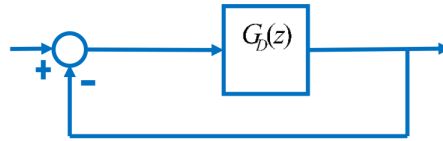


Figure 9: Sistema discreto $G_D(z)$ con realimentación unitaria

Se verifica la respuesta al escalón de lazo cerrado del sistema discreto:

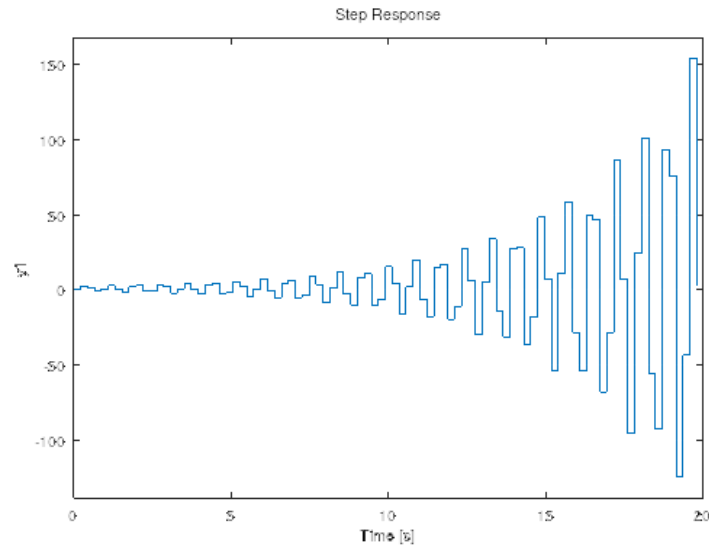


Figure 10: Enter Caption

Se obtiene la expresión del sistema discreto $G_D(z)$ realimentado:

$$F(z) = \frac{2.31z + 0.11}{z^2 + 0.31z + 1.11}$$

El sistema discreto a lazo cerrado diverge debido a que los polos toman los siguientes valores:

$$p_1 = -0.155 + 1.0421i \quad p_2 = -0.155 - 1.0421i$$

Se obtienen polos complejos conjugados. Se deben incluir ceros y ganancias para compensar el sistema y darle característica de estabilidad.

Se tiene una respuesta oscilatoria con amplitud creciente ya que el módulo de los polos cumplen con $r > 1$.

$$r = \sqrt{(-0.155)^2 + (-1.0421)^2} = 1.0536 > 1$$

Lo que asegura la divergencia.

- Verificar el error ante una rampa de entrada. ¿Converge o diverge? Explique la causa.

Se obtiene la respuesta del sistema respecto de una entrada rampa.

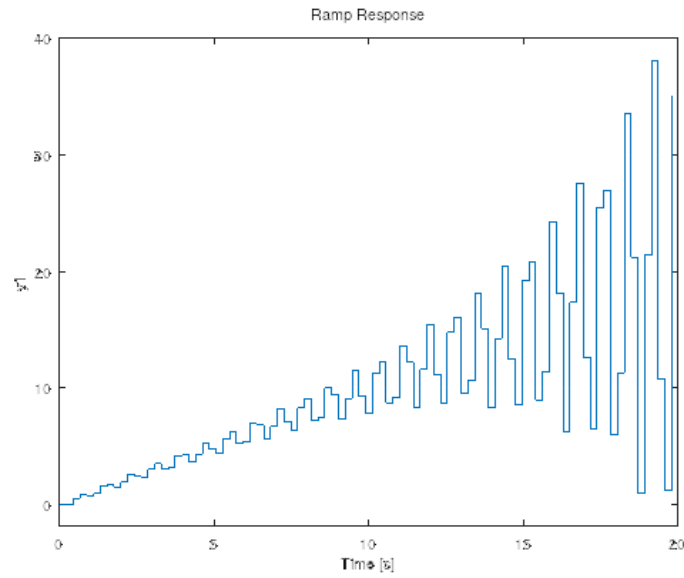


Figure 11: Respuesta del sistema respecto de una entrada rampa.

El sistema diverge con una entrada rampa.

3.7 Sistema a lazo cerrado con realimentación unitaria

- Graficar el lugar de raíces del sistema continuo $G(s)$ y del discreto $G_D(z)$ indicando las ganancias críticas de estabilidad (si las hubiera).

Para ambos casos ($G(s)$ y $G_D(z)$) se calcula el margen de ganancia con el siguiente código:

Se obtiene el lugar de raíces del sistema continuo $G(s)$:

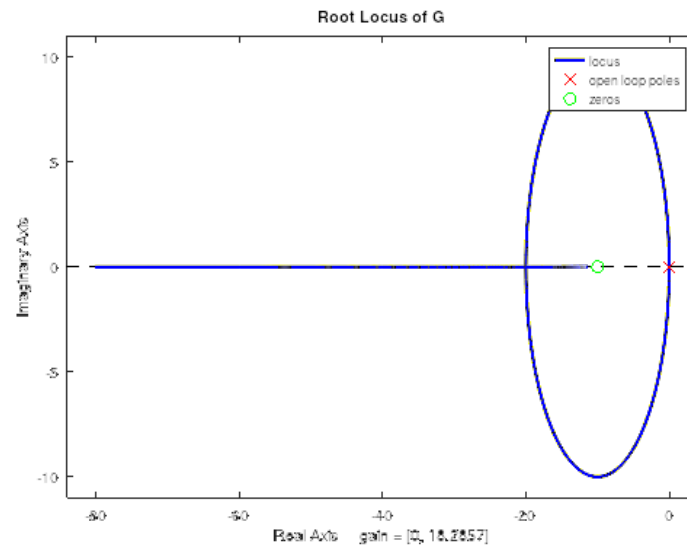


Figure 12: Lugar de raíces del sistema continuo $G(s)$

Para el sistema continuo de tienen polo de orden 2 en el origen, esto es:

$$p_1 = p_2 = 0$$

No tiene ganancia crítica de estabilidad, es decir, el sistema continuo es estable para $\forall K$.

Se obtiene el lugar de raíces del sistema discreto $G_D(z)$ con $T_s = 0.22 \text{ seg}$.

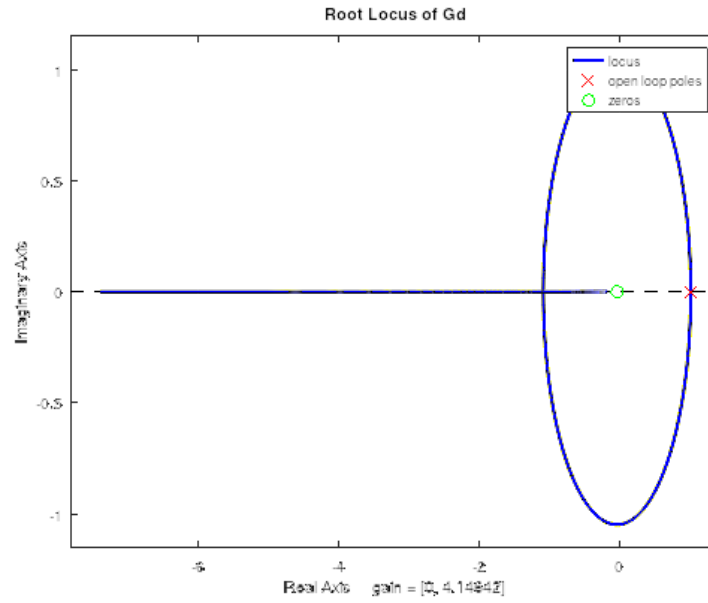


Figure 13: Lugar de raíces del sistema discreto $G_D(z)$

Se tiene un polo de orden 2:

$$p_1 = p_2 = 1$$

El valor de ganancia crítica de estabilidad para el sistema discreto $G_D(z)$ con $T_s = 0.22 \text{ seg}$.

$$K = 1.8182$$

Se obtiene el lugar de raíces del sistema discreto $G_D(z)$ con un tiempo de muestreo $T_s = 2.2\text{seg}$.

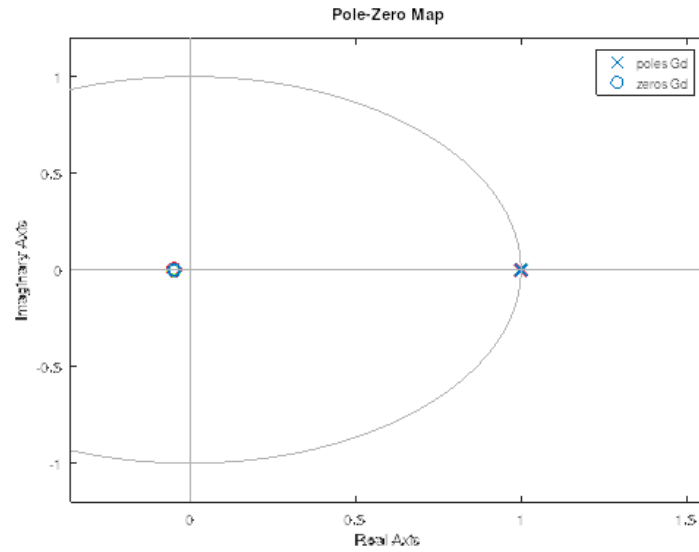


Figure 14: Lugar de raíces de $G_D(z)$ con $T_s = 2.2\text{seg}$

Se tiene un sistema inestable ya que tiene polos de multiplicidad 2 sobre el círculo unitario. Se tiene un cero cercano al origen de coordenadas el cual casi no influye en la respuesta transitoria del sistema.

- ¿Qué ocurre con la estabilidad relativa si se aumenta 10 veces el tiempo de muestreo original?

Se compara el lugar de raíces del sistema discreto $G_D(z)$ con un periodo de muestreo $T_s = 0.22\text{seg}$ y $T_s = 2.2\text{seg}$.

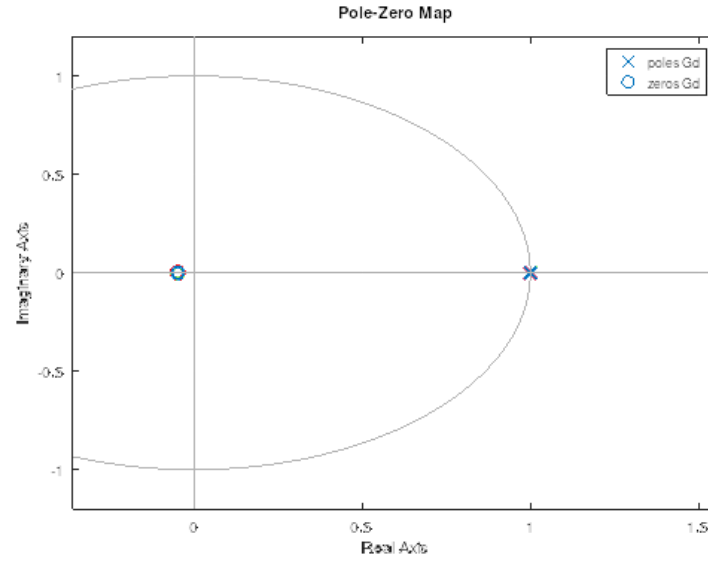


Figure 15: Lugar de raíces de $G_D(z)$ con $T_s = 0.22\text{seg}$

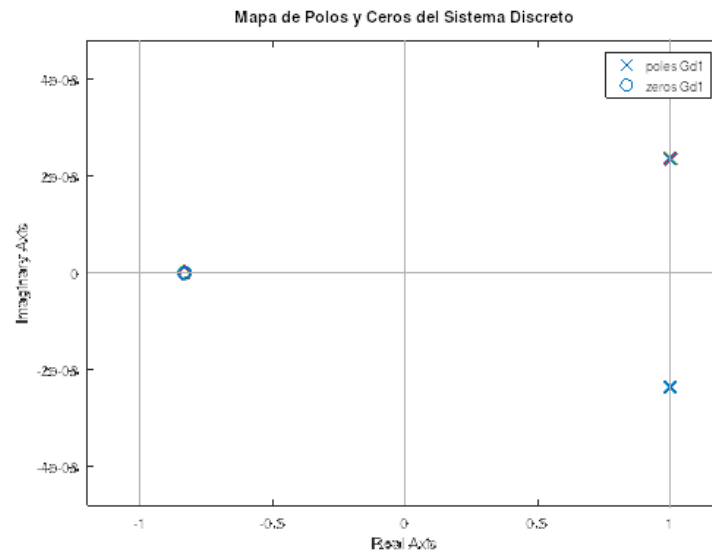


Figure 16: Lugar de raíces de $G_D(z)$ con $T_s = 2.2\text{seg}$

Si se aumenta 10 veces el tiempo de muestreo, se tiene que el sistema es

inestable para ganancias nominales. No modifica en gran medida el comportamiento con tiempo de muestreo $T_{s2} = 10T_s = 2.2\text{seg}$. Entonces se asegura que el sistema es inestable. La componente imaginaria de los polos introduce característica de oscilación mínima a la respuesta. Con respecto al cero se tiene que este se desplaza alejándose del origen del sistema de coordenadas sobre el eje real al valor de $z_1 = -0.8333$. Se tiene un mayor efecto del cero en la dinámica del sistema.

4 Conclusión

El estudio realizado permitió caracterizar el comportamiento de un sistema de control digital, destacando la influencia del tiempo de muestreo T_s en su estabilidad y desempeño. Se demostró que:

Estabilidad: El sistema discretizado con *ZOH* hereda la inestabilidad del sistema continuo original (polos en $p_1 = p_2 = 1$), el aumento de T_s no influye en gran medida a la condición de inestabilidad.

Error en estado estacionario: El sistema es de tipo 2, pero tiene característica de salida con amplitud que crece indefinidamente.

Tiempo de muestreo: Un T_s elevado (por ejemplo $10T_s$) reduce la estabilidad relativa, agregando oscilaciones por componente compleja en los polos como se observó en el lugar de las raíces y las respuestas temporales divergentes.

En aplicaciones reales, estos resultados enfatizan la necesidad de seleccionar un T_s adecuado y diseñar controladores (ej. PID discretos) para compensar los polos en el círculo unitario.