Semillero de Programación

Algoritmo de máximo flujo

Ana Echavarría Juan Francisco Cardona

Universidad EAFIT

3 de mayo de 2013

Contenido

Contenido

Problema A - I love strings!

- Hay que hallar rápidamente si un string s aparece en un string t.
- Utilizar kmp y retornar verdadero o falso dependiendo de si se encontró el string o no.

Implementación I

```
1  bool kmp(const string &needle, const string &haystack){
2     int m = needle.size();
3     vector<int> border(m);
4     border[0] = 0;
5
6     for (int i = 1; i < m; ++i) {
7        border[i] = border[i - 1];
8        while (border[i] > 0 and needle[i] != needle[border[i]])
9           border[i] = border[border[i] - 1];
10       if (needle[i] == needle[border[i]]) border[i]++;
11    }
12
13    int n = haystack.size();
14    int seen = 0;
15    for (int i = 0; i < n; ++i){
16       while (seen > 0 and haystack[i] != needle[seen])
17          seen = border[seen - 1];
18       if (haystack[i] == needle[seen]) seen++;
```

Implementación II

```
19          if (seen == m) return true;
20      }
21      return false;
22  }
23
24  int main(){
25      int cases; cin >> cases;
26      while(cases--){
27          string haystack; int q;
28          cin >> haystack >> q;
29          while (q--){
30              string needle; cin >> needle;
31              if (kmp(needle, haystack)) puts("y");
32              else puts("n");
33          }
34      }
35      return 0;
36  }
```

Problema B - Power strings

- Un string s de tamaño n se dice que tiene periodo k si $s(x+k) = s(x)\ \forall x : x + k < n$
- Notemos que el mínimo k que cumpla esa propiedad es `n - border[n-1]`
- Este k es mínimo porque `border[n-1]` es máximo

Problema B - Power strings

- En el problema nos interesa que el mínimo periodo (prefijo de tamaño k) aparezca un número entero de veces en la cadena
- Para comprobar esto último basta con ver que n sea divisible por k
- Si n no es divisible por k entonces el mínimo periodo no aparece un número entero de veces y la respuesta es 1.

Implementación I

```
1  const int MAXN = 1000005;
2  int border[MAXN];
3
4  int main(){
5     ios::sync_with_stdio(false); // Para hacer la I/O mas rapido
6     // Con esa lnea ya slo se puede usar cin y cout si no el
       programa se enloquece con la entrada y la salida
7     string s;
8     while (cin >> s){
9        if (s == ".") break;
10       int n = s.size();
11
12       border[0] = 0;
13       for (int i = 1; i < n; ++i) {
14           border[i] = border[i - 1];
15           while (border[i] > 0 and s[i] != s[border[i]]) {
16               border[i] = border[border[i] - 1];
17           }
```

Implementación II

```
18              if (s[i] == s[border[i]]) border[i]++;
19          }
20
21          int base = n - border[n-1];
22          if (n % base == 0) cout << n / base << endl;
23          else cout << 1 << endl;
24      }
25       return 0;
26  }
```

Contenido

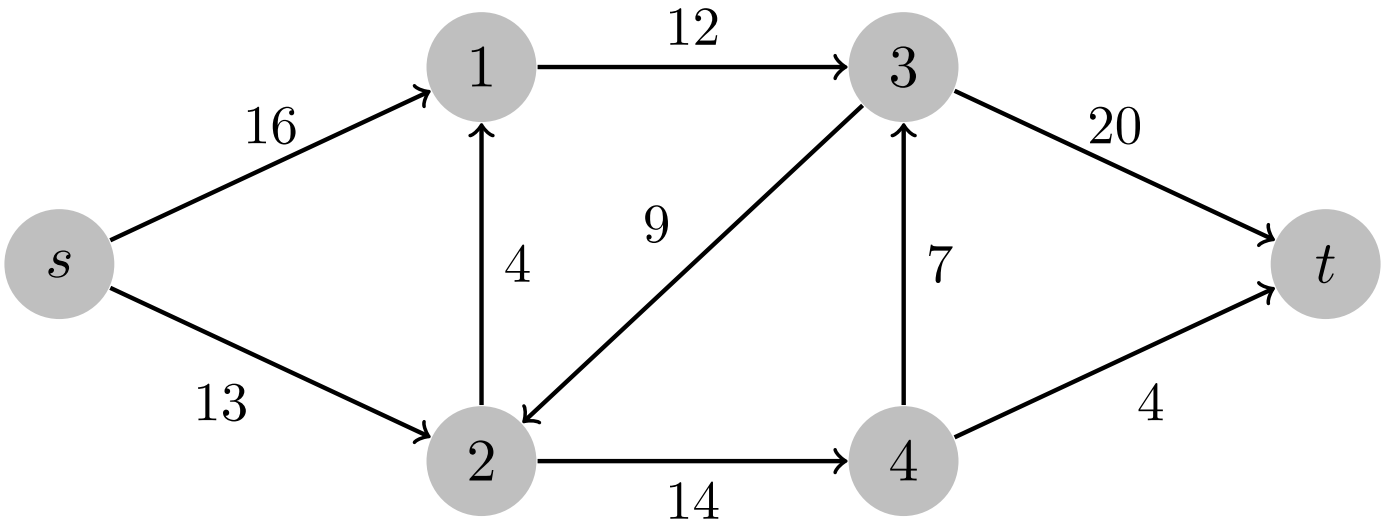
Red de flujos

- De igual manera como se puede crear un grafo para modelar rutas y hallar la mínima distancia entre dos lugares, se pueden usar grafos para representar una **red de flujos**.
- Acá los nodos son lugares a los que hay que transportar material y los pesos de cada arista es la **tasa máxima** a la cual ese material fluye entre los nodos.
- Algunos ejemplos en las que las redes de flujos se usan para modelar problemas son: líquido que fluye por tuberías, corriente eléctrica que fluye por un cableado, flujo de producción en una línea de ensamble, etc.

Ejemplo

Ejemplo

Se tiene un sistema de tuberías unidireccionales que salen desde la planta de tratamientos en la ciudad s y pasan por varias ciudades incluida la ciudad t. La capacidad máxima de las tuberías (litros/hora) entre cada par de ciudades es conocida. ¿Cuál es la máxima cantidad de agua que puede llegar a la ciudad t en una hora?



Contenido

Red de flujos

Red de flujos

Una red de flujos $G = (V, E)$ es un grafo conexo y dirigido en donde cada arista $(u, v) \in E$ tiene una capacidad **no negativa** $c(u, v) \geq 0$.

Si $(u, v) \notin E$ entonces $c(u, v) = 0$

Se distinguen dos nodos: la fuente s y el sumidero t.

Flujo

Sea $G = (V, E)$ una red de flujos con fuente s y sumidero t.

Flujos

Un flujo es una función $f : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple que:

- **Restricción de capacidad:**

$$f(u, v) \leq c(u, v) \quad \forall\, u, v \in V$$

- **Simetría:**

$$f(u, v) = -f(v, u) \quad \forall\, u, v \in V$$

- **Conservación de flujo:** El flujo que sale de un nodo diferente de s y t es igual al que entra al nodo.
  $\forall\, u \in V - \{s, t\}$

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v) < 0}} f(u, v) + \sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v) > 0}} f(u, v) = 0$$

Problema de máximo flujo

Sea $G = (V, E)$ una red de flujos con fuente s, sumidero t, función de flujos f.

Definiciones

- Al valor $f(u, v)$ se le llama flujo del nodo u al nodo v.
- El valor del flujo de G se denota por $|f|$ y corresponde al flujo que sale de s menos el flujo que entra a s

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

Problema de máximo flujo

Dados G, s y t hallar un flujo de G que tenga valor máximo.

Red residual

Dados una red e flujos $G = (V, E)$ y un flujo f.
La red residual de G dado que se ha "bombeado" un flujo f es un grafo $G_f = (V, E_f)$ con una función de costos c_f.
El peso c_f de una arista $(u, v) \in E_f$ es el valor de flujo que todavía se puede "bombear" desde u hasta v sin violar la capacidad de (u, v).

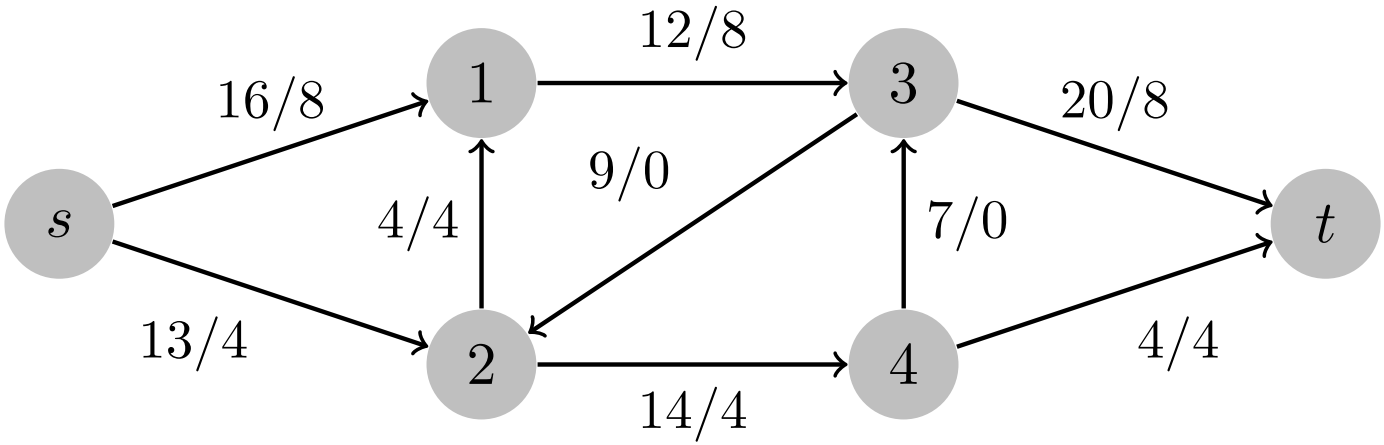
$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

Ejemplos

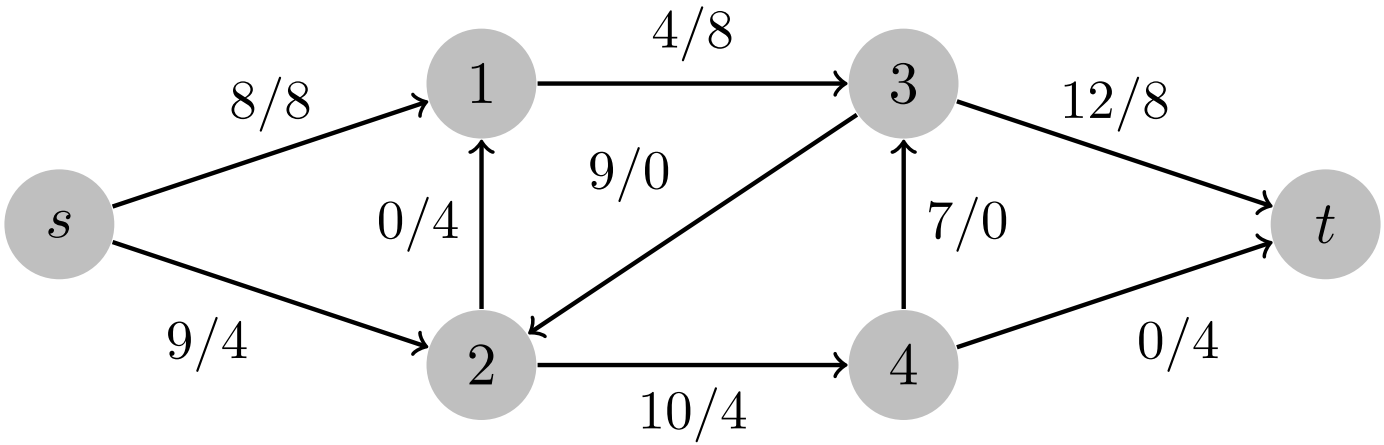
- Si $c(u, v) = 16$ y $f(u, v) = 11$ entonces $c_f(u, v) = 16 - 11 = 5$. Esto significa que por la arista (u, v) todavía se pueden bombear 5 unidades de flujo sin violar la capacidad.
- Si $c(u, v) = 16$ y $f(u, v) = -4$ (es decir que $f(v, u) = 4$) entonces $c_f(u, v) = 16 - (-4) = 20$. Esto significa que por la arista (u, v) no sólo se pueden "bombear" las 16 unidades que tiene de capacidad esa arista, sino que también se pueden "desbombear" las 4 unidades que se habían bombeado de v a u.

Ejemplo

Red de flujos: Peso de arista (a, b) es $c(a, b)/f(a, b)$



Red residual: Peso de arista (a, b) es $c_f(a, b)/c_f(b, a)$



Camino de aumentación

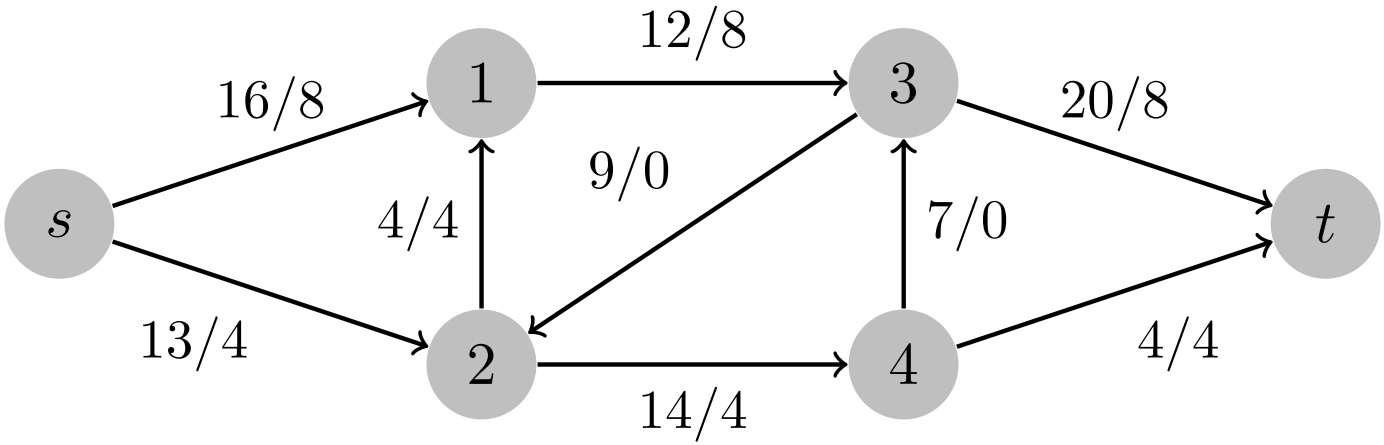
Camino de aumentación

Dada una red residual G_f un camino de aumentación es un camino simple (sin ciclos) p que va de s a t en G_f tomando solo aristas de peso mayor que 0.

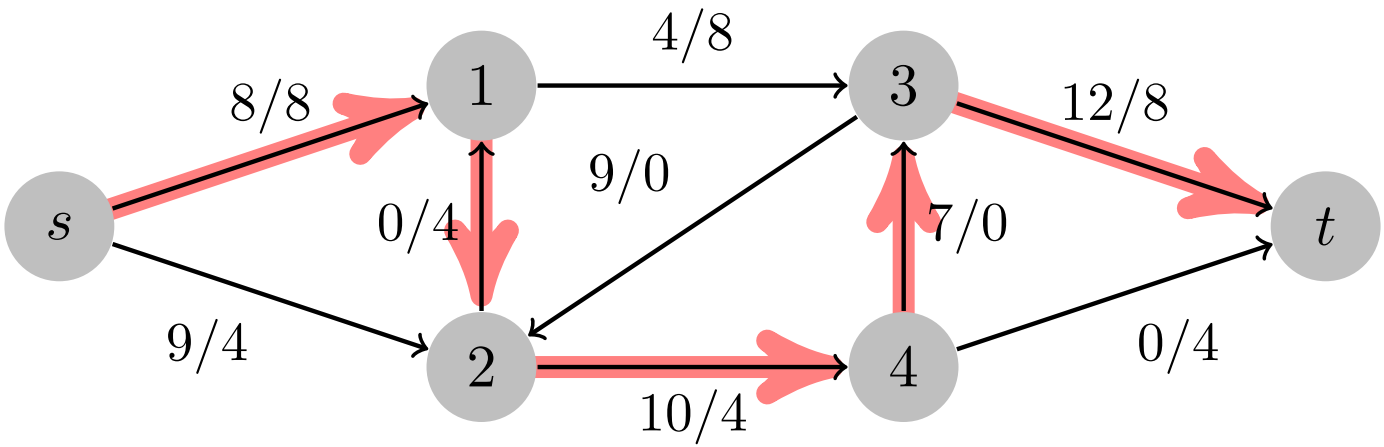
En otras palabras un camino de aumentación es un camino por el cual todavía se puede bombear flujo de s a t en G sin violar las restricciones de capacidad.

Ejemplo

Red de flujos: Valor escrito en arista (a, b) es $c(a, b)/f(a, b)$



Red residual: Valor escrito en arista (a, b) es $c_f(a, b)/c_f(b, a)$



Pregunta

Pregunta

En el camino anterior, ¿cuál era la máxima cantidad de flujo que se podía "bombear" sin violar las restricciones de capacidad?

Pregunta

Pregunta

En el camino anterior, ¿cuál era la máxima cantidad de flujo que se podía "bombear" sin violar las restricciones de capacidad?

Respuesta

El máximo valor que se puede "bombear" es el mínimo de los valores de las aristas del camino $\min\{8, 4, 10, 7, 12\} = 4$.

Este valor tiene el nombre de cuello de botella o bottleneck.

Cuello de botella

La máxima cantidad de flujo que se puede enviar por un camino de aumentación p corresponde al mínimo valor de las aristas de p en la red residual.

Este valor se conoce como cuello de botella

$$\text{bottleneck}(p) = \min\{c_f(u, v) | (u, v) \in p\}$$

Aumentando el flujo

Se tienen una red de flujos $G = (V, E)$, un flujo f y un camino p en la red residual.
Si se aumenta el flujo $f(u, v)$ en el valor bottleneck(p) para cada $(u, v) \in p$ y se reduce en bottleneck(p) para (v, u) entonces:

- El valor resultante para $f(u, v)$ cumple con las propiedades de flujo.
- El valor del nuevo flujo es el valor del antiguo flujo más bottleneck(p).

Teorema de máximo flujo mínimo corte

Max-flow min-cut

Si f es un flujo en una red de flujos $G = (V, E)$ con fuente s y sumidero t entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- f es un flujo máximo en G.
- La red residual G_f no contiene caminos de aumentación
- $|f|$ es el mínimo costo de cortar aristas de G de manera que s y t queden separados cuando costo de cortar una arista es el peso de la arista.

Contenido

Algoritmo de máximo flujo

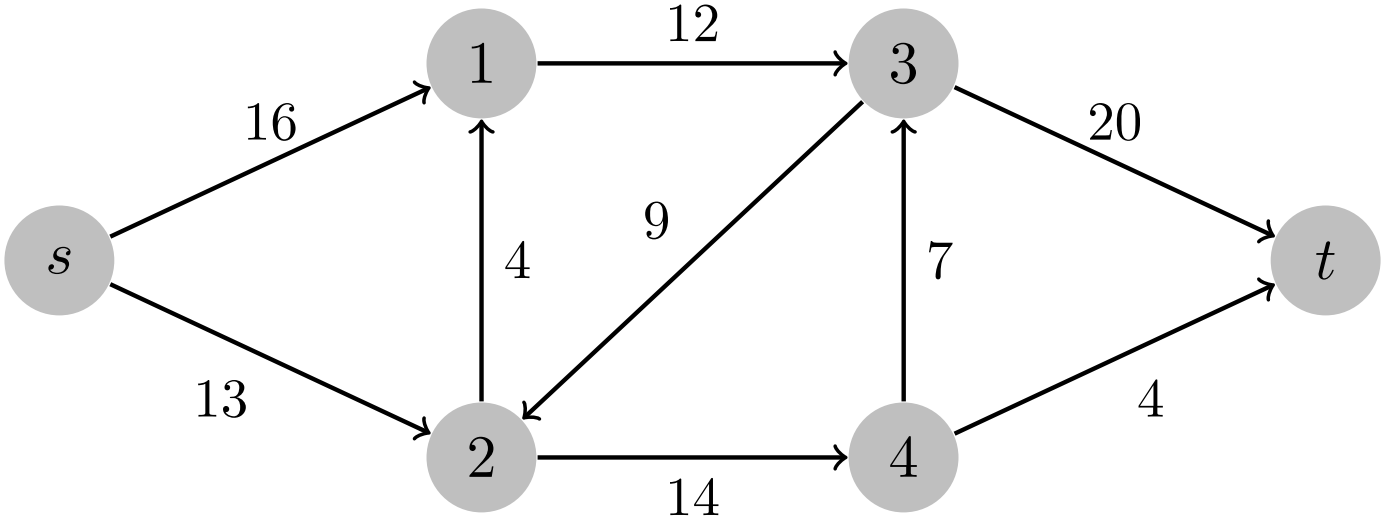
1. Inicializar el flujo en 0.
2. Mientras que haya caminos de aumentación p en G_f
   3. Aumente el flujo f a lo largo de p en el valor bottleneck(p)
4. retornar $|f|$

¿Por qué funciona?

- Cuando f es 0 se cumplen las restricciones de flujo.
- En cada iteración f sigue cumpliendo las restricciones de flujo porque ya vimos que al aumentar f en el valor del cuello de botella de p (para las aristas de p) no se violan las restricciones necesarias para ser un flujo.
- Cuando se termina la ejecución del algoritmo, se tiene un flujo para la red G y no hay más caminos de aumentación en G_f.
- El teorema de máximo flujo mínimo corte dice que el flujo f es máximo cuando no hay más caminos de aumentación

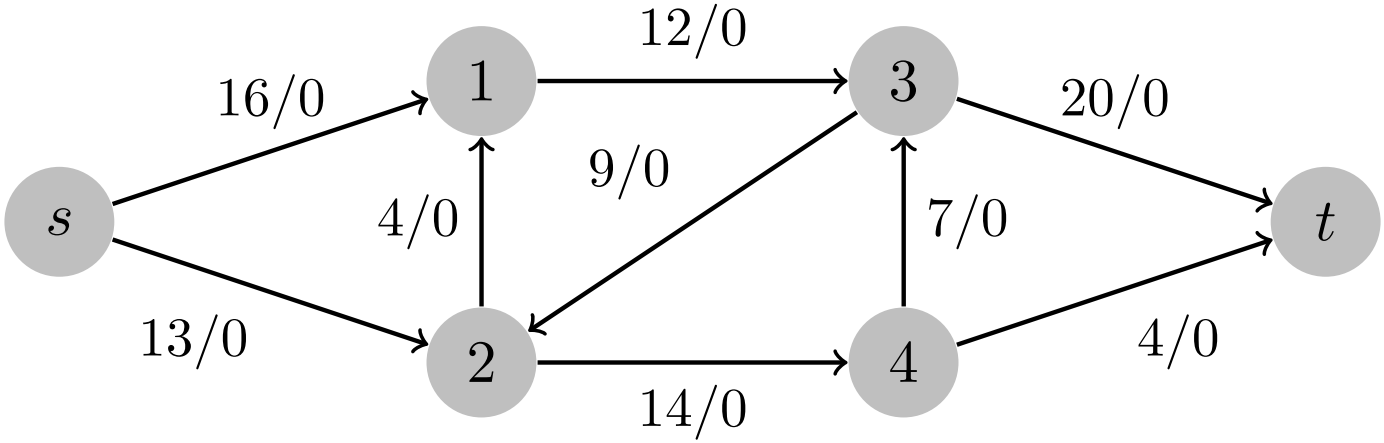
Ejemplo

Hallar el máximo flujo entre el nodo s y el nodo t

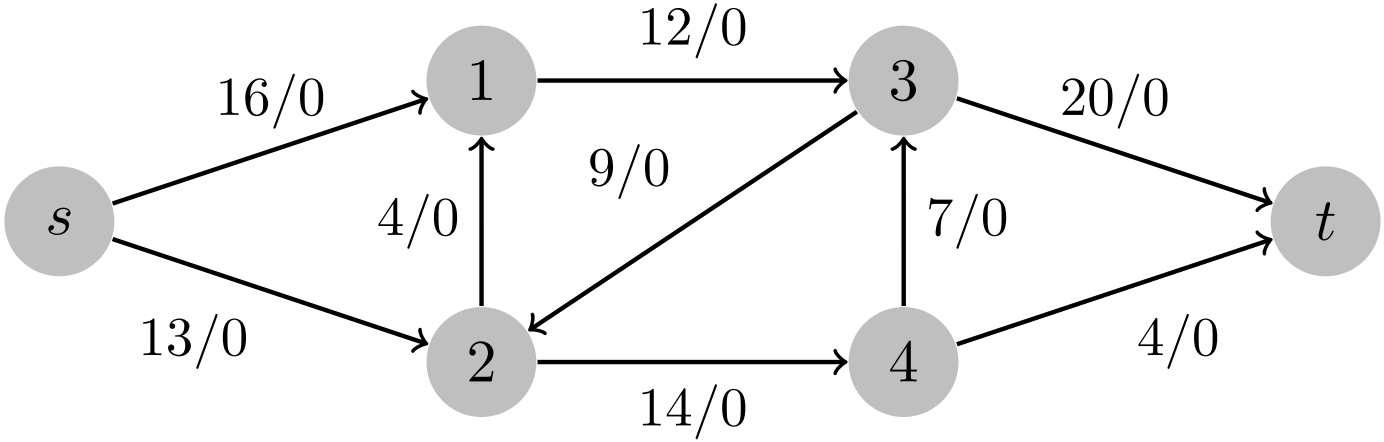


Ejemplo: Iteración 1

Red de flujos: Peso de arista (a, b) es $c(a, b)/f(a, b)$

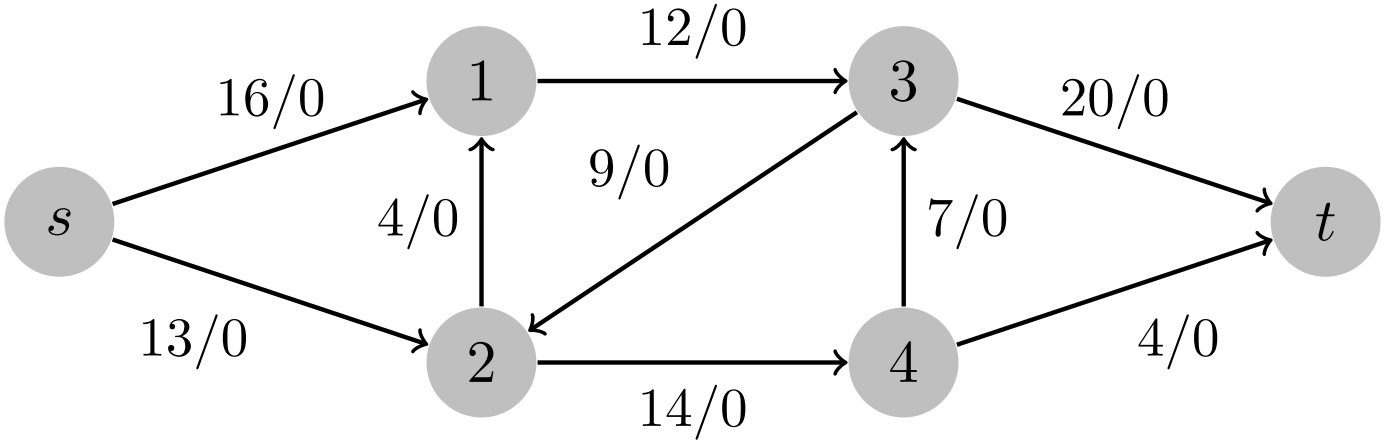


Red residual: Peso de arista (a, b) es $c_f(a, b)/c_f(b, a)$

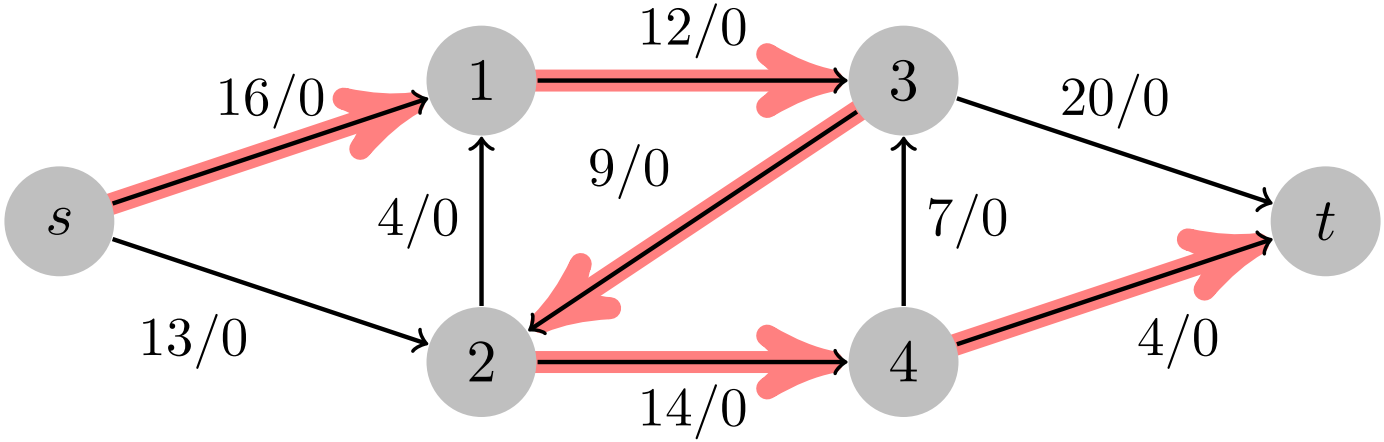


Ejemplo: Iteración 1

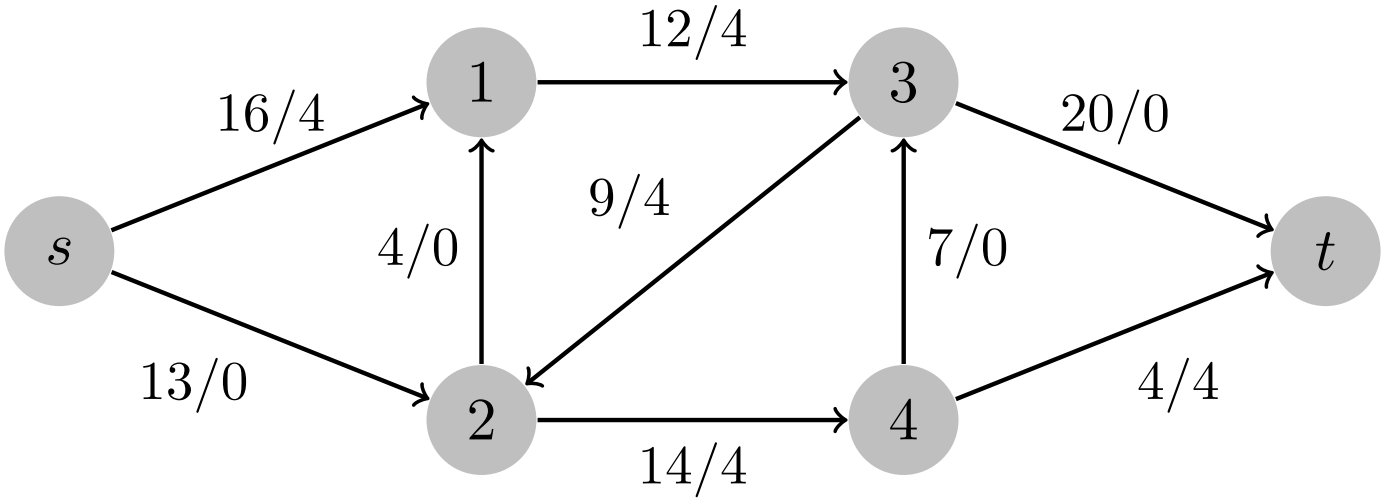
Red de flujos: Peso de arista (a, b) es $c(a, b)/f(a, b)$

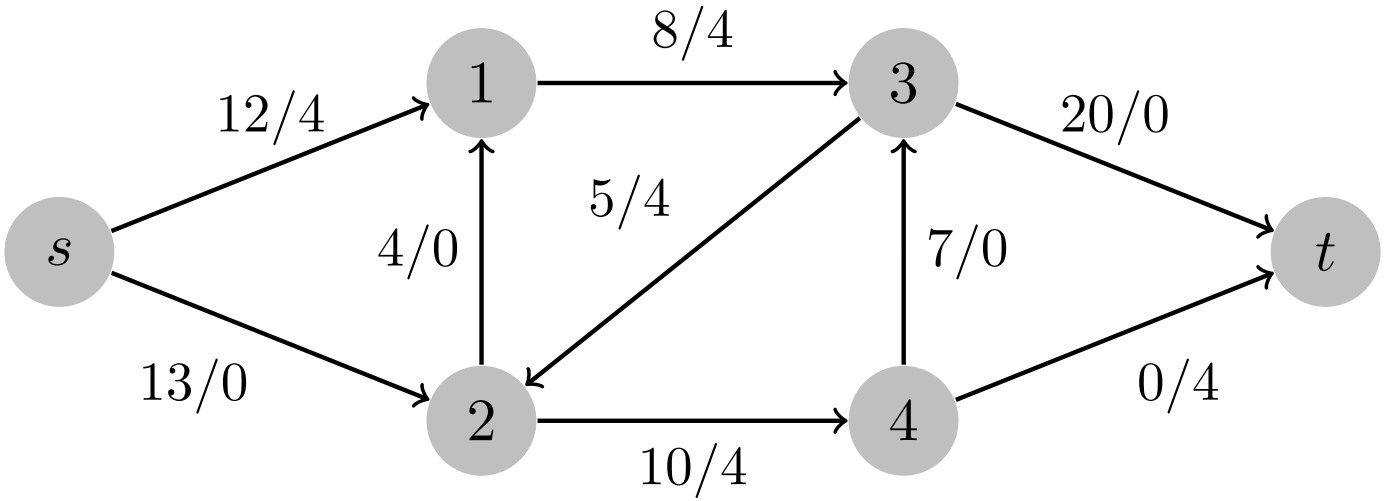


Red residual: Peso de arista (a, b) es $c_f(a, b)/c_f(b, a)$

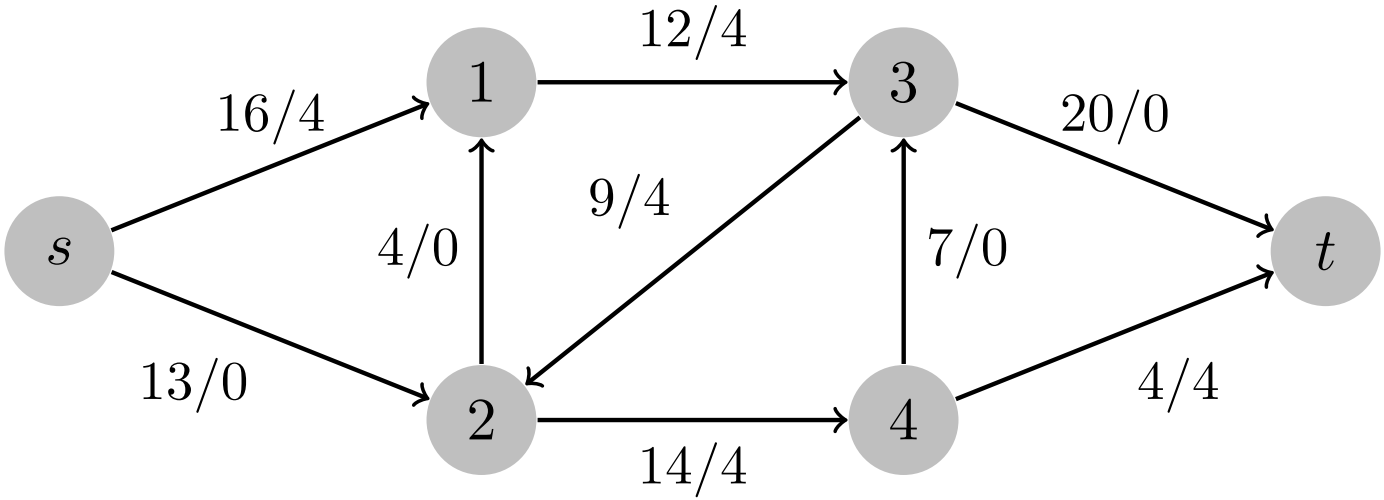


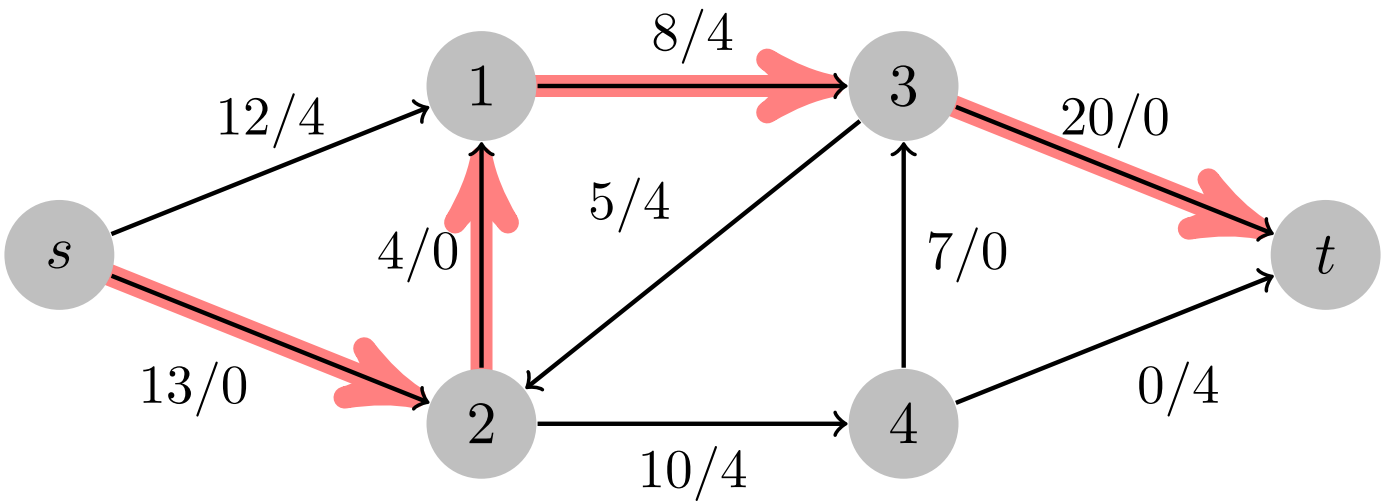
Ejemplo: Iteración 2



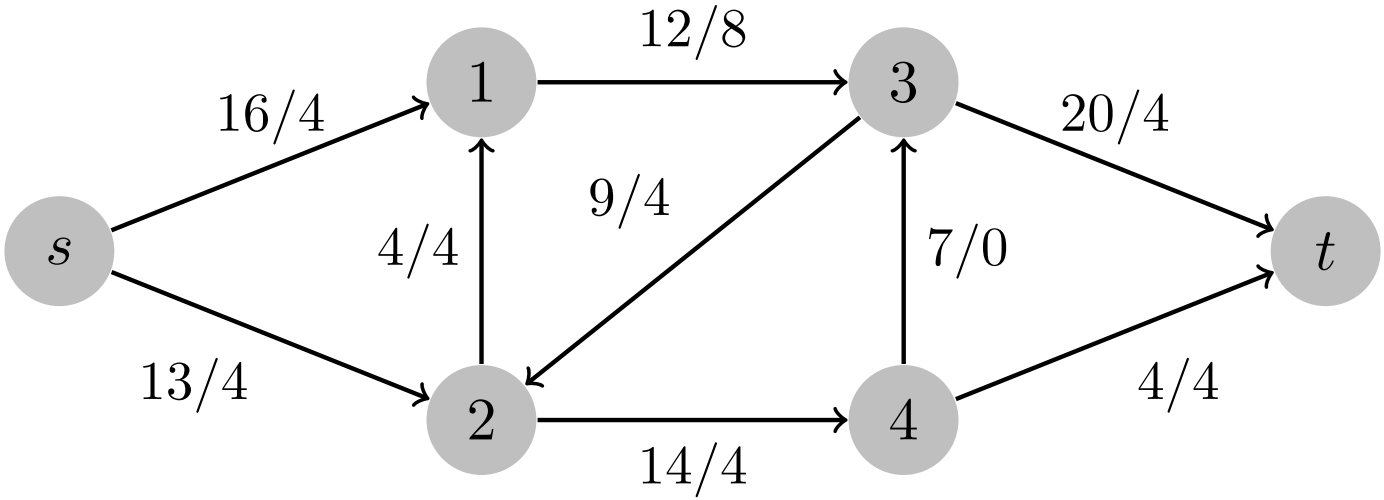


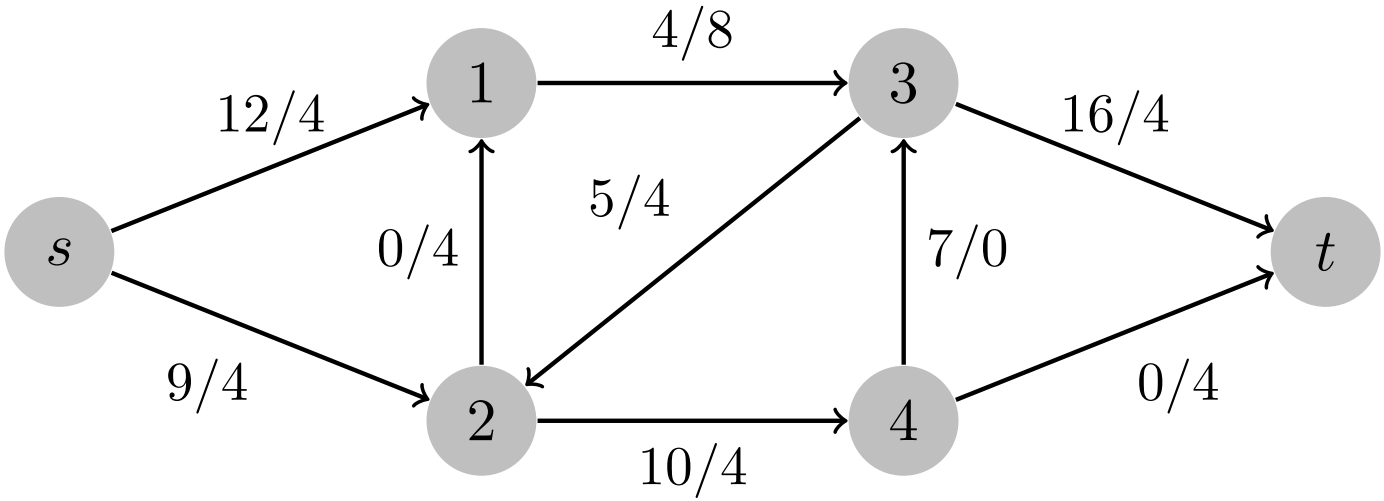
Ejemplo: Iteración 2



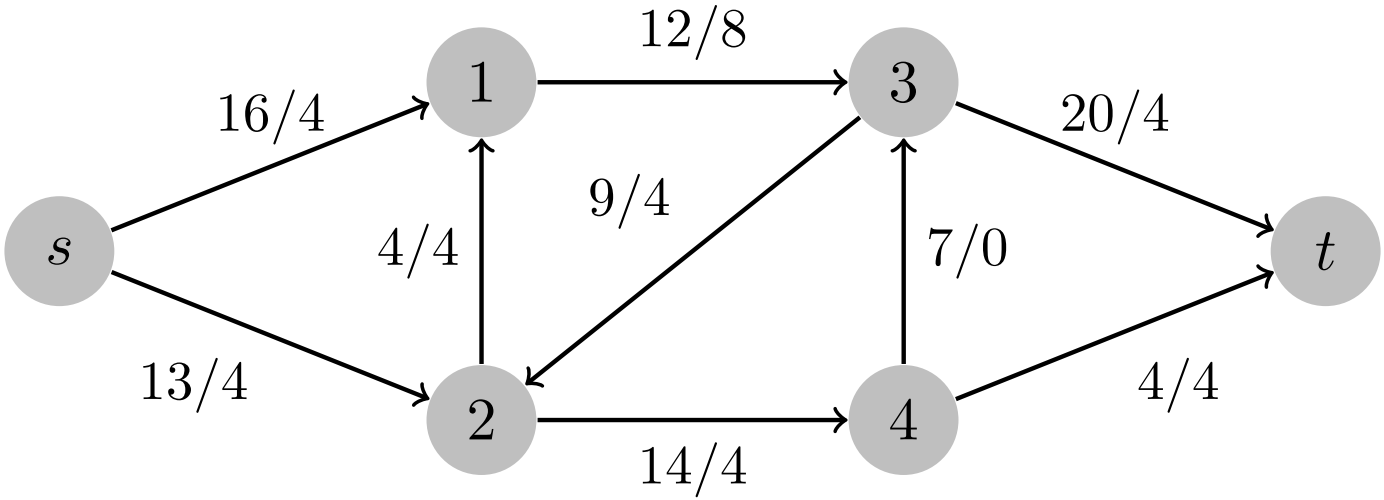


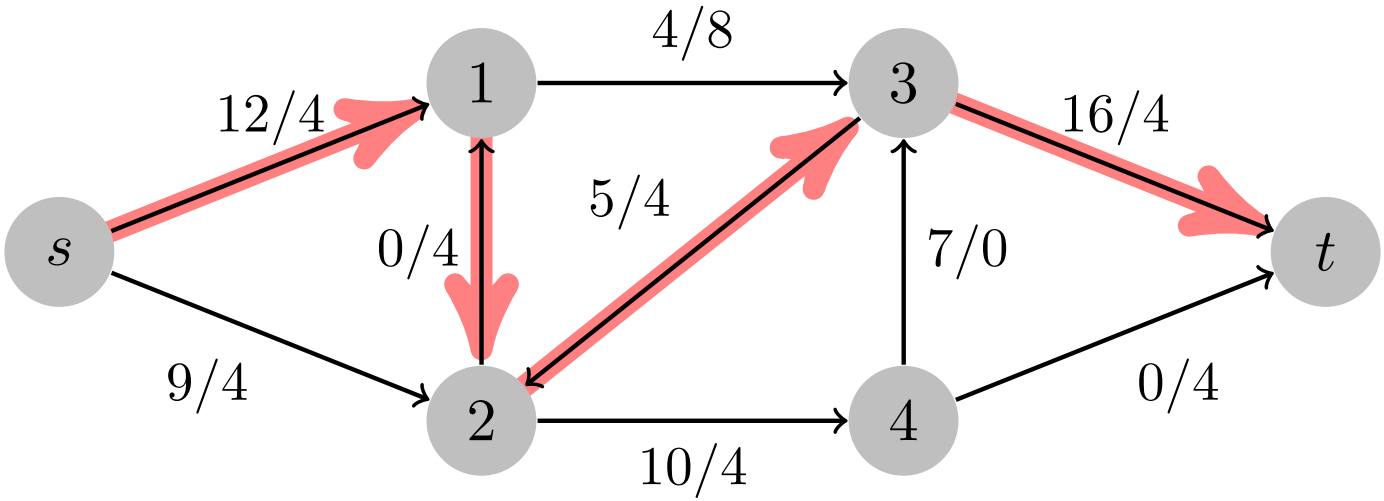
Ejemplo: Iteración 3



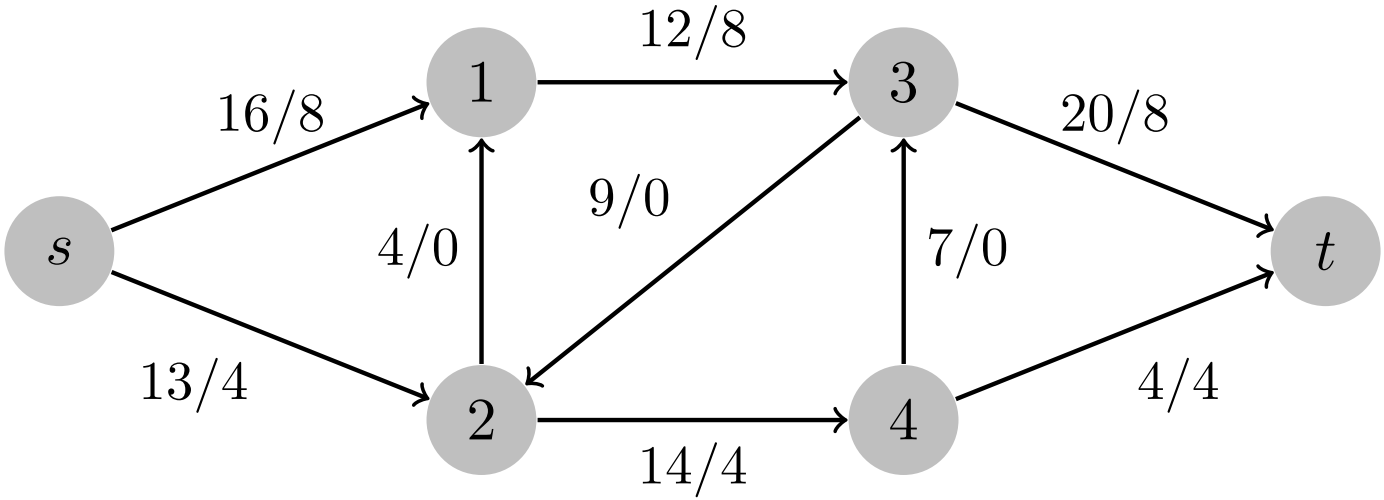


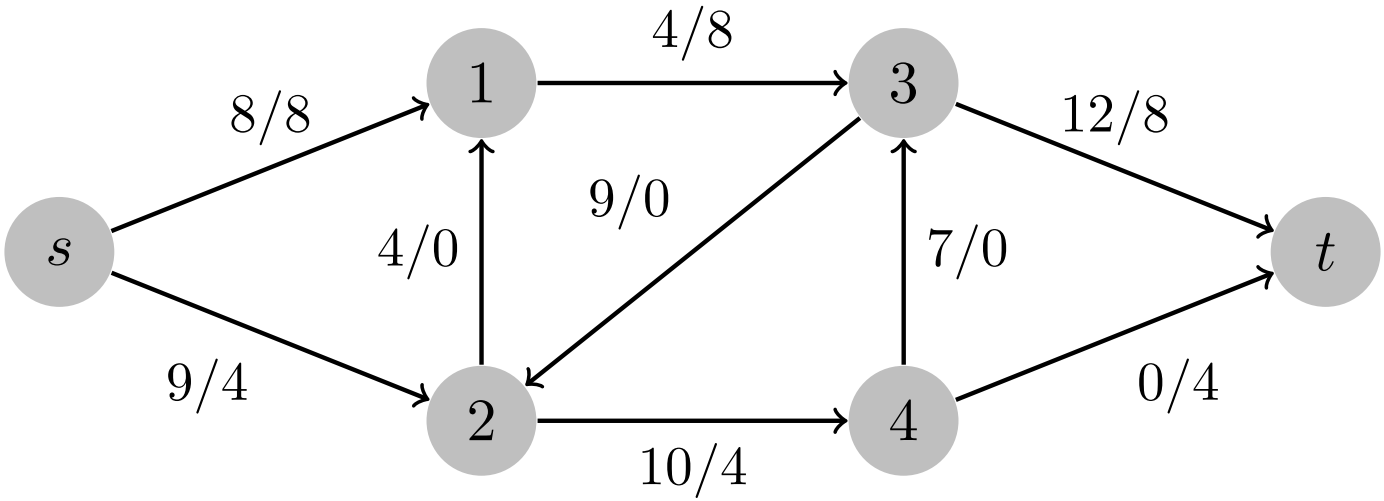
Ejemplo: Iteración 3



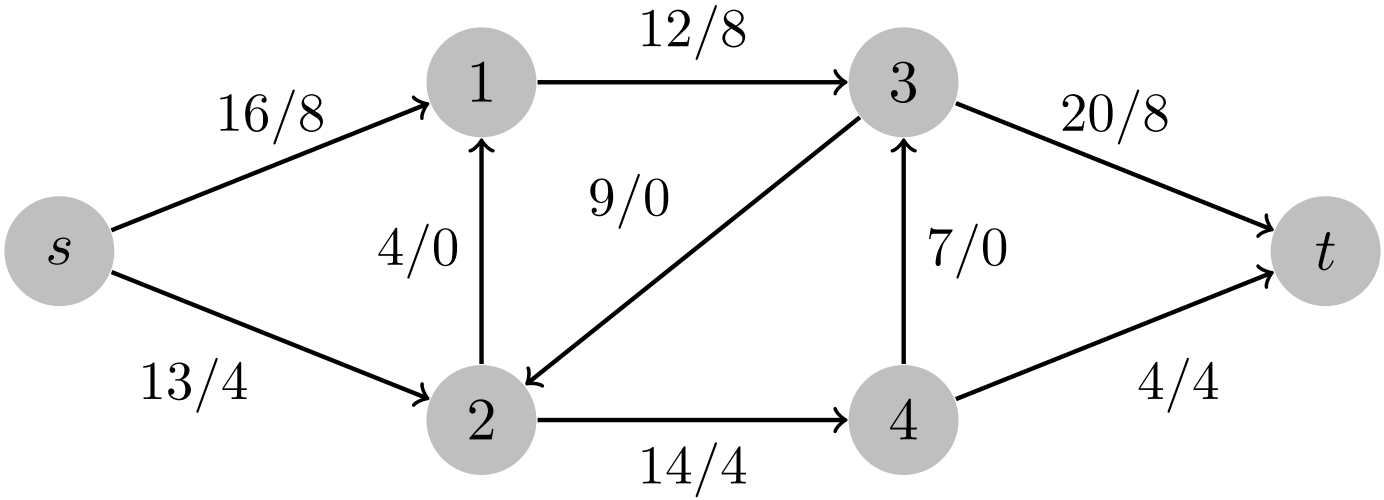


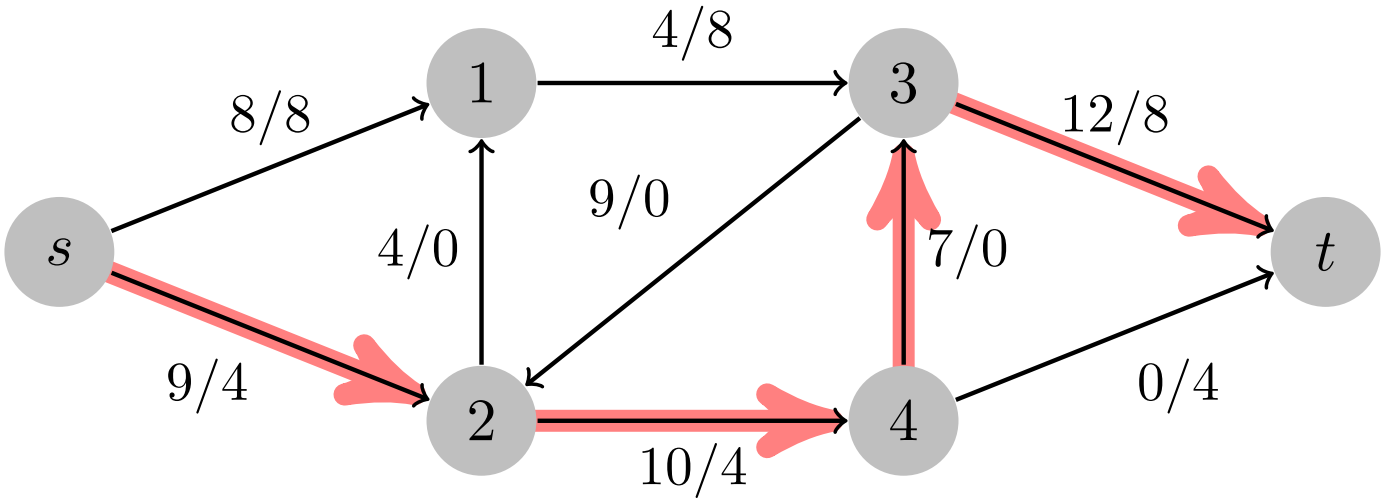
Ejemplo: Iteración 4



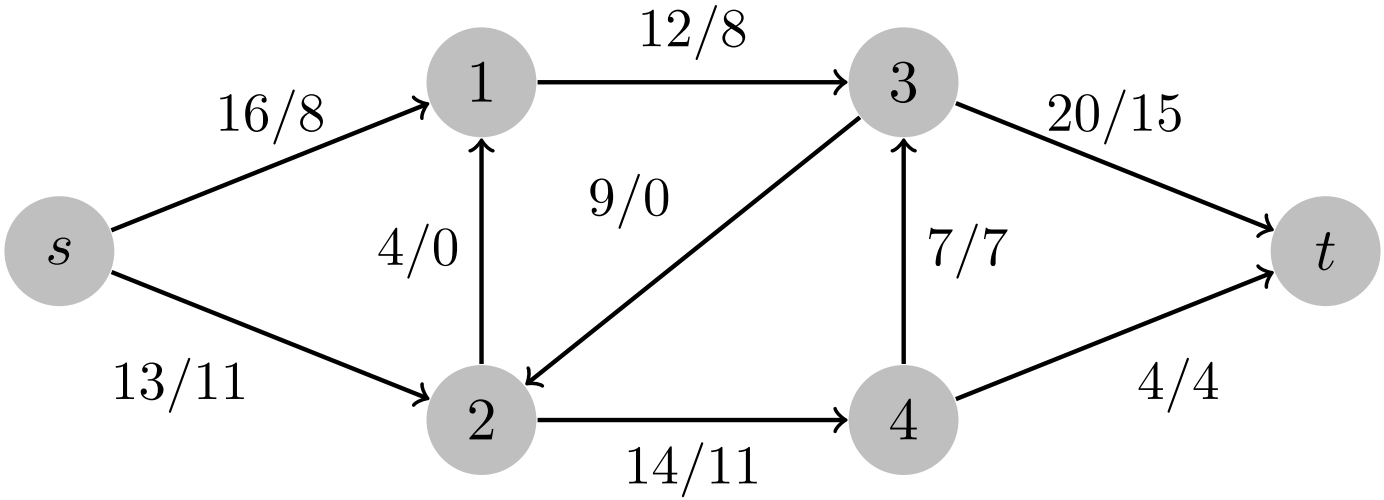


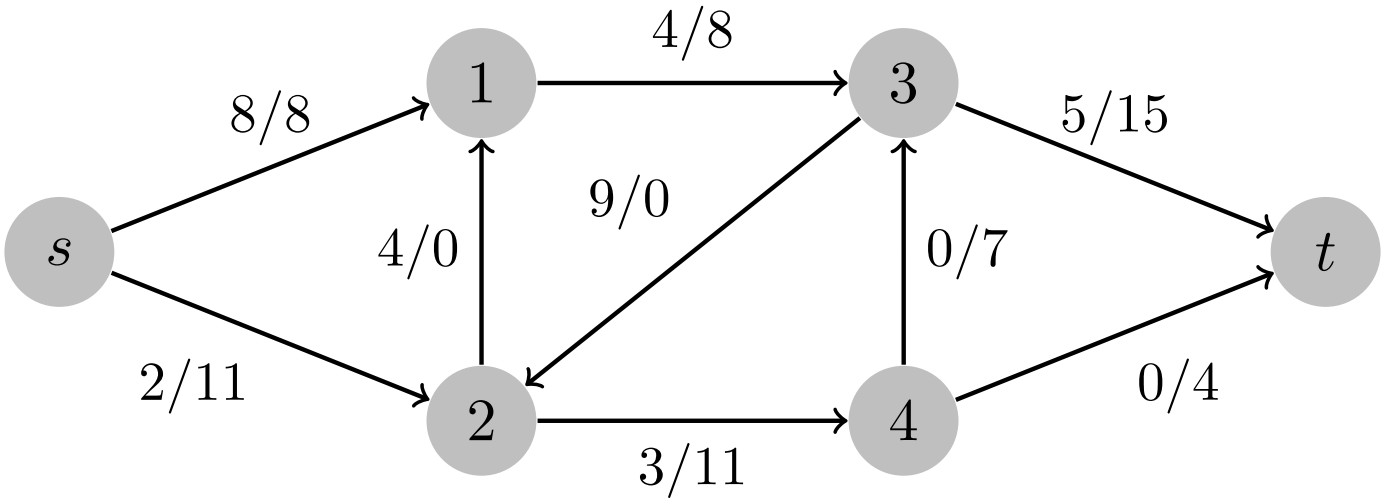
Ejemplo: Iteración 4



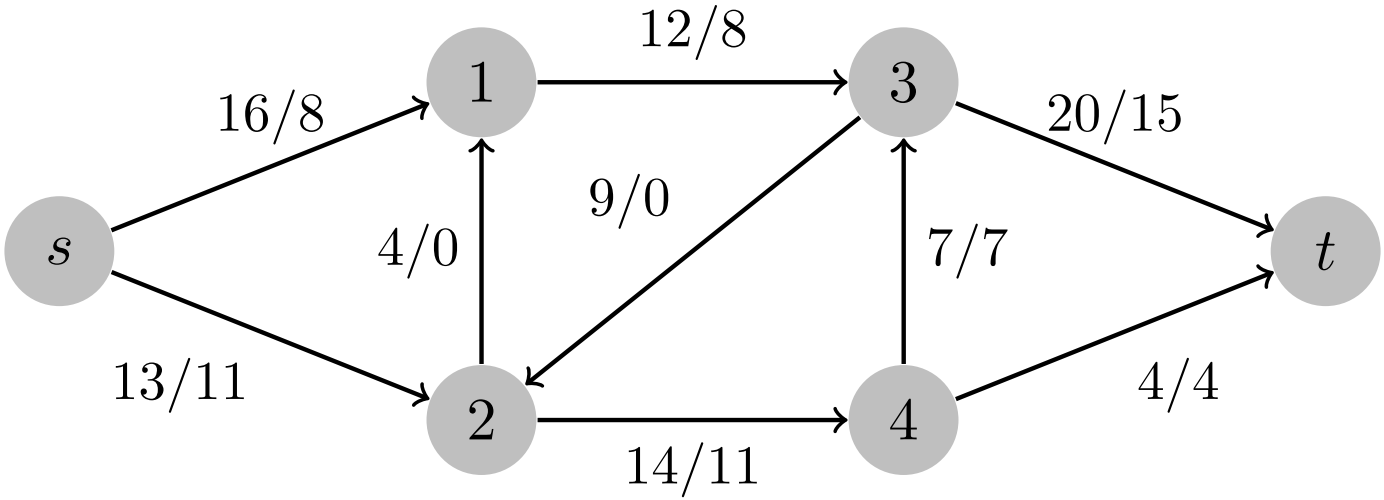


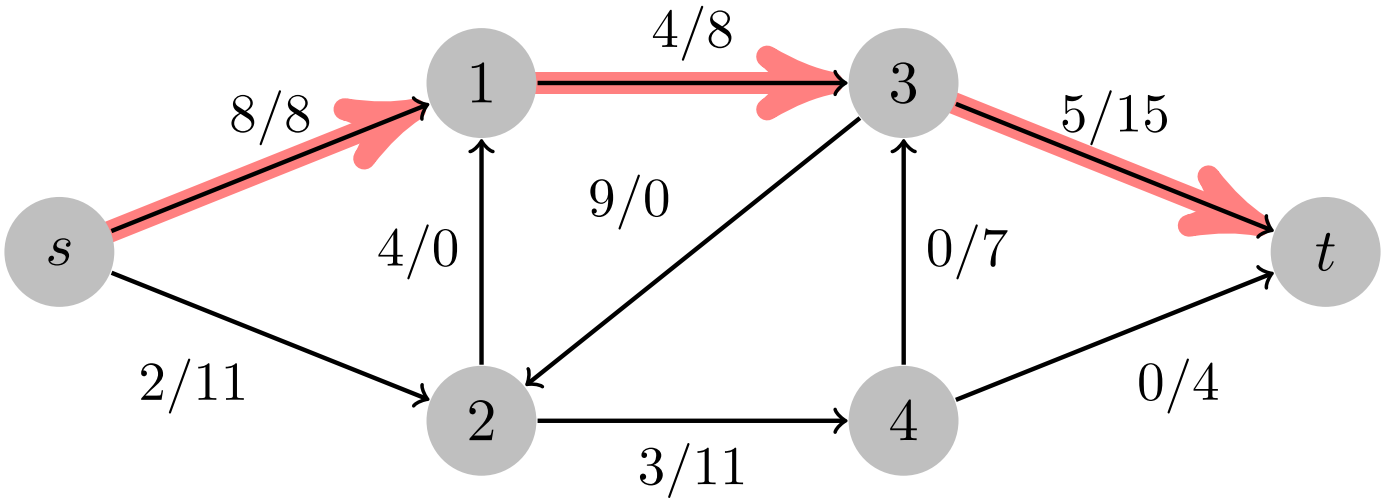
Ejemplo: Iteración 5



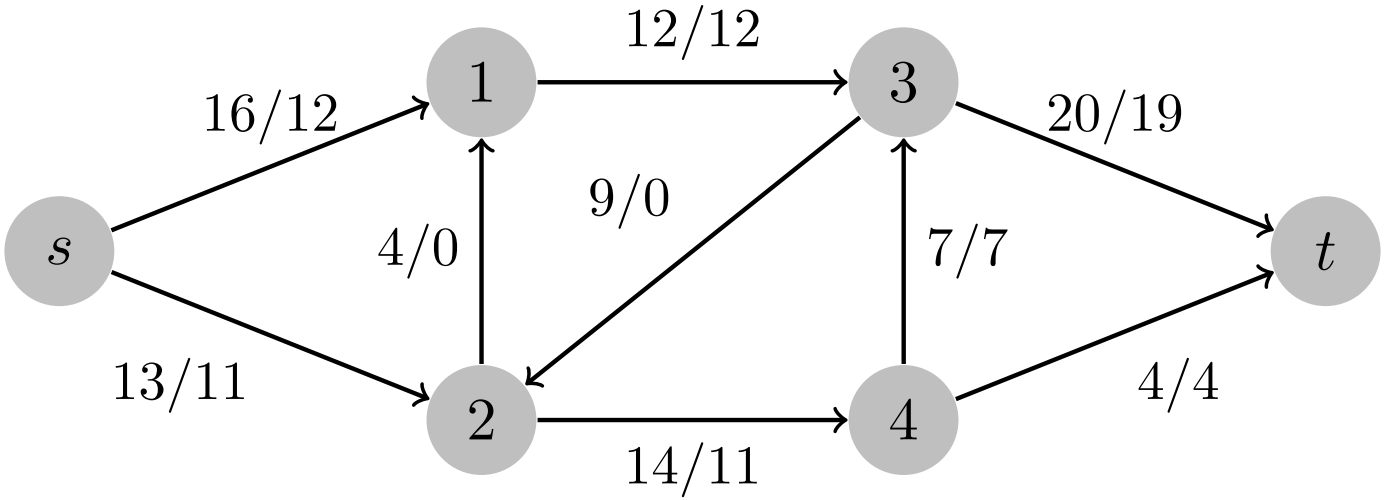


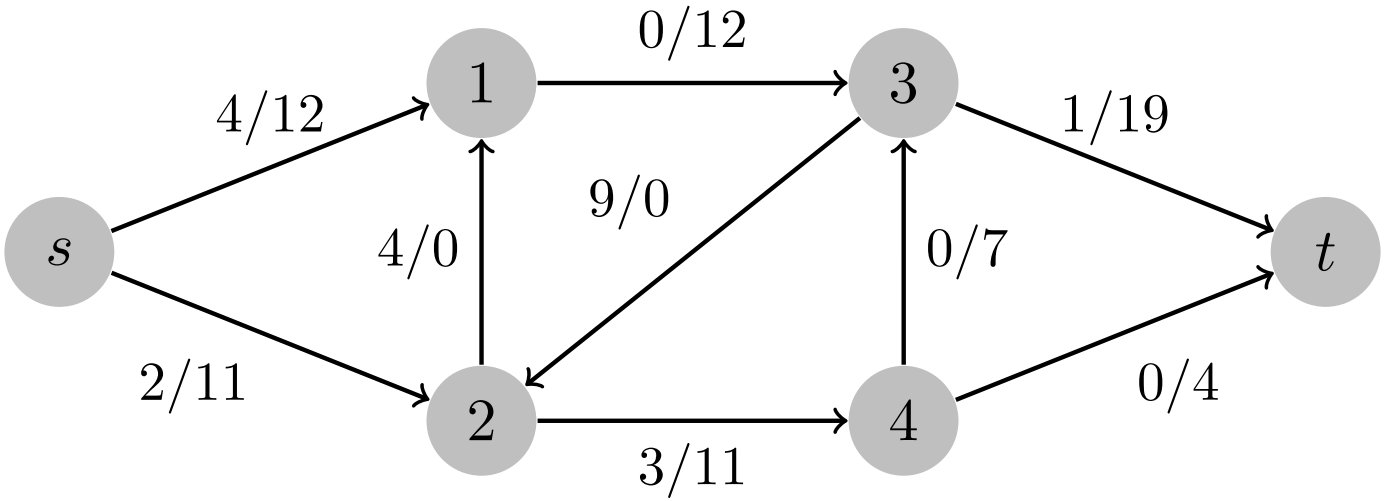
Ejemplo: Iteración 5





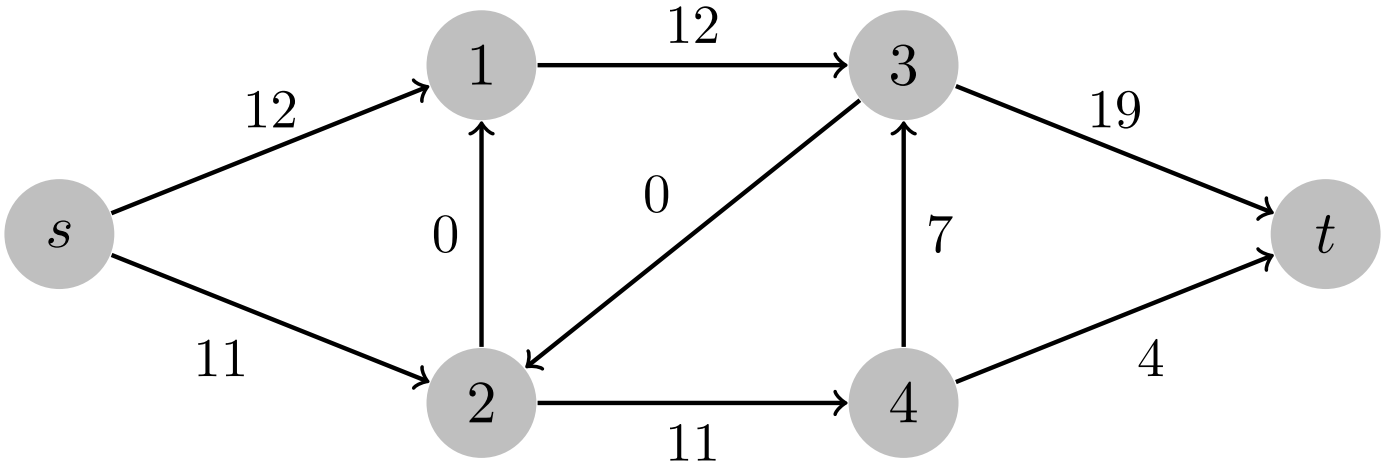
Ejemplo: Iteración 6





Ejemplo: Solución

El máximo flujo entre el nodo s y el nodo t es (se omiten las aristas de peso negativo)



El valor del flujo es 23.

Contenido

Ford-Fulkerson

El algoritmo de Ford-Fulkerson utiliza DFS para hallar el camino de aumentación.

1. Para todo u y v $f(u, v) = 0$.
2. $flow = 0$
3. Mientras que se encuentre un caminos de aumentación p en G_f usando DFS
    4. $bottleneck = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
    5. Para cada $(u, v) \in p$
        6. $f(u, v) += bottleneck$
        7. $f(v, u) = -f(u, v)$
    8. $flow += bottleneck$
9. retornar $flow$

Complejidad

Complejidad

Si f^* es el valor del máximo flujo para el grafo $G = (V, E)$ el algoritmo de Ford-Fulkerson tiene una complejidad de $O(|E| \cdot f^*)$

Ejemplo

Figura: Red de flujos

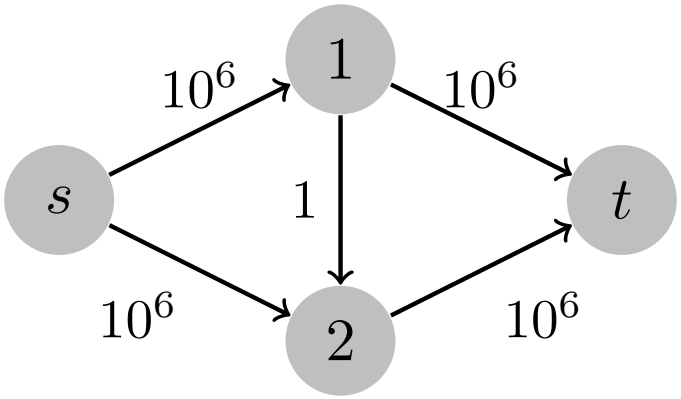


Figura: Red residual iteración 1

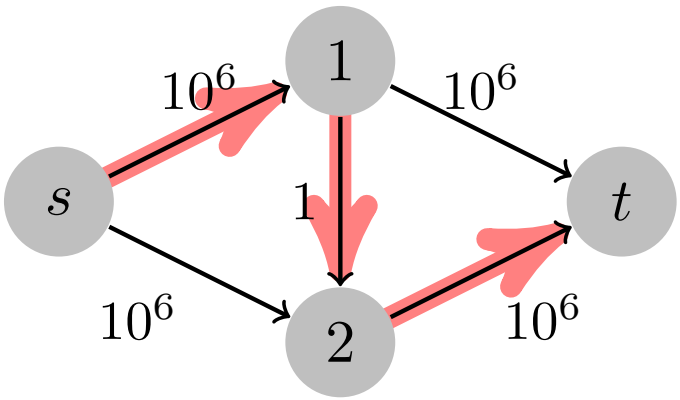
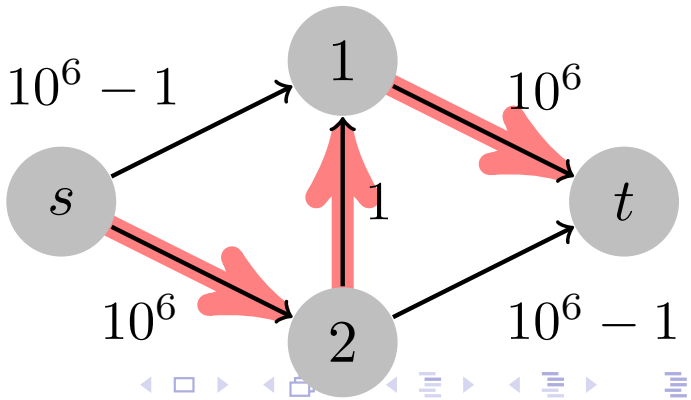


Figura: Red residual iteración 2



Contenido

Edmonds-Karp

Se puede mejorar la complejidad del algoritmo usando BFS en lugar de DFS para hallar el camino de aumentación.
El BFS permite que el camino hallado tenga el mínimo número de aristas posible, lo que cambia la complejidad del algoritmo.

Ejemplo

Figura: Red de flujos

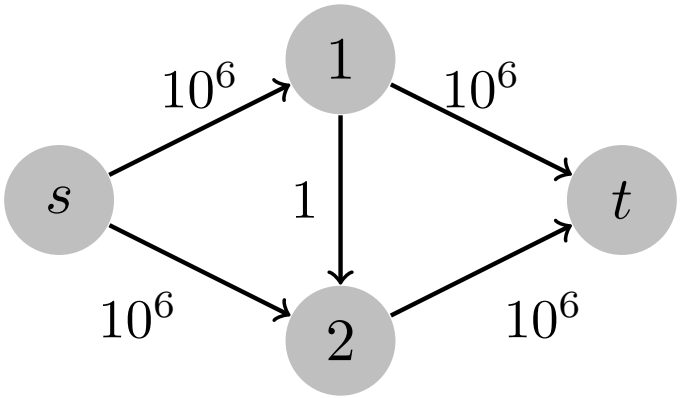


Figura: Red residual iteración 1

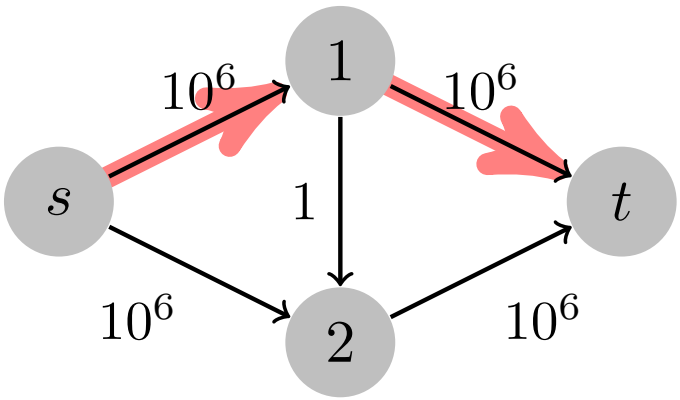
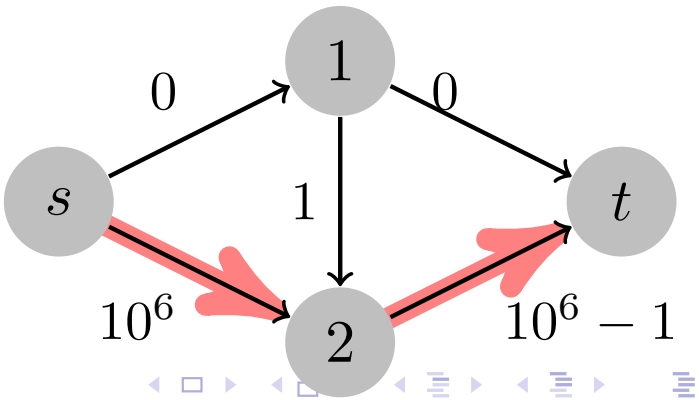


Figura: Red residual iteración 2



Implementación I

```
1  const int MAXN = 105;
2  // Lista de adyacencia de la red residual. Solo las conexiones no
3  // los pesos. Se usa para que el BFS sea rapido
4  vector <int> g [MAXN];
5  int c [MAXN][MAXN]; // Capacidad de aristas de la red de flujos
6  int f [MAXN][MAXN]; // El flujo de cada arista
7  //El predecesor de cada nodo en el camino de aumentacion de s a t
8  int prev [MAXN];
9
10 void connect (int i, int j, int cap){
11     // Agregar SIEMPRE las dos aristas al grafo la red de flujos
12     // sea dirigida. Esto es porque g representa la red residual
13     // que tiene aristas en los dos sentidos
14     g[i].push_back(j);
15     g[j].push_back(i);
16     c[i][j] += cap;
17     // Omitir esta linea si el grafo es dirigido
18     c[j][i] += cap;
```

Implementación II

```
19  }
20
21  int maxflow(int s, int t, int n){
22      // Inicializar el flujo en 0
23      for (int i = 0; i <= n; i++)
24          for (int j = 0; j <= n; j++)
25              f[i][j] = 0;
26
27      int flow = 0;
28      while (true){
29          // Encontrar camino entre s y t con bfs
30          for (int i = 0; i <= n; i++) prev[i] = -1;
31
32          queue <int> q;
33          q.push(s);
34          prev[s] = -2;  // s no tiene nodo anterior en el camino
35
36
37
```

Implementación III

```
38
39          while (q.size() > 0){
40              int u = q.front(); q.pop();
41              if (u == t) break;
42              for (int i = 0; i < g[u].size(); ++i){
43                  int v = g[u][i];
44                  // Si el nodo no esta visitado
45                  // y el peso en la red residual es > 0
46                  if (prev[v] == -1 and c[u][v] - f[u][v] > 0){
47                      q.push(v);
48                      prev[v] = u;
49                  }
50              }
51          }
52          // Si no se llego a t en el camino es porque no hay mas
53          // caminos de aumentacion y el ciclo se detiene
54          if (prev[t] == -1) break;
55
56
```

Implementación IV

```
57
58
59
60
61          // Hallar el cuello de botella
62          // Se recorre el camino desde t hasta s
63          int extra = 1 << 30;
64          int end = t;
65          while (end != s){
66              int start = prev[end];
67              // El cuello de botella es el minimo peso del camino
68              // en la red residual. El peso en la red residual es
69              // la capacidad de la arista menos el flujo
70              extra = min(extra, c[start][end] - f[start][end]);
71              end = start;
72          }
73
74
75
```

Implementación V

```
76
77
78
79          // Bombear el flujo extra por la arista
80          end = t;
81          while (end != s){
82              int start = prev[end];
83              f[start][end] += extra;
84              f[end][start] = -f[start][end];
85              end = start;
86          }
87
88          // Agregar el flujo enviado a la respuesta
89          flow += extra;
90      }
91
92      return flow;
93  }
```

Complejidad

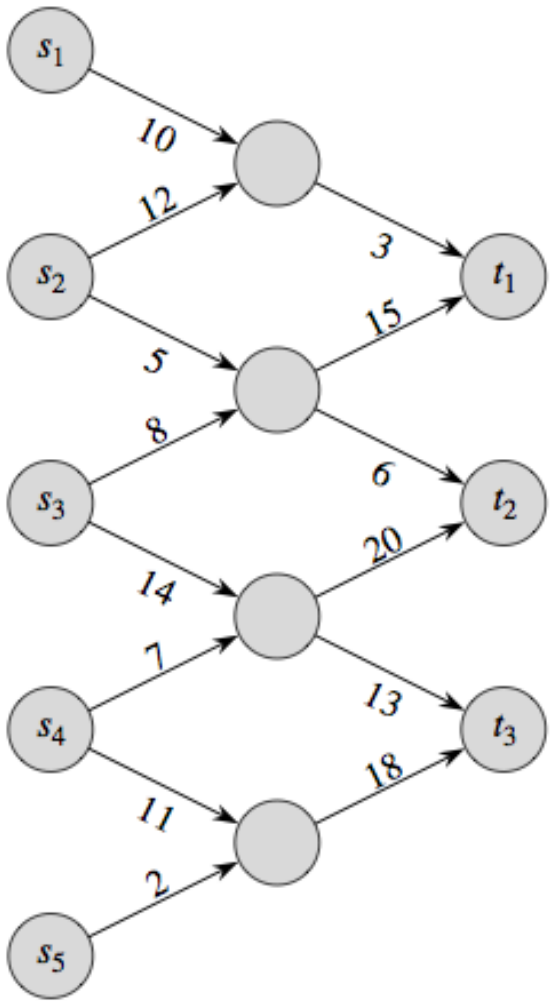
Complejidad

El algoritmo de Edmonds-Karp tiene una complejidad de $O(|V| \cdot |E|^2)$

Contenido

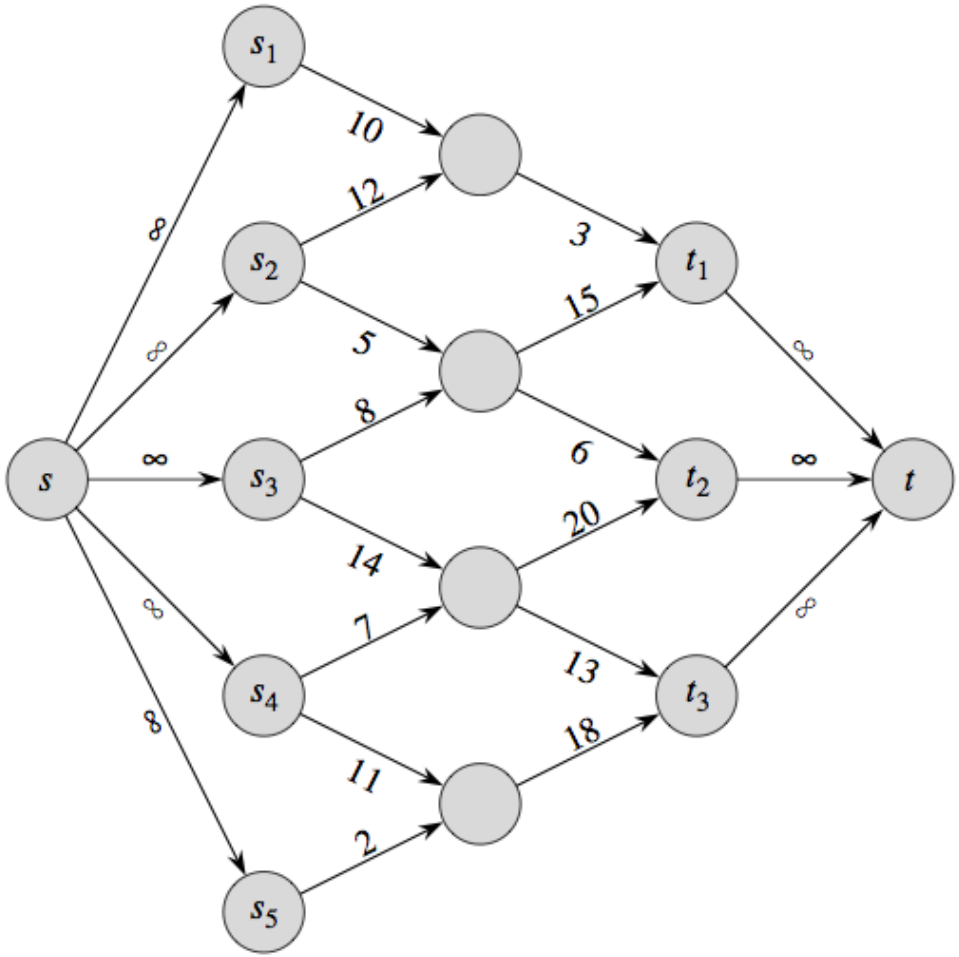
Problema con múltiples fuentes o múltiples sumideros

¿Qué hacer cuando se quiere hallar el máximo flujo que se puede enviar desde $s_1 \dots s_5$ hasta $t_1 \dots t_3$?



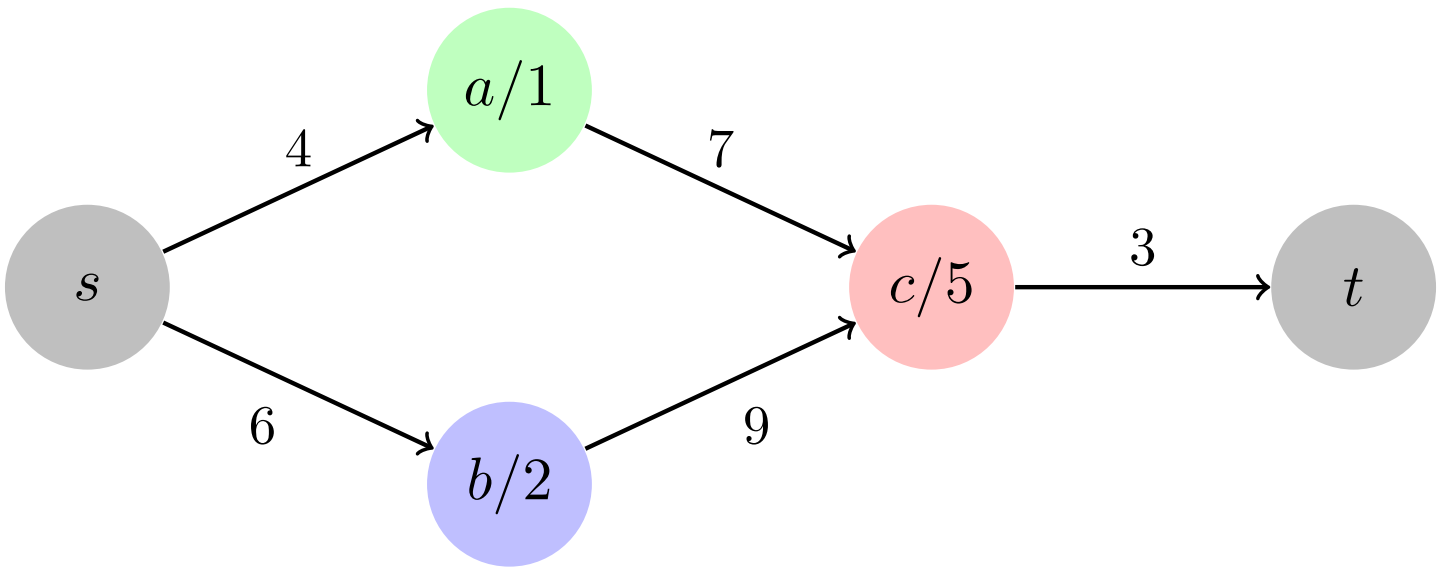
Problema con múltiples fuentes o múltiples sumideros

Poner una súper fuente s y súper sumidero t que tengan capacidad infinita a las demás fuentes / sumideros y correr el algoritmo desde s hasta t.



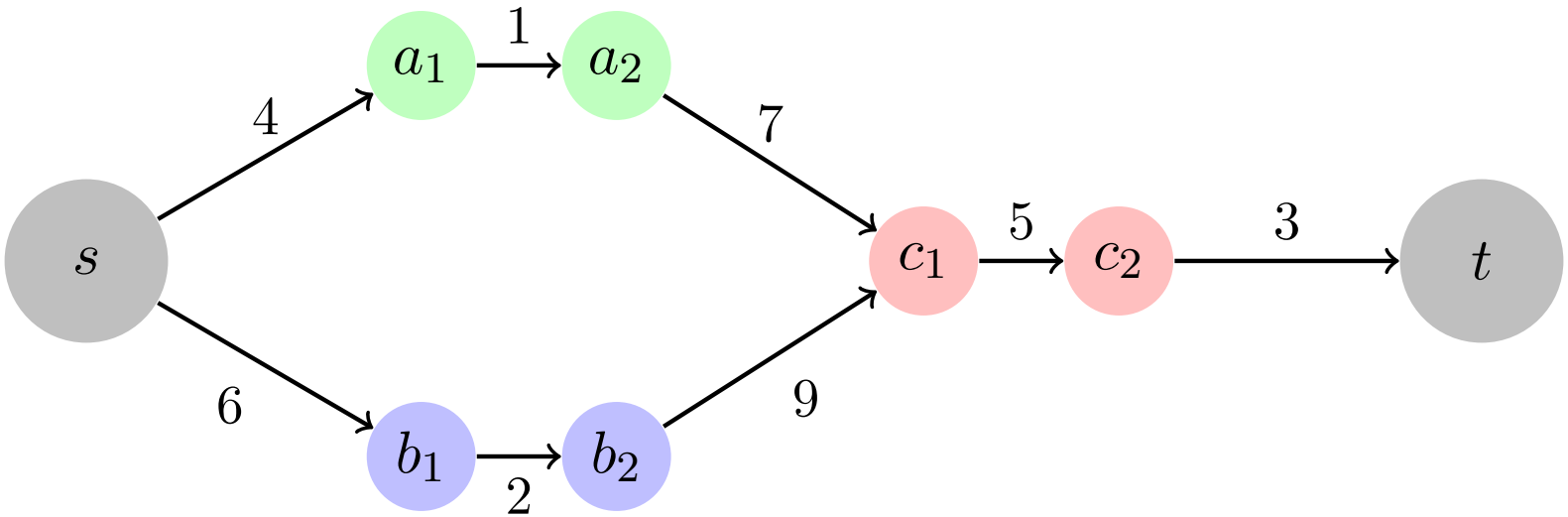
Problema donde los nodos también tienen capacidad

¿Qué hacer cuando, además de las aristas, los nodos también tienen una capacidad?



Problema donde los nodos también tienen capacidad

Dividir el nodo u en 2: u_1 a donde llegan las aristas entrantes a u y u_2 de donde salen las aristas salientes.
Conectar u_1 y u_2 con una arista que tenga la misma capacidad que tenía el nodo u.



Contenido

Tarea

Tarea

Resolver los problemas de

`http://contests.factorcomun.org/contests/59`

Ayuda

Problema A

Ya son tan tesos que no necesitan ayuda para este problema :)

Problema B

- Hay que hallar el mínimo costo de cortar aristas o destruir nodos de manera que s y t queden desconectados.
- Ya sabemos que el mínimo corte de aristas es lo mismo que el máximo flujo
- ¿Cómo hacer para que los nodos también se tengan en cuenta para el corte?
- ¿Será que se puede hacer algo para que los nodos tengan implícitas aristas?