

Sistemas de Control II - Tarea 1 (Laboret)

Corvalán, Abel Nicolás

1 Introducción

En este trabajo, se analiza un sistema de control discreto basado en un retenedor de orden cero (ZOH), estudiando su estabilidad, error en estado estacionario y respuesta temporal ante diferentes entradas. A través de herramientas como la transformada Z y el lugar de las raíces, se evalúa el comportamiento del sistema tanto en lazo abierto como en lazo cerrado, considerando el efecto del tiempo de muestreo T_s y con una modificación del mismo. Este análisis es fundamental para entender las limitaciones y ventajas de los sistemas discretos en aplicaciones prácticas, donde el muestreo y la discretización introducen desafíos adicionales en el diseño de controladores.

2 Objetivo

Los objetivos de este trabajo son los siguientes:

Respecto del modelado y discretización:

- Obtener la función de transferencia discreta $G_D(z)$ de un sistema continuo $G(s)$ utilizando un retenedor de orden cero (ZOH) y un tiempo de muestreo T_s .
- Analizar el mapa de polos y ceros del sistema discretizado y compararlo con el sistema original.

Respecto a la estabilidad y error en estado estacionario:

- Determinar el tipo de sistema y calcular el error en estado estacionario para entradas escalón, rampa y parábola.
- Evaluar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el lugar de las raíces y el margen de ganancia.

Respecto al efecto del tiempo de muestreo:

- Investigar cómo el aumento del periodo de muestreo T_s afecta la estabilidad relativa y la respuesta temporal del sistema.
- Verificar la influencia de T_s en la ubicación de polos y ceros en el plano Z .

3 Desarrollo

3.1 Requerimientos del sistema

Los requerimientos del sistema son los siguientes:

Ganancia= 5.

Sobrepasamiento= 5.

tiempo de establecimiento= 3seg.

error de régimen ante escalón= 0.

- Obtener los valores de ζ , ω_0 y ω_d .

$$\zeta = \frac{-\ln(S/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(S/100)^2}}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(5/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(5/100)^2}} = 0.6901$$

$$\boxed{\zeta = 0.6901}$$

$$t_R(2\%) = \frac{4}{\zeta \omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{4}{\zeta t_R}$$

$$\boxed{\omega_0 = 1.9321}$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_d = 1.9321 \sqrt{1 - (0.6901)^2} = 1.3983$$

$$\boxed{\omega_d = 1.3983}$$

$$t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$t_d = \frac{2\pi}{1.9321} = 1.398$$

$$\boxed{t_d = 1.398}$$

- Calcular la cantidad de muestras por ciclo de la frecuencia amortiguada ω_d .

$$m = \frac{t_d}{T_m}$$

$$m = \frac{1.398}{0.22} = 20.4254$$

$$\boxed{m = 20.43}$$

- Mediante la equivalencia de planos s y z determinar la ubicación de los polos deseados en el plano z.

$$r = |z_{1,2}| = e^{-\zeta\omega_0 T_m}$$

$$\boxed{r = 0.746}$$

$$\Omega = \angle z_{1,2} = \pm\omega_d T_m$$

$$\boxed{\Omega = 0.3076}$$

- Seleccionar y diseñar al menos 2 controladores digitales en serie (PI, PD, PID o Adelanto) que cumplan (para los polos dominantes) las especificaciones dadas mediante SISOTOOL, en caso de que no se cumplan analizar el porque. La condición de error debe cumplirse con exactitud. Construir el sistema de lazo cerrado y verificar los polos, ceros y respuesta temporal mediante el siguiente código:

El sistema sin compensar tendrá un error nulo para una referencia escalón debido a los integradores que tiene. El sistema es inestable y con respuesta divergente debido a los polos ubicados en:

$$p_1 = p_2 = 1$$

El cero del sistema produce oscilaciones en la respuesta del sistema con una referencia escalón. La ubicación del cero es:

$$z_1 = -0.0476$$

Se presenta el lugar de raíces del sistema discreto.

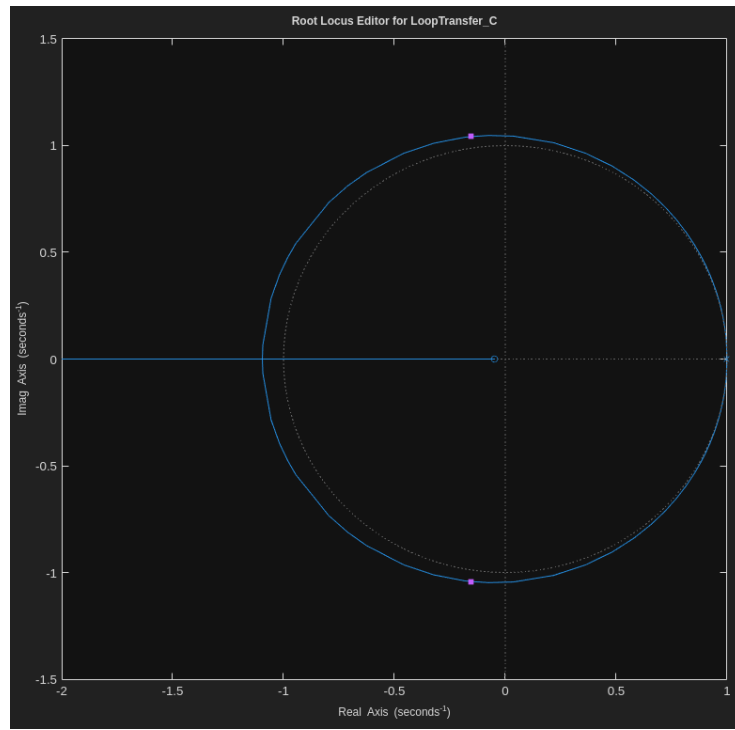


Figure 1:

Se opta por diseñar los siguientes controladores

Se descartan los controladores:

1. Proporcional (P): Sin combinación con otra acción de control. Esta acción solo nos permitiría cumplir con el requerimiento de ganancia, pero no nos permite modificar el sobrepasamiento de la respuesta del sistema.
2. Atraso (Lag): Nos permite cumplir con la ganancia estática y con respecto al error ya tendríamos el requisito debido a los integradores de la función transferencia del sistema. No es conveniente aplicar dicho compensador.
3. Proporcional Integrador (PI): Este controlador nos aumenta el tipo de sistema, por lo que no es conveniente, ya que con respecto al error permanente el sistema cumple con el requerimiento. Otra desventaja de usar estas acciones de control es que aumentarían la inestabilidad del sistema.
4. Proporcional Integrador Derivativo (PID): Agregaría un integrador más al sistema, lo cual no es recomendable por el requerimiento de

estabilidad. Los ceros aportarían mejor rechazo a las perturbaciones, pero no es conveniente debido a la característica anteriormente mencionada.

Se opta por el diseño de las siguientes alternativas:

1. Compensador en adelante: Mejora el margen de fase, lo que ajusta el sobrepasamiento y es posible ajustar la ganancia estática del sistema. Contribuye con ángulo positivo, proporciona amortiguamiento y mejora la estabilidad.

La expresión matemática de este compensador es la siguiente:

$$C(z) = K \frac{z - z_c}{z - z_p} \quad |z_c| > |z_p|$$

Donde el cero z_c está más cerca del origen que el polo z_p . Se presenta el lugar de raíces en el plano Z con el compensador en adelante aplicado:

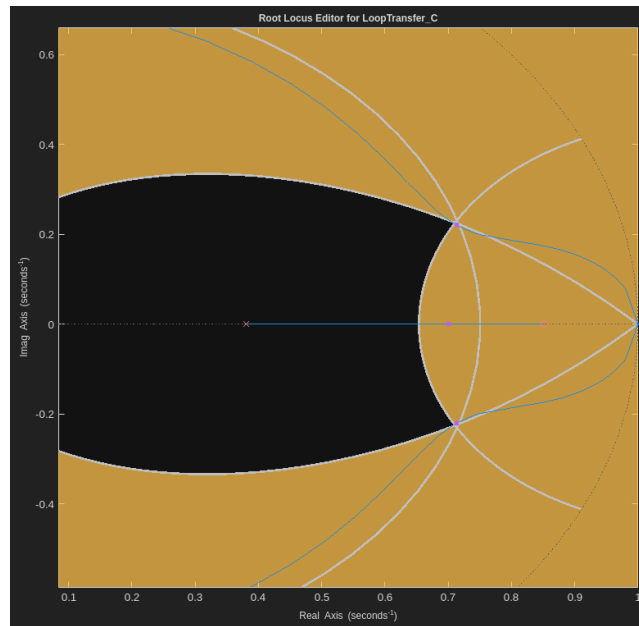


Figure 2:

Luego se presenta la respuesta del sistema frente a una señal de entrada al escalón:

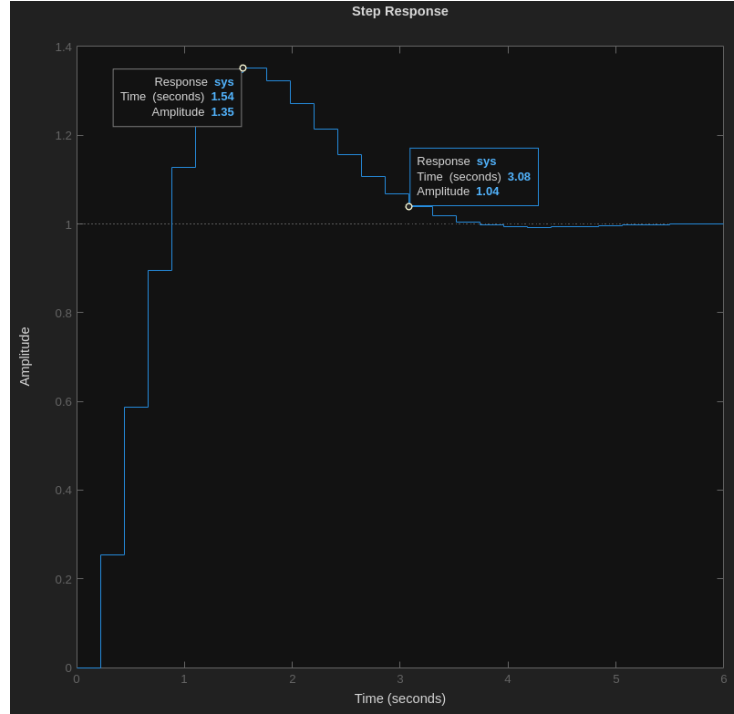


Figure 3:

En esta instancia se cumple aproximadamente requerimiento de tiempo de establecimiento al 2% de la ganancia estática con un valor de $1.04V$ (10% más alto que el esperado) del sistema en $t = 3 \text{ seg}$. El tiempo de establecimiento se verifica correctamente ya que se considera el muestreo del sistema. Se podría verificar con un tiempo de muestreo menor para cumplir con exactitud el requerimiento (a considerar el movimiento de los polos y ceros en el lugar de raíces). Se denota que el error en el estado en régimen de la respuesta es cero. Esto último se debe a los integradores propios del sistema. Luego se deberá ajustar la ganancia estática del sistema a $5V$.

Con respecto al sobrepasamiento no se cumple el requerimiento ya que el mismo debe ser del 5% ($0.05V$ para una entrada al escalón unitario). Se tiene que el sobrepasamiento de amplitud con el compensador aplicado es $1.35V$ (35%) en el tiempo $t = 1.54 \text{ seg}$.

2. Proporcional Derivativo (PD): Mejora la estabilidad (amortigua oscilaciones) y no afecta el error en régimen (condición que ya cumple el sistema). Consta de un polo en el origen, un cero y una ganancia

ajustable. Este controlador tiene un efecto similar al compensador en adelanto, pero con menor grado de libertad.

Esta alternativa consta de la siguiente expresión matemática:

$$C(z) = K_p + K_d \frac{z - 1}{T_s z}$$

Donde T_s es el periodo de muestreo.

Este controlador es útil para reducir el sobrepasamiento y acelerar la respuesta. Permite ajustar el valor ζ y ω_0 .

Se presenta el lugar de raíces en el plano Z con el controlador PID aplicado al sistema:

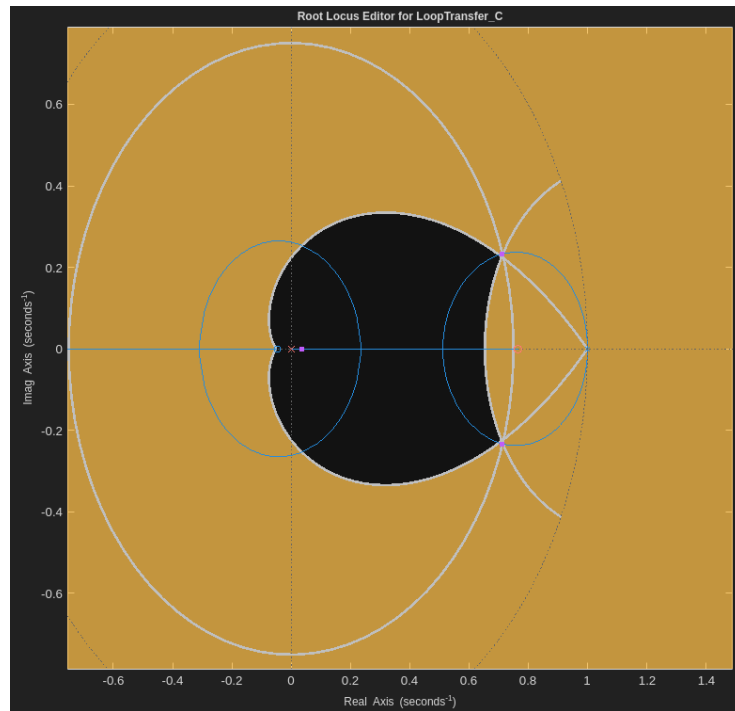


Figure 4:

Luego se presenta la respuesta del sistema frente a una señal de entrada al escalón:

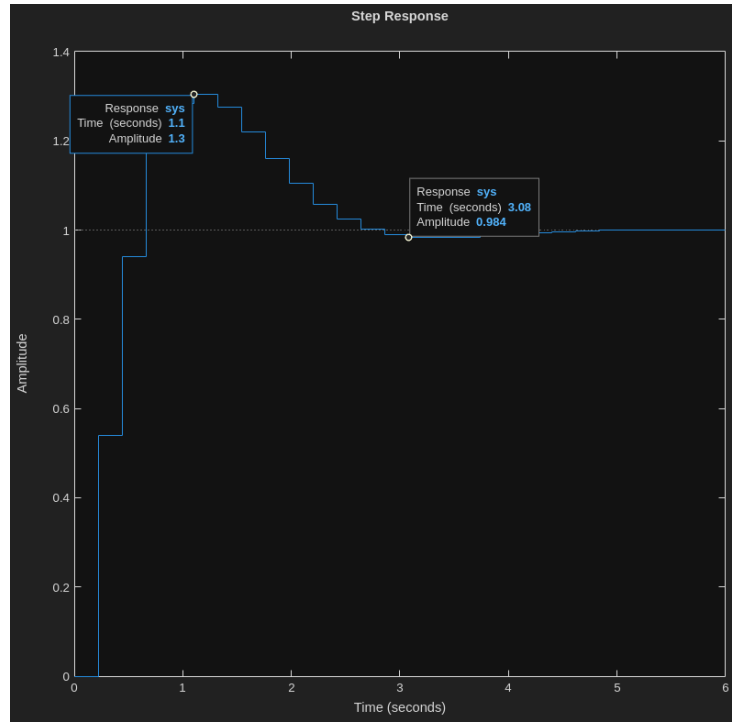


Figure 5:

Con respecto al sobrepasamiento no se cumple el requerimiento ya que se tiene una amplitud máxima de $1.3V$ y se requiera que sea un valor menor ($1.05V$). Es decir que se tiene un sobrepasamiento del 30%. La amplitud de establecimiento en 3 seg con un valor de $0.938V$, lo cual es el 1.6% de la ganancia estática, por lo que se cumple que la ganancia es menor al 2%.

- Simular mediante un diagrama Simulink el control que mejores prestaciones haya obtenido según se muestra en los diagramas adjunto graficando la salida, el error, las acciones de control individuales P, I, D o la de Adelanto (las que hubiera) y la acción de control total después del retentor de salida.

Se realiza la simulación del sistema con compensador en adelanto. Se muestra la función transferencia del compensador:

$$C(z) = 0.10955 \frac{(z - 0.8522)}{(z - 0.38)}$$

Se muestra el diagrama de implementación:

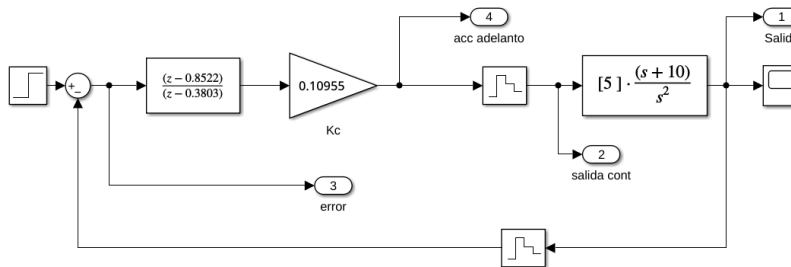


Figure 6:

Se grafica la salida del sistema:

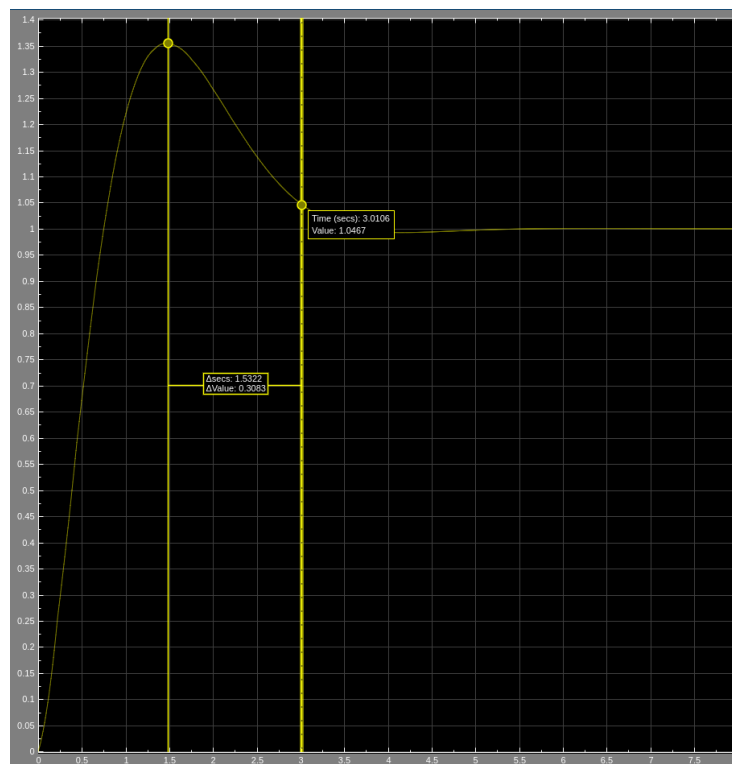


Figure 7:

Se grafica la salida del sistema, el error, señal de control y la acción derivativa:

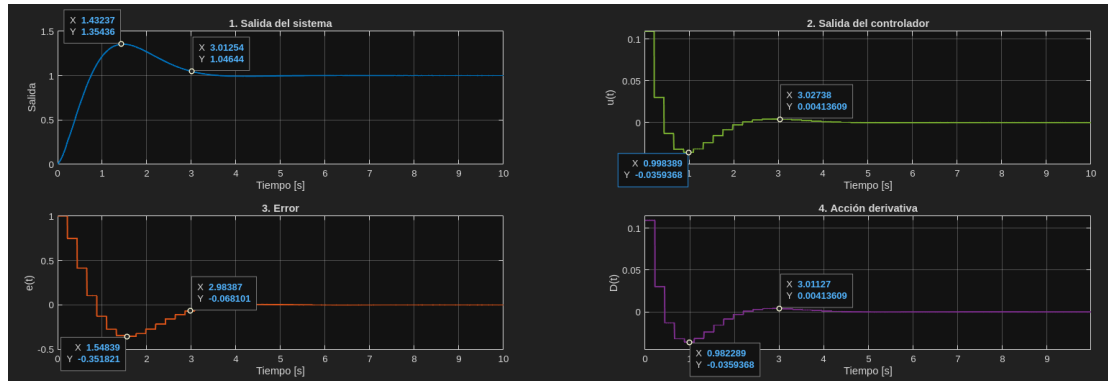


Figure 8:

Se realiza la simulación del sistema con el controlador PD. Se muestra la función transferencial del mismo:

$$C(z) = 0.1095 \frac{(z - 0.852)}{z}$$

Se muestra el diagrama de implementación:

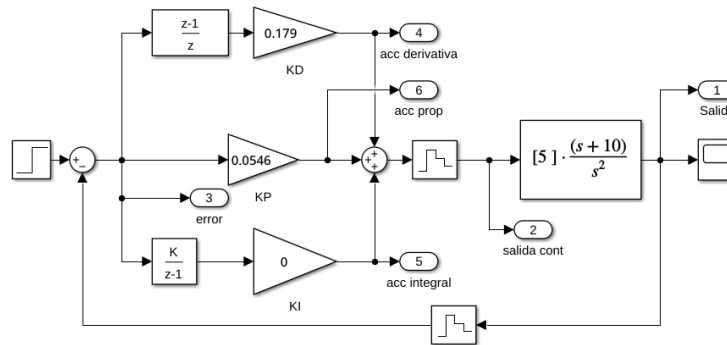


Figure 9:

Se grafica la salida del sistema:

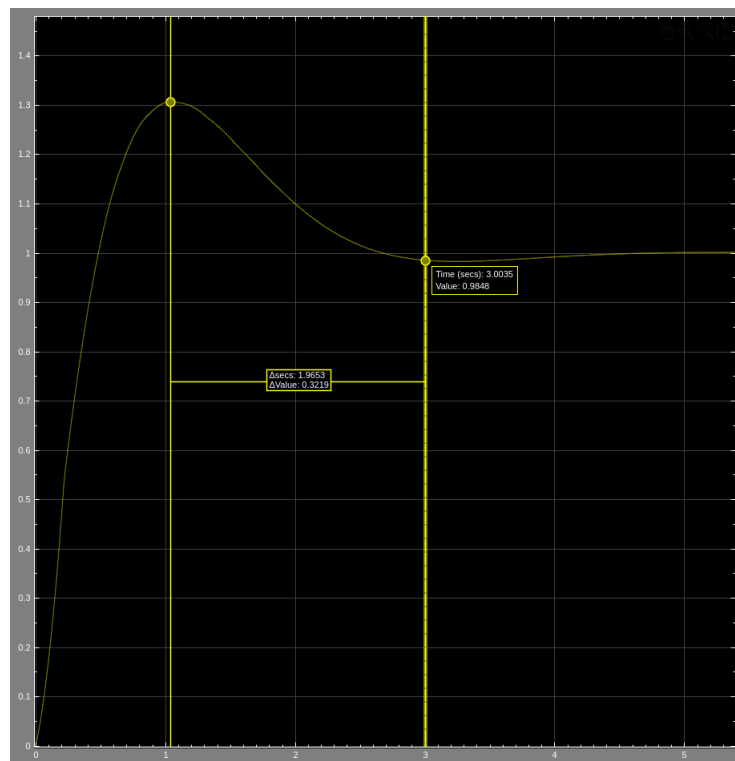


Figure 10:

Se grafica la salida del sistema, el error, señal de control, la acción derivativa y la acción proporcional:

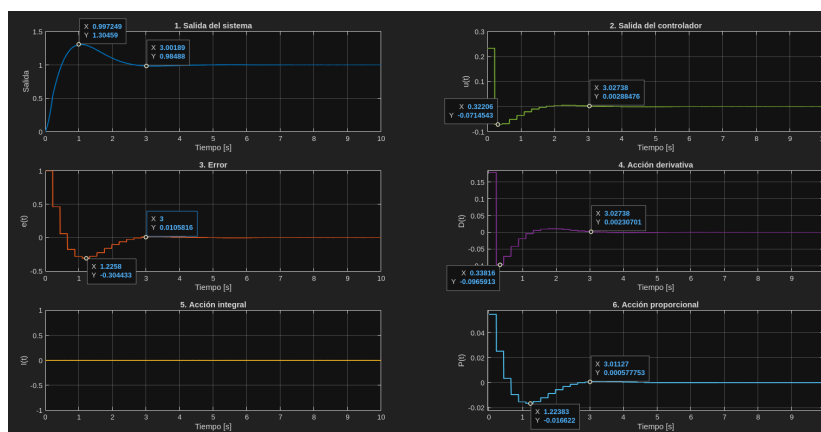


Figure 11: