Solucionario de Razonamiento Matemático

Programación Competitiva UNI

21 de diciembre de 2017

1. Pregunta 1

Dada la secuencia 10 7 9 8 3 15 10 7 12 3, hallar cuántos elementos tiene la subsecuencia de mayor longitud con máximo común divisor diferente de 1.
Solución:
Para resolver este problema basta con ver la secuencia y probar mediante ensayo y error cada posible subsecuencia, aunque una manera más rápida consistiría en separar cada elemento por sus factores primos y así ver una cantidad menor de posibilidades al descartar secuencias.
La respuesta final sería la longitud de la siguiente subsecuencia:

$$|S_{max}| = |\{\ 9\ 3\ 15\ 12\ 3\}| = 5$$

Y claramente $mcd(9, 3, 15, 12, 3) = 3 \neq 1$.

2. Pregunta 2

José es un coleccionista de monedas antiguas. Recientemente ha comprado una colección de 8 monedas del antiguo imperio espartano. Sin embargo, le acaban de informar que, por error, una de las monedas enviadas es falsa. Ahora, él debe identificar la moneda falsa y enviarla al vendedor para que le cambien por una verdadera. El único dato que José tiene es que todas las monedas, a excepción de la falsa, tienen el mismo peso. Pero, José solo cuenta con una balanza como la que vemos en la imagen y desea identificar la moneda falsa con el mínimo número de pesadas. Ahora, tu tarea es ayudar un poco a José diciéndole cuál es el mínimo número de pesadas necesarias para identificar la moneda falsa.

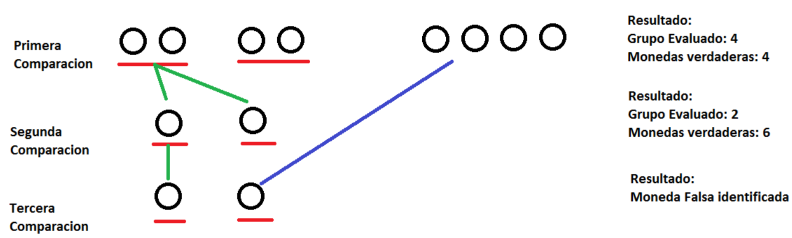
Solución:
En primer lugar, debemos tener en cuenta de que cualquier comparación que realicemos para identificar la moneda falsa se debe dar con la misma cantidad de monedas en ambos lados de la balanza.
Entre los posibles métodos que se pueden realizar, propondremos uno que da la respuesta certera al problema.
Se dan los siguientes pasos:

1. Separamos las 8 monedas en dos grupos de 4. En uno de los grupos comparamos de 2 a 2 en la balanza. Luego de analizar los resultados garantizamos que 4 monedas son verdaderas y trabajamos en el grupo que no fue descartado. (Descartamos el grupo que comparamos si los pesos son iguales y si no descartamos las 4 que no pesamos).

2. En el grupo evaluado de 4, volvemos a separarlo en 2 grupos de 2. En uno de los grupos compararemos 1 a 1 las monedas. Luego de analizar los resultados garantizamos que 6 monedas son verdaderas luego de descartar lo que corresponda. (Si las dos monedas comparadas tienen el mismo peso, entonces la moneda falsa está en el otro grupo, y si no, están en el comparado).

3. Para finalizar, como solamente nos falta verificar el peso de 2 monedas, basta con comparar alguna de estas con una moneda de las que ya garantizamos que es verdadera para obtener la respuesta: Si son iguales, la otra es la falsa, y si no, la que elegimos es la falsa.

Una ilustración simple de los pasos a tomar está en la siguiente figura para tomar como referencia. Asuma que en la imagen los grupos descartados ya no son considerados, no asumimos ninguna relación entre pesos dado que en el enunciado no está especificado.



Por lo tanto, la respuesta es 3.

3. Pregunta 3

Sea $f(n)$ la función de Fibonacci que genera la siguiente secuencia: 1 1 2 3 5 8 13 21 ..., ¿Cuál es el máximo común divisor de $f(147)$ y $f(144)$?
Solución:
Para resolver este problema debemos recordar que:

$$mcd(f(a), f(b)) = f(mcd(a, b))$$

Por lo tanto, la respuesta deseada es:

$$f(mcd(147, 144)) = f(3) = 2$$

.

4. Pregunta 4

Sean p, q, r, s proposiciones. Simplifique:

$$((p \vee q) \to (r \wedge s)) \to (p \to r)$$

Solución:
Para resolver este problema usamos primero la siguiente propiedad:

$$p \to q \leftrightarrow \sim p \vee q$$

Entonces:

$$\sim ((p \vee q) \to (r \wedge s)) \vee (p \to r)$$

$$\sim(\sim(p\vee q)\vee(r\wedge s))\vee(p\to r)$$

$$((p\vee q)\wedge\sim(r\wedge s))\vee(\sim p\vee r)$$

$$((p\vee q)\wedge(\sim r\vee\sim s))\vee(\sim p\vee r)$$

$$(p\vee q\vee\sim p\vee r)\wedge(\sim r\vee\sim s\vee\sim p\vee r)$$

$$((p\vee\sim p)\vee q\vee\vee r)\wedge((\sim r\vee r)\vee\sim s\vee\sim p)$$

$$V\wedge V=V$$

La respuesta es V.

5. Pregunta 5

Tienes una grilla de casilleros de 5 por 5, donde en cada una de ellas hay un ratón, si todo ratón se mueve a un casilero adyacente del que se encuentra, sin salirse de la grilla (un ratón puede moverse a un casillero ocupado),¿Cuál es el mínimo número de casilleros que quedan vacíos?
Solución:
En primer lugar, debemos notar que lo que nos hará obtener el menor número de casilleros vacíos es que los ratones se muevan a espacios que algunos otros hayan dejado vacíos. Ahora que tenemos la idea instintiva, preguntémonos: ¿Hay solución tal que haya solo 1 casillero vacío? La respuesta es sí, suponiendo que en cada celda colocaremos la dirección que tomará el ratón en ella:

↓	←	←	←	←
↓	↓	←	←	↑
↓	↓	→	↑	↑
↓	→	→	↑	↑
→	→	→	→	↑

Cuadro 1: Pasos de los ratones para 1 solo casillero vacío

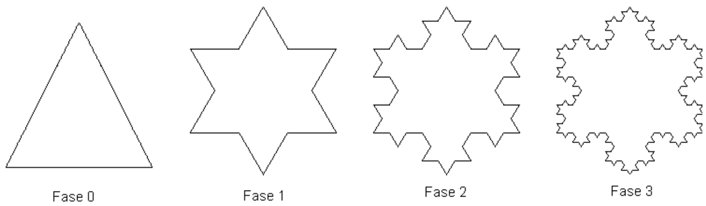
Ahora que tenemos un candidato, verifiquemos si hay alguna solución con todos los casilleros con al menos 1 ratón:
Suponiendo que se dé este caso, entonces sea la función:

$$f(i):\text{ Posición en la que termina el ratón en el casillero } i$$

Siendo que $posicion(i,j)=5(i-1)+j$, entonces f es biyectiva: es una permutación de $1,2,\ldots,25$.
Recordemos que las permutaciones se forman por ciclos, es decir, que al formar una "cadena" con las posiciones consecutivas de los valores de la permutación eventualmente se cerrará. Esto nos dice que los ratones se moverían formando ciclos, implicando que la cantidad de ratones que tomen una dirección debe ser la misma que la que tome la contraria a esta, siendo el total una cantidad impar, nos es imposible lograrlo.
La respuesta entonces es 1.

6. Pregunta 6

José está estudiando fractales. Actualmente, está viendo el copo de nieve de Koch. Formar este fractal es sencillo. Se comienza con un triángulo equilátero ($n = 0$). Luego, en cada iteración, a cada segmento se lo divide en 3 segmentos de igual longitud (sean AX, XY y YB), entonces se forma un triángulo equilátero XZY con Z exterior al actual triángulo más grande y se elimina el segmento XY. Así se tiene lo siguiente:



Sin embargo, José ha despertado sin ganas de hacer programas que generen fractales, desea usar un palito de fósforo por cada segmento y generar un copo en la iteración n-ésima, pero tampoco tiene ganas de contar la cantidad de palitos que necesita. Ayúdalo a determinar esa cantidad.
Solución:
Para resolver este problema, nos basta con analizar el método de transformación para cada iteración.
Supongamos que $f(n)$ es la cantidad de lados que tiene el fractal en la n-ésima iteración, entonces realicemos la transformación para alguno de sus lados:
Tenemos AB, lo dividimos en AX-XY-YB, todos de la misma longitud. Ahora colocamos un punto hacia afuera llamado Z para formar un triángulo equilátero XZY con base XY. Hasta ahora tenemos los segmentos AX,XY,YB,XZ,YZ. Finalmente eliminamos XY para quedarnos con:

$$AX - XZ - ZY - YB$$

Esto implica que luego de aplicar la transformación, se cuadruplica la cantidad de lados en el fractal:

$$f(n) = 4f(n-1)$$

Esta recurrencia no lleva a que:

$$f(n) = f(0) \cdot 4^n = 3 \cdot 4^n$$

7. Pregunta 7

José ya formó el anterior fractal para la iteración n. Además, calculó que para la iteración 0 requería $a_0 m^2$ de pintura para cubrirlo. Él había calculado la cantidad de pintura requerida para cubrir el fractal en la iteración n; sin embargo, estaba distraído y se le cayó café sobre el papel en el que estaba la fórmula del cálculo. Al secar el papel, solo se lograba reconocer lo siguiente:

$$\frac{a_0}{\nabla}\left(\nabla - \nabla \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) m^2$$

Donde ∇ son los números que no se logran distinguir. Ahora, José volverá a hacer el cálculo, pero ya está algo cansado y teme equivocarse así que te a pedido que también lo hagas pero que no le des la respuesta directa, sino la suma de los números que van en los ∇ para poder comparar con su propio resultado. Así que esa es tu tarea, dar la suma de los números que van en los ∇.
Solución:

Del procedimiento anterior, notamos que al momento de referirnos al área de cada fractal, la transformación aumenta un triángulo equilátero por cada lado. Además de ello, si cada segmento del fractal tiene una longitud determinada, entonces se aumenta un triángulo equilátero de lado igual a un tercio de este.
Suficiente de explicaciones, plantearemos matemáticamente:

$$A_0 = a_0 \text{ según el problema}$$

Además de ello, consideremos L_n el lado de los triángulos equiláteros que se añadirán en la n-ésima iteración, entonces:

$$L_n = \frac{1}{3} \cdot L_{n-1} = L_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$P_n = \text{Palitos agregados a la n-esima iteracion que formaron parte de los nuevos triángulos}$$

$$P_n = f_n - f_{n-1} = 3 \cdot 4^n - 6 \cdot 4^{n-1} = \frac{6}{4} \cdot 4^n$$

Dado que agregamos 2 palitos por cada triángulo equilátero que se añade, entonces el área que vamos a aumentar será:

$$D_n = \frac{P_n}{2}\left(\frac{L_n^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

Reemplazando:

$$D_n = \frac{6}{8} \cdot 4^n \left(\frac{L_0^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$$

Recordando que $a_0 = \frac{L_0^2\sqrt{3}}{4}$:

$$D_n = \frac{6}{8} \cdot 4^n \left(a_0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$$

$$D_n = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n a_0$$

Entonces, el área total hasta la n-ésima iteración será:

$$A_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} D_n$$

$$A_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n a_0$$

$$A_n = a_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$A_n = a_0 \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$A_n = a_0 \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right)$$

$$A_n = a_0\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$A_n = \frac{a_0}{5}\left(8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

La respuesta es 16.

8. Pregunta 8

¿Cuáles son los dos números de mayor orden en la raíz cuadrada de 889345682143243002231?
Solución:
Para obtener la solución, basta con aplicar el algoritmo para obtener la raíz cuadrada de un número:

$$\begin{array}{ll} 8|89|34|56|82|14|32|43|00|22|31 & \overline{2} \\ 4 & \\ 489 & 4\overline{9}\cdot\overline{9} \\ 441 & \ldots \end{array}$$

Con estos dos pasos obtenemos que los dos dígitos de mayor orden son el 2 y el 9.

9. Pregunta 9

¿Cuántos números entre 20 y 90 son pesi con 105?
Solución:
Para resolver este problema, hallaremos la respuesta por complemento, dado que es complicado hallar los números pesi con 105, hallaremos los que no lo son y restaremos esta cantidad del total.

$$Total = 90 - 20 + 1 = 71$$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Por lo tanto, tenemos que hallar:

$$R = M_3 \cup M_5 \cup M_7 = \text{Numeros que son multiplos de 3 o 5 o 7 en el rango [20,90]}$$

Por lo tanto, usando principio inclusión exclusión, reconocemos que para hallar la cantidad que necesitamos, deberemos sumar los cardinales de los conjuntos que mezclen las características de 1 a 1, restar los que son de 2 a 2 para finalmente agregar los de 3 a 3:

$$R = M_3 \cup M_5 \cup M_7 = M_3 + M_5 + M_7 - M_{15} - M_{35} - M_{21} + M_{105}$$

Entonces, para hallarlos, nos basta recordar que $M_i = \left\lfloor \frac{90}{i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{19}{i} \right\rfloor$:

$$R = (30-6) + (18-3) + (12-2) - (6-1) - (2-0) - (4-0) + (0-0) = 38$$

Nuestra respuesta entonces será $71 - R = 33$.

10. Pregunta 10

¿Cuánto es la suma de la suma de divisores para los números del 1 al 25?
Solución:
Una manera un poco diferente de lo usual para analizar el problema es la siguiente:
Suponiendo que tengamos cada divisor de cada uno de los números del 1 al 25 de manera suelta, contabilizando solamente las veces que aparece en el grupo, se puede notar una condición. Es más que claro que un divisor d aporta solamente para los números tales que sean kd, con $k \in \mathbb{Z}, k > 0$. Esto implica que la cantidad de veces que d aporta a la suma total como divisor es la cantidad de múltiplos que tiene dentro del rango que analizamos, esto es dado por:

$$V(i) = \left\lfloor \frac{25}{i} \right\rfloor$$

Entonces la suma total será la cantidad de veces que aparece un divisor por su mismo valor:

$$S = \sum_{i=1}^{25} iV(i) = \sum_{i=1}^{25} i \left\lfloor \frac{25}{i} \right\rfloor$$

$$S = 522$$