

Sistemas de Control II - Tarea 1 (Laboret)

Corvalán, Abel Nicolás

1 Introducción

El péndulo simple es un sistema clásico en la teoría de control que presenta desafíos interesantes debido a su naturaleza no lineal. En este trabajo, estudiaremos el diseño de un controlador para estabilizar un péndulo en un ángulo deseado δ , considerando efectos como la fricción y la gravedad. El sistema está descrito por la ecuación diferencial no lineal:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin \theta = T$$

Donde:

- m es la masa del péndulo.
- l es la longitud del brazo.
- b es el coeficiente de rozamiento.
- T es el torque aplicado.
- θ es el ángulo del péndulo.

Para abordar este problema, seguiremos una metodología sistemática que incluye:

1. representación del sistema en variables de estado.
2. Linealización alrededor del punto de operación.
3. Diseño de un controlador con acción integral.
4. Análisis de robustez frente a variaciones paramétricas.

2 Objetivo

Objetivo principal de este trabajo es diseñar e implementar un controlador PID en la forma PI+D para estabilizar el péndulo simple en un ángulo deseado δ , garantizando:

1. Estabilidad: Que el sistema converja al punto de equilibrio deseado.
2. Precisión: Error en estado estacionario nulo mediante la acción integral.
3. Desempeño: Tiempo de establecimiento y sobrepaso dentro de especificaciones.
4. Robustez: Mantener un buen desempeño ante variaciones de parámetros (especialmente la masa).

Para lograr esto, seguiremos los siguientes pasos:

- Obtener el modelo no lineal en variables de estado.
- Calcular el torque estático necesario para el equilibrio.
- Linealizar el sistema alrededor del punto de operación.
- Diseñar un controlador por realimentación de estados con acción integral.
- Simular y analizar el comportamiento del sistema controlado.
- Evaluar la robustez del controlador ante variaciones paramétricas.

El trabajo combinará fundamentos teóricos de sistemas dinámicos, técnicas de control moderno y herramientas computacionales como MATLAB/Simulink para validar los resultados.

3 Desarrollo

A partir de la ecuación del péndulo simple, se debe estabilizar dicho sistema en el ángulo $\delta = 180$. Los parámetros del sistema son: $m = 2kg$, $l = 1$, $b = 0.3Nms$, $\delta = 135$.

Se toma como estados, entrada y salida respectivamente. Se debe desplazar el punto de equilibrio al origen tomando el error como salida.

$$x_1 = \theta - \delta = e$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$u = T$$

$$y = e$$

- Hallar el sistema dinámico en variables de estado.

Se obtiene de la asignación anterior:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = (-bx_2 - mgl\sin(x_1 + \delta) + T)\frac{1}{ml^2}$$

$$y = x_1$$

- Hallar el torque estático necesario u_f para que el sistema tenga como punto de equilibrio el origen, es decir $f(0, u_f) = 0$.

Se equilibra el sistema en $\theta = \delta$. Se considera $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ para que el sistema permanezca en ese estado indefinidamente si no hay perturbaciones externas (velocidad angular nula), por lo tanto:

$$u_f = mgl \sin \delta$$

El torque resultante es:

$$u_f = 2kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 1m \cdot \sin(180) = -16.02 Nm$$

La linealización nos provee las siguientes matrices para el modelado del sistema:

- Linealizar el sistema mediante la jacobiana.

Se linealiza el sistema en el punto de equilibrio $\theta = \delta = 180$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -0.15 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

$$x_{op}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -16.02 \end{bmatrix}$$

- Hallar los autovalores de A y determinar estabilidad por el método indirecto de Lyapunov.

Los autovalores de la matriz A son los siguientes:

$$\lambda_1 = 3.0882 \quad \lambda_2 = -3.2382$$

Se tiene que el sistema se encuentra linealizado en un punto de equilibrio inestable, dado sus polos de signo opuesto.

Se verifica la matriz controlabilidad del sistema:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB]$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.075 \end{bmatrix}$$

Cuyo rango debe ser igual a la cantidad de estados del sistema para ser controlable:

$$\text{range}(\mathcal{C}) = 2 = n_{\text{variables estado}}$$

El sistema es controlable.

- Comparar los resultados obtenidos con los de la linealización por Matlab y Simulink.
- Encontrar las matrices del sistema ampliado.

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 10 & -0.15 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de la matriz A_a (apliada son los siguientes):

$$\lambda = [0 \quad -3.2382 \quad 3.0882]$$

El sistema es inestable debido al polo con signo positivo. Se calcula la matriz controlabilidad del sistema:

$$\text{range}(\mathcal{C}) = 3 = n_{\text{variables estado}(A_a)}$$

El sistema ampliado es controlable.

- Diseñar por asignación de polos un controlador por medio del método de Ackermann. Con este cálculo se obtendrá la matriz de ganancia de realimentación K que ubicará los polos del sistema en posiciones deseadas, garantizando estabilidad y desempeño dinámico.

$$u = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \end{bmatrix}$$

Se debe ubicar un polo triple en $p = -4$ lo cual nos resulta una respuesta sin sobrepaso (si el sistema fuera lineal y no tuviera ceros de lazo cerrado) y el tiempo 2% sería $t_{ss} = \frac{7.5}{-p}$

Se obtienen la siguiente matriz de ganancias K :

$$K = [116 \quad 23.7 \quad 128]$$

Los autovalores del sistema en lazo cerrado son los siguientes:

$$\lambda = [-4, -4, -4]$$

Como se requería al aplicar el método de asignación de polos. Luego se calcula el tiempo de respuesta que luego se contrastará con el de simulación.

$$t_s \approx 1.87seg$$

- Simular el péndulo con PID como se muestra en la figura partiendo del origen con velocidad nula y referencia $\delta = 180$.
- Obtener los gráficos de evolución de la salida, el plano de fases, el torque total y la acción integral, comparar con el valor de u_f calculado antes y verificar sobrepaso y tiempo de establecimiento real versus el calculado.

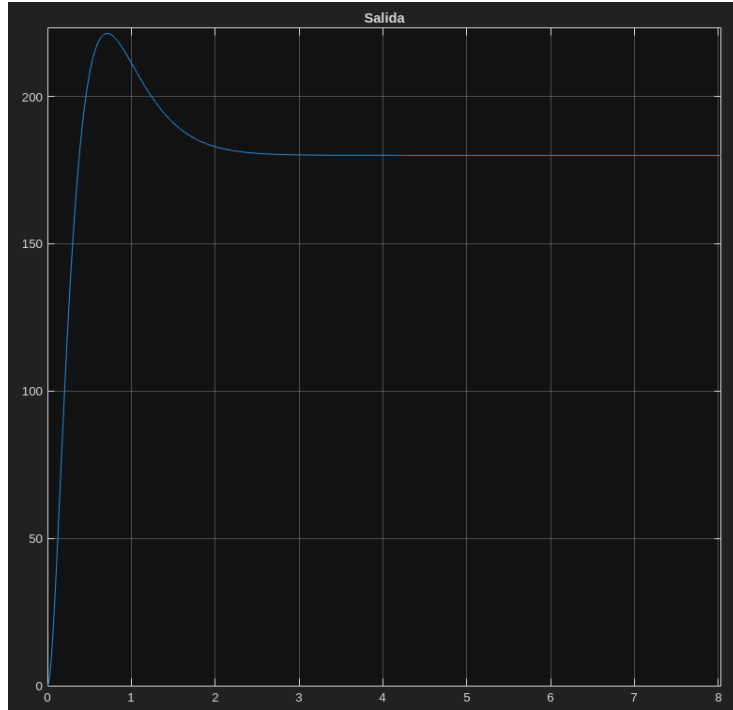


Figure 1: Enter Caption

En la salida se tiene las siguientes características:

Amplitud pico= 221.38. Sobrepasamiento= 22.98%. Error en régimen permanente= 0. Tiempo de establecimiento a (2%) $t_{ss} = 1.923 seg$. Amplitud en t_{ss} (tiempo de establecimiento)= 183.6.

Se tiene en contraste con los valores calculados que el tiempo de establecimiento en la simulación t_{ss} es mayor que el calculado con una diferencia de: $|t_{ss\text{ calculado}} - t_{ss\text{ simulación}}| = |1.875seg - 1.9296seg| = 55mseg$.

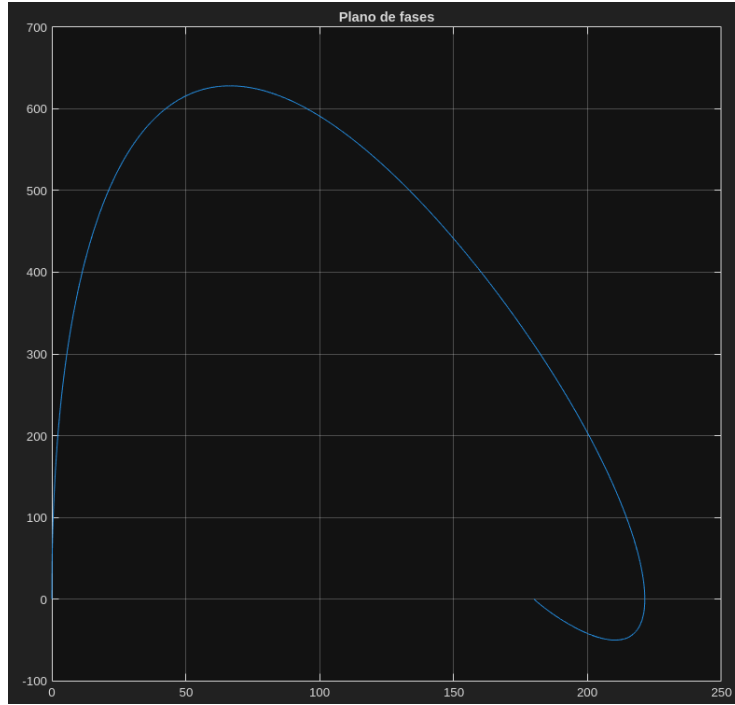


Figure 2: Enter Caption

Plano de fase

La curva comienza con una gran pendiente, indicando que el péndulo parte con una velocidad angular alta y una posición angular cercana a cero. Esto es típico de un impulso inicial fuerte (alta energía).

A medida que avanza el tiempo, el sistema va perdiendo energía debido a que se va acercando al punto de operación inestable $\delta = 180$.

Además, como la trayectoria no es cerrada y tampoco se repite indica que no se mantiene una oscilación cíclica, sino que el sistema está siendo llevado hacia un estado estacionario.

La gráfica sugiere que el sistema tiene un control activo para mantenerse en el punto de equilibrio inestable.

Valor final del torque aplicado $u_f = -6.63 \cdot 10^{-13}$.

El torque comienza con un valor muy alto (mayor a 350), lo que indica que se aplica una gran fuerza inicial para mover rápidamente el péndulo desde su posición inicial (posiblemente estable, como el fondo) hacia el punto inestable.

El torque alcanza un valor mínimo negativo de aproximadamente -51.3 en $t \approx 0.38 \text{ seg}$.

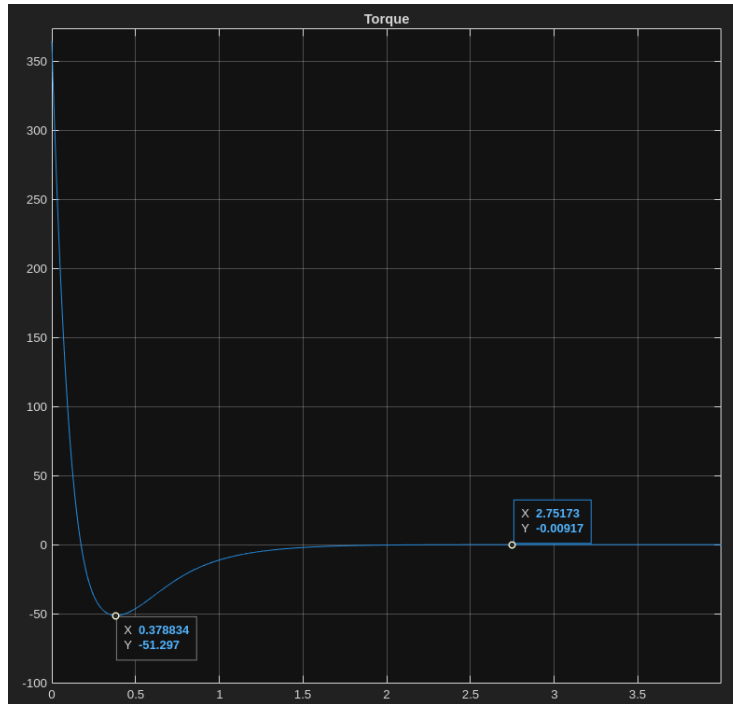


Figure 3: Enter Caption

Valor final de la acción integral $\sigma_{final} = -5.33.10^{-11}$.

- Analizar la robustez variando la masa del péndulo en mas y menos 10% analizar los nuevos valores de sobrepaso, tiempo de establecimiento y acción de control final, elaborar una tabla con los resultados para los distintos valores de masa.

Gráficos del sistema con masa disminuída un 10% de su valor ($m = 1.8kg$).

Salida del sistema.

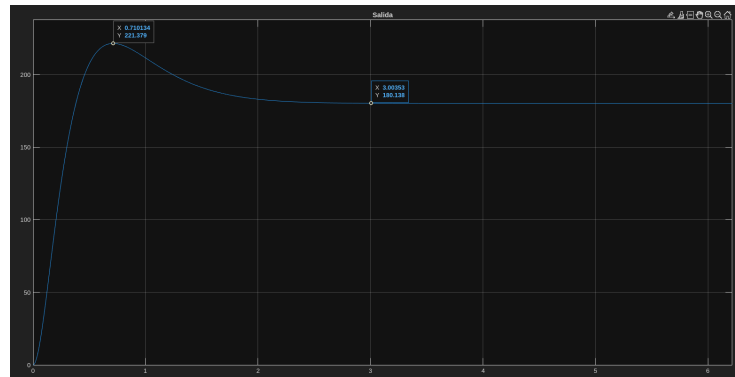


Figure 4:

Plano de fase.

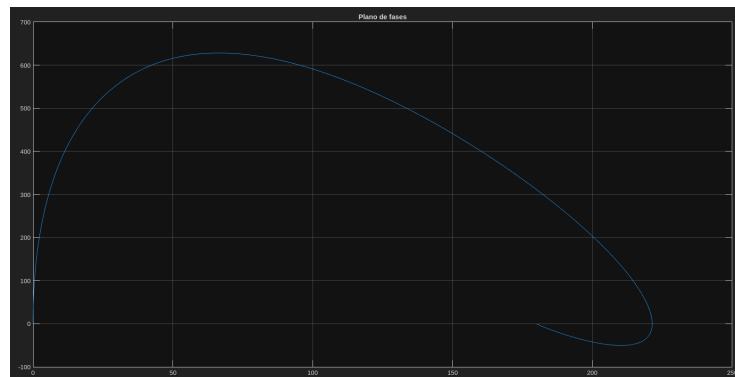


Figure 5:

Torque.

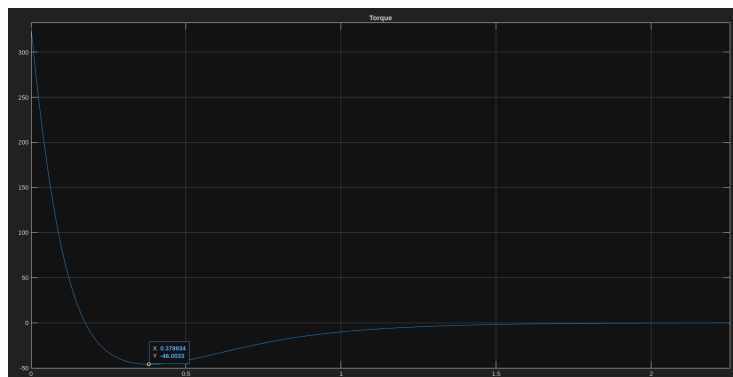


Figure 6:

Acción integral.



Figure 7:

Gráficos del sistema con masa aumentada un 10% de su valor ($m = 2.2kg$).
Salida del sistema.

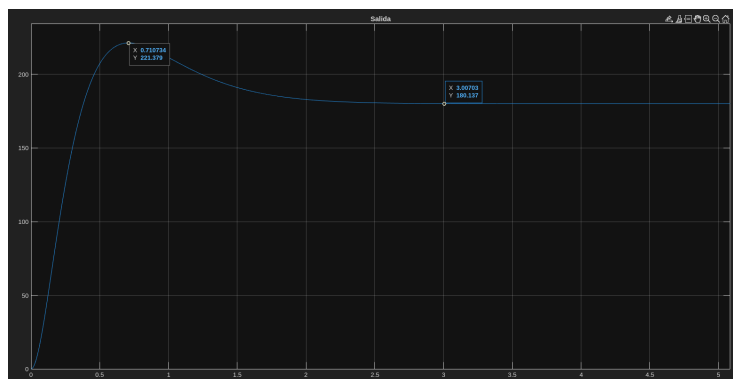


Figure 8:

Plano de fase.

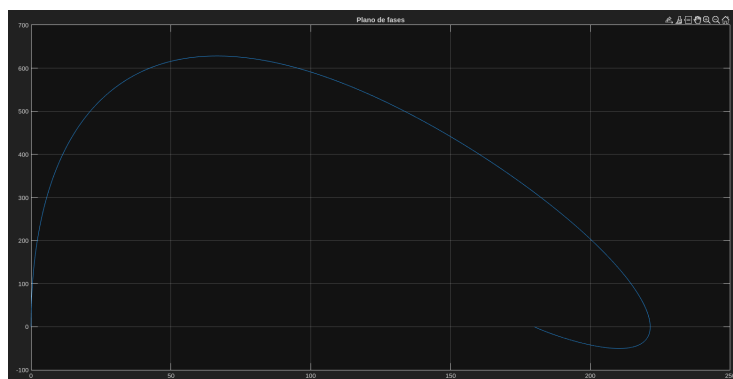


Figure 9:

Torque.

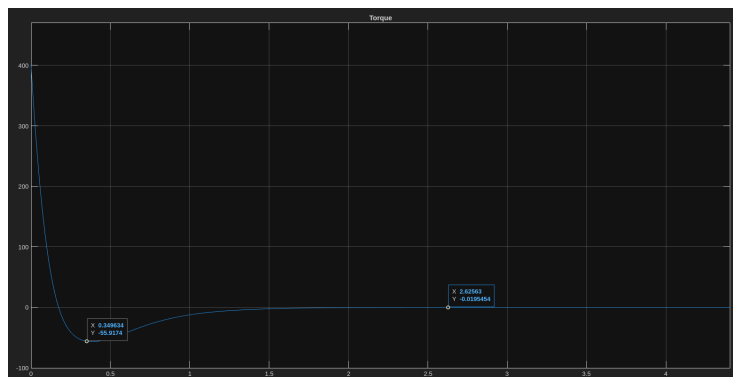


Figure 10:

Acción integral.



Figure 11: