5. Diseño de control lineal en variables de estados en tiempo continuo

El diseño de controladores para procesos reales puede encararse de diversos modos, ya que dependiendo de las necesidades del usuario se definen los requerimientos del comportamiento del proceso. Cada metodología de diseño comienza con la fijación de un modelo del proceso, que puede definirse en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Aquí va a detallarse una metodología en el dominio del tiempo, siguiendo la representación de sistemas en variables de estados.

5.1. Diseño de controladores de estado lineales

Existen diversos esquemas de control, basados en la teoría de Entrada-Salida y en la de variables de estado. A continuación, se muestran los esquemas más difundidos.

5.1.1. Controlador en esquema Entrada-salida

Se realimenta el error de control, definido como $e_t=y_d-y_t$.

Los esquemas más difundidos son los del tipo Proporcional Integral Derivativo PID, con sus diversas variantes, por ejemplo, Modificado, con predictor, con anti-wind up, auto sintonía, etc.

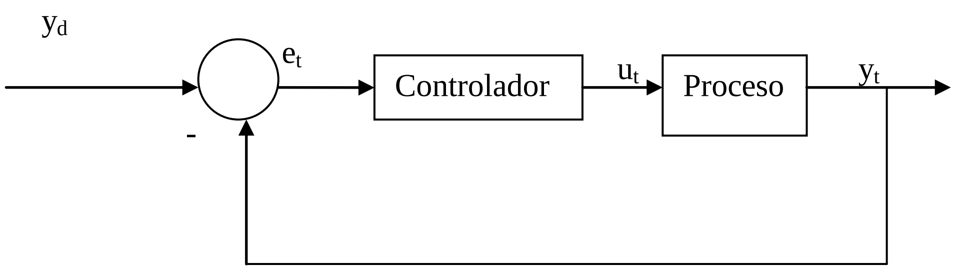


Fig. 5-1. Esquema de control en la representación de sistemas Entrada-Salida.

Nótese que en la Fig. 5-1 sólo se está midiendo y_t que es la variable de salida, quedando todas las demás variables fuera de las entradas directas del controlador. Frecuentemente, a igualdad de costo en los sensores, esas variables intermedias se pueden medir con mayor exactitud y contribuir a una solución más eficaz.

5.1.2. Controlador en esquema de Espacio de estados

Se realimenta el estado del proceso, **x**(t).

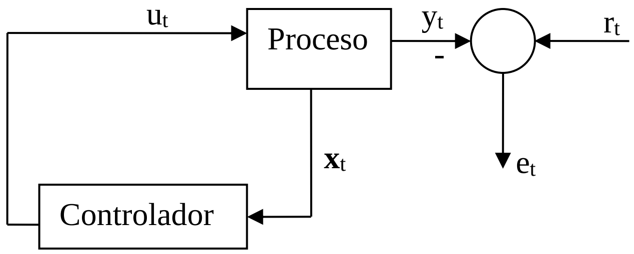


Fig. 5-2. Esquema de control basado en realimentación de estados.

En el esquema de la Fig. 5-2 se destaca la posibilidad de medir las variables convenientes del proceso, incluida la y_t, Para realizar el diseño del Controlador, se utiliza el concepto de Diseño de controladores en variables de estado.

5.2. Esquema básico del controlador lineal de estado

Dado el sistema lineal determinístico en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{5-1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{5-2}$$

se hace la regulación del sistema mediante un controlador lineal, del tipo

$$u_t = -K \cdot \mathbf{x}(t) \tag{5-3}$$

donde **K** es la matriz del controlador. El esquema de control se muestra en la Fig. 5-3.

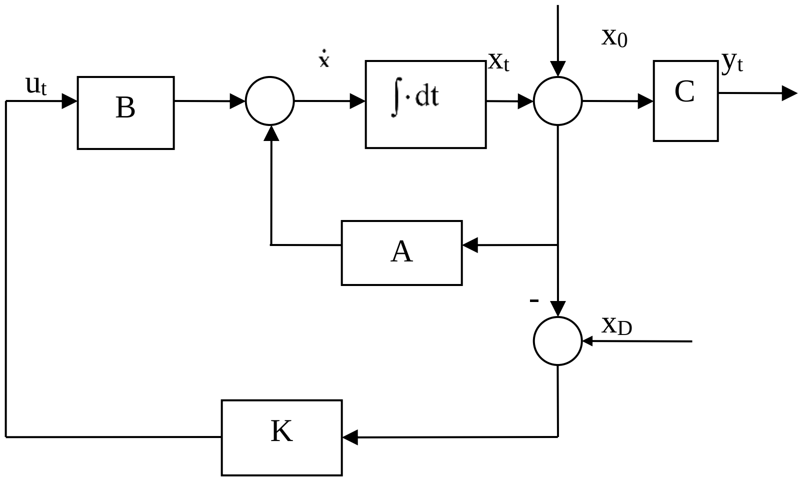


Fig. 5-3. Esquema de control en tiempo continuo.

La solución del sistema de lazo cerrado resulta, para x_D=0,

$$\mathbf{x}_t = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})\cdot t}\mathbf{x}_0. \tag{5-4}$$

Para establecer el valor de la matriz K del controlador, existen diversas metodologías. Nótese que $\mathbf{x}_D$ está corriendo el origen del sistema, lo que puede hacer que el modelo lineal no sea válido para el punto de operación en el que fue calculado. Por este motivo se hacer nulo y luego se adecuará la dinámica de lazo cerrado para una referencia distinta de cero.

En el ámbito de diseño de controladores de estado lineales, las metodologías más difundidas son *Asignación de polos* y *Funcional de costo*.

No obstante, para lograr encontrar al controlador K, el sistema debe cumplir con la condición de Controlabilidad, que es una característica que puede calcularse antes que el controlador.

5.3. Controlabilidad

El concepto de controlabilidad establece que (5-1) es controlable si es posible generar una acción de control u_t para transferir al sistema desde cualquier condición inicial a cualquier condición final en un intervalo de tiempo finito. Si cada estado es controlable, entonces se dice que el sistema es completamente controlable.

Para establecer la condición de controlabilidad de un sistema, fue necesario introducir conceptos de álgebra matricial, como el Teorema de Cayley-Hamilton para el cálculo de la matriz exponencial e^{At}.

5.4. Condición de controlabilidad

Para deducir la condición de controlabilidad, se asumirá que el estado final será el origen a un tiempo t_1, y que t_0 será 0. Aplicando esta condición a la solución

$$x(t)=e^{At}x(t_0)+\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \tag{5-5}$$

se obtiene

$$x(0)=-\int_0^{t_1} e^{-As}Bu(s)ds. \tag{5-6}$$

Ahora se reemplazará a e^{-At} por su equivalente analítico empleando el Teorema de Cayley Hamilton, por lo tanto, se tiene que

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\alpha_2(t)A^2+\cdots+\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k \tag{5-7}$$

que es útil para evaluar analíticamente a la función e^{At}.

Reemplazando entonces la igualdad (5-7) en la Ec. (5-6), se obtiene

$$x(0)=-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^k\mathbf{B}\int_0^{t_1}\alpha_k(s)u(s)ds \tag{5-8}$$

donde puede simplificarse la expresión si se calculan las integrales temporales, obteniéndose valores β_k, como

$$\int_0^{t_1}\alpha_k(s)u(s)ds=\beta_k. \tag{5-9}$$

Así, la Ec. (5-8) resulta en

$$x(0)=-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^k\mathbf{B}\beta_k. \tag{5-10}$$

Puede escribirse entonces, en forma de producto matricial de una matriz y un vector,

$$x(0) = -\left[\mathbf{B} \,|\, \mathbf{AB} \,|\cdots \mathbf{A^{n-1}B}\right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}11)$$

donde se deduce que la Ec. (5-11) debe tener solución para cualquier $\mathbf{x}(0)$, siendo la incógnita los β_k que contienen a u_t. Por lo tanto, la matriz

$$\left[\mathbf{B} \,|\, \mathbf{AB} \,|\cdots \mathbf{A^{n-1}B}\right] = M \qquad (5\text{-}12)$$

debe tener rango *n*, y ser invertible para hallar estos valores β_k. Ésta es la matriz de controlabilidad **M**. Nótese que la prueba de controlabilidad *no requiere* resolver la ecuación diferencial del sistema, sino que se construye con las matrices de *Estado y de Entrada* del sistema (5-1).

5.5. Diseño mediante asignación de polos

El diseño de controladores mediante asignación de polos es directo, como puede verse en la Literatura [3] Ogata, Págs. 789 a 792. Se definen arbitrariamente las ubicaciones de los polos de lazo cerrado $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, ..., \mu_n\}$ en el semiplano izquierdo, y luego se determina el valor del controlador para que la matriz de lazo cerrado efectivamente lo cumpla.
Así, la ecuación característica de lazo cerrado se convierte en

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \qquad (5\text{-}13)$$

que establece el comportamiento deseado del sistema de lazo cerrado dado por

$$\mathbf{x}_t = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t}\mathbf{x}_0. \qquad (5\text{-}14)$$

donde debe hallarse el valor de la matriz K.

El procedimiento exige una transformación matricial con el objetivo de obtener al sistema en su forma canónica controlable. Para ello, se define a una matriz de trasformación

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} \qquad (5\text{-}15)$$

donde **M** es la matriz de controlabilidad definida como

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{B} \,|\, \mathbf{AB} \,|\cdots \mathbf{A^{n-1}B}\right] \qquad (5\text{-}16)$$

y la matriz **W** definida como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}17)$$

donde los coeficientes a_i son los que aparecen en el polinomio característico de A que es la matriz del sistema a lazo abierto

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n. \qquad (5\text{-}18)$$

Se define el nuevo vector de estado $\hat{\mathbf{x}}$ como

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathrm{T}^{-1}\mathbf{x}. \tag{5-19}$$

Si la inversa de **T** existe, lo que está sujeto a que el sistema sea controlable, se puede reemplazar el estado **x** por el nuevo estado en las ecuaciones del sistema

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{t}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\cdot\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{t}} \tag{5-20}$$

donde las matrices de estados y de entrada tendrán la forma canónica controlable

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \tag{5-21}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5-22}$$

A su vez, la acción de control se transforma en

$$\mathrm{u}_{\mathrm{t}} = -\mathbf{KT}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}} \tag{5-23}$$

siendo el controlador

$$\mathbf{KT} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1]. \tag{5-24}$$

Este controlador se reemplaza en la Ecuación de estados del modelo (5-1), obteniendo

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{KT}\right)\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}}. \tag{5-25}$$

La ecuación característica de este sistema es la misma que la del sistema sin transformar. Por lo tanto, seleccionando un conjunto de autovalores μ_1, μ_2, μ_3,..., μ_n, la ecuación característica de lazo cerrado se convierte en

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \tag{5-26}$$

que debe ser igual a la del sistema

$$\left|sI - \left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{KT}\right)\right| = 0. \tag{5-27}$$

Así, reemplazando los valores obtenidos por las Ec (5-21), (5-23) y (5-24) , se tiene que

$$\left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \right| = 0 \tag{5-28}$$

y operando para calcular la ecuación característica en términos de los coeficientes de diseño,

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & & \dots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5-29}$$

y resolviendo el determinante se llega a

$$s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 \tag{5-30}$$

que si se iguala a la Ecuación característica definida en la Ec. (5-26), se concluye que pueden despejar los valores δ para construir el controlador de la Ec. (5-24), que resulta

$$\mathbf{KT} = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \alpha_{n-1} - a_{n-1} & \cdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \tag{5-31}$$

de donde puede despejarse **K**

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \alpha_{n-1} - a_{n-1} & \cdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}. \tag{5-32}$$

El *diseño del controlador comienza ubicando a los polos* μ_i, que son los polos de lazo cerrado. Luego, mediante la Ec. (5-26) se obtienen los coeficientes α_i, y resolviendo la Ec. (5-32) se obtiene el controlador K.

Nótese que este método tiene como ventaja su simplicidad. No obstante, el diseño no tiene en cuenta el efecto conjunto de los polos en el comportamiento del sistema, ni tampoco la magnitud de las acciones de control. *El método requiere de iteraciones prueba y error hasta encontrar la respuesta adecuada*.

5.6. Diseño mediante la Fórmula de Ackermann

El diseño del controlador puede tener en cuenta la ecuación característica de lazo cerrado, y con esos coeficientes generar una diferencia con la ecuación usando la matriz A de lazo abierto. Es decir, dado el sistema de lazo abierto por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \tag{5-33}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) \tag{5-34}$$

con el controlador

$$\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x}(t), \tag{5-35}$$

se tiene el sistema de lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}K)\mathbf{x}(t). \tag{5-36}$$

Lo que sugiere una ecuación característica con polos situados en los lugares deseados por el usuario. La Ecuación Característica de lazo cerrado será

$$\prod_{i=1}^{n}(s+\mu_i) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \quad (5\text{-}37)$$

y mediante el Teorema de Cayley Hamilton, se obtiene

$$\phi(\mathbf{A}-\mathbf{BK}) = \phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \alpha_2\tilde{\mathbf{A}}^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n I = 0 \quad (5\text{-}38)$$

siendo $\phi(\cdot)$ un operador diferente al propuesto como $p(\cdot)$ de los autovalores.

Aunque $\phi(\mathbf{A}\text{-}\mathbf{BK})=0$, nótese que $\phi(A)\neq 0$, por lo que si se resta con la ecuación de la matriz **A** de lazo abierto, se tiene que existe una diferencia en la que aparece el controlador K,

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) + \text{terminos dependientes de K.} \quad (5\text{-}39)$$

Encontrando esos términos, se podría despejar K. Por lo tanto, desarrollando las potencias de la Ec (5-38), se tiene

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{A}}^0 = I \\
&\tilde{\mathbf{A}}^1 = \mathbf{A}-\mathbf{BK} \\
&\tilde{\mathbf{A}}^2 = (\mathbf{A}-\mathbf{BK})^2 = \tilde{\mathbf{A}}^1\cdot\tilde{\mathbf{A}}^1 = (\mathbf{A}-\mathbf{BK})(\mathbf{A}-\mathbf{BK}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{KAB} + (\mathbf{BK})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}
\end{aligned} \quad (5\text{-}40)$$

Multiplicando miembro a miembro por α_i

$$\begin{aligned}
&\alpha_n\tilde{\mathbf{A}}^0 = \alpha_n I \\
&\alpha_{n-1}\tilde{\mathbf{A}}^1 = \alpha_{n-1}(\mathbf{A}-\mathbf{BK}) \\
&\alpha_{n-2}\tilde{\mathbf{A}}^2 = \alpha_{n-2}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}})
\end{aligned} \quad (5\text{-}41)$$

y sumando se tiene

$$\alpha_n\tilde{\mathbf{A}}^0 + \alpha_{n-1}\tilde{\mathbf{A}}^1 + \alpha_{n-2}\tilde{\mathbf{A}}^2 + \cdots = \alpha_n I + \alpha_{n-1}(\mathbf{A}-\mathbf{BK}) + \alpha_{n-2}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}) + \cdots \quad (5\text{-}42)$$

Nótese que se puede agrupar ahora siguiendo la forma de (5-39) como,

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) + \alpha_{n-1}(-\mathbf{BK}) + \alpha_{n-2}(-\mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}) + \cdots = 0. \quad (5\text{-}43)$$

Despejando,

$$\phi(\mathbf{A}) = \alpha_{n-1}\mathbf{BK} + \alpha_{n-2}\mathbf{ABK} + \alpha_{n-2}\mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} + \cdots + . \quad (5\text{-}44)$$

Ahora, puede escribirse como

$$\phi(\mathbf{A}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad]\cdot\begin{bmatrix}\alpha_{n-1}\mathbf{K} + \alpha_{n-2}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \\ \end{bmatrix} \quad (5\text{-}45)$$

Nótese que para el ejemplo de orden 2, α_{n-2} es la unidad.

Para obtener **K**, simplemente se premultiplica miembro a miembro la inversa de la matriz de controlabilidad, y luego por el vector fila [0 1], se obtiene la fórmula de Ackermann

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1 \quad]\,[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad]^{-1}\phi(\mathbf{A}). \quad (5\text{-}46)$$

5.6.1. Ejemplos partiendo de la representación en variables de estados

Se propone el diseño de un sistema controlado mediante el esquema de variables de estado. Sea el sistema lineal descrito por

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix},\quad C=[1 \quad 0],\quad D=[0], \tag{5-47}$$

donde los polos deseados de lazo cerrado son μ_i=-2±j2.

Se calcula la ecuación característica de lazo cerrado para obtener $\phi()$

$$(s+2-j2)(s+2+j2)=s^2+4s+8.$$

Empleando la Fórmula de Ackermann,

$$\mathbf{K}=[0 \quad 1]\,[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1}\phi(\mathbf{A}) \tag{5-48}$$

$$[B \quad AB]^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 10\\ 10 & -10\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-100}\begin{bmatrix}-10 & -10\\ -10 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.10 & .10\\ .10 & 0\end{bmatrix}$$

$$\phi(A)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^2+4\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=[0 \quad 1]\,[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1}\phi(\mathbf{A})=[0 \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=[0{,}8 \quad 0{,}3].$$

Que resulta igual a lo que se obtiene con el diseño de Asignación de polos.

5.6.2. Ejemplo del modelo del avión

Si se ubican los polos en dos posibles puntos de trabajo, la respuesta del sistema sería como la que se muestra en la Fig. 5-4. Cabe destacar que ubicando los polos de diseño más a la izquierda del plano complejo, si bien la altura deseada se alcanza en menor tiempo, las demás variables de estado pueden tener un comportamiento errático y quizá inadmisible por el usuario. En la Fig. 5-4 pueden verse estas variables, que en un esquema entrada-salida quedarían ocultas del análisis ya que sólo se está trabajando con *h(t)*.

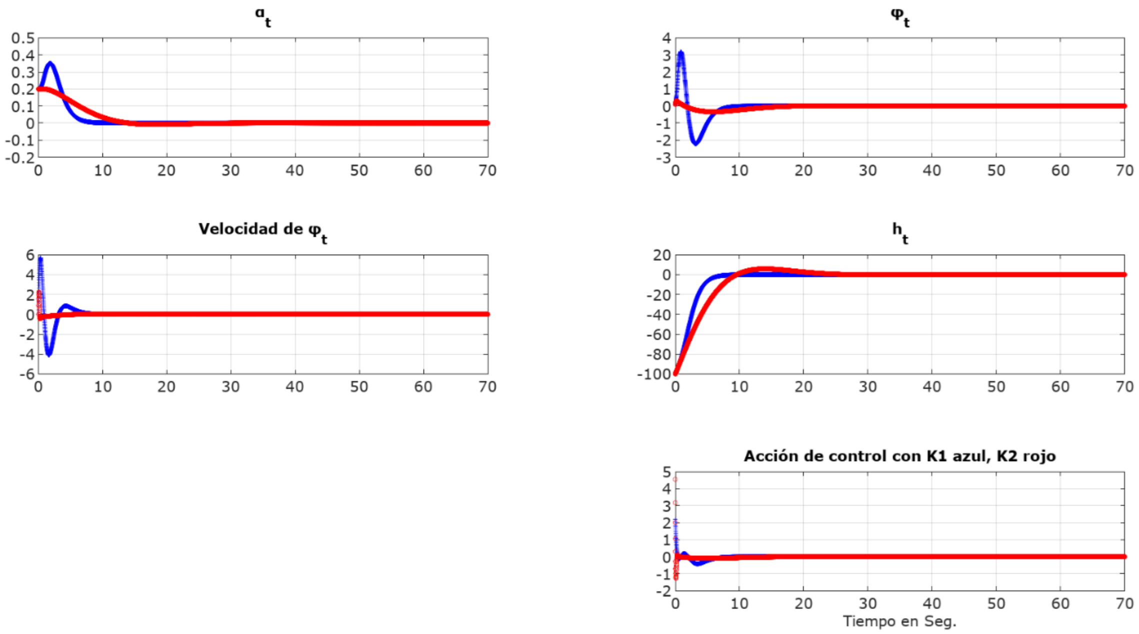


Fig. 5-4. Control de altura del avión con dos controladores diferentes. En azul con los autovalores de lazo cerrado en μ_i=-1;-1;-1,5±j. En rojo en μ_i=-14,42255±13,85677j; -0.17957±0,17606j. Nótese que los polos del primer caso provocan que el sistema sea más rápido que el segundo, pero el ángulo ϕ_t no se mantiene menor a 0,8 radiares que es el margen de validez del modelo.

5.7. Regulador con referencia distinta de cero

5.7.1. Con ganancia de prealimentación

Cuando la referencia es distinta de cero r_t, esto es $y_d \neq 0$, puede usarse el mismo controlador que se diseñó, pero hay que modificar a la acción de control en una medida relativa a la consigna de y_t. Una propuesta, se fundamenta en una ley de control de la forma

$$u_t = -Kx_t + Gr_t \tag{5-49}$$

donde r_t es la referencia y tiene la misma dimensión que y_t, G es una ganancia de prealimentación de la referencia. El diagrama de control con referencia no nula se muestra en la Fig. 5-5.

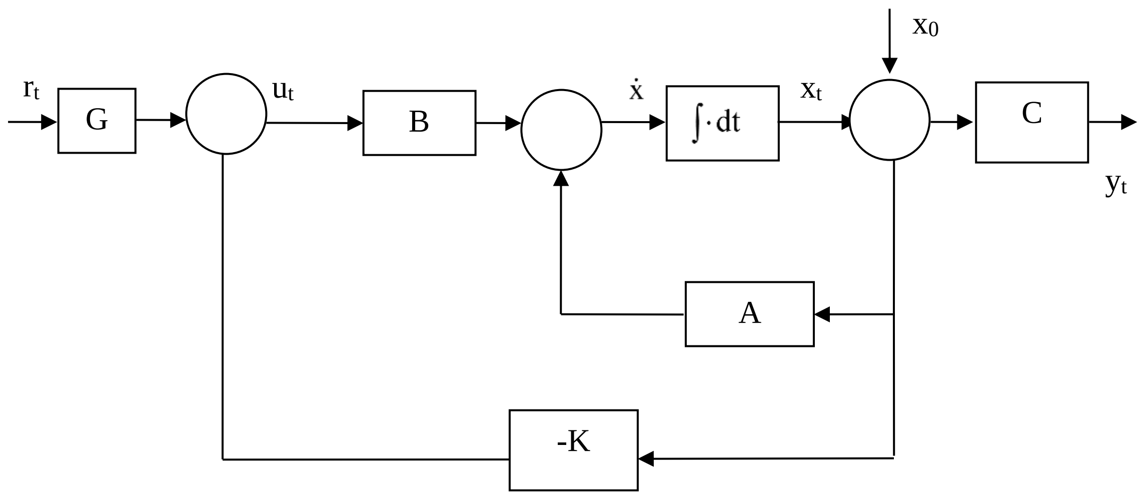


Fig. 5-5. Esquema de control óptimo en tiempo continuo con referencia distinta de cero.

Como la referencia se alcanza en el estado estacionario del sistema, se hace el análisis para diseñar a G usando Laplace. De las Ecs. del sistema, se toma transformada de Laplace y se tiene

$$\begin{cases} s\mathbf{x}_s = A\cdot\mathbf{x}_s + B\cdot u_s \\ \mathbf{y}_s = C\cdot\mathbf{x}_s \end{cases} \tag{5-50}$$

Reemplazando la transformada de Laplace de la ley de control de la Ec. (5-49) en la primera de la Ec. (5-50), se tiene

$$s\mathbf{x}_s = A\cdot\mathbf{x}_s + B(-Kx_s + Gr_s) = (A - BK)x_s + BGr_s$$

$$(sI - (A - BK))x_s = BGr_s$$

$$x_s = (sI - (A - BK))^{-1}BGr_s$$

y la salida *y* se obtiene con la segunda de la Ec. (5-50)

$$y_s = C(sI - (A - BK))^{-1}BGr_s$$

de donde se puede definir una ganancia en *s*, como

$$H_s = C(sI - (A - BK))^{-1}BG \tag{5-51}$$

y así

$$y_s = H_s \cdot r_s. \tag{5-52}$$

La referencia r_s será un escalón unitario, ya que se trata de un problema de regulación, y se emplea el teorema del valor final, que establece que

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\{y_s\} = \lim_{t\to\infty} y_t.$$

Aplicando la igualdad a la Ec. (5-52) con r_s escalón unitario, se tiene que la salida será

$$I = C(-(A - BK))^{-1}BG$$

y despejando G de aquí, se tiene que

$$G = -\left[C(A - BK)^{-1}B\right]^{-1}. \tag{5-53}$$

En el programa mostrado en la Tabla 5-1 se tiene una implementación de esta propuesta para Octave. Nótese que la ganancia de prealimentación deja al sistema a lazo abierto con respecto a la referencia. Para ello se propone incorporar un integrador del error de control.

```
clc;clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6; g=9.8; M=.5;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';
alfa(1)=.5; color='g';
alfa(1)=.8; color='b';
ref=10;
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;indice=0;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
%            estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_C=[1 0 0 0]; %La salida monovariable es posición
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_A);
c_ai=poly(auto_val);
Mat_W=[c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;
```

```
    c_ai(3) c_ai(2) 1 0;
    c_ai(2) 1 0 0;
    1 0 0 0];
Mat_T=Mat_M*Mat_W;
A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_A*Mat_T; %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
mui(1)=-.7;mui(2)=-.7; mui(3)=-10 + 0.4i;mui(4)=conj(mui(3));
alfa_ia=poly(mui);
K=fliplr((alfa_ia(2:5)-c_ai(2:5)))*inv(Mat_T);
Gj=-inv(Mat_C*inv(Mat_A-Mat_B*K)*Mat_B);
eig(Mat_A-Mat_B*K) %Verifico que todos los polos estén en el semiplano izquierdo
%lamdai=-20, por lo tanto el tiempo asociado es T1=50e-3, h puede estar
% entre T1/3 y T1/30, o sea entre 17e-3 y 1.7e-3
h=5e-3;
tiempo=(20/h);p_pp=0;tita_pp=0; t=0:h:tiempo*h;
omega=0:h:tiempo*h; alfa=0:h:tiempo*h; p=0:h:tiempo*h;
p_p=0:h:tiempo*h; u=linspace(0,0,tiempo+1);
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
    u(i)=-K*estado+Gj*ref;
    p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
    p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
    y_sal(i)=Mat_C*estado;
    i=i+1;
end
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad ángulo');hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);grid on;title('Acción de control');xlabel('Tiempo en
Seg.');hold on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid on;xlabel('Ángulo');ylabel('Velocidad
angular');hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posicion carro');ylabel('Velocidad
carro');hold on;
```

Tabla 5-1. Código para Octave, caso de péndulo invertido con referencia distinta de cero con ganancia de prealimentación.

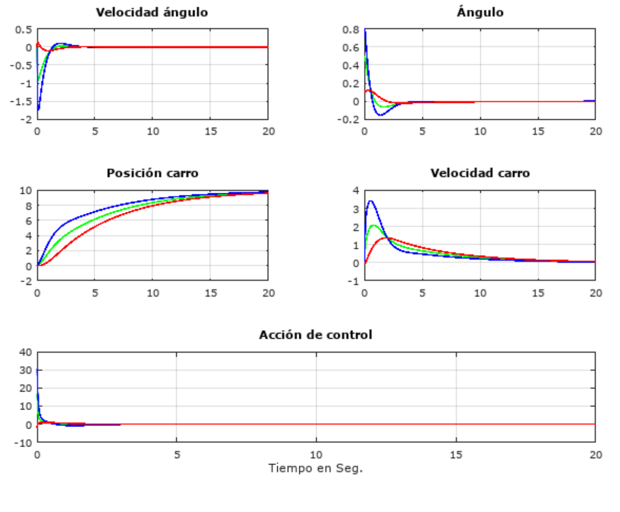
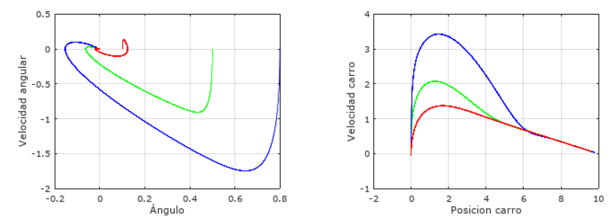
	

Fig. 5-6. Evolución del péndulo invertido para el controlador por asignación de polos a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente. Referencia en posición 10.	Fig. 5-7. Plano de fase para el ángulo y la posición, obtenida a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente. Referencia en posición 10.

5.7.2. Incorporación de un integrador

Para mejorar el rechazo a perturbaciones o incertidumbres en los parámetros empleado s para el cálculo del controlador, puede ser incorporado un término de integración en el diseño en tiempo continuo. Así, se tiene que la ley de control u_t es

$$u_t = -Kx_t + K_I \xi_t = -\begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \tag{5-54}$$

donde

$$\dot{\xi}_t = r_t - y_t = r_t - Cx_t \tag{5-55}$$

definiéndose el nuevo estado ξ_t, como la salida de un integrador cuando a la entrada está presente el error de control r_t-y_t. El esquema de control se muestra en la Fig. 5-8.

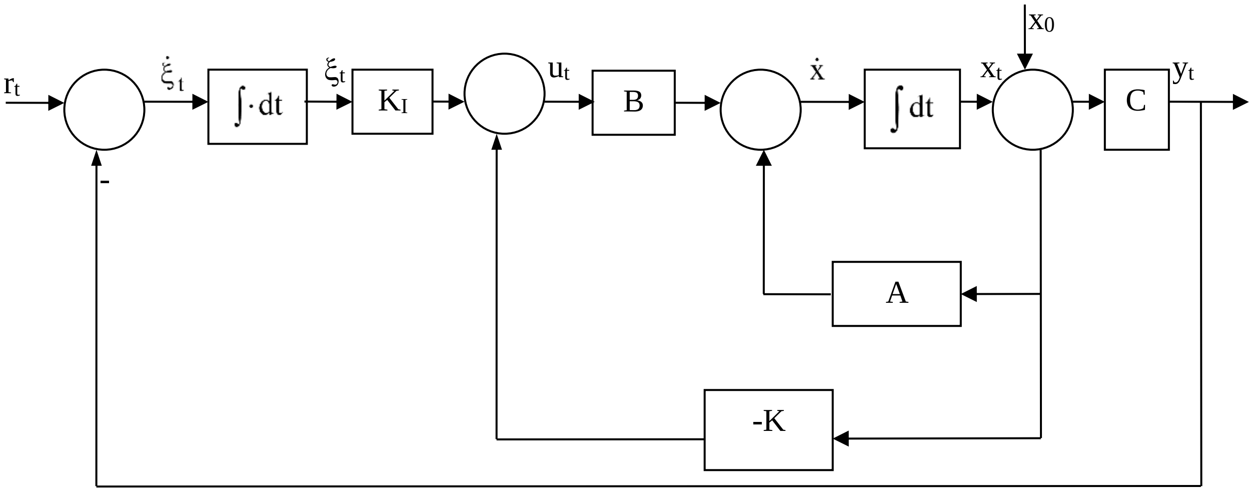


Fig. 5-8. Esquema de control óptimo en tiempo continuo con un integrador en el lazo para referencia distinta de cero.

El sistema de orden incrementado puede escribirse como

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_t\\ \dot{\xi}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_t\\ \xi_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u_t+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r_t. \quad (5\text{-}56)$$

Reemplazando la ley de control, puede escribirse como

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_t\\ \dot{\xi}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_t\\ \xi_t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}K & -K_I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_t\\ \xi_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r_t. \quad (5\text{-}57)$$

Para el estado estacionario, se tiene con $t\to\infty$,

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_\infty\\ \dot{\xi}_\infty\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_\infty\\ \xi_\infty\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}K & -K_I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_\infty\\ \xi_\infty\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r_\infty. \quad (5\text{-}58)$$

Suponiendo una referencia constante, escalón, se pueden restar las ecuaciones (5-56) y (5-58) obteniendo

$$\dot{e}_t=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}\cdot e_t+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u_e \quad (5\text{-}59)$$

que determinan la dinámica del error, donde

$$e_t=\begin{bmatrix}x_t-x_\infty\\ \xi_t-\xi_\infty\end{bmatrix}, \quad (5\text{-}60)$$

y la ley de control del sistema ampliado queda

$$u_t-u_\infty=-\begin{bmatrix}K & -K_I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_t-x_\infty\\ \xi_t-\xi_\infty\end{bmatrix}. \quad (5\text{-}61)$$

Por lo que, haciendo el diseño del controlador con las matrices

$$A_a=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix},\quad B_a=\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix} \quad (5\text{-}62)$$

se obtiene el controlador ampliado

$$K_a=\begin{bmatrix}K & -K_I\end{bmatrix} \quad (5\text{-}63)$$

que llevará el error de control de la Ec. (5-60) a cero.

Nótese que la ley de control del sistema a controlar es la (5-54) y no la (5-61). El algoritmo está implementado en el programa detallado en la Tabla 5-2 para Octave, considerando caso del péndulo invertido. El objetivo de control es que se mantenga vertical, y que recorra una distancia de 10 metros (r_t=10) desde el origen.

```
clc; clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';
% alfa(1)=.2; color='g';
alfa(1)=.8; color='b';
ref=10;
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;indice=0;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
```

```
%            estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_C=[1 0 0 0]; %La salida es posición
% Construcción del sistema ampliado
Mat_Aa=[Mat_A zeros(4,1);-Mat_C 0];
Mat_Ba=[Mat_B;0];
Mat_Ma=[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba Mat_Aa^3*Mat_Ba Mat_Aa^4*Mat_Ba];%Matriz
Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_Aa);
% c_ai=conv(conv(conv(conv([1 -auto_val(1)],[1 -auto_val(2)]),[1 -auto_val(3)]),[1 -
auto_val(4)]),[1 -auto_val(5)]);
c_ai=poly(auto_val);
Mat_Wa=[c_ai(5) c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(3) c_ai(2) 1 0
0;c_ai(2) 1 0 0 0;1 0 0 0 0];
Mat_Ta=Mat_Ma*Mat_Wa;
A_controlable=inv(Mat_Ta)*Mat_Aa*Mat_Ta; %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
mui(1)=-.7;mui(2)=-.7; mui(3)=-10.00 + 0.4i;mui(4)=conj(mui(3));mui(5)=-1;
alfa_ia=poly(mui)
Ka=fliplr(alfa_ia(2:6)-c_ai(2:6))*inv(Mat_Ta);
auto_val_LC=eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka);
%Cálculo el tiempo de muestreo para el sistema estable
%auto_val_LC =
%  -10.0000 +  0.4000i <---- El mas veloz (Real()). Entre 3 y 10 veces menor, el h del Euler
%  -10.0000 -  0.4000i
%   -1.0000 +       0i
%   -0.7000 +  0.0000i
%   -0.7000 -  0.0000i
%ans = 0.2273 -> 1/10/10 ans =  10e-03
%ó 1/10/3------>h=33.3e-3
h=30e-3;tiempo=round(20/h);p_pp=0;tita_pp=0; t=0:h:tiempo*h;
omega=0:h:tiempo*h; alfa=0:h:tiempo*h; p=0:h:tiempo*h;
p_p=0:h:tiempo*h; u=linspace(0,0,tiempo+1);
K=Ka(1:4); KI=-Ka(5); %Los valores del controlador de obtienen del K ampliado
psi(1)=0;
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
    psi_p=ref-Mat_C* estado;
    psi(i+1)=psi(i)+psi_p*h;
    u(i)=-K*estado+KI*psi(i+1);
    p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i) + h*p_pp;
    p(i+1)=p(i) + h*p_p(i) ;
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
    y_sal(i)=Mat_C*estado; i=i+1;
end
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad ángulo');hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);grid on;title('Acción de control');xlabel('Tiempo en
Seg.');hold on;
figure(2);hold on;subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid
on;xlabel('Ángulo');ylabel('Velocidad angular');hold
on;subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posicion carro');ylabel('Velocidad
carro');hold on;
```

Tabla 5-2. Código para Octave, caso péndulo invertido con referencia distinta de cero.

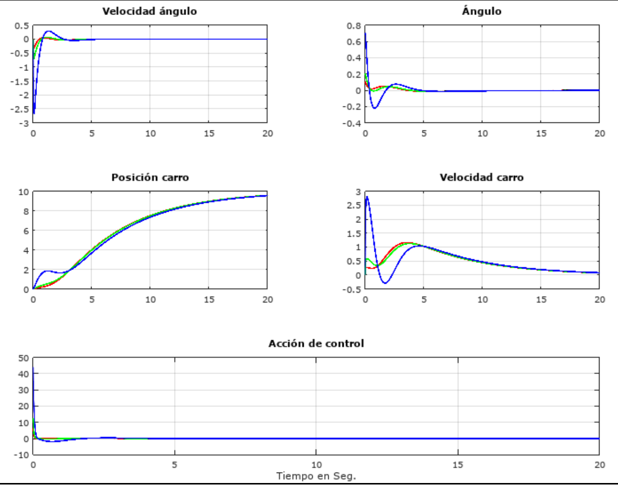


Fig. 5-9. Evolución del péndulo invertido para el controlador por asignación de polos a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,2 y 0,7 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente. Referencia en posición 10.

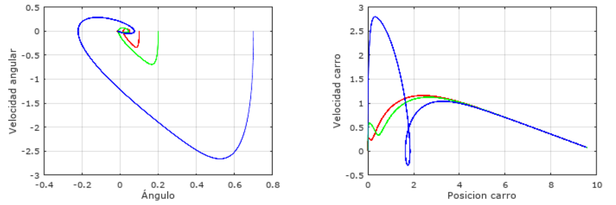


Fig. 5-10. Plano de fase para el ángulo y la posición, obtenida a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,2 y 0,7 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente. Referencia en posición 10.

5.7.3. Ejemplo de diseño entrada salida y variables de estado

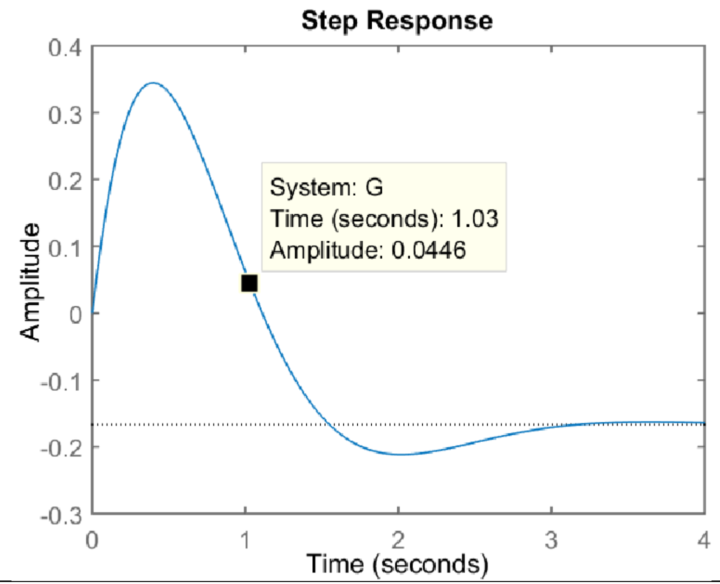
Se estudia un ejemplo de caso entrada salida de fase no mínima. Sea el ejemplo PM7.4 extraído de la literatura [4]

$$G(s)=\frac{(1+p)s-p}{s^2+3s+6} \tag{5-64}$$

con 0≤p≤∞, ¿para qué valores de p el lazo cerrado es estable?. Trabajar con P=1. Hallar el compensador que haga estabilizar al sistema y tenga error de regulación nulo. Para ello, trazar el lugar de raíces para –KG(s) y luego compensar en adelanto. Después, mediante un controlador PI establecer error nulo en regulación.
En caso de diseño de control mediante variables de estado, ubicar los polos deseados y obtener la respuesta al escalón.

Se fija P=1, y la respuesta al escalón del sistema de lazo abierto es

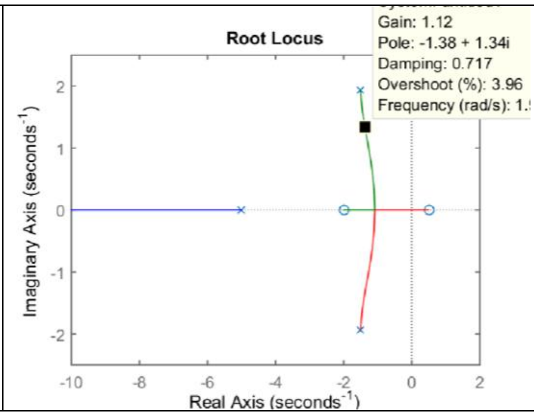
```
P=1;%PM7.4 del DORF
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];
G=tf(num,den);

step(G)
```



por lo cual es necesario diseñar un controlador para que en lazo cerrado la salida tienda a la referencia unitaria.

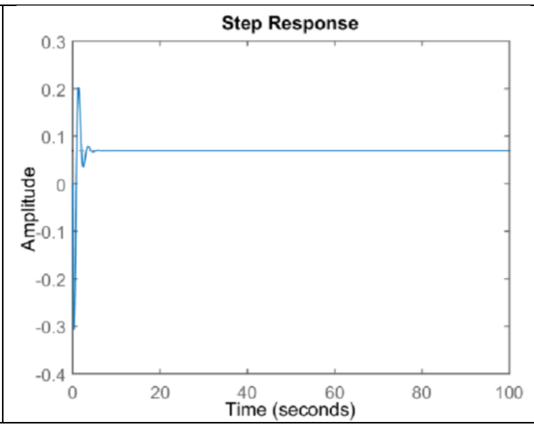
Se diagrama rlocus(-KCG) con un compensador en adelanto:

```
T1=1/2; %Cero
T2=1/5;%Polo
alfa=T2/T1;%Da entre 0 y 1
Kc=1; % K del rlocus(G)
C=tf(Kc*[1 1/T1],[1 1/(T2) ]);
rlocus(-C*G)
```



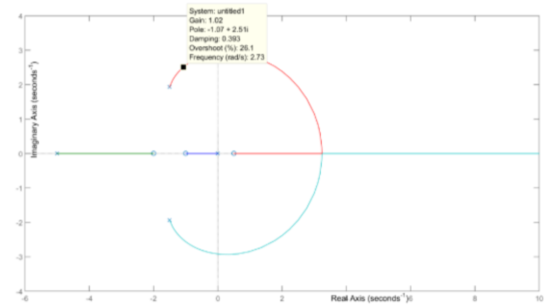
Fijando la ganancia K en -1.2, se puede cerrar el lazo y simular la respuesta al escalón.

```
FLC=feedback(-1.12*C*G,1); %
bode(.3*C2*C*G)
roots(FLC.Den{1})
step(FLC,100)
```

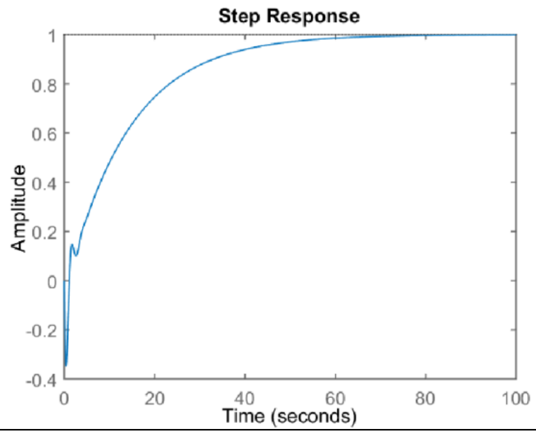


Para que el error de respuesta al escalón sea nulo, se agrega un nuevo compensador PI, donde se ubica el polo de manera que no afecte a la dinámica rápida ya que es estable, y se vuelve a bosquejar el rlocus().

```
Kp=1;Ki=1;
C2=tf(Kp*[1 Ki/Kp],[1 0]);
rlocus(-1*C*C2*G)
```




```
FLC=feedback(-1*C*C2*G,1); % bode(.3*C2*C*G)
roots(FLC.Den{1}) % rlocus(-C2*G)
step(FLC,100)
```



Para mejorarse la velocidad de respuesta y que el tiempo de establecimiento disminuya de 20 segundos, debe volver a repetirse el cálculo del compensador en adelanto y luego el proporcional integrativo. Es un proceso iterativo, que puede resultar útil en muchos casos, pero es poco intuitivo y difícil de ajustar.

5.7.4. Versión con realimentación de estados para la Ecuación (5-64)

Se debe representar a la función de transferencia en espacios de estados. A esa representación hay que agregarle las componentes del sistema ampliado para considerar una referencia distinta de cero. Luego se fijan los polos de lazo cerrado y se halla el controlador K. Para implementar el sistema, se debe obtener el vector **x** a partir de la representación en variables de estados de la función de transferencia, por lo que se emplea el método de asignación de variables de estados para entradas con derivadas.

```
%PM7.4 del DORF
% En estados, con matrices ampliadas
clear all; clc; close all;
% G
P=1;
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];
% Se asigna manualmente x1 = y + alfa0*u, x2=x1p+alfa1*u,
% es decir que x2 = yp + alfa1*u, alfa0=0, alfa1=-2.
A=[ 0, 1;
    -6 , -3 ];
B=[2;-7];
C=[1,0];D=0;
[n,d]=ss2tf(A,B,C,D) %Para verificar
```

```
n =
         0    2.0000   -1.0000
d =
    1.0000    3.0000    6.0000
```

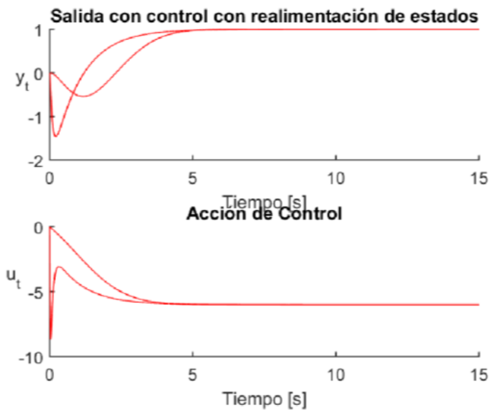
Se asignan los polos deseados y se construye el sistema de orden incrementado

```
%%%%%%%%% Cálculo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Polos_deseados=[-20+1j;-20-1j; -1];
% Polos_deseados=[-1+1j;-1-1j; -1];
% Sistema ampliado para referencia no nula
Aa=[A,[0;0];-C,0];
Ba=[B;0];
Mat_M=[Ba Aa*Ba Aa^2*Ba]; %Matriz Controlabilidad
%  Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Aa);
c_ai=poly(auto_val);
Mat_W=[c_ai(3)  c_ai(2) 1
       c_ai(2)  1     0;
             1  0     0];
Mat_T=Mat_M*Mat_W;
alfa_ia=poly(Polos_deseados) %
K=place(Aa,Ba,Polos_deseados);
Ka=fliplr(alfa_ia(2:4)-c_ai(2:4))*inv(Mat_T);
eig(Aa-Ba*Ka) %Deben ser los Polos_deseados
```

```
ans =
 -20.0000 + 1.0000i
 -20.0000 - 1.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
```

Ahora se dispone del controlador K y se procede a la simulación

```
% Simulación del comportamiento dinámico
h=1e-3;
T=15;
e=0;ys=[];ypp(1)=0;yp(1)=0;y(1)=0;t=[];
Max_T=T/h;
y(1)=0;
x=[yp(1);y(1)];ref=1;psi=0;
u=0;acc=[];acc(1)=0;
for ii=2:Max_T
    ua=u;
    u=-Ka *[x;psi];
    psi_p=ref-C*x;
    psi=psi+psi_p*h;
    up=(u-ua)/h;
%          2 s - 1
%     G =------------
%        s^2 + 3 s + 6
    ypp=2*up-1*u-3*yp(ii-1)-6*y(ii-1); %G de
lazo abierto
    yp(ii)=yp(ii-1)+h*ypp;
    y(ii)=y(ii-1)+h*yp(ii);
    ys(ii-1)=y(ii);
    t(ii-1)=ii*h;
    x(1)=y(ii);
    x(2)=yp(ii)-2*u;
    acc(ii-1)=u;
end

figure(2);
subplot(2,1,1);hold on
plot(t,ys,'r');
title('Salida con control con realimentación
de estados');
xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('y_t','Rotation',0)
subplot(2,1,2);hold on
plot(t,acc,'r')
title('Acción de Control');
xlabel('Tiempo
[s]');ylabel('u_t','Rotation',0)
```



Este método es más simple para ajustar, ya que se debe cambiar la ubicación de los polos deseados. No obstante, debe haber una armonía con el parámetro K_I de la integral del error, ya que se inestabiliza el sistema.

Como se observa, la realimentación de estados partiendo de la función de transferencia (5-64), consiste en asignarle a cada componente del vector de estado **x** las funciones

$$\begin{aligned} x_1 &= y + \alpha_0 u \\ x_2 &= \dot{x}_1 + \alpha_1 u = \dot{y} + \alpha_0 \dot{u} + \alpha_1 u, \end{aligned} \tag{5-65}$$

donde α_0=0 y α_1=-1; por lo que no puede emplearse la pseudo-inversa de y_t para obtener $x_t = C^{-1} y_t$. Ésta pseudo-inversa *puede funcionar únicamente* cuando éste x_t coincide con la asignación descripta en (5-65).

Ejercicios sugeridos

Para el caso del péndulo invertido, agregar una alinealidad a la salida del controlador con referencia distinta de cero, para que la acción de control tenga una no linealidad a su salida como indica la Fig. 5-11.

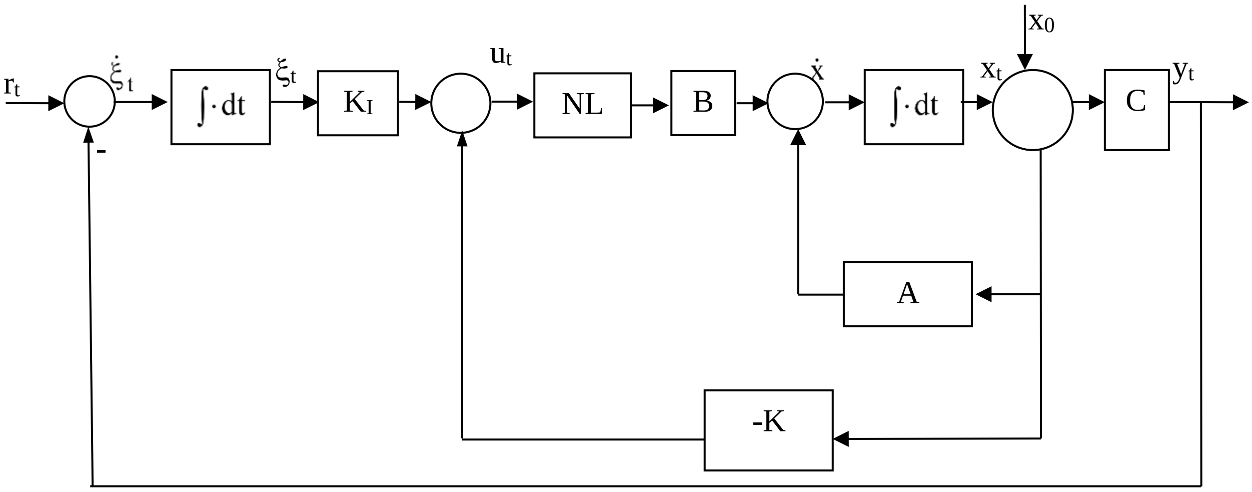


Fig. 5-11. Esquema de control para referencia distinta de cero con una no linealidad a la salida del actuador.

La no linealidad es una zona muerta de actuación y luego sea lineal en un primer caso y sino en un segundo caso, ambas con zona muerta como muestran las Fig. 5-12 y Fig. 5-13. Es decir, si |u|<2 entonces u=0, de otro modo u=sign(u)·(|u|-2) y para el segundo caso, si |u|<2 entonces u=0, de otro modo u=10·sign(u). Un ejemplo de éste procedimiento se detalla en la Tabla 5-3. Generar simulaciones de los ítems anteriores con estas modificaciones. Analizar el comportamiento del sistema en estado estacionario, para identificar los ciclos límite. En todos los casos comparar con el caso que no tenga la no linealidad la salida del actuador.

```
% Ejemplo de no-linealidad
ue=-2.5:.1:2.5; N=length(ue); uo=zeros(1,N);
ZM=.5;
for ii=1:N
    if abs(ue(ii))>ZM
    uo(ii)=ue(ii)-ZM*sign(ue(ii));
    end
end
plot(ue,uo,'k');xlabel('Tensión de entrada');
ylabel('V_o','Rotation',0);grid on;
```

Tabla 5-3. Ejemplo de implementación de no-linealidad tipo zona muerta en el origen.

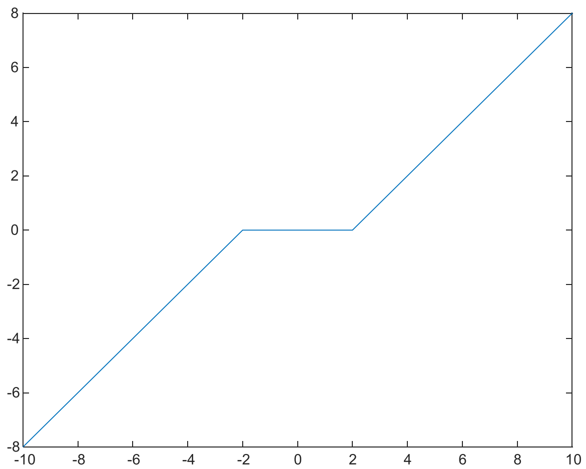


Fig. 5-12. Modificación de no linealidad para considerar un actuador lineal con zona muerta.

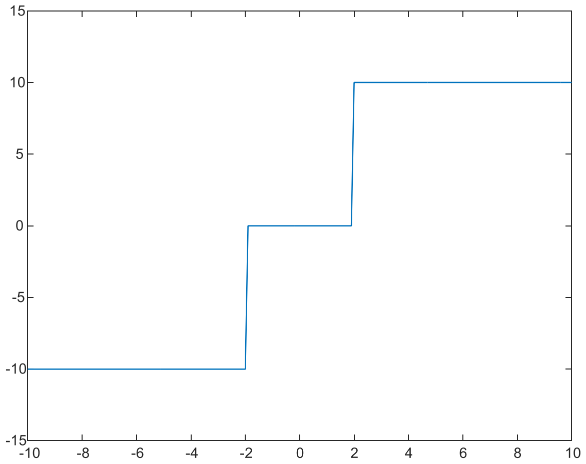


Fig. 5-13. Modificación de no linealidad a la salida del controlador para considerar un actuador con valores de 10 y -10, con una zona muerta.

5.8. Bibliografía

[1] Sontag. Mathematical control theory 1998. Pag 104. http://www.sontaglab.org.

[2] Kuo, B. Sistemas de control automático. 1996. Prentice Hall.

[3] Ogata, K. Modern Control Engineering. 1997. Prentice Hall.

[4] R. Dorf R. Bishop, Sistemas de Control Moderno. 10ma Edición. Pearson Prentice Hall.