

## 4. Análisis en el espacio de estados

### 4.1. Representaciones en espacio de estados de función de transferencia de sistemas

Como ya se ha visto, existen diversas técnicas para la obtención de representaciones de espacios de estado de las funciones de transferencia de sistemas.

Ahora se presentan las **formas canónicas controlable, observable, diagonal y de Jordan**.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (4-1)$$

donde  $u$  es la entrada y  $y$  es la salida, ecuación que también puede escribirse como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (4-2)$$

Se va a representar al sistema definido por las Ecs. (4-1) o (4-2) en la forma canónica controlable, en la forma canónica observable y en la forma canónica diagonal o Jordan.

#### 4.1.1. Carácter no único de la representación lineal en variables de estado

Existen **numerosas representaciones en variables de estado para un mismo sistema lineal**. En general se obtienen infinitas ya que partiendo de la transformación lineal del estado  $\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (4-3)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \quad (4-4)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{z}} \quad (4-5)$$

Reemplazando en el sistema lineal se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z}(t) + \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (4-6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (4-7)$$

Obteniendo un nuevo sistema

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}(t) \quad (4-8)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{z}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (4-9)$$

Con  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0)$ .

#### 4.1.2. Forma canónica controlable

En la representación en el espacio de estados del sistema definido por las Ecs. (4-1) o (4-2)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (4-10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4-11)$$

las matrices A, B, C y D se definen como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_n & \vdots & \vdots & \vdots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = [b_0]. \quad (4-13)$$

#### 4.1.3. Forma canónica observable

Para el sistema definido por las Ecs. (4-1) o (4-2), se representan las matrices A, B, C y D por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = [b_0] \quad (4-15)$$

#### 4.1.4. Forma canónica diagonal.

Considerando la factorización de la Ec. (4-2), **asumiendo raíces distintas,**

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n} \end{aligned} \quad (4-16)$$

entonces la **forma canónica diagonal de la representación en espacio de estados del sistema**

está dado por

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n], D = [b_0] \quad (4-18)$$

#### 4.1.5. Forma canónica de Jordan

Forma que toma la representación en espacio de estados del sistema Ec. (4-2) cuando tiene polos múltiples. Suponiendo que se repite tres veces el polo  $p_1$ , la Ec. (4-2) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)^3 (s + p_4) \dots (s + p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_4} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n} \end{aligned} \quad (4-19)$$

y las matrices A, B, C y D se convierten en

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -p_4 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n], D = [b_0] \quad (4-21)$$

#### 4.1.6. Forma compleja o conjugada

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

donde  $\sigma \pm j\omega$  son los autovalores complejos conjugados de la matriz de estados. Si  $\sigma < 0$  el sistema será estable.

#### 4.1.7. Ejemplo de aplicación

Como ejemplo de aplicación, expresar al sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 1,5}{s^2 + 5s + 1} \quad (4-23)$$

en las formas canónicas definidas de las representaciones en espacio de estado.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [3-5 \quad 1,5-1], D = [1]$$

Forma diagonal:

$$P_1 = -4.7913$$

$$P_2 = -0.20871$$

$$A = \begin{bmatrix} -4,79 & 0 \\ 0 & -0,2087 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [c_0 \quad c_1], D = [1]$$

donde  $c_0$  y  $c_1$  se calculan con los residuos del numerador y del denominador de la función de transferencia, `residue([1 3 1.5], [1 5 1])`, lo que da  $c_0 = -2,2002$  y  $c_1 = 0,2002$ .

```
# residue([1, 3, 1.5], [1, 5, 1])
import scipy.signal
from sympy import *
s=symbols('s')
P=(s**2+3*s+1.5)/(s**2+5*s+1)
G=apart(P, full=True).doit()
G
1.0 - 2.20019839629796/(s + 4.79128784747792) + 0.200198396297958/(s + 0.20871215252208)
```

Si tiene complejos conjugados, puede ser, por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -4,79 & 3 \\ -3 & -4,79 \end{bmatrix}$$

Donde la ecuación característica de la función de transferencia es  $s^2 + 9,58s + 31,944 = 0$ .

Para obtener el sistema completo, en variables de estado, se puede considerar la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad (4-24)$$

asumiendo que tiene polos complejos conjugados con raíces  $\sigma \pm j\omega$  se puede escribir que

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{(b_1 - b_0 a_1)s + (b_2 - b_0 a_2)}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}. \quad (4-25)$$

Nótese que puede escribirse como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{\alpha s + \beta}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} = b_0 + \frac{\alpha s}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\beta}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \quad (4-26)$$

que puede ser expresado en términos de los residuos para anti-transformar

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \alpha \cdot \frac{(s - \sigma)}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{(\beta + \alpha \sigma)}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}.$$

(4-27)

Siendo el objetivo expresar al sistema en la forma diagonal como

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad c_2], D = [b_0]$$

de la (4-27) se tienen los residuos para los coeficientes de  $C$  en términos de los coeficientes de la función de transferencia

$$C = \left[ \frac{(b_2 - b_0 a_2) + \sigma(b_1 - b_0 a_1)}{\omega} \quad (b_1 - b_0 a_1) \right] \quad (4-28)$$

obteniéndose así la representación del sistema en la forma canónica diagonal para autovalores complejos conjugados.

**Recordar:** Los autovalores de  $A$  son las raíces de la Ecuación característica.

#### 4.2. Solución de la ecuación de estados

Dado el sistema modelado mediante

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4-29)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4-30)$$

con  $\mathbf{x}(0)$  dado.

con las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  definidas con valores reales, se pretende hallar la expresión del vector  $\mathbf{x}$  en función de  $\mathbf{u}$ , para lo cual se tiene que resolver una EDO no homogénea. Por lo tanto, se comienza el cálculo con  $\mathbf{u}=0$  para obtener una solución de la EDO homogénea

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (4-31)$$

con una condición inicial dada para  $\mathbf{x}_t$  en  $t_0$ . Se propone entonces la solución como

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_n t^n + \dots \quad (4-32)$$

donde  $n$  es tan grande como se desee y  $\mathbf{b}_i$  tiene las dimensiones de  $\mathbf{x}_t$ . Se deduce que para  $t=0$

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}_0. \quad (4-33)$$

Derivando respecto a  $t$  a la Ec (4-32),

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + \dots + n\mathbf{b}_n t^{n-1} + \dots \quad (4-34)$$

que debe ser igual a  $A$  premultiplicada por la Ec (4-32),

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}\mathbf{b}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}_1 t + \mathbf{A}\mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{A}\mathbf{b}_n t^n + \dots \quad (4-35)$$

y se puede comparar cada término como potencia de  $t$  entre las Ecs (4-34) y (4-35), usando la condición inicial (4-33) se obtiene  $\mathbf{b}_1$  como

$$b_1 = A x_0 \quad (4-36)$$

luego lo reemplazo en la siguiente para hallar  $b_2$ ,

$$b_2 = \frac{1}{2} A b_1 = \frac{1}{2} A^2 x_0 \quad (4-37)$$

$$b_3 = \frac{1}{3} A b_2 x_0 = \frac{1}{6} A^3 x_0 \quad (4-38)$$

y así hasta

$$b_n = \frac{1}{n} A b_{n-1} x_0 = \frac{1}{n!} A^n x_0 \quad (4-39)$$

Reemplazando estos coeficientes en la expresión (4-32) propuesta para  $x_t$ , se tiene

$$x_t = x_0 + A t x_0 + \frac{1}{2} A^2 t^2 x_0 + \dots + \frac{1}{n!} A^n t^n x_0 + \dots \quad (4-40)$$

$$x_t = \left( I + A t + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^n t^n + \dots \right) x_0 = e^{A t} x_0. \quad (4-41)$$

Se puede hacer la asignación

$$\Phi_t = e^{A t} \quad (4-42)$$

y por lo tanto

$$\Phi_{t-s} = e^{A(t-s)} \quad (4-43)$$

siendo la solución de la EDO homogénea

$$x_t = \Phi_{t-t_0} x(t_0) \quad (4-44)$$

y es la función de transición de estados del vector  $x_t$ .

### Propiedades

- 1-  $\Phi_0 = \exp(A \cdot 0) = I$
- 2-  $\Phi_t = \exp(A t) = [\exp(-A t)]^{-1} = [\Phi_{(-t)}]^{-1}$  y también  $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$
- 3-  $\Phi_{t_1+t_2} = \exp(A(t_1+t_2)) = \exp(A t_1) \exp(A t_2) = \Phi_{t_1} \Phi_{t_2} = \Phi_{t_2} \Phi_{t_1}$
- 4-  $[\Phi_t]^n = \Phi_{(n t)}$
- 5-  $\Phi_{t_2-t_1} \Phi_{t_1-t_0} = \Phi_{t_2-t_0} = \Phi_{t_1-t_0} \Phi_{t_2-t_1}$

Para hallar la solución de la EDO no homogénea, con  $u \neq 0$ , se procede, agrupando las variables en la Ec (4-29),

$$(\dot{x}(t) - A x(t)) = B u(t) \quad (4-45)$$

y premultiplicando miembro a miembro por la matriz  $e^{-A t}$ , se tiene

$$e^{-A t} (\dot{x}(t) - A x(t)) = e^{-A t} B u(t). \quad (4-46)$$

Se sabe que

$$\frac{d(u \cdot v)}{dt} = \dot{u} v + u \dot{v}. \quad (4-47)$$

Para trabajar con el primer miembro de la Ec (4-46), se deriva la siguiente función

$$\frac{d(e^{-At}\mathbf{x}(t))}{dt} = -e^{-At}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + e^{-At}\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{-At}(\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)) \quad (4-48)$$

que significa

$$\frac{d(e^{-At}\mathbf{x}(t))}{dt} = e^{-At}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (4-49)$$

Ahora se integra respecto al tiempo  $\forall t \in [0, t]$  en ambos miembros, y se obtiene

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{-As}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds + \mathbf{x}_0 \quad (4-50)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  surge de la constante de integración y asignar  $t=0$ . Premultiplicando miembro a miembro por  $e^{At}$  se obtiene la solución  $\mathbf{x}(t)$  como,

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds. \quad (4-51)$$

Para el análisis de estabilidad, se asume que el sistema no tiene entrada  $\mathbf{u}$ , por lo que se deben analizar las trayectorias de  $\Phi_t$  para toda condición inicial  $\mathbf{x}_0$ ,  $t_0 \geq t$ . Se requiere encontrar expresiones que valúen a  $\Phi_t$  de la (4-42). Para ello se cuenta con herramientas que simplifican la solución, como es el Teorema de Cayley-Hamilton.

Sabiendo que de la expresión que relaciona a las matrices de estado con la función de transferencia, se tiene que

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (4-52)$$

es la solución en transformada de Laplace, de la salida del sistema en función de las variables de entrada y de las variables de estado. Entonces, tomando anti transformada de Laplace miembro a miembro, se tiene que

$$\mathbf{y}_t = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{D}\mathbf{U}(s)\} \quad (4-53)$$

en el primer término hay un producto de dos funciones en Laplace, lo que resulta en una integral de convolución en el tiempo.

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0], \mathbf{D} = 0.$$

#### 4.2.1. Teorema de Cayley-Hamilton

El teorema establece que toda matriz cuadrada  $n \times n$  anula su ecuación característica, lo que se puede escribir como

$$p(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0 \quad (4-54)$$

entonces

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + c_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} + \dots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (4-55)$$

Nótese que la (4-54) es una igualdad escalar y que la (4-55) es una igualdad matricial. Por lo tanto, ambas ecuaciones no pueden igualarse, o sea que no pueden intercambiarse  $\mathbf{A}$  por  $\lambda$ .

Para demostrarlo, se recurre al cálculo de la inversa de  $(\lambda I - A)$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(\lambda I - A)}{|\lambda I - A|} \quad (4-56)$$

si se premultiplica miembro a miembro por  $(\lambda I - A)$ , (al igual que si se posmultiplica), se obtiene la identidad

$$I = (\lambda I - A) \frac{\text{adj}(\lambda I - A)}{|\lambda I - A|}, \quad (4-57)$$

lo que puede escribirse como

$$|\lambda I - A| I = (\lambda I - A) \text{adj}(\lambda I - A) = p(\lambda) I. \quad (4-58)$$

Reemplazando el cálculo de la adjunta por su equivalente en forma de polinomio matricial B,

$$B = \text{adj}(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i B_i. \quad (4-59)$$

donde

$$p(\lambda) I = (\lambda I - A) B \quad (4-60)$$

Calculando entonces

$$p(\lambda) I = (\lambda I - A) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i B_i \quad (4-61)$$

que como  $\lambda$  y A no varían con  $n$ , se incorporan a la sumatoria directamente, obteniendo

$$p(\lambda) I = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda I \lambda^i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} A \lambda^i B_i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{i+1} I B_i - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i A B_i \quad (4-62)$$

en forma compacta

$$p(\lambda) I = \lambda^n B_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i (B_{i-1} - A B_i) - A B_0. \quad (4-63)$$

Desarrollando el primer miembro, se tiene

$$\lambda^n I + \lambda^{n-1} c_{n-1} I + \dots + \lambda c_1 I + c_0 I = \lambda^n B_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i (B_{i-1} - A B_i) - A B_0 \quad (4-64)$$

de donde se igualan cada uno de los términos de igual potencia de  $\lambda$

$$I = B_{n-1}, \quad (4-65)$$

$$c_i I = B_{i-1} - A B_i \quad \forall 1 \leq i \leq n-1, \quad (4-66)$$

$$c_0 I = -A B_0. \quad (4-67)$$

Para poder incorporar a la matriz A en la igualdad (4-64), se va a multiplicar miembro a miembro por  $A^i$  a las Ecs. (4-65), (4-66) y (4-67), y luego se realiza el proceso de la suma.

$$A^n I = A^n B_{n-1} \quad (4-68)$$

$$A^i c_i I = A^i B_{i-1} - A^i A B_i \quad \forall 1 \leq i \leq n-1 \quad (4-69)$$



$$A^0 c_0 I = -A^0 A B_0 \quad (4-70)$$

pero nótese que  $A^0$  es la identidad  $I$ .

Ahora se procede sumando a las igualdades (4-68), (4-69) y (4-70) lo que resulta en

$$A^n + \sum_{i=1}^{n-1} A^i c_i + c_0 I = A^n B_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (A^i B_{i-1} - A^i A B_i) - A B_0. \quad (4-71)$$

Desarrollando la suma del segundo miembro, se tiene

$$\begin{aligned} A^n + \sum_{i=1}^{n-1} A^i c_i + c_0 I &= A^n B_{n-1} + A^{n-1} B_{n-2} - A^{n-1} A B_{n-1} + A^{n-2} B_{n-3} - A^{n-2} A B_{n-2} \\ &+ A B_0 - A A B_1 - A B_0 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4-72)$$

Por lo tanto, se demostró que  $p(A)=\mathbf{0}$  ya que

$$A^n + \sum_{i=1}^{n-1} A^i c_i + c_0 I = A^n + c_{n-1} A^{n-1} + c_{n-2} A^{n-2} + \dots + c_1 A + c_0 I = \mathbf{0}. \quad (4-73)$$

Nótese que  $p(A)$  es un polinomio en  $A$  y consiste en una matriz, mientras que  $p(\lambda)$  es un escalar.

### Ejemplo.

Verifique que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (4-74)$$

cumple con el Teorema de Cayley Hamilton.

### Consecuencias del Teorema de Cayley Hamilton

Dada la anulación mencionada, se tiene que una función escalar puede expresarse como

$$P(s) = Q(s)p(s) + R(s) \quad (4-75)$$

con la particularidad de que en las raíces  $\lambda_i$  de  $p(s)$  se tiene

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) \quad (4-76)$$

pero si  $p(s)$  es el polinomio característico de una matriz  $A$ , entonces

$$P(A) = R(A) \quad (4-77)$$

**Siempre** se puede expresar un polinomio matricial de  $A$  de orden  $n$ , como un polinomio de orden  $n-1$  o menos.

Esto es, cualquier función polinómica de  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , puede escribirse como una combinación lineal de  $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ .

Por ejemplo

$$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i. \quad (4-78)$$

Si existe la inversa de A, entonces  $A^{-1}$  también es una combinación lineal de la  $n-1$  primeras potencias de A.

Nótese que es simple hallar la inversa del ejemplo 1.

#### Ejemplo 2:

$$p(A) = A^4 + 3A^3 + 2A^2 + A + I = 146A - 184I \quad (4-79)$$

con  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Para el caso de una función analítica del tipo

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = p(A) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} + R(A) \quad (4-80)$$

donde  $R(A)$  tiene que estar expresado en potencias hasta un orden de  $n-1$  o menos.

Así, la matriz  $e^{At}$  resulta ser combinación lineal de las  $n-1$  primeras potencias de A

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i \quad (4-81)$$

donde los coeficientes son las funciones de tiempo  $\alpha_i(t)$ .

Ésta última consecuencia es importante para el cálculo de  $e^{At}$ , ya que sólo se debe encontrar a las funciones  $\alpha_i(t)$ .

#### 4.2.2. Cómputo de la matriz exponencial

Existen varias opciones. Por ejemplo, puede hallarse mediante el método de la diagonalización de  $e^{At}$ .

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \quad (4-82)$$

donde P es una matriz diagonalizante. Si es Jordan,

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}. \quad (4-83)$$

También puede usarse la transformada de Laplace, ya que si se emplea para obtener la solución de la ecuación diferencial matricial homogénea

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (4-84)$$

se tiene transformando

$$sX(s) - X_0 = AX(s) \quad (4-85)$$

por lo que

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X_0 \quad (4-86)$$

con y pasando al dominio del tiempo se tiene

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0 \quad (4-87)$$

donde

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (4-88)$$

Primero debe obtenerse la inversa de  $(sI - A)$  en términos de  $s$ , lo que da cocientes de polinomios y luego se antitransforma cada elemento de la matriz.

Empleando el teorema de Cayley Hamilton Ec (4-81), se sabe que

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k \quad (4-89)$$

por lo que sólo se deben encontrar las funciones temporales  $\alpha_i(t)$ , que son  $n$  incógnitas. Se puede multiplicar miembro a miembro la igualdad (4-89) por un autovector correspondiente a un autovalor  $\lambda_1$  y se obtiene

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \quad (4-90)$$

para a un autovalor  $\lambda_2$  se obtiene

$$e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} \quad (4-91)$$

y repitiendo para todos los autovectores, si son distintos, se obtiene

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (4-92)$$

donde se despeja el vector de las funciones  $\alpha_i(t)$ , con la inversa de  $V$ , donde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4-93)$$

y se define como matriz de Vandermonde, y va a tener inversa si los autovalores de  $A$  son distintos.

Cuando existe multiplicidad de autovalores, por ejemplo, multiplicidad  $r$ , entonces se realizan  $r-1$  derivadas de (4-90),

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \quad (4-94)$$

$$\frac{d(e^{\lambda_1 t})}{d\lambda_1} = te^{\lambda_1 t} = \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} \quad (4-95)$$

$$\frac{d^{r-1}(e^{\lambda_1 t})}{d^{r-1}\lambda_1} = t^{r-1}e^{\lambda_1 t} = (r-1)! \alpha_{r-1}(t) + \dots + (n-r) \dots (n-2)(n-1) \alpha_{n-1}(t) \lambda_1^{n-1-r} \quad (4-96)$$

y se completan las  $n$  ecuaciones independientes.

Si las raíces (autovalores) son complejos conjugados, se debe igualar las partes real e imaginaria para hallar los distintos  $\alpha_i(t)$ .

### Método Sylvester

El método basado en la aproximación de Sylvester consiste en despejar  $e^{At}$  del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{m-1} & e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\ I & A & A^2 & \dots & A^{m-1} & e^{At} \end{vmatrix} = 0. \quad (4-97)$$

Se desarrolla a partir de la última columna, y se despeja  $e^{At}$ , obteniendo una expresión como la (4-89).

### Ejemplo

Calcular  $e^{At}$  mediante el método de Sylvester siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4-98)$$

Aplicando la fórmula para autovalores distintos

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & e^{\lambda_2 t} \\ I & A & e^{At} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & e^{-2t} \\ I & A & e^{At} \end{vmatrix} = 0. \quad (4-99)$$

$$-2e^{At} + A + 2I - Ae^{-2t} = 0, \quad (4-100)$$

resulta

$$e^{At} = I + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})A. \quad (4-101)$$

Es lo mismo que resolver el sistema

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 \end{cases} \quad (4-102)$$

Reemplazando el valor de los autovalores 0 y -2,

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = 1 \\ \alpha_1(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{2} \end{cases} \quad (4-103)$$

Ahora se obtiene

$$e^{At} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{A}. \quad (4-104)$$

Ejercicio 1. Calcule las funciones  $\alpha_i(t)$  para la función exponencial con la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \quad (4-105)$$

Ejercicio 2. Calcule las funciones  $\alpha_i(t)$  para la función exponencial con la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4-106)$$

empleando la igualdad de Euler  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ .

En la Tabla 4-1 se muestra el algoritmo que hace la simulación de las trayectorias para una matriz del tipo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (4-107)$$

donde  $\sigma \pm j\omega$  son los autovalores complejos conjugados de la matriz de estados. Nótese que el código en la Tabla 4-1 está expresado para un caso genérico de segundo orden con autovalores  $\sigma \pm j\omega$ , donde

$$\alpha_0(t) = e^{\sigma t} \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (4-108)$$

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t)$$

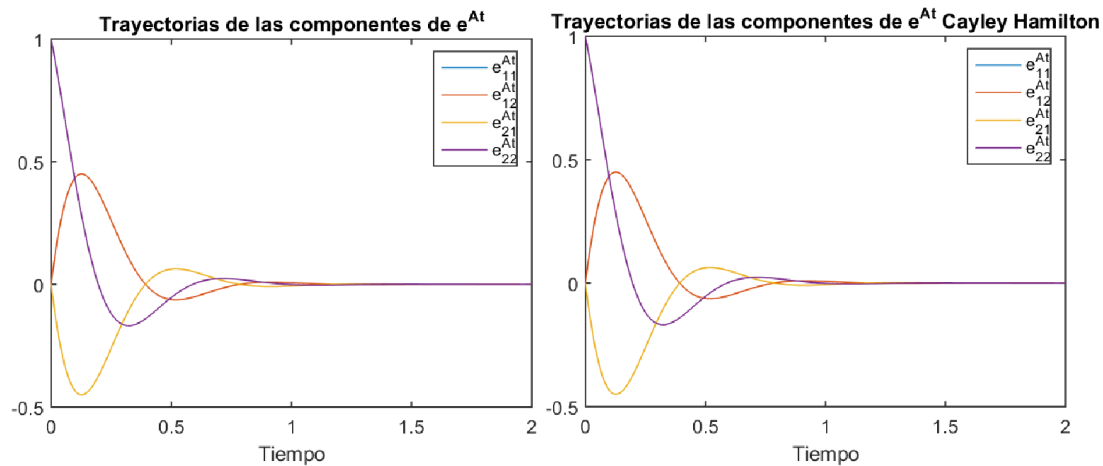
Empleando Cayley-Hamilton se tiene que

$$e^{At} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} \cos(\omega t) & e^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ -e^{\sigma t} \sin(\omega t) & e^{\sigma t} \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (4-109)$$

```
clear all; clc; close all;
%Calculo de las funciones solucion de la EDO lineal xp=Ax
%Para autovalores complejos conjugados alfa+-jbeta
alfa=-5;beta=8;
A=[alfa beta;-beta alfa];
[v landa,w]=eig(A);
At=.01;
t=0:At:2;z1=zeros(size(t));z2=z1;x2=z1;x1=z1;x3=x1;x4=x1;
sigma=real(landa(1,1));omega=imag(landa(1,1));
for ii=1:length(t)
    Vv=expm(A*t(ii)); z1(ii)=Vv(1,1); z2(ii)=Vv(1,2); z3(ii)=Vv(2,1); z4(ii)=Vv(2,2);
    alfa1=exp(sigma*t(ii))*sin(omega*t(ii))/omega;
    alfa0=exp(sigma*t(ii))*cos(omega*t(ii))-alfa1*sigma;
    CHi=alfa0*eye(2,2)+alfa1*A;
    eAt11(ii)=CHi(1,1); eAt12(ii)=CHi(1,2); eAt21(ii)=CHi(2,1); eAt22(ii)=CHi(2,2);
end
plot(t,z1,t,z2,t,z3,t,z4);legend('e^A^t_1_1','e^A^t_1_2','e^A^t_2_1','e^A^t_2_2');
xlabel('Tiempo');title('Trayectorias de las componentes de e^A^t');
```

```
%Nombre_Figura=['Evolucion componentes eAt']; print('-dtiff','-r300',Nombre_Figura);
figure;plot(t,eAt11,t,eAt12,t,eAt21,t,eAt22);legend('e^A^t_1_1','e^A^t_1_2','e^A^t_2_1',
'','e^A^t_2_2');
xlabel('Tiempo');title('Trayectorias de las componentes de e^A^t Cayley Hamilton')
CHi-Vv
%Nombre_Figura=['Evolucion CH']; print('-dtiff','-r300',Nombre_Figura);
```

**Tabla 4-1.** Cálculo de la matriz exponencial para autovalores complejos conjugados usando Cayley Hamilton.



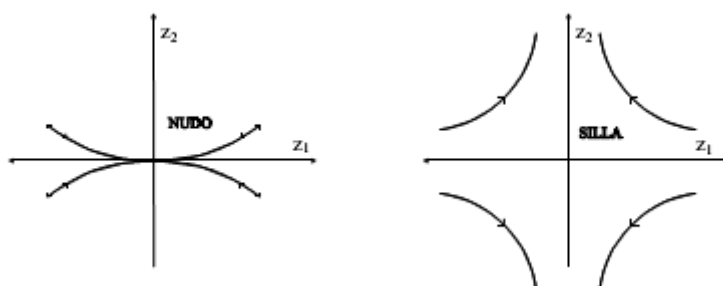
**Fig. 1.** Evolución de las trayectorias de las componentes de  $e^{At}$  cuando se simula directamente (izquierda) o usando Cayley Hamilton (derecha).

#### 4.2.3. Análisis cualitativo de trayectorias en sistemas de segundo orden

En la literatura, se hace énfasis en los sistemas de segundo orden por la razón de que es simple de graficar en el plano. Se pondrá la derivada temporal de una variable de estado en función de la otra, y al gráfico se lo denomina Plano de fase, donde el tiempo pasa a ser un parámetro.

Se asumirá que la acción de control se puso en función de  $\mathbf{x}_t$ , por lo que no aparece en la expresión y se emplea la matriz de transición de estado (4-42) para hallar la solución.

Con dos autovalores reales y distintos, se obtienen las trayectorias conceptuales (sin escala) mostradas en las gráficas de la Fig. 4-2. Si alguno es positivo, el sistema será inestable y puede ser un nudo o una silla. Será nudo si los signos de ambos autovalores coinciden, y será silla si son de distinto signo.



**Fig. 4-2.** Trayectorias que describen un nudo o una silla. Caso de autovalores reales y distintos.

Si ambos autovalores son iguales, se tiene una matriz de estado diagonalizada tipo Jordan, y sólo se tendrá un nudo. Será estable si son negativos o inestable si son positivos como muestra la Fig. 4-3.

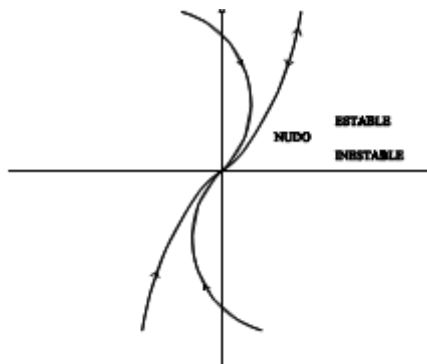


Fig. 4-3. Trayectorias que describen un nudo cuando los autovalores son iguales.

El caso más común en los sistemas dinámicos es el de polos complejos conjugados, donde se presentan de forma compleja conjugada. Si tienen la parte real distinta de cero, será un foco, y si es igual a cero será un centro lo que describen las trayectorias del sistema. Cuando la parte real sea negativa, el foco será estable como se observa en la Fig. 4-4.

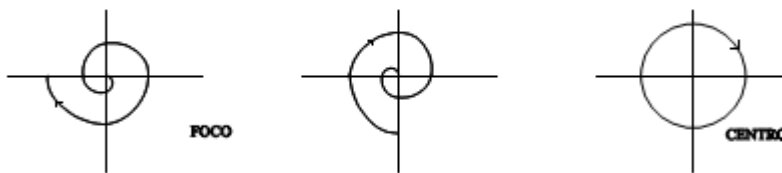


Fig. 4-4. Trayectorias que describen un foco o un centro, según los autovalores complejos conjugados.

### 4.3. Bibliografía

[1] [Ogata](#), K. Modern Control Engineering. 1997. Prentice Hall.