

6. Observabilidad

La implementación de un controlador en el esquema de variables de estado exige la medición de todas las componentes del vector de estado. Esto no siempre es posible, por lo que se requiere de un mecanismo de cálculo que mida la salida y genere el vector de estados. Este mecanismo se denomina *observador*, y se expresa como

$$K_o : R^m \rightarrow R^n, \quad (6-1)$$

donde R^m es el espacio de la salida y R^n es el espacio de \mathbf{x} . Se logra obtener a \mathbf{x} a partir de mediciones de \mathbf{y} , implementando el esquema de la Fig. 6-1.

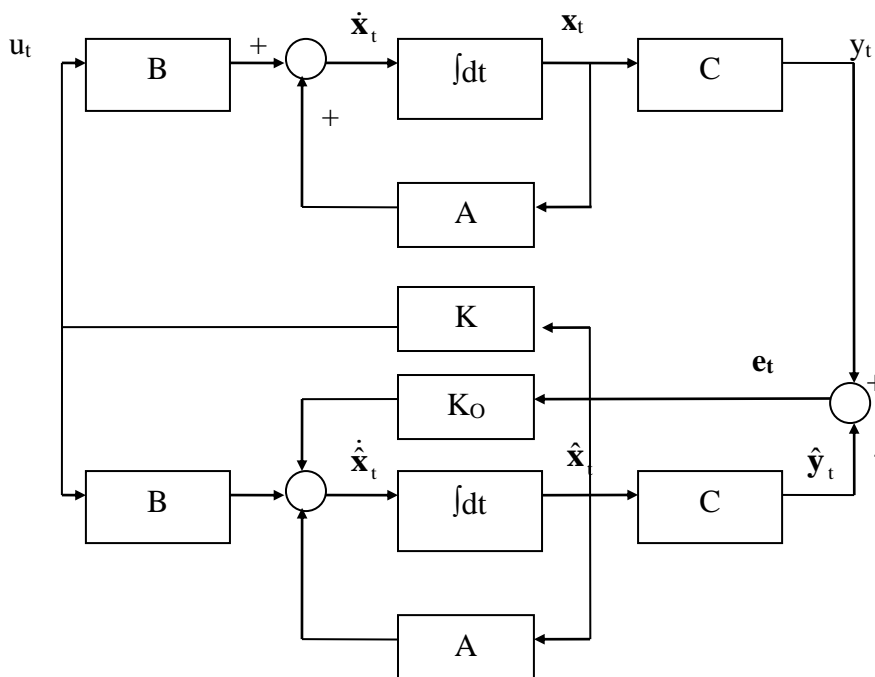


Fig. 6-1. Diagrama en bloques del sistema lineal con observador.

Se tienen entonces el sistema original

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6-2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-3)$$

y el sistema observador definido como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_o(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \quad (6-4)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-5)$$

donde el objetivo del observador es que $\hat{\mathbf{y}}_t \rightarrow \mathbf{C}\mathbf{x}_t$ en un tiempo adecuado a las necesidades del controlador que a su vez cumple los requerimientos del usuario. La dinámica del observador se estudia analizando el error de observación definido como

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (6-6)$$

y por lo tanto

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t). \quad (6-7)$$

Su dinámica, estará dada entonces, realizando la resta de los sistemas original y el observador, es decir a la Ec (6-2) se le resta la Ec (6-4)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{K}_o [\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))] \quad (6-8)$$

y empleando la definición del error (6-6), se tiene la dinámica del error de observación

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_o \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (6-9)$$

que tiene la matriz de observación $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_o \mathbf{C})$ y para que el error de observación se haga nulo, ésta matriz deberá tener sus autovalores en el semiplano izquierdo de plano complejo.

No obstante, en el marco de los sistemas lineales, sólo es posible la existencia de una matriz \mathbf{K}_o para realizar la generación de \mathbf{x} si el sistema es *Observable*.

6.1. Demostración de observabilidad

Un sistema lineal con salida y_t se denomina **observable** si cualquier estado x_t del mismo, puede ser determinado a partir de valores de la salida y_t , en un tiempo finito. Es decir, si es posible obtener x_0 a partir de y_t , para t finito.

Se hace aquí un análisis del concepto de observabilidad para un sistema monovariable. Las ecuaciones que modelan el sistema en el espacio de estado son

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6-10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-11)$$

se sabe que la solución del sistema es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) ds \quad (6-12)$$

de donde se obtiene la salida $y(t)$ como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) ds + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-13)$$

pero viendo el esquema de la Fig. 6-1, las multiplicaciones $\mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ se anulan, por lo que queda

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) ds. \quad (6-14)$$

De donde

$$\mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) ds = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0). \quad (6-15)$$

Sabiendo que

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k \quad (6-16)$$

se reemplaza en la (6-13) y se llega a

$$\mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-s) \mathbf{A}^k \mathbf{B}\mathbf{u}(s) ds = \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0).$$

$$(6-17)$$

Para analizar a \mathbf{x}_0 , se puede expresar como producto de matrices al primer término, ya que el resto es dato,

$$y(t) - \int_0^t C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-s) A^k B u(s) ds = C(\alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} + \alpha_2(t) \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1}) \mathbf{x}(0) \quad (6-18)$$

y también, en forma vectorial,

$$y(t) - \int_0^t C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-s) A^k B u(s) ds = [\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \dots \quad \alpha_{n-1}(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(0). \quad (6-19)$$

Este planteo debe permitir el cálculo para cualquier vector de $\alpha_i(t)$ y de \mathbf{x}_0 , por lo que la matriz

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

es la matriz que debe tener rango n para poder hallar \mathbf{x}_0 en el cálculo. Ésta matriz P es de orden $nm \times n$.

Para demostrar la condición *necesaria*, se observa que si el rango de $P < n$ entonces para algún $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ se tiene que $P\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ y por lo tanto no se puede determinar ése \mathbf{x}_0 a partir de y_t .

La condición de *suficiencia* de que el rango(P) sea n , se verifica como sigue. Asumiendo que el rango(P) es n , se premultiplican ambos miembros de la Ec (6-15) por $\exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{C}^T$,

$$\exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{C}^T \cdot \left[y(t) - \int_0^t C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-s) A^k B u(s) ds \right] = \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \exp(\mathbf{A} t) \cdot \mathbf{x}(0). \quad (6-21)$$

Integrando ambos miembros respecto del tiempo entre 0 y t , se obtiene una función \mathbf{Q}_t , como

$$\mathbf{Q}_t = \left(\int_0^t \exp(\mathbf{A}^T s) \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \exp(\mathbf{A} s) \cdot ds \right) \cdot \mathbf{x}(0) = \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{x}(0) \quad (6-22)$$

que es una cantidad conocida.

Nótese que si \mathbf{W}_t es singular o sea $|\mathbf{W}_t| = 0$ (determinante nulo), entonces

$$\mathbf{x}^T \mathbf{W}_t \mathbf{x} = \int_0^t \left\| \mathbf{C} \cdot \exp(\mathbf{A} s) \cdot \mathbf{x} \right\|^2 \cdot ds = 0 \quad (6-23)$$

lo que implica que

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{A}s} = \mathbf{0} \quad \forall 0 \leq s \leq t, \quad (6-24)$$

y por lo tanto el rango(\mathbf{P})< n .

De aquí se deduce que cuando rango(\mathbf{P})= n , \mathbf{W}_t es no singular y entonces

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{W}_t^{-1} \mathbf{Q}_t \quad \forall t. \quad (6-25)$$

6.2. Dualidad de los procesos lineales

La propiedad de dualidad relaciona a los conceptos de controlabilidad y observabilidad. Sea el sistema S_1 definido como

$$S_1 := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6-26)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sea el sistema S_2 definido como el sistema dual de S_1 , con

$$S_2 := \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{z}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (6-27)$$

donde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^r$. Además, la matriz de controlabilidad para el sistema S_1 es la definida por

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{M} \quad (6-28)$$

y la de observabilidad es la Ec (6-20). Por otro lado, las matrices de controlabilidad y observabilidad para el sistema S_2 son

$$\mathbf{M} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^{n-1})^T \mathbf{C}^T] \quad (6-29)$$

y la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6-30)$$

Entonces, el sistema S_1 es completamente controlable (observable) si y solo si el sistema S_2 es completamente observable (controlable).

El sistema S_1 es estable si y sólo si sistema dual S_2 es estable.

Esto explica la simetría que se encuentra en los resultados obtenibles para controlabilidad y observabilidad. La correspondiente demostración se encuentra en la bibliografía. Estas propiedades son de utilidad para el tratamiento de los sistemas de control con observador.

El cálculo del observador de la Ec. (6-1) se puede hacer a través del sistema dual, empleando la técnica de asignación de polos para el controlador.

6.3. Efecto de controlar un sistema empleando un observador

Una vez calculado el controlador y el observador, se debe analizar el efecto que tiene en el sistema de lazo cerrado la incorporación de este, dado que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6-31)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-32)$$

se hace la regulación del sistema mediante un controlador lineal, del tipo

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (6-33)$$

y sabiendo que el observador será

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_o(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \quad (6-34)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-35)$$

Entonces, el sistema resultante, reemplazando la observación de \mathbf{x}

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (6-36)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_o(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \quad (6-37)$$

lo que puede expresarse en un único sistema ampliado al doble de dimensión

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{K}_o\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{K}_o\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (6-38)$$

que, para incluir el error de estima en el vector de la ecuación, se puede premultiplicar miembro a miembro por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \quad (6-39)$$

y entre la matriz y el vector se multiplica por la identidad, expresando toda la ecuación diferencial, se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{K}_o\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{K}_o\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

lo que resulta en

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (6-41)$$

Esta ecuación diferencial debe ser estable, para lo que los autovalores deben tener parte real negativa. Entonces, la ecuación característica resulta

$$\left| \begin{bmatrix} s\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_o\mathbf{C} \end{bmatrix} \right| = 0. \quad (6-42)$$

Sabiendo que, por [propiedad de determinante de una matriz triangular particionada](#), se calcula la ecuación característica como

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_o\mathbf{C} \end{vmatrix} = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| \cdot |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_o\mathbf{C}| = 0. \quad (6-43)$$

Finalmente, el sistema completo tendrá un polinomio característico de orden $2n$, donde están las raíces del controlador y las del observador.

Así, el comportamiento del sistema de lazo cerrado controlador con observador de estados dependerá de los polos del observador y de los polos del controlador independientemente uno del otro. Esto permite calcular el controlador sin considerar al observador y a su vez, permite calcular al observador independientemente del controlador. Esta cualidad se conoce como “*Principio de certeza equivalente*”.

6.3.1. Determinación del tiempo de simulación y del intervalo de integración

Nótese que los polos del observador deberían ser más rápidos que los del controlador. Así, para determinar el tiempo de integración de Euler para realizar la simulación, se debe considerar la constante de tiempo al que corresponde el 95% de la dinámica más rápida $\exp(\lambda_R t)$ es $t_R = \ln(.95) / \lambda_1$

$$t_R = \frac{\ln(0,95)}{\lambda_R} \quad (6-44)$$

de donde se selecciona el tiempo de integración menor que ése t_R calculado.

Luego, para calcular el **tiempo de simulación** en el cual prácticamente ya no hay más transitorios, se toma la constante de tiempo más lenta y se calcula el tiempo para que la $\exp(\lambda_L t)$ llegue al 5%, ese tiempo sería

$$t_L = \frac{\ln(0,05)}{\lambda_L} \quad (6-45)$$

aunque cuando el sistema tiene oscilaciones muy lentas, es conveniente emplear el 1%,

$$t_L = \frac{\ln(0,01)}{\lambda_L}. \quad (6-46)$$

6.3.2. Ejemplo fase no mínima

Sea el ejemplo PM7.4 extraído de [2]

$$G(s) = \frac{(1+p)s - p}{s^2 + 3s + 6} \quad (6-47)$$

con $P=1$. Hallar un controlador y un observador que haga evolucionar al sistema desde cualquier condición inicial a una referencia dada. Ubicar los polos del controlador ampliado en -1, -3, -5 y los polos del observador en -1, -9.

El código .m está detallado en la Tabla 6-2, y los resultados de simulación en la Fig. 6-2.

```

clear all;clc;close all;
pkg load signal
% G
P=1;
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];%
% [A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
A(1,1)=0;A(1,2)=1;
A(2,1)=-den(3);A(2,2)=-den(2);
B(1,:)=0;B(2,:)=1;
C(1)=num(2);C(2)=num(1);D=0;
[n,d]=ss2tf(A,B,C,D)
Aa=[A,[0;0];-C,0];
Ba=[B;0];
%Cálculo del controlador por asignación de polos-----
Mat_Aa=Aa;Mat_Ba=Ba;
Mat_Ma=[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba]; %Matriz Controlabilidad
auto_val=eig(Mat_Aa);
c_ai=conv(conv([1 -auto_val(1)],[1 -auto_val(2)]],[1 -auto_val(3)]);
Mat_Wa=[c_ai(3) c_ai(2) 1 ;c_ai(2) 1 0 ;1 0 0];
Mat-Ta=Mat_Ma*Mat_Wa;
A_controlable=inv(Mat-Ta)*Mat_Aa*Mat-Ta; %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
Polos_deseados=[-12+1j;-12-1j; -5.0];
Polos_deseados=[-.3;-5; -1];
%K=place(Aa,Ba,Polos_deseados);
mui=Polos_deseados;
alfa_ia=poly(Polos_deseados);
%alfa_ia=conv(conv([1 -mui(1)],[1 -mui(2)]],[1 -mui(3)]);
Ka=flipplr(alfa_ia(2:4)-c_ai(2:4))*inv(Mat-Ta);
%Fin cálculo del controlador-----
K=Ka;
disp('Controlador ampliado en ')
eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka)
%Cálculo del Observador-----
A_d=A';
B_d=C';
C_d=B';
Polos_Obs=[-10;-9];
mui_d=Polos_Obs;
alfa_ia_d=poly(Polos_Obs);
Mat_M_d=[B_d A_d*A_d*B_d]; %Matriz Controlabilidad dual
auto_val_d=eig(A);
c_ai_d=poly(auto_val_d);
Mat_W=[c_ai_d(2) 1 ;1 0];
Mat_T_d=Mat_M_d*Mat_W;
Ko=(fliplr(alfa_ia_d(2:3)-c_ai_d(2:3))*inv(Mat_T_d))';
disp('Observador en ')
eig(A-Ko*C)
%FIN cálculo del Observador-----
%lamdaR=-10, por lo tanto el tiempo asociado es TR=log(.95)/lamdaR, h puede estar
% entre TR/3 y TR/10, o sea entre 1.7e-3 y 5.1e-4
% Taomax es del Controlador, la más lenta: lamda2=-0.1765 TL=log(0.05)/lamda2 =
16.9730;%
h=4e-3;
TFinal=16.9730;
Max_T =round(TFinal/h);
e=0;ys=[];ypp(1)=0;yp(1)=0;y(1)=0;t=[];
y(1)=0;
x=[yp(1);y(1)];ref=1;psi=0;
u=0;x_hat=[0;0];y_o(1)=0;acc(1)=0;
% G =
%      2 s - 1
%      -----
%      s^2 + 3 s + 6
for i=2:Max_T
    ua=u;

```

```

u=-K*[x_hat;psi];
psi_p=ref-y(ii-1);
psi=psi+psi_p*h;
up=(u-ua)/h;
ypp=2*up-1*u-3*yp(ii-1)-6*y(ii-1); %G de lazo abierto%
yp(ii)=yp(ii-1)+h*ypp;
y(ii)=y(ii-1)+h*yp(ii);
ys(ii-1)=y(ii);
t(ii-1)=ii*h;
x_hat_p=A*x_hat+B*u+Ko*(y(ii-1)-C*x_hat);
x_hat=x_hat+x_hat_p*h;
y_o(ii-1)=C*x_hat;
acc(ii-1)=u;
end
subplot(3,1,1);plot(t,ys,'k');title('Salida')
subplot(3,1,2);plot(t,ys-y_o,'k');title('Error de observación')
subplot(3,1,3);plot(t,acc,'k');title('Acción de control');xlabel('Tiempo [seg.]')
% save('PM7_4.mat','-v7');%

```

Tabla 6-1. Código .m del Controlador con observador por asignación de polos para el sistema de fase no mínima.

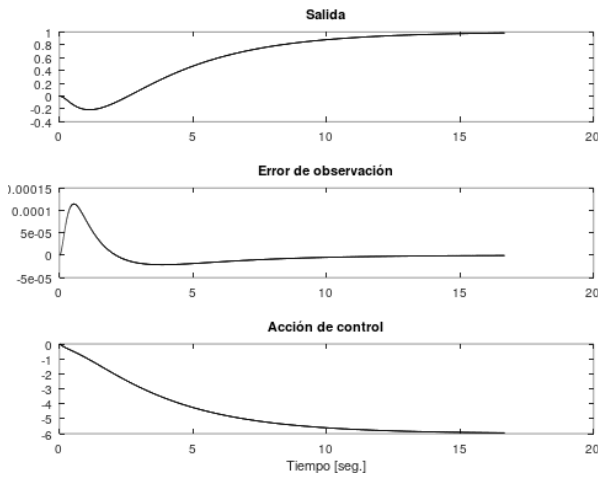


Fig. 6-2. Simulación del sistema controlador con observación de estados para el caso de fase no mínima.

6.3.3. Ejemplo péndulo invertido

Para el sistema carro-barra de la Fig. 6-3, diseñar un controlador de estados en el dominio del tiempo continuo sabiendo que las ecuaciones que describen al ángulo y al desplazamiento son,

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{\delta} + m\ddot{\phi}\cos\phi - m\dot{\phi}^2\sin\phi + F\dot{\delta} = u \\ l\ddot{\phi} - g\sin\phi + \ddot{\delta}\cos\phi = 0 \end{cases} \quad (6-48)$$

y que las matrices A y B del sistema linealizado para ángulo pequeño es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{lM} & \frac{g(m+M)}{lM} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix} \quad (6-49)$$

Se pide realizar el cálculo del controlador mediante asignación de polos al igual que el del observador y generar las trayectorias del sistema no lineal (6-48) mediante simulación para ángulos iniciales de 0,1 0,5 y 0,9 radianes con observador. Mantener los polos del Controlador iguales a los del Observador. Comparar los resultados para el caso en que no se utilice el Observador.

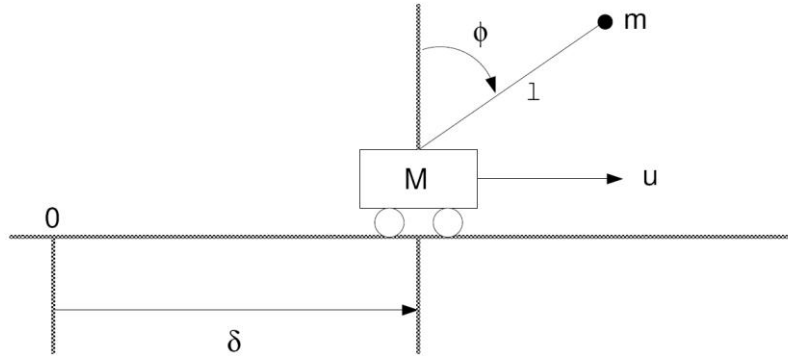


Fig. 6-3. Diagrama del sistema carro-barra para el péndulo invertido de [1].

Los resultados de la simulación están en las figuras Fig. 6-4, Fig. 6-5, Fig. 6-6 y Fig. 6-7, utilizando el código para Octave de la Tabla 6-2.

```

clc;clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
%Condiciones iniciales
%alfa(1)=.1; color='r';
%alfa(1)=.2; color='g';
%alfa(1)=.8; color='b';
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;indice=0;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
%
estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_C=[1 0 0 0]; %La salida es posición y ángulo
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_A);
c_ai=conv(conv(conv([1 -auto_val(1)], [1 -auto_val(2)]), [1 -auto_val(3)]), [1 -
auto_val(4)]);
Mat_W=[c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(2) 1 0 0;1 0 0 0];
Mat_T=Mat_M*Mat_W;
A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_A*Mat_T %Verificación de que T esté bien
%CONTROLADOR Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui :
mui(1)=-20;mui(2)=-5; mui(3)=-.1 + 0.5i;mui(4)=conj(mui(3));
alfa_i=conv(conv(conv([1 -mui(3)], [1 -mui(4)]), [1 -mui(2)]), [1 -mui(1)]);
K=flipplr(alfa_i(2:5)-c_ai(2:5))*inv(Mat_T);
eig(Mat_A-Mat_B*K)
Mat_A_O=Mat_A';
Mat_B_O=Mat_C';
Mat_M_Dual=[Mat_B_O Mat_A_O*Mat_B_O Mat_A_O^2*Mat_B_O Mat_A_O^3*Mat_B_O];%Matriz
Controlabilidad
alfaO_i=alfa_i;
% Ubicacion del Observador
% Algunas veces más rápido que el controlador
mui_o=real(mui)*20;
alfaO_i=conv(conv(conv([1 -mui_o(3)], [1 -mui_o(4)]), [1 -mui_o(2)]), [1 -mui_o(1)]);
Mat_T_O=Mat_M_Dual*Mat_W;
Ko=(flipplr(alfaO_i(2:end)-c_ai(2:end))*inv(Mat_T_O))';
eig(Mat_A_O'-Ko*Mat_C') %Verifico que todos los polos estén en el semiplano izquierdo
%lamdaR=-400, por lo tanto el tiempo asociado es TR=log(.95)/lamdaR, h puede estar
% entre TR/3 y TR/10, o sea entre 4.27e-5 y 1.28-5
% Taomax es del Controlador, la más lenta: lamda2=-0.1 TL=log(0.05)/lamda2 = 29.95;%
TFinal=50;
h=5e-5;tiempo=round(TFinal/h);p_pp=0;tita_pp=0;
x_hat=[0;0;0;0]; %Inicializo el Observador

```

```

while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
    % u(i)=-K*estado; color='*-b'; %Sin Observador
    u(i)=-K*x_hat; %color='.-r'; %Con Observador
    p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
    Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
    p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
    y_sal(i)=Mat_C*estado;
    % OBSERVADOR %
    y_sal_O(i)=Mat_C*x_hat;
    y_sal(i)=Mat_C*estado;
    x_hat=Mat_A*x_hat+Mat_B*u(i)+Ko*(y_sal(i)-y_sal_O(i));
    x_hat=x_hat+h*x_hatp;
    i=i+1;
end
figure(1);hold on; t=1:i;t=t*h;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad ángulo');hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,3);plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;
subplot(3,1,3);plot(t(1:end-1),u,color);grid on;title('Acción de
control');xlabel('Tiempo en Seg. ');hold on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid on;xlabel('Ángulo');ylabel('Velocidad
angular');hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posicion carro');ylabel('Velocidad
carro');hold on;

```

Tabla 6-2. Código para Octave del Controlador con observador por asignación de polos para el péndulo Invertido.

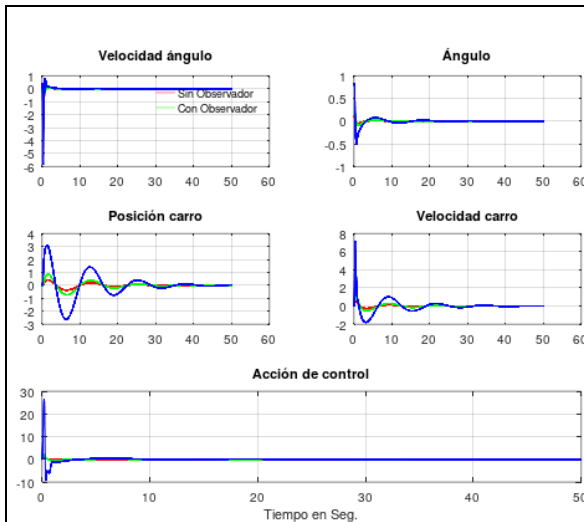


Fig. 6-4. Evolución del péndulo invertido con control y observación de estados a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente.

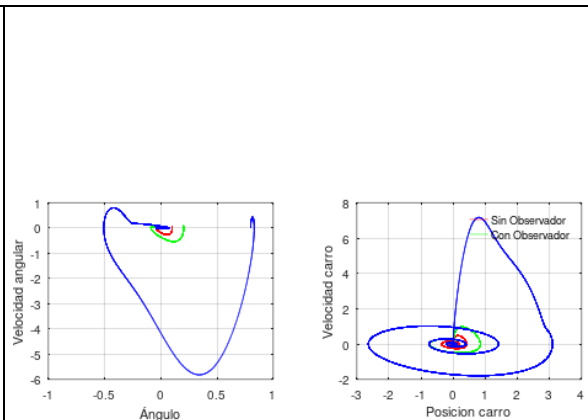


Fig. 6-5. Control con observación de estados: plano de fase obtenido a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente.

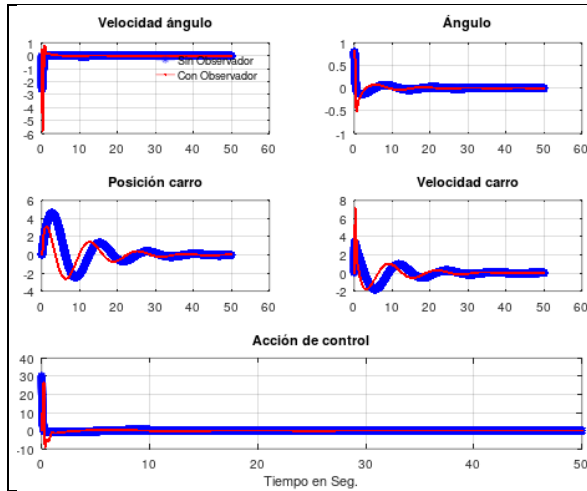


Fig. 6-6. Evolución del péndulo invertido a partir de 0,8 radianes, donde la línea fina corresponde al caso con Observador y la gruesa sin Observador de estados.

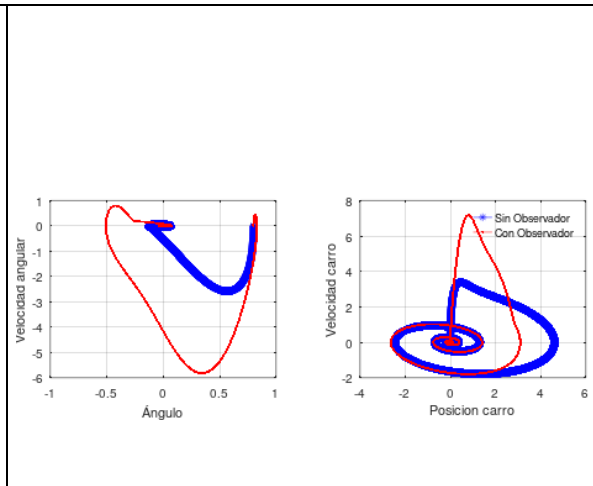


Fig. 6-7. Plano de fase obtenida a partir de 0,8 radianes, donde la línea fina corresponde al caso con Observador y la gruesa al caso sin Observador de estados.

6.3.4. Caso de controlador con referencia no nula y observación de estados

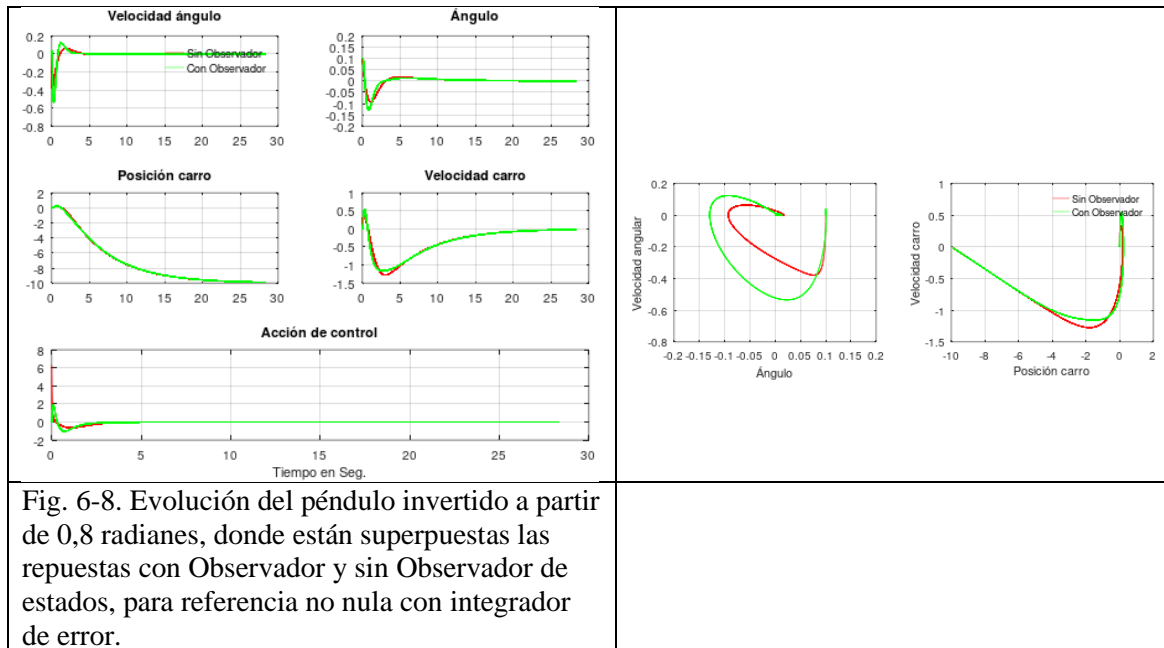
En la Tabla 6-3 se muestra el código .m para el control del péndulo invertido con referencia no nula y observador de estados. Nótese que el controlador es de orden incrementado ya que incorpora un integrador.

```
c clc; clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';
% alfa(1)=.5; color='g';
% alfa(1)=.8; color='b';
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i)]
Mat_A=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_C=[1 0 0 0]; %La salida es posición y ángulo
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_A);
c_ai=conv(conv(conv([1 -auto_val(1)], [1 -auto_val(2)]), [1 -auto_val(3)]), [1 -
auto_val(4)]);
Mat_W=[c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(2) 1 0 0;1 0 0 0];
Mat_T=Mat_M*Mat_W;
A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_A*Mat_T %Verificación de que T esté bien
% Construcción del sistema ampliado
Mat_Aa=[Mat_A zeros(4,1);-Mat_C 0];
Mat_Ba=[Mat_B;0];
Mat_Ma=[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba Mat_Aa^3*Mat_Ba Mat_Aa^4*Mat_Ba];%Matriz
Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_Aa);
c_ai=conv(conv(conv(conv([1 -auto_val(1)], [1 -auto_val(2)]), [1 -auto_val(3)]), [1 -
auto_val(4)]), [1 -auto_val(5)]);
Mat_Wa=[c_ai(5) c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(3) c_ai(2)
1 0 0;c_ai(2) 1 0 0 0;1 0 0 0 0];
Mat_Ta=Mat_Ma*Mat_Wa;
A_controlable=inv(Mat_Ta)*Mat_Aa*Mat_Ta; %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
mui(1)=-.7;mui(2)=-.7; mui(3)=-10 + 0.4i;mui(4)=conj(mui(3));mui(5)=-1;
alfa_ia=conv(conv(conv(conv([1 -mui(3)], [1 -mui(4)]), [1 -mui(2)]), [1 -mui(1)]), [1 -
mui(5)]);
Ka=(alfa_ia(2:6)-c_ai(2:6))*inv(Mat_Ta);
```

```

eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka)
K=Ka(1:4); KI=-Ka(5); %Los valores del controlador se obtienen del K ampliado
Mat_A_O=Mat_A';
Mat_B_O=Mat_C';
Mat_M_Dual=[Mat_B_O Mat_A_O*Mat_B_O Mat_A_O^2*Mat_B_O Mat_A_O^3*Mat_B_O]; %Matriz
Controlabilidad
% Ubicación del Observador. Algunas veces más rápido que el controlador
mui_o=real(mui)*5;
alfaO_i=conv(conv(conv([1 -mui_o(3)], [1 -mui_o(4)]), [1 -mui_o(2)]), [1 -mui_o(1)]);
Mat_T_O=Mat_M_Dual*Mat_W;
Ko=(flipr(alfaO_i(2:end)-c_ai(2:end-1))*inv(Mat_T_O))';
eig(Mat_A_O'-Ko*Mat_C) %Verifico que todos los polos estén en el semiplano izquierdo
%lamdaR=-50, por lo tanto el tiempo asociado es TR=log(.95)/lamdaR, h puede estar
% entre TR/3 y TR/10, o sea entre 3.4e-4 y 1.02e-4
% Taomax es del Controlador, la más lenta: lamda2=-0.1765 TL=log(0.05)/lamda2 =
16.97;%
taomax=1/.1765; TFinal=5*taomax;
h=2e-4; tiempo=round(TFinal/h); p_pp=0; tita_pp=0;
omega(1)=0; p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1; indice=0;
x_hat=[0;0;0;0]; %Inicializo el Observador
ref=-10; psi(1)=0;
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
    psi_p=ref-Mat_C* estado;
    psi(i+1)=psi(i)+psi_p*h;
    %u(i)=-K*estado+KI*psi(i+1); color='r';
    u(i)=-K*x_hat+KI*psi(i+1); color='g';
    p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
    Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
    p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
    y_sal(i)=Mat_C*estado;
    % OBSERVADOR %
    y_sal_O(i)=Mat_C*x_hat;
    y_sal(i)=Mat_C*estado;
    x_hatp=Mat_A*x_hat+Mat_B*u(i)+Ko*(y_sal(i)-y_sal_O(i));
    x_hat=x_hat+h*x_hatp;
    i=i+1;
end
figure(1); hold on; t=1:i; t=t*h;
subplot(3,2,1); plot(t, omega, color); grid on; title('Velocidad ángulo'); hold on;
legend('Sin Observador', 'Con Observador'); legend('boxoff');
subplot(3,2,2); plot(t, alfa, color); grid on; title('Ángulo'); hold on;
subplot(3,2,3); plot(t, p, color); grid on; title('Posición carro'); hold on;
subplot(3,2,4); plot(t, p_p, color); grid on; title('Velocidad carro'); hold on;
subplot(3,1,3); plot(t(1:end-1), u, color); grid on; title('Acción de
control'); xlabel('Tiempo en Seg.');
```

Tabla 6-3. Código .m para calcular un controlador en variables de estado con observador y referencia no nula con integrado mediante asignación de polos.



7. Controladores – Técnicas Modernas

7.1. Extensión a los sistemas multivariable

La metodología de diseño del controlador y del observador desarrollada para los sistemas mono variable, puede ser extendida a los sistemas multivariable.

Nótese que, si se pasivan todas las entradas salvo una y se calcula al controlador K para esa entrada, luego la suma de todas las entradas resultantes podría tener un comportamiento no deseado en cuanto a su dinámica resultante.

Para ello, se formula el problema de control considerando el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_t \end{cases} \quad (7-1)$$

y expresando a la acción de control mediante

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{K} \mathbf{x}_t \quad (7-2)$$

donde $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, \mathbf{u} y \mathbf{x} son funciones temporales con magnitudes $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, respectivamente.

Para ello, se define

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} \mathbf{h} \quad (7-3)$$

siendo la matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times e}$ y luego el vector $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^e$ se elige de manera tal que el par (\mathbf{A}, \mathbf{b}) sea controlable. Ahora se tiene un sistema mono variable con entrada u_t

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{b} u_t \quad (7-4)$$

y se busca el vector \mathbf{k}^T de realimentación para obtener a u_t

$$u_t = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_t \quad (7-5)$$

de manera que los autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ sean los mismos que los de $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$.

Igualando

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{h}\mathbf{k}^T] \quad (7-6)$$

se concluye por comparación que

$$\mathbf{K} = \mathbf{h} \mathbf{k}^T. \quad (7-7)$$

Se ha convertido el problema multivariable en un problema de una simple entrada, y por lo tanto se puede resolver con las ecuaciones del caso para la obtención de \mathbf{k}^T . El vector \mathbf{h} no es único, por lo que habrá más de una matriz de realimentación que cumpla con la asignación de polos requerida, la única restricción para \mathbf{h} es que el par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{h})$ sea completamente controlable.

7.2. Regulador óptimo lineal en tiempo continuo

Para el caso del diseño de controladores en espacio de estados y siempre que el sistema sea controlable, los polos de lazo cerrado pueden ubicarse en cualquier punto del plano complejo, pero el límite de las respuestas está dado por las acciones de control. La velocidad de respuesta del proceso y la magnitud de las acciones de control están inversamente relacionadas.

7.2.1. Motivación

Una solución se encuentra proponiendo un funcional de costo o función de valores reales que incluya estos elementos y luego realizar su minimización respecto de las variables de interés o respecto del controlador \mathbf{K} directamente.

El uso del criterio de minimización es ampliamente utilizado, incluso en controladores Entrada-Salida para optimizar los parámetros de PID, Fletcher-Powell [3] propone un método de optimización que fue incorporado inicialmente en el diseño del PID

$$J_t = J(e_t, u_t) = \int_0^{\infty} (e_t^2 + r u_t^2) dt \quad (7-8)$$

La solución analítica es posible solamente para controladores de bajo orden. Se puede minimizar a prueba y error numéricamente.

Para el diseño en el espacio de estados, se empleará el funcional

$$J_t = J(e_t, u_t) = \int_0^{\infty} (e_t^2 + r u_t^2) dt \quad (7-9)$$

El funcional propuesto es convexo y continuo de sus argumentos e_t y u_t . El controlador será óptimo en el sentido de éste funcional.

7.2.2. Formulación del problema

Dado el sistema lineal determinístico en tiempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_t \end{cases} \quad (7-10)$$

se desea encontrar una ley de control \mathbf{u}_t

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_t \quad (7-11)$$

que haga evolucionar al proceso desde $\mathbf{x}(0) \neq 0$ a $\mathbf{x}(\infty) = 0$ minimizando el funcional de costo

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (7-12)$$

con \mathbf{Q} simétrica y semidefinida positiva y \mathbf{R} simétrica y definida positiva.

Para diseñar el controlador en espacio de estados en el dominio del tiempo continuo, se

usará el segundo método de Lyapunov, porque no requiere resolver las ecuaciones diferenciales del sistema a controlar.

7.2.3. Estabilidad en el sentido de Liapunov

En general, el sistema se define como

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0$$

con la solución

$$\phi(t_0; x_0, t_0) = x_0.$$

Tener en cuenta que el estudio es en un punto denominado *equilibrio* que es un punto del espacio de estado, x_e , donde el sistema permanece, por lo que su velocidad es nula,

$$f(x_e, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\phi(t, x_0, t_0)$ es la solución de la ecuación diferencial, se tiene que con el equilibrio x_e

$$\phi(t, x_0, t_0) = x_e \quad \text{para todo } t \geq t_0 \geq 0.$$

Los sistemas lineales tienen el origen como único punto de equilibrio si \mathbf{A} es no singular.

Concepto: se definen las esferas $S(\delta)$ y $S(\varepsilon)$ alrededor del punto de equilibrio, $\forall t \geq t_0$ mediante

$$\begin{aligned} \|x_0 - x_e\| &\leq \delta, \\ \|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

respectivamente.

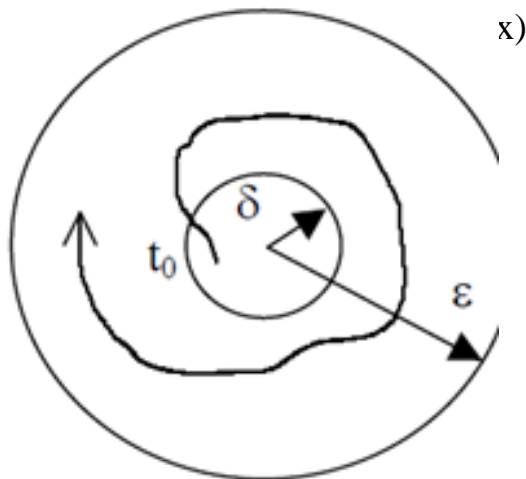


Fig. 7-1. Evolución de las soluciones de un sistema.

El sistema será *estable en el sentido de Liapunov* si para cada esfera $S(\varepsilon)$ existe una esfera $S(\delta)$ tal que las trayectorias que empiezan en $S(\delta)$ no salen de $S(\varepsilon)$ con $t \rightarrow \infty$.

Si δ no depende de t_0 , el equilibrio es *uniformemente estable*. Además, si $\phi \rightarrow x_e$, es *asintóticamente estable*.

El sistema será *inestable* si para algún $\varepsilon > 0$ y cualquier $\delta > 0$ siempre existirá un x_0 en $S(\delta)$ tal que las trayectorias que allí comienzan se salen de $S(\varepsilon)$.

En la Fig. 7-6 se puede observar un ejemplo práctico.

Funciones definidas positivas

Son funciones cuyo dominio es multidimensional y su imagen es real positiva, es decir $V : \mathcal{R}^{n \times m} \rightarrow \mathcal{R}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &> 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \text{ y además} \\ V(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{si } \mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

Es creciente en el tiempo si,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}_t) &> V(\mathbf{x}_{t_0}) \quad \forall t \geq t_0 \text{ y además} \\ V(0) &= 0 \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

7.2.4. Teorema de Liapunov

Sea la función escalar definida positiva $V(x)$ una función de energía (ficticia) que depende de x y no depende explícitamente de t . Si la derivada temporal de $V(x)$ es definida negativa entonces el punto de equilibrio x_e en el origen es uniformemente asintóticamente estable y la función $V(x)$ se denominará *función Liapunov*.

Es decir, sea el sistema representado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

con el equilibrio en el origen

$$\mathbf{f}(0, t) = 0 \quad \forall t$$

si existe una función escalar $V(x)$ con derivadas parciales continuas y cumple con

1- $V(x)$ es definida positiva para todo x_t .

2- $-\dot{V}(x)$ es definida positiva para todo x_t .

si $V(x) \rightarrow \infty$ con $\|x\| \rightarrow \infty$ el equilibrio 0 es uniformemente asintóticamente estable.

7.2.5. Ejemplo para el péndulo invertido

Para ilustrar el concepto de estabilidad, se puede emplear el caso del péndulo invertido cuando es actuado con una acción de control lineal, y un controlador estable comenzando en la condición inicial de 0,8 radianes respecto de la vertical teniendo como objetivo que vuelva a ser nulo. Se puede hacer el análisis para el modelo lineal y el modelo no lineal del sistema, que se muestra en la Fig. 7-2. Por otro lado, si se tiene en cuenta una no linealidad en el actuador que considera una zona muerta y luego sí comportamiento lineal como se detalla en la Fig. 7-4, entonces el sistema termina siendo inestable, como se puede ver en la Fig. 7-3. En las figuras Fig. 7-5 y Fig. 7-6 se muestran las evoluciones temporales de

las variables del péndulo invertido y el plano de fases respectivamente.

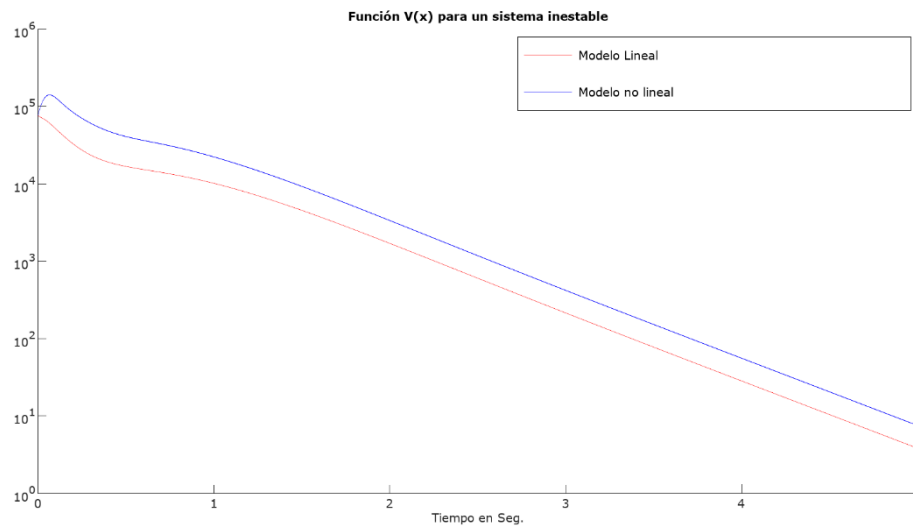


Fig. 7-2. Evolución temporal de la función de Liapunov $V(x_t)$ para el péndulo invertido sin restricciones en la acción de control.

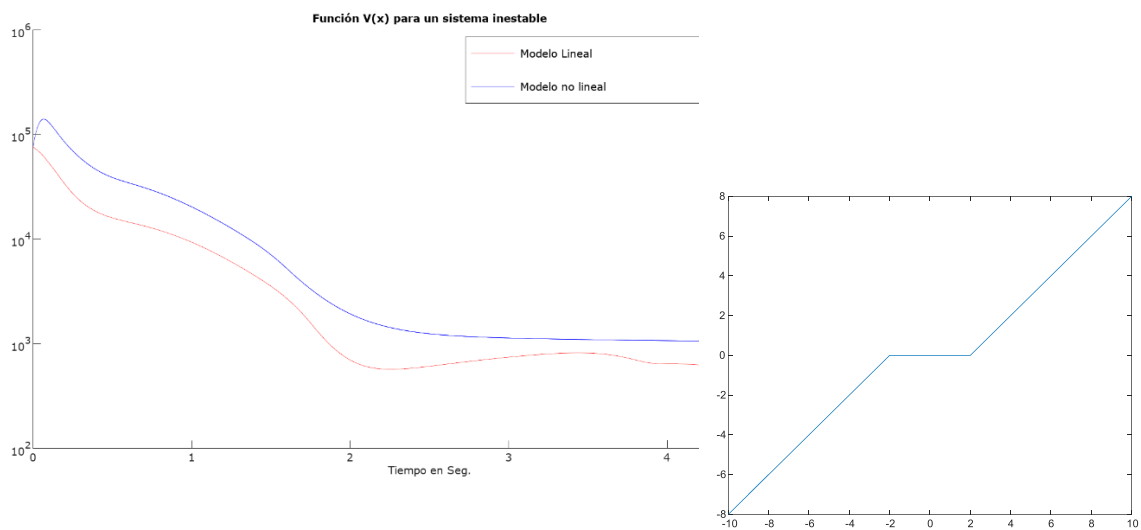


Fig. 7-3. Evolución temporal de la función de Liapunov $V(x_t)$ para el péndulo invertido con restricciones en la acción de control del tipo zona muerta de $|u_k|=2$ y lineal de allí en más.

Fig. 7-4. Modificación de no linealidad para considerar un actuador lineal con zona muerta.

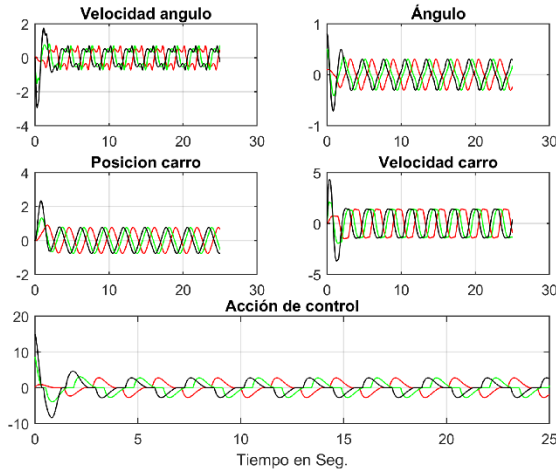


Fig. 7-5. Evolución temporal de las variables de estado del péndulo invertido con restricciones en la acción de control $|u_i| < 100$, y del tipo zona muerta como en la Fig. 7-4.

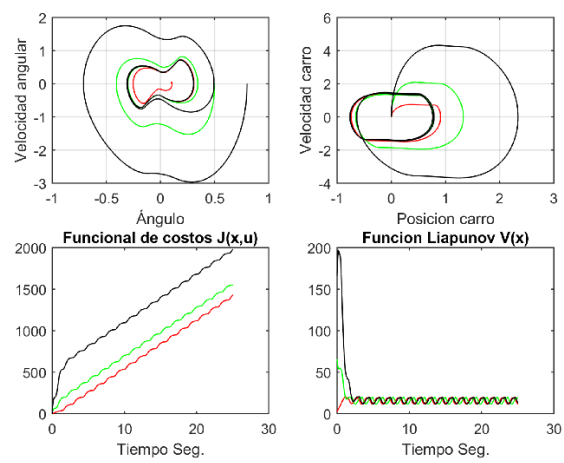


Fig. 7-6. Plano de fases del péndulo invertido con controlador que tiene zona muerta del tipo Fig. 7-4 en u_i .

7.2.6. Teorema de Krasovskii

Sea el sistema modelado mediante las ecuaciones

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (7-13)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y f es un vector cuyas n componentes son funciones no lineales. Para éste sistema, se define la matriz Jacobiano

$$F(x) = \frac{\partial f_1 \dots \partial f_n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (7-14)$$

Además, se define la matriz

$$\hat{F}(x) = F^T(x) + F(x), \quad (7-15)$$

se establece una función Liapunov para este sistema haciendo

$$V(x) = f^T(x) \cdot f(x), \quad (7-16)$$

debido a que

$$\dot{V}(x) = f^T(x) \cdot \hat{F} \cdot f(x). \quad (7-17)$$

7.2.7. Aplicación en sistemas lineales

Sea el sistema modelado mediante las ecuaciones lineales homogéneas

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0. \quad (7-18)$$

Se elige la función candidata de Liapunov

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x, \quad (7-19)$$

siendo P una matriz simétrica y definida positiva, la derivada temporal de V(x) es

$$\dot{V}(x) = x^T \cdot (A^T P + PA) \cdot x \quad (7-20)$$

donde se requiere que la matriz entre paréntesis sea definida negativa para que la candidata V(x) propuesta sea función de Liapunov. Por lo tanto, debe cumplirse que

$$-Q = A^T P + PA \quad (7-21)$$

donde Q debe ser definida positiva.

Para verificar la existencia de P, se hace el estudio sobre

$$(A^T P + PA) = -I,$$

igualando a Q con la matriz identidad.

Por ejemplo, en la Tabla 7-1 hay un código para Octave que permite verificar mediante el cálculo de los autovalores de A si es estable, y luego inspeccionar que el segundo método de Liapunov da un resultado acorde con la matriz P. Si se cambia a algún signo de la última fila de A se observa que la matriz P deja de ser definida positiva.

```
clc;clear all;
clear all;clc;
A=[0 1; -1 -1];
eig(A)
syms P11 P12 P22;
P=[P11 P12;P12 P22];
H=A'*P+P*A+eye(2);
[a11,a12,a22]=solve(H(1,1),H(1,2),H(2,2));
M_P=eval([a11,a12;a12,a22])
if(M_P>0)
    fprintf('P es definida positiva \n');
else
    fprintf('P no es definida positiva \n');
end
```

Tabla 7-1. Algoritmo para verificar la estabilidad

Nótese la relación existente entre la función Liapunov V(x) y su derivada temporal, las expresiones (7-20) y (7-21) muestran que

$$\frac{\partial}{\partial t}(x^T \cdot P \cdot x) = x^T \cdot (A^T P + PA) \cdot x = -x^T \cdot Q \cdot x. \quad (7-22)$$

7.2.8. Problema de control óptimo cuadrático

Se usará el segundo método de Liapunov para resolver el problema del control óptimo formulado. Primero se fijan las condiciones de estabilidad y luego se diseña el controlador

dentro de esas condiciones. El método supone que el sistema es controlable.

Reemplazando (7-11) en la primera ecuación del sistema (7-10), se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}_t = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \cdot \mathbf{x}_t \quad (7-23)$$

donde se asume que $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ es estable, es decir, tiene todos los autovalores con parte real negativa. Sustituyendo (7-11) en (7-12),

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + (\mathbf{K} \mathbf{x})^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt. \quad (7-24)$$

Nótese que éste funcional $J(\mathbf{x}, u)$ contiene la información de las energías asociadas al proceso, y es posible asociarle (no igualarle) una primitiva que sea una función Candidata Liapunov, por ejemplo

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}, \quad (7-25)$$

que a su vez, para que sea Función Liapunov, su derivada temporal deberá ser definida negativa. Derivando entonces, respecto a t se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} \quad (7-26)$$

es decir

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left((\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \right) \mathbf{x}, \quad (7-27)$$

que puede igualarse a una función cuadrática definida negativa la cual está asociada (no igualada) con el argumento de la integral de (7-24), siguiendo con el razonamiento de la (7-21) lo que resulta en

$$\mathbf{x}^T \left((\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \right) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \cdot \mathbf{x}, \quad (7-28)$$

que debe resolverse en \mathbf{P} simétrica y definida positiva. Como la condición (7-28) debe cumplirse para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se resuelve la igualdad a partir de igualar las matrices de ponderación de la forma cuadrática. Por lo tanto,

$$-\left((\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \right) = \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}, \quad (7-29)$$

corresponde al argumento del funcional de costos a minimizar,

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}). \quad (7-30)$$

Para hallar \mathbf{K} , se minimiza la expresión (7-30) respecto de \mathbf{K} , teniendo en cuenta las reglas de derivación matricial e igualando a $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ el resultado verificando que la derivada segunda de (7-30) sea positiva para que el extremo sea un mínimo.

Explicitando para ver en los términos su dependencia con \mathbf{K} ,

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{K}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P}) + \mathbf{P} \mathbf{A} - (\mathbf{P} \mathbf{B}) \mathbf{K}. \quad (7-31)$$

Dada una matriz \mathbf{M} y dos vectores uno \mathbf{x} y otro \mathbf{y} se verifica

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{y} ; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{x} ; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{M} \cdot \mathbf{x},$$

(7-32)

pero la tercera propiedad sólo es válida si \mathbf{M} es simétrica.

Derivando la (7-30) respecto a \mathbf{K} , se tiene

$$0 = -\mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{B}^T \mathbf{P} + 2\mathbf{R}\mathbf{K}$$

y la derivada segunda de (7-30) es

$$2\mathbf{R}^T$$

que es definida positiva, lo que indica que el extremo de la derivada primera es un mínimo. Como \mathbf{R} es matriz de diseño, se puede asegurar que sea definida positiva.

Por lo tanto, igualando a cero la derivada primera y despejando \mathbf{K} se tiene que

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (7-33)$$

La ley de control será, entonces,

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_t. \quad (7-34)$$

Ahora resta hallar \mathbf{P} . Para ello, se reemplaza el valor de \mathbf{K} de la (7-33) en la igualdad (7-29) se obtiene el valor mínimo de la función implícita. Así,

$$0 = \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{Q} = \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} - (\mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} + \mathbf{Q},$$

reemplazando, entonces, \mathbf{K} por la Ec. (7-33), se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})^T \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - (\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})^T \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \\ 0 &= (\mathbf{B}^T \mathbf{P})^T (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} - (\mathbf{B}^T \mathbf{P})^T (\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

que operando, se llega a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0, \quad (7-35)$$

que es la *Ecuación de Riccati reducida*. La solución de la Ecuación matricial de Riccati se encuentra numéricamente por cómputo matricial [4], teniendo como dato los valores numéricos de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{R} y \mathbf{Q} .

Solución de la Ecuación de Riccati en tiempo continuo

Nótese que la Ec (7-35) puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = 0. \quad (7-36)$$

El procedimiento de cálculo matricial consiste en formar la matriz del *Hamiltoniano* \mathbf{H} como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (7-37)$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = 0. \quad (7-38)$$

Si se premultiplica y posmultiplica por una matriz invertible de transformación \mathbf{M} , se premultiplica por \mathbf{M}^{-1} y luego se posmultiplica por \mathbf{M} , se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{PM} \end{bmatrix} = 0. \quad (7-39)$$

Si se encuentran matrices \mathbf{M} y \mathbf{P} tal que se puede hacer la descomposición espectral de \mathbf{H} , donde se logre formar una matriz rectangular con los autovectores de \mathbf{H} multiplicada por una matriz diagonal que tenga sus autovalores, es decir

$$\mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{PM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{PM} \end{bmatrix} \cdot \Lambda, \quad (7-40)$$

se logra que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} & -\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{PM} \end{bmatrix} \cdot \Lambda = 0. \quad (7-41)$$

Se tiene que construir las matrices \mathbf{M} y \mathbf{P} . Para ello se procede empleando los autovalores y autovectores de \mathbf{H} , ya que

$$\mathbf{H}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (7-42)$$

asumiendo que \mathbf{H} tiene $2n$ autovalores reales y distintos, de los cuales n tienen parte real negativa, con los que se puede escribir

$$\mathbf{H} \cdot [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (7-43)$$

Ahora se tienen las matrices buscadas en la Ec (7-40), por lo que se igualan las matrices del lado derecho como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (7-44)$$

y del lado izquierdo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n], \quad (7-45)$$

de donde se obtiene la matriz \mathbf{P} simplemente de la matriz inferior posmultiplicando por la inversa de \mathbf{M} como

$$\mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1}. \quad (7-46)$$

Así concluye el cálculo del controlador óptimo lineal cuadrático. En el cálculo numérico, normalmente los autovectores que corresponden a autovalores complejos conjugados, tienen componentes complejas. Por lo tanto, es frecuente encontrar una matriz P que tenga algunos valores imaginarios relativamente pequeños y por lo tanto deba tomarse sólo su parte real.

Finalmente, evaluando a $J(\mathbf{x})$ de la Ec. (7-24) con el u_t de la Ec. (7-34), la integral del lado derecho es $-V(\mathbf{x})$, por lo que se obtiene

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (Q + K^T R K) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T P \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -(\mathbf{x}_{\infty}^T P \mathbf{x}_{\infty} - \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0) \quad (7-47)$$

donde se ha usado la igualdad (7-22) para resolver la integral. Para determinar el valor en la Ec. (7-47), se considera que los autovalores de $(A-BK)$ tienen parte real negativa, entonces $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la Ec. (7-47) resulta

$$J(\mathbf{x}_{\infty}, u_{\infty}) = \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0. \quad (7-48)$$

Dado el caso en que se diseñe al funcional de costos en términos de la salida \mathbf{y} , del sistema de Ec. (7-10),

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T Q \mathbf{y} + u^T R u) dt \quad (7-49)$$

se reemplaza y por la segunda fila de la Ec. (7-10), quedando

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T C^T Q C \mathbf{x} + u^T R u) dt, \quad (7-50)$$

y se emplea $C^T Q C$ en lugar de Q .

Para el diseño del controlador óptimo cuadrático, una vez formulado el problema, se debe resolver la Ecuación de Riccati (7-35) con respecto a \mathbf{P} verificando que $(A-BK)$ sea estable.

7.2.9. Ejemplo fase no mínima

Sea el ejemplo PM7.4 extraído de la literatura [2] PM7.4 Pág 430

$$G(s) = \frac{(1+p)s - p}{s^2 + 3s + 6} \quad (7-51)$$

con $P=1$. Hallar un controlador y un observador que haga evolucionar al sistema desde cualquier condición inicial a una referencia dada. Definir los valores adecuados de los parámetros de diseño para que se logre el objetivo de control.

El código .m está detallado en la Tabla 7-2, y los resultados de simulación en la Fig. 6-2.

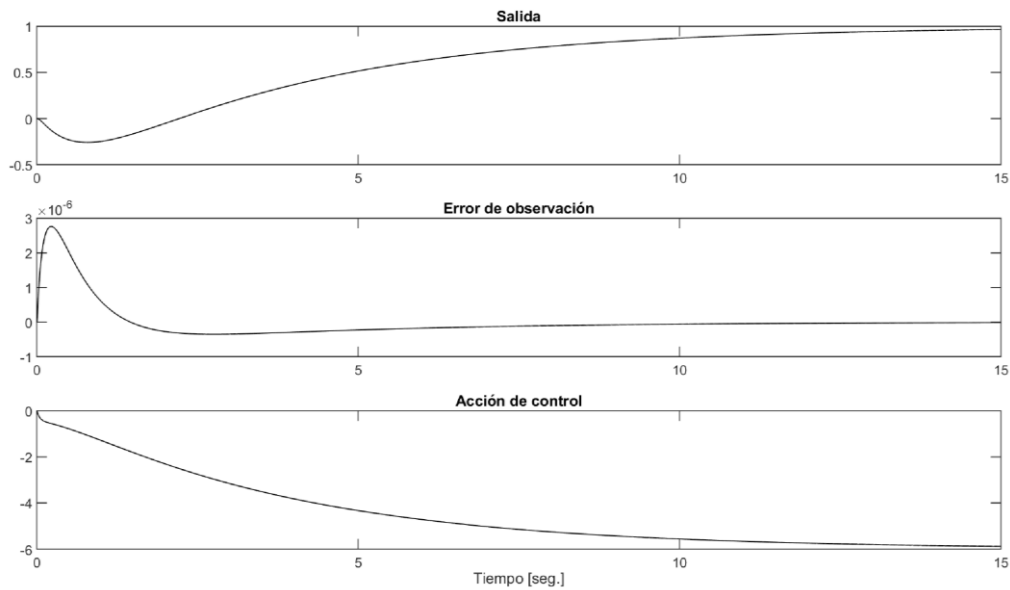
```
% PM7.4 extraído de la literatura (Dorf. Sistemas de Control Moderno 10ta
% edición. Pearson Prentice Hall 2005).
clear all;clc;close all;
% G =
%      2 s - 1
%      -----
%      s^2 + 3 s + 6
% pkg load signal
% G
P=1;
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];%
% [A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
```



```

A(1,1)=0;A(1,2)=1;
A(2,1)=-den(3);A(2,2)=-den(2);
B(1,:)=0;B(2,:)=1;
C(1)=num(2);C(2)=num(1);D=0;
[n,d]=ss2tf(A,B,C,D)
Aa=[A,[0;0];-C,0];
Ba=[B;0];
Mat_Aa=Aa;Mat_Ba=Ba;
%Cálculo del LQR-----
Q=diag([100 50 10]);R=1e-1;
%Construcción del Hamiltoniano para el cálculo del controlador
Ha=[Aa -Ba*inv(R)*Ba'; -Q -Aa'];
[n,va]=size(Ha);
[V,D]=eig(Ha);MX1X2=[];
for ii=1:n
    if real(D(ii,ii))<0
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:n/2,:); MX2=MX1X2(n/2+1:end,:);
% P=abs(MX2*inv(MX1));
P=real(MX2*inv(MX1));
Ka=inv(R)*Ba'*P;
%Fin cálculo del controlador-----
disp('Controlador ampliado en ')
eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka)
%Cálculo del Observador-----
A_d=A';
B_d=C';
C_d=B';
Qo=1e5*diag([1 1]);Ro=1e1;
%Construcción del Hamiltoniano para el cálculo del observador
Ho=[A_d -B_d*inv(Ro)*B_d'; -Qo -A_d'];
[no,va]=size(Ho);
[V,D]=eig(Ho);MX1X2=[];
for ii=1:no
    if real(D(ii,ii))<0
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:no/2,:); MX2=MX1X2(no/2+1:end,:);
Po=real(MX2*inv(MX1));
Ko=(inv(Ro)*B_d'*Po)';
disp('Observador en ')
eig(A-Ko*C)
%FIN cálculo del Observador-----
%Los valores del controlador de obtienen del K ampliado
h=1e-3;
T=15;
e=0;ys=[];ypp(1)=0;yp(1)=0;y(1)=0;t=[];
Max_T=T/h;
y(1)=0;
x=[yp(1);y(1)];ref=1;psi=0;
u=0;x_hat=[0;0];y_o(1)=0;acc(1)=0;
for ii=2:Max_T
    ua=u;
    u=-Ka*[x_hat;psi];
    psi_p=ref-y(ii-1);
    psi=psi+psi_p*h;
    up=(u-ua)/h;
    ypp=2*up-1*u-3*yp(ii-1)-6*y(ii-1); %G de lazo abierto
    yp(ii)=yp(ii-1)+h*ypp;
    y(ii)=y(ii-1)+h*yp(ii);
    ys(ii-1)=y(ii);
    t(ii-1)=ii*h;
    x_hat_p=A*x_hat+B*u+Ko*(y(ii-1)-C*x_hat);
    x_hat=x_hat+x_hat_p*h;
    y_o(ii-1)=C*x_hat;
    acc(ii-1)=u;
end
subplot(3,1,1);plot(t,ys,'k');title('Salida')
subplot(3,1,2);plot(t,ys-y_o,'k');title('Error de observación')
subplot(3,1,3);plot(t,acc,'k');title('Acción de control');xlabel('Tiempo [seg.]')
% save('PM7_4.mat','-v7');
% save('PM7_4.mat','-v7');

```

Tabla 7-2. Código .m del Controlador con observador por LQR para el sistema de fase no mínima.**Fig. 7-7. Simulación del sistema controlador con observación de estados para el caso de fase no mínima empleando LQR.**

Nótese que los polos de lazo cerrado obtenidos pueden emplearse para el diseño del controlador usando Ackerman, y se obtendría el mismo sistema controlador-observador.

7.2.10. Ejemplo péndulo invertido

Para el sistema del péndulo invertido en el equilibrio inestable, diseñar un controlador en el dominio del tiempo continuo sabiendo que las ecuaciones que describen al ángulo y al desplazamiento son,

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{\delta} + m l \ddot{\phi} \cos \phi - m l \dot{\phi}^2 \sin \phi + F \dot{\delta} = u \\ l \ddot{\phi} - g \sin \phi + \ddot{\delta} \cos \phi = 0 \end{cases} \quad (7-52)$$

y que las matrices A y B del sistema linealizado para ángulo pequeño es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{lM} & \frac{g(m+M)}{lM} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix} \quad (7-53)$$

Se pide realizar el cálculo del controlador basado en optimización y generar las trayectorias del sistema mediante simulación para ángulos iniciales de 0,1 0,5 y 0,8 radianes. Hay que considerar que la fuerza u debe cumplir con una restricción, por ejemplo $-10 \leq u \leq 10$.

Los resultados de la simulación están en las Fig. 7-8, utilizando el código para Octave de la Tabla 7-3. En la Fig. 7-9 se muestran los planos de fases y los valores de la función de Liapunov y del funcional de costos para el caso de controlar al sistema lineal. En esas condiciones se cumple la condición (7-48). No obstante, empleando el sistema no lineal del péndulo, dicha igualdad no se cumple, como se observa en la Fig. 7-11.

```

clc;clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
h=0.0001;tiempo=(50/h);p_pp=0;tita_pp=0;
%Condiciones iniciales
fi(1)=.1; color='r';
% fi(1)=.5; color='g';
% fi(1)=.8; color='b';
% fi(1)=-pi; color='+-b';
% fi(1)=pi; color='.-r';
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
%estado=[p(i); p_p(i); fi(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
rank(Mat_M)
%Cálculo del LQR
% Q=diag([.2 10 .10 .1]);R=100; %Nótese con R=1 no cumple restricciones de u
Q=diag([.002 1.0 .10 .01]);R=50; %Nótese con R=1 no cumple restricciones de u
%Construcción del Hamiltoniano para el cálculo del controlador
H=[Mat_A -Mat_B*inv(R)*Mat_B'; -Q -Mat_A'];
[n_,va]=size(H);
[V,D]=eig(H);MX1X2=[];
for(ii=1:n_)
    if real(D(ii,ii))<0
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:n_/2,:); MX2=MX1X2(n_/2+1:end,:);
P=real(MX2*inv(MX1));
K=inv(R)*Mat_B'*P;
estado=[p(1); p_p(1); fi(1); omega(1)];
J_(1)=0; V_(1)=0;
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); fi(i); omega(i)];
    V_(i)=estado'*P*estado;
    fil=estado(3);
    if abs(fil)>pi
        while abs(fil)>2*pi
            fil=sign(fil)*(abs(fil)-2*pi);
        end
        if fil<-pi
            fil=2*pi+(fil);%Lo hace positivo
        end
        if fil>pi
            fil=-2*pi+(fil);%Lo hace negativo
        end
    end
    estado(3)=fil;
    u(i)=-K*estado;
    J_(i+1)=J_(i)+(estado'*Q*estado+u(i)'*R*u(i))*h;
    % u(i)=min( 100,u(i));
    % u(i)=max(-100,u(i));
    p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(fi(i))+m*long*omega(i)^2*sin(fi(i))-
    Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(fi(i))-p_pp*cos(fi(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
    p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    fi(i+1)=fi(i)+h*omega(i);
    % estado_p=Mat_A*estado+Mat_B*u(i);
    i=i+1;
end
V_(i)=estado'*P*estado;t=0:tiempo; t=t*h;
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1); plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,3);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;

```

```

subplot(3,2,2);plot(t,fi,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad angulo');hold on;
subplot(3,1,3);plot(t(1:end-1),u,color);grid on;title('Acción de control');xlabel('Tiempo en Seg. ');hold on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(fi,omega,color);grid on;xlabel('Ángulo');ylabel('Velocidad angular');hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posición carro');ylabel('Velocidad carro');hold on;
subplot(2,2,3);semilogy(t,J_,color);title('Funcional de costos J(x,u)');hold on;xlabel('Tiempo Seg. ');v=axis;
subplot(2,2,4);semilogy(t,V_,color);title('Funcion Liapunov V(x)');xlabel('Tiempo Seg. ');hold on;axis(v);
break
figure(1);print('-dpng','-r300','Fig_1');
figure(2);print('-dpng','-r300','Fig_2');

```

Tabla 7-3. Código del Péndulo controlado por LQR con referencia nula.

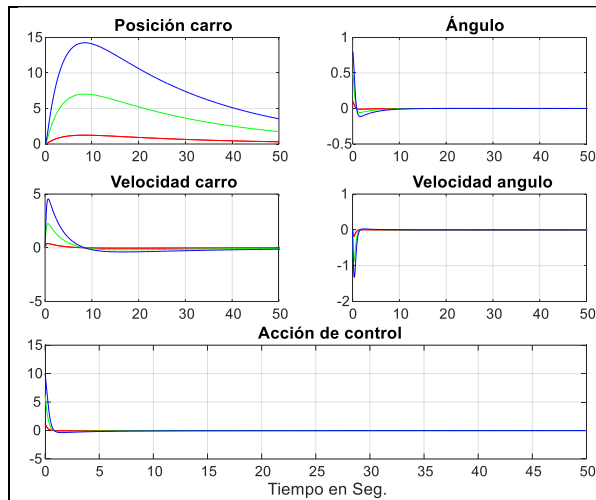


Fig. 7-8. Evolución del péndulo invertido para el controlador LQR a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente empleando el modelo lineal.

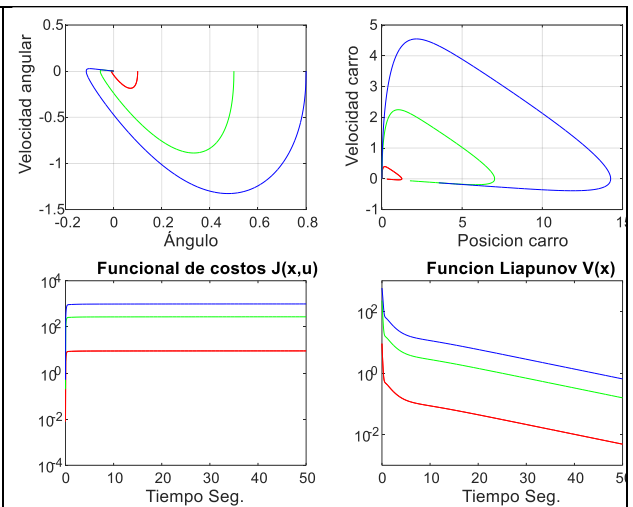
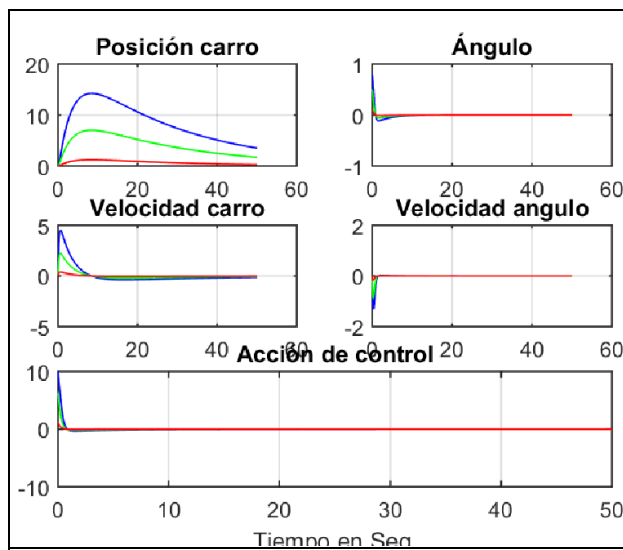
Fig. 7-9. Plano de fase para el ángulo y la posición obtenido a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente empleando el modelo lineal del péndulo. Se muestran valores del funcional de costos y de la función Liapunov para el sistema lineal con restricciones en u .

Fig. 7-10. Evolución del péndulo invertido para el controlador LQR a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente empleando el modelo lineal.

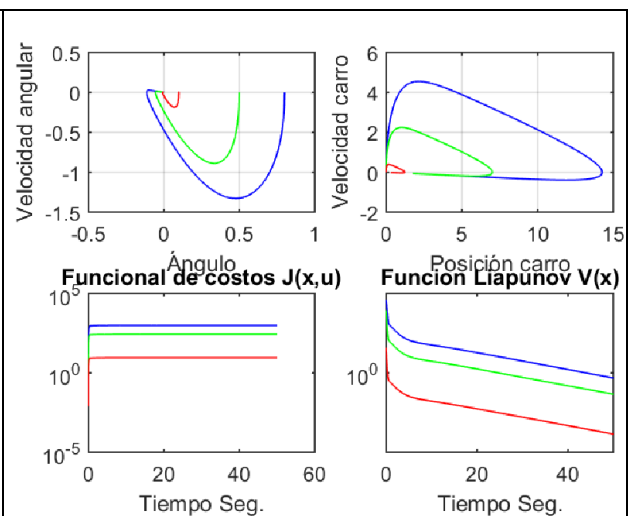


Fig. 7-11. Planos de fase de la evolución del péndulo

controlador LQR a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente empleando el modelo no lineal con restricciones en u_i .	invertido para el controlador LQR con restricciones para las condiciones iniciales 0,1 0,5 y 0,8 radianes con restricciones en u_i empleando el modelo no lineal del péndulo. Nótese que los valores de J para $t \rightarrow \infty$ no coinciden con el valor de V para $t=0$ como en el caso de la Ec. (7-10) y la Fig. 7-9.
--	---

Si se modifica el rango de la ley de control en $-100 \leq u \leq 100$, y el dominio del ángulo se disminuye al intervalo que varía entre 0 y 2π , se pueden obtener resultados como los indicados en las Fig. 7-14 y Fig. 7-15. Nótese que el ángulo de inicio del péndulo es el del equilibrio estable, y el controlador lo ubica en el equilibrio inestable.

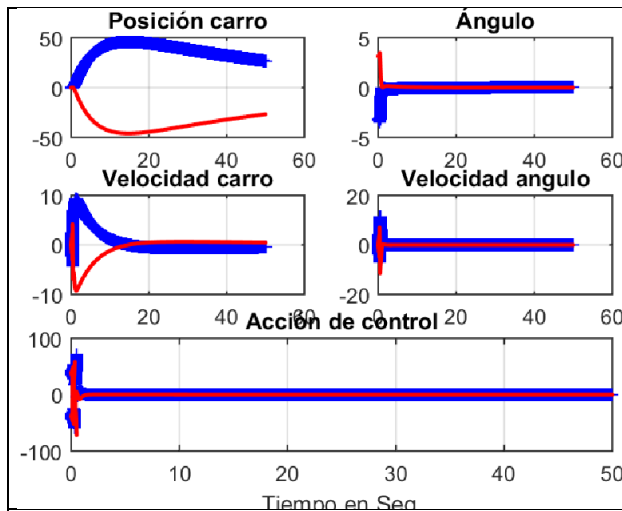


Fig. 7-12. Evolución del péndulo invertido para el controlador LQR a partir de dos condiciones iniciales, π radianes de color rojo y $-\pi$ radianes en azul respectivamente empleando el modelo no lineal con restricciones de 100 en u_i .

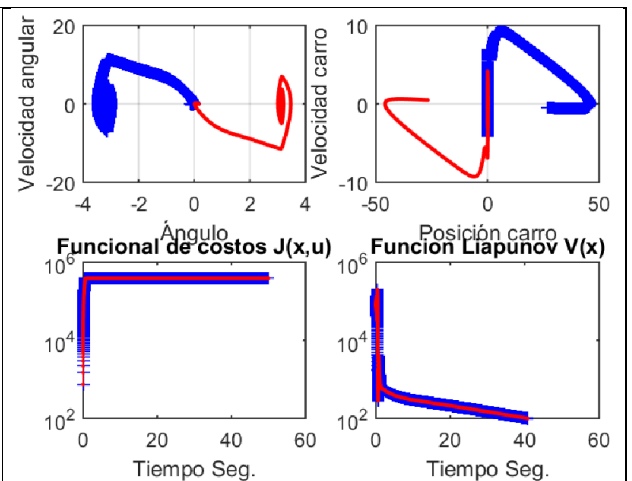


Fig. 7-13. Planos de fase de la evolución del péndulo invertido para el controlador LQR $Q=\text{diag}([.002 \ 1.0 \ .10 \ .01])$; $R=500$; con restricciones para las condiciones iniciales $\pm\pi$ radianes con restricciones en u_i empleando el modelo no lineal del péndulo. Nótese que la función J para $t \rightarrow \infty$ no coincide con el valor de V para $t=0$ e incluso V no es monótonicamente decreciente como indica el teorema ya que se plantea para el sistema lineal.

Ejercicios sugeridos

Emplear el diseño mediante LQR para plantear y resolver los ejemplos vistos, analizando desde qué condición inicial de ángulo distinto de cero y qué altura inicial distinta de cero pueden controlarse. A saber:

- controlador con observador de estados siendo la matriz de salida definida como univariable $C=[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ y $C=[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ para péndulo y avión respectivamente.
- controlador con observador siendo la matriz C definida como un sistema multivariable para el caso del péndulo y del avión, respectivamente

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- controlador con referencia distinta de cero.
- controlador con referencia distinta de cero y observador de estados.
- Para el caso del péndulo invertido, agregar una alinealidad a la salida del

controlador, para que la acción de control tenga una zona muerta de actuación y luego sea lineal en un primer caso y si-no en un segundo caso, ambas con zona muerta como muestran las Fig. 7-14 y Fig. 7-15. Es decir, si $|u| < 2$ entonces $u=0$, de otro modo $u=\text{sign}(u) \cdot (|u|-2)$ y para el segundo caso, si $|u| < 2$ entonces $u=0$, de otro modo $u=10 \cdot \text{sign}(u)$. Generar simulaciones de los ítems anteriores con éstas modificaciones.

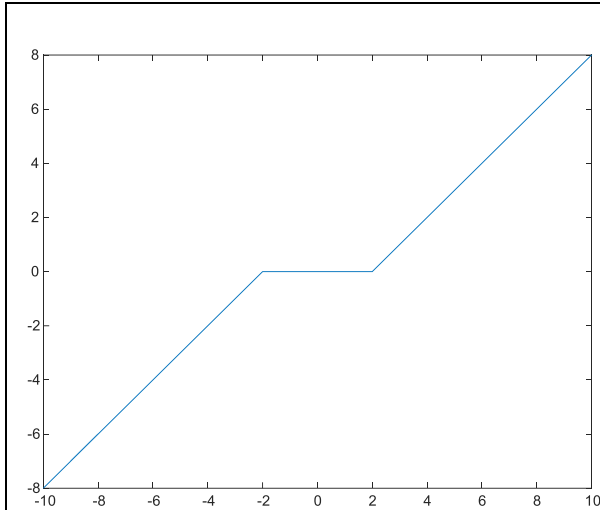


Fig. 7-14. Modificación de no linealidad para considerar un actuador lineal con zona muerta.

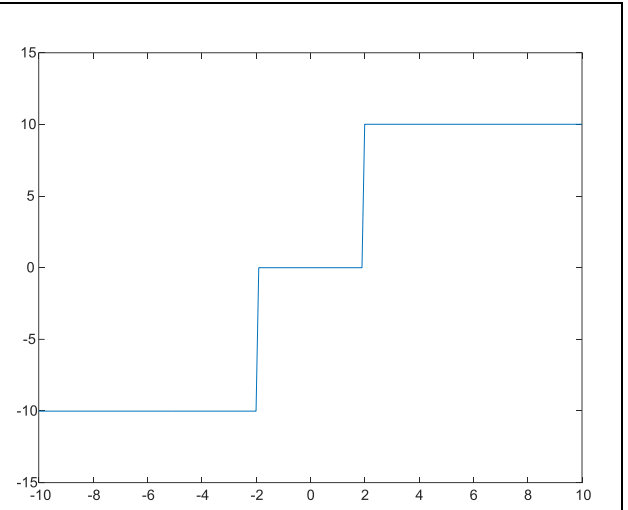


Fig. 7-15. Modificación de no linealidad a la salida del controlador para considerar un actuador con valores de 10 y -10, con una zona muerta.

7.3. Bibliografía

- [1] [Sontag](http://www.sontaglab.org). Mathematical control theory 1998. Pag 104. <http://www.sontaglab.org>.
- [2] [R. Dorf R. Bishop](#), Sistemas de Control Moderno. 10^{ma} Edición. Pearson Prentice Hall.
- [3] [Fletcher, R. and Powell, M.J.D.](#) “A Rapid Convergent Descent Method for Minimization”. The Computer Journal, 6, 163-168. <http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/6.2.163>. 1963.
- [4] [Alan J. Laub](#). “A Schur Method For Solving Algebraic Riccati Equations” IEEE. IBEB Transactions on Automatic Control, Vol. Ac-24, No. 6, December 1979.