Semillero de Programación

Programación Dinámica

Ana Echavarría Juan Francisco Cardona

Universidad EAFIT

5 de abril de 2013

Contenido

Contenido

Problema A - The Farnsworth Parabox

Verificar si en un grafo no dirigido tiene un ciclo de peso negativo que empieza en el nodo 0.

Implementación I

```
1  const int MAXN = 105;
2  const int INF = 1 << 30;
3  typedef pair <int, int> edge;
4  vector <edge> g[MAXN];
5  int d[MAXN];
6
7  bool bellman_ford(int s, int n){
8     for (int u = 0; u <= n; ++u) d[u] = INF;
9     d[s] = 0;
10
11    for (int i = 1; i <= n - 1; ++i){
12       for (int u = 0; u < n; ++u){
13          for (int k = 0; k < g[u].size(); ++k){
14             int v = g[u][k].first;
15             int w = g[u][k].second;
16             d[v] = min(d[v], d[u] + w);
17          }
18       }
```

Implementación II

```
19      }
20
21      for (int u = 0; u < n; ++u){
22          for (int k = 0; k < g[u].size(); ++k){
23              int v = g[u][k].first;
24              int w = g[u][k].second;
25              if (d[v] > d[u] + w){
26                  // Hay ciclo de peso negativo
27                  return true;
28              }
29          }
30      }
31      // No hubo ciclo de peso negativo
32      return false;
33  }
34
35  int main(){
36      int n, m;
37      while (cin >> n >> m){
```

Implementación III

```
38          if (n == 0 and m == 0) break;
39
40          for (int i = 0; i <= n; ++i) g[i].clear();
41
42          for (int i = 0; i < m; ++i){
43              int u, v, t;
44              cin >> u >> v >> t;
45              u--; v--;
46              g[u].push_back(edge(v, t));
47              g[v].push_back(edge(u, -t));
48          }
49
50          if (bellman_ford(0, n)) puts("Y");
51          else puts("N");
52      }
53       return 0;
54  }
```

Problema B - Flying to Fredericton

Hallar la mínima distancia entre un nodo s y un nodo t haciendo máximo i paradas.
Si se hacen i paradas es porque se han utilizado $i + 1$ aristas.

Implementación I

```
1  const int MAXN = 105;
2  const int INF = 1 << 30;
3  typedef pair <int, int> edge;
4  map <string, int> city2int;
5  vector <edge> g[MAXN];
6  int L[MAXN][MAXN];
7
8  bool bellman_ford(int s, int n){
9     for (int u = 0; u <= n; ++u) L[0][u] = INF;
10    L[0][s] = 0;
11
12    for (int i = 1; i <= n - 1; ++i){
13       for (int u = 0; u < n; ++u) L[i][u] = L[i-1][u];
14       for (int u = 0; u < n; ++u){
15          for (int k = 0; k < g[u].size(); ++k){
16             int v = g[u][k].first;
17             int w = g[u][k].second;
18             L[i][v] = min(L[i][v], L[i-1][u] + w);
```

Implementación II

```
19          }
20      }
21  }
22  int main(){
23      int cases; cin >> cases;
24      for (int run = 1; run <= cases; ++run){
25          int n; cin >> n;
26
27          city2int.clear();
28          for (int i = 0; i < n; ++i){
29              g[i].clear();
30              string name; cin >> name;
31              city2int[name] = i;
32          }
33
34          int m; cin >> m;
35          for (int i = 0; i < m; ++i){
36              string s, t; int c;
37              cin >> s >> t >> c;
```

Implementación III

```
38              int u = city2int[s];
39              int v = city2int[t];
40              g[u].push_back(edge(v, c));
41          }
42          printf("Scenario #%d\n", run);
43          bellman_ford(0, n);
44          int q; cin >> q;
45          while (q--){
46              int stops; cin >> stops;
47              int edges = min(stops + 1, n-1);
48              if (L[edges][n-1]; < INF) printf("Total cost of
                    flight(s) is $%d\n", L[edges][n-1]);
49              else puts("No satisfactory flights");
50          }
51          if (run != cases) puts("");
52      }
53      return 0;
54  }
```

Problema C - Brick Wall Patterns

Sea $f(n)$ el número de formas se puede armar una pared de $2 \times n$ usando rectángulos de tamaño 2×1

$f(1) = 1$

Problema C - Brick Wall Patterns

Sea $f(n)$ el número de formas se puede armar una pared de $2 \times n$ usando rectángulos de tamaño 2×1

$f(1) = 1$
$f(2) = 2$

Problema C - Brick Wall Patterns

Sea $f(n)$ el número de formas se puede armar una pared de $2 \times n$ usando rectángulos de tamaño 2×1

$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
$f(3) = 3$

Problema C - Brick Wall Patterns

Sea $f(n)$ el número de formas se puede armar una pared de $2 \times n$ usando rectángulos de tamaño 2×1

$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
$f(3) = 3$
$f(4) = 5$

Problema C - Brick Wall Patterns

Sea $f(n)$ el número de formas se puede armar una pared de $2 \times n$ usando rectángulos de tamaño 2×1

$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
$f(3) = 3$
$f(4) = 5$
.
.
.
$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

Implementación I

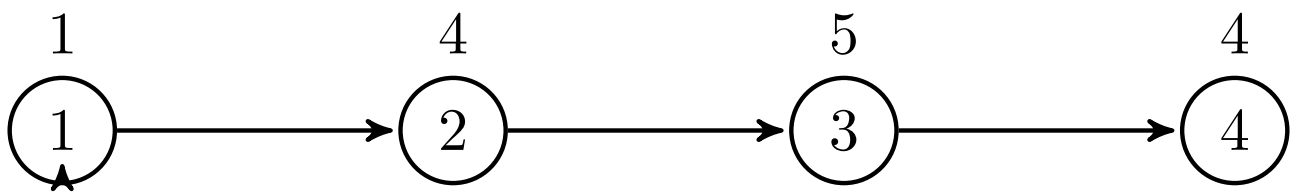
```
1  int f[51];
2
3  int main(){
4     f[1] = 1;
5     f[2] = 2;
6     for (int i = 3; i < 51; i++){
7        f[i] = f[i-1] + f[i-2];
8     }
9     int n;
10    while(cin >> n){
11       if (n == 0) break;
12       cout << f[n] << endl;
13    }
14     return 0;
15 }
```

Contenido

Problema

Entrada

- Un grafo lineal $G = (V, E)$ (grafo con dos nodos de grado 1 y el resto de nodo de grado 2 y un solo camino entre cualquier par de nodos)
- Un valor de peso para cada nodo $v \in V$



Objetivo

- Hallar el máximo peso total que se puede lograr de un subconjunto de nodos en el que no hay nodos adyacentes

Ideas

Ideas

- Existen dos posibilidades para cada nodo: está en el subconjunto óptimo o no está
- Si un nodo está en el óptimo ninguno de sus vecinos está

Preguntas

- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 1 nodo?
- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 2 nodos?
- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 3 nodos?

Ideas

Ideas

- Existen dos posibilidades para cada nodo: está en el subconjunto óptimo o no está
- Si un nodo está en el óptimo ninguno de sus vecinos está

Preguntas

- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 1 nodo?
- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 2 nodos?
- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 3 nodos?
- ¿La solución óptima para un grafo de 3 nodos se puede obtener de una solución óptima para grafos de 1 y 2 nodos?

Ideas

Ideas

- Existen dos posibilidades para cada nodo: está en el subconjunto óptimo o no está
- Si un nodo está en el óptimo ninguno de sus vecinos está

Preguntas

- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 1 nodo?
- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 2 nodos?
- ¿Cuál es la mejor solución para un grafo de 3 nodos?
- ¿La solución óptima para un grafo de 3 nodos se puede obtener de una solución óptima para grafos de 1 y 2 nodos?
- ¿Cuál es la solución para un grafo de n nodos?

Solución

Solución

Sea $f(n)$ el máximo peso total que se puede lograr con los nodos $[1 \ldots n]$
$f(0) = 0$ porque el conjunto de los nodos está vacío

$f(1) = w(1)$
$f(2) = \max\{\, w(2),\, w(1)\,\} = \max\{\, f(0) + w(2),\, f(1)\,\}$
$f(3) = \max\{\, f(1) + w(3),\, f(2)\,\}$
.
.
.
$f(n) = \max\{\, f(n-2) + w(n),\, f(n-1)\}$

¿Cómo computar la solución?

La solución usando la fórmula recursiva es
$f(0) = 0$
$f(1) = w(1)$
$f(i) = \max\{ f(i-2) + w(i),\ f(i-1)\}$ para $2 \leq i \leq n$

¿Qué pasa si pregunta por $f(4)$?
¿Cuáles son las llamadas que se hacen recursivamente?
¿Hay llamadas que se hacen repetidas veces?
¿Hay alguna forma de evitar llamar más de una vez la misma función?

Memoización

La memoización consiste en guardar los valores de la función que ya se hayan computado anteriormente y así no volverlos a computar en caso de volverlos a necesitar.

```
1  int memo[MAXN]; //Arreglo de memoria inicializado en -1
2  int w[MAXN];    //Arreglo con los pesos de cada nodo
3
4  int f(int n){
5      if (n == 0) return 0;
6      if (n == 1) return w[1];
7
8      if (memo[n] == -1){
9          memo[n] = max( f(n-2) + w[n], f(n-1) );
10     }
11     return memo[n];
12 }
```

Impelentación bottom-up

De acuerdo a la función que se construyó, se puede ver que para computar $f(n)$ es necesario conocer los resultados de $f(0)$ hasta $f(n-1)$.
Se pueden entonces computar cada uno de los $f(n)$ empezando desde $f(0)$.

```
1  int f[MAXN]; //Arreglo con el valor de la funcin
2  int w[MAXN]; //Arreglo con los pesos de cada nodo
3
4  int main(){
5      int n; cin >> n;
6      for (int i = 1; i <= n; ++i) cin >> w[i];
7      f[0] = 0;
8      f[1] = w[1];
9      for (int i = 2; i <= n; ++i){
10         f[i] = max( f[i-2] + w[i], f[i-1] );
11     }
12     return 0;
13 }
```

Complejidad

Preguntas

- ¿Cuántos subproblemas (valores de f[i]) hay que calcular?
- ¿Cuánto se demora calcular cada subproblema?

Complejidad

Preguntas

- ¿Cuántos subproblemas (valores de f[i]) hay que calcular?
- ¿Cuánto se demora calcular cada subproblema?

Complejidad

La complejidad de este algoritmo es $O(n)$

Contenido

Programación dinámica

Las características principales que tiene un problema de programación dinámica son:

- Se puede hallar la solución a un número de subproblemas triviales
- La solución a los demás subproblemas se puede hallar usando la información de subproblemas más pequeños.

Usualmente los problemas de programación dinámica se pueden expresar en forma de una función recursiva.

Programación dinámica

Cuando se identifica un problema como de programación dinámica se deben identificar los siguientes elementos:

- Relación recursiva entre los problemas
- Casos base
- Verificar que los casos base sí sean suficientes para construir todos los valores recursivamente

Programación dinámica

Una vez hallada la relación entre los subproblemas, se crea una tabla que tenga capacidad para almacenar todos los subproblemas (tamaño para cada una de las variables).

Ejemplo

$w(i, j) = w(i + 1, j + 1) + w(i + 1, j - 1)$ para $1 \leq i, j \leq 100$
Se debe crear la tabla `w[105][105]`

Programación dinámica

Luego de crear la tabla hay que hallar la forma de llenarla.
Primero se llenan los casos base.
Luego se llenan los casos recursivos.
El orden en el que se llenan los casos recursivos en importante ya que cuando se acceda a algún valor en la tabla, este ya se debe haber calculado con anterioridad.

Ejemplo

Casos base:

$w(i, 0) = 0 \quad$ para $0 \leq i \leq 100$

$w(100, j) = j \;$ para $0 \leq j \leq 100$

Caso recursivo:

$w(i, j) = w(i + 1, j) + w(i, j - 1)$ para $0 \leq i \leq 99,\ 1 \leq j \leq 100$

Algoritmo:

```
1  int w[105][105];
2  for (int i = 0; i <= 100; ++i) w[i][0] = 0;
3  for (int j = 0; j <= 100; ++j) w[100][j] = j;
4
5  for (int i = 99; i >= 0; --i){
6      for (int j = 1; j <= 100; ++j){
7          w[i][j] = w[i+1][j] + w[i][j-1];
8      }
9  }
```

Contenido

Problema da la mochila - Knapcack Problem

Un ladrón quiere robar una casa.
Él conoce los elementos que hay en la casa, su valor y su tamaño.
Sin embargo, tiene una bolsa de capacidad limitada, por lo que no puede robar todos los elementos.
¿Cuáles elementos debe robar para obtener la mayor ganancia posible y no superar la capacidad de su bolsa?

Problema da la mochila - Knapcack Problem

Entrada

- n elementos cada uno con
  - Valor v_i no negativo
  - Tamaño w_i entero
- Capacidad W de la mochila

Objetivo

Encontrar un subconjunto $S \subset 1, 2, \ldots, n$ tal que:

- $\sum_{i \in S} v_i$ se máxima
- $\sum_{i \in S} w_i \leq W$

Preguntas

Contenido

Tarea

Tarea

Registrarse en las páginas:

- `http://www.codeforces.com/`
- `http://www.spoj.com/`
- `http://ahmed-aly.com/` - Ingresar los usuarios de codeforces, spoj y UVa.

Resolver los problemas de
`http://ahmed-aly.com/Contest.jsp?ID=4312`