ALGORITMO HUNGARO

$G = (X, Y)$ = Grafo bipartido, card(X) = card(Y).

$A = (V(A), E(A))$ = Arbol de G que hacemos crecer.

M = Acoplamiento arbitrario en G (puede ser el vacío), que vamos perfeccionando.

PASO 1 (Elección de raíz del nuevo árbol ó Terminar)

1.1. Si X es M-saturado entonces

M es acoplamiento perfecto. FIN

1.2. En caso contrario

i) Escogemos $u \in X$ vértice M-insaturado como raiz del árbol que empezamos a crear.

ii) $V(A) = \{u\}$, $E(A) = \emptyset$.

iii) $Ext = \{u\}$, $Int = \emptyset$.

(i.e. etiquetamos u con E)

PASO 2 (Análisis de los vértice exteriores del árbol)

Repetir para cada vértice $x \in V(A) \cap Ext$:

Obtener $\Gamma(x)$

(i.e. localizar las aristas (x,y) de G)

Para cada ~~arista~~ vértice $y \in \Gamma(x)$ hacer:

i) Si y es M-insat., ir a PASO 3.

ii) Si y es M-satur. $y \notin V(A)$, ir a PASO 4.

iii) Si y es M-satur., $y \in V(A)$, ir a PASO 5.

PASO 3 (Perfeccionar acoplamiento)

Localizar el camino P M-aumentado de la raiz u a y.

$M := M \Delta E(P)$

(i.e. perfeccionar el acoplamiento)

$V(A) = \emptyset$, $E(A) = \emptyset$, $Ext = \emptyset$, $Int = \emptyset$.

(i.e. anular el árbol actual y las etiquetas de los vértices)

Ir a PASO 1.

PASO 4 (Hacer crecer el árbol)

Encontrar la arista (y,x') del acoplamiento M.

$V(A) := V(A) \cup \{y, x'\}$

$E(A) := E(A) \cup \{(x,y), (y,x')\}$.

(i.e. añadir al árbol los vértices y y x' así como las aristas (x,y) y (y,x'))

$Ext := Ext \cup (x')$, $Int := Int \cup (y)$

(i.e. etiquetar x' con E, y con I).

Ir a PASO 2.

PASO 5. (Seguir ó ∄ acop. perfecto)

5.1. Si existe algún ~~(x)~~ vértice etiquetado E tal que posea una arista incidente (x,y) con y en la situación i) o ii) del paso 2, entonces, ir a PASO 2.

5.2. En caso contrario,

no existe acoplamiento perfecto. FIN.

ALGORITMO DE KUHN - MUNKRES

$G = \Gamma((X,Y),E)$ ≡ Grafo bipartido completo ponderado,
$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$.

$A = (A(V),E(V))$ ≡ Arbol de G que hacemos crecer.

Inicialización

PASO 1 Seleccionamos un etiquetado admisible de vértices l.
Determinamos el grafo igualdad G_l.
Seleccionamos un acoplamiento arbitrario M en G_l.
(M puede ser el vacío)

Aplicación del Algoritmo Húngaro a M en G_l

Elección de raiz del nuevo árbol ó Terminar

PASO 2 Si X es M-saturado, entonces M es acoplamiento perfecto en G_l y por tanto
M es acoplamiento óptimo en G. FIN

En caso contrario,

i) Escogemos $u \in X$ vértice M-insaturado como raiz del árbol que empezamos a crear.

ii) $V(A) = \{u\}$, $E(A) = \emptyset$.

iii) $Ext = \{u\}$, $Int = \emptyset$.

(i.e. etiquetamos u con E)

2.1 Análisis de los vértices exteriores del árbol

Repetir para cada vértice $x \in V(A) \cap Ext$:

Obtener $\Gamma(x)$

(i.e. localizar las aristas (x,y) de G)

Para cada vértice $y \in \Gamma(x)$ hacer:

i) Si y es M-insat., ir a PASO 2.2

ii) Si y es M-satur. $y \notin V(A)$, ir a PASO 2.3

iii) Si y es M-satur., $y \in V(A)$, ir a PASO 2.4

2.2 Perfeccionar el acoplamiento

Localizar el camino P M-aumentado de la raiz u a y.

$M := M \,\Delta\, E(P)$

(i.e. perfeccionar el acoplamiento)

$V(A) = \emptyset$, $E(A) = \emptyset$, $Ext = \emptyset$, $Int = \emptyset$.

(i.e. anular el árbol actual y las etiquetas de los vértices)

Ir a PASO 2.

2.3 Hacer crecer el árbol

Encontrar la arista (y,x') del acoplamiento M.

$V(A) := V(A) \cup \{y, x'\}$

$E(A) := E(A) \cup \{(x,y), (y,x')\}$.

(i.e. añadir al árbol los vértices y y x' así como las aristas (x,y) y (y,x'))

$Ext := Ext \cup \{x'\}$, $Int := Int \cup \{y\}$

(i.e. etiquetar x' con E, y con I).

Ir a PASO 2.1.

2.4. Seguir ó cambiar de etiquetado

Si existe algún vértice etiquetado E tal que posea una arista incidente (x,y) con y en la situación i) o ii) del paso 2.1, entonces:

Ir a PASO 2.1.

En caso contrario, ir a PASO 3.

Actualización de etiquetado. Cambio de subgrafo igualdad.

Nuevo grafo igualdad

PASO 3 Considerar todas las aristas (x,y) de G donde $x \in V(A)$, $x \in Ext$ y $y \notin V(A)$

Calcular

$$\alpha_l = \min_{\substack{x \in \Gamma(A),\, y \notin V(A) \\ x \text{ etiquetado } E}} \{ l(x) + l(y) - p(x,y) \}$$

$$l(v) := \begin{cases} l(v) - \alpha_l & \text{si } v \text{ está etiquetado con E} \\ l(v) + \alpha_l & \text{si } v \text{ está etiquetado con I} \\ l(v) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener el grafo igualdad

ALGORITMO DE EDMONDS 1

$G = (V,E)$ = Grafo.

$A = (V(A),E(A))$ = Árbol de G que vamos a desarrollar.

M = Acoplamiento en G que vamos a perfeccionar.

Inicialización

PASO 1 Sea G un grafo arbitrario

Seleccionamos un acoplamiento arbitrario M en G.

(Puede ser el acoplaminento vacío)

Desarrollo del árbol

$x \in X$

Raíz del nuevo árbol ó Terminar

PASO 2 Si existen al menos dos vértices de G M-insaturados:

i) Escogemos $u \in X$ vértice M-insaturado como raíz del árbol que empezamos a crear.

ii) $V(A) = \{u\}$, $E(A) = \emptyset$.

iii) $Ext = \{u\}$, $Int = \emptyset$.

(i.e. etiquetamos u con E)

En caso contrario ir a PASO 8.

Análisis de los vértices externos del árbol

PASO 3 Repetir para cada vértice $x \in V(A) \cap Ext$:

Obtener $\Gamma(x)$

(i.e. localizar las aristas (x,y) de G)

Para cada ~~arista~~ vértice $y \in \Gamma(x)$ hacer:

i) Si y es M-insat., ir a PASO 4.

ii) Si y es M-satur. $y \notin V(A)$, ir a PASO 5.

iii) Si y es M-satur., $y \in V(A)$, ir a PASO 7.

Perfeccionar acoplamiento

PASO 4 Localizar el camino P M-aumentado de la raíz u a y. en G

$M := M \Delta E(P)$

(i.e. perfeccionar el acoplamiento)

$V(A) = \emptyset$, $E(A) = \emptyset$, $Ext = \emptyset$, $Int = \emptyset$.

(i.e. anular el árbol actual y las etiquetas de los vértices)

Ir a PASO 2.

Hacer crecer el árbol

PASO 5 Encontrar la arista (y,x') del acoplamiento M.

$V(A) := V(A) \cup \{y, x'\}$

$E(A) := E(A) \cup \{(x,y), (y,x')\}$.

(i.e. añadir al árbol los vértices y y x' así como las aristas (x,y) y (y,x'))

$Ext := Ext \cup \{x'\}$, $Int := Int \cup \{y\}$

(i.e. etiquetar x' con E, y con I).

- Si existe $z \in V(A)$ tal que $z \in Ext$ y $(x',z) \in E(G)$, ir a PASO 6. } ∃ floración
- En caso contrario ir a PASO 3. → ∄ floración

Contraer floración

PASO 6 Contraer la floración que se ha formado.

Identificarla reflejando el orden de aparición.

Etiquetar con E el pseudovértice resultante.

Ir a PASO 3.

Seguir ó árbol húngaro

PASO 7
- Si existe algún vértice etiquetado E tal que posea una arista incidente (x,y) con y en la situación i) o ii) del paso 3, ir a PASO 3.
- En caso contrario, hemos encontrado un árbol húngaro.

Eliminar de G los vértices del árbol así como las aristas incidentes en ellos, i.e., $G := G - V(A)$

Ir a PASO 2.

Expansión de floraciones

PASO 8 Inducir en el último grafo G y en cada árbol húngaro que haya sido eliminado un acoplamiento máximo de la siguiente manera :

Expandir las floraciones en orden inverso, induciendo un acoplamiento máximo que deje insaturado en cada floración aquel vértice que estaba saturado antes de expandirla.

ALGORITMO DE EDMONDS (I)

$G = (V,E)$ ≡ Grafo.
$A = (V(A),E(A))$ ≡ Arbol de G que vamos a desarrollar.
M ≡ Acoplamiento en G que vamos a perfeccionar. (Puede ser el $\emptyset$)

Inicialización

PASO 1 Sea G un grafo arbitrario
Seleccionamos un acoplamiento arbitrario M en G.

Desarrollo del árbol

PASO 2 Si existen al menos dos vértices de G M-insaturados :
Elegir uno de ellos u.
Definir $V(A) := \{u\}$, $E(A) := \emptyset$.
("es decir u es raiz de un árbol que comenzamos a desarrollar")
En caso contrario ir a PASO 8.

PASO 3 Repetir para cada vértice $x \in V(A)$, x etiquetado E :
Localizar las aristas (x,y) de G.
Para cada arista (x,y) hacer:
i) Si y es M-insat., ir a PASO 4.
ii) Si y es M-satur. $y \notin V(A)$, ir a PASO 5.
iii) Si y es M-satur., $y \in V(A)$, ir a PASO 7

PASO 4 Localizar el camino P M-aumentado de la raiz u a y.
Perfeccionar el acoplamiento M, i.e., $M := M \triangle E(P)$.
Anular el árbol actual y las etiquetas de los vértices.
Ir a PASO 2.

PASO 5 Encontrar la arista (y,x') del acoplamiento M.
Añadir al árbol los vértices y y x' así como las aristas (x,y) y (y,x'), i.e.,

$$V(A) := V(A) \cup \{y, x'\}$$
$$E(A) := E(A) \cup \{(x,y), (y,x')\}.$$

Etiquetar x' con E, y con I.
Si existe $z \in V(A)$ tal que z está etiquetado con E y $(x',z) \in E(G)$, ir a PASO 6.
En caso contrario, ir a PASO 3.

PASO 6. Contraer la floración que se ha formado.
Identificarla reflejando el orden de aparición.
Etiquetar con E el pseudovértice resultante.
Ir a PASO 3.

PASO 7 7.1. Si existe algún otro vértice etiquetado E tal que posea una arista incidente (x,y) con y en la situación i) o ii) del paso 3, ir a PASO 3.

7.2. En caso contrario, hemos encontrado un árbol hungaro.
Eliminar de G los vértices del árbol así como las aristas incidentes en ellos, es decir, $G := G / V(A)$
Ir a PASO 2.

PASO 8 Inducir en el último grafo G y en cada árbol húngaro que haya sido eliminado un acoplamiento máximo de la siguiente manera :
Expandir las floraciones en orden inverso, induciendo un acoplamiento que deje insaturado en cada floración aquel vértice que estaba saturado antes de expandirla.

ALGORITMO DE EDMONDS (II)

$G = (V,E)$ ≡ Grafo ponderado.
$A = (V(A),E(A))$ ≡ Arbol de G que vamos a desarrollar.
M ≡ Acoplamiento en G que vamos a perfeccionar. (Puede ser el $\emptyset$)

Inicialización

PASO 1 Sea G grafo ponderado.
Asignamos pesos π_i a cada $v_i \in V$ de manera que

$$\pi_i+\pi_j \geq p(v_i,v_j).$$

Asignamos valores $\lambda_r = 0$ para cada subconjunto $S_r \subset V$ con número impar de vértices.

Formación del subgrafo igualdad.

PASO 2 Obtener el subgrafo igualdad G' asociado a los pesos π actuales de los vértices.

Desarrollo del árbol

PASO 3 Si en G' existe un árbol M-alternado A :
i) Si A aumenta, ir a PASO 4
ii) Si A florece, ir a PASO 5
iii) Si A se convierte en húngaro, ir a PASO 6
En caso contrario:
Si existe algún vértice de G' M-insaturado :
Elegir un vértice M-insaturado u.
Definir $V(A) := \{u\}$, $E(A) := \emptyset$.
("es decir u es raiz de un árbol que comenzamos a desarrollar")
Ir a PASO 3.

En caso contrario ir a PASO 8.

a) Camino M-aumentado

PASO 4 Localizar el camino P M-aumentado de la raiz u a y.
Perfeccionar el acoplamiento M, i.e., $M := M \Delta E(P)$.
Anular el árbol actual y las etiquetas de los vértices.
Ir a PASO 3

b) Floración

PASO 5 Contraer la floración que se ha formado.
Identificarla reflejando el orden de aparición.
Etiquetar con E el pseudovértice resultante.
Llamar G al grafo resultante.
Llamar G' al subgrafo igualdad asociado.
Llamar A al árbol obtenido tras la floración (según las indicaciones comentadas anteriormente)
Ir a PASO 3.

c) Arbol húngaro

PASO 6 *i) Cálculo de* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta$. Ver (25).

ii) Posibles cambios

ii.1) Si $\Delta = \infty$. FIN. El grafo no tiene acoplamiento perfecto.

En caso contrario,

ii.1.1) Hacer el cambio del vector $[\pi_i, \lambda_r]$ según las indicaciones (26)

ii.1.2) Si $\Delta = \Delta_1$ o $\Delta = \Delta_2$ entonces

Conservar el árbol.
Ir a PASO 3

Si $\Delta = \Delta_3$ entonces

Ir a PASO 7

Expansión de floraciones

PASO 7 Expandir la floración que producía Δ_3.
Llamar al grafo resultante G.
Llamar al subgrafo igualdad resultante G'.
Inducir un acoplamiento perfecto en la floración expandida.
Reconstruir el árbol A añadiéndole el camino necesario a partir de aristas de la floración.
Llamar A al nuevo árbol.
Ir a PASO 3.

PASO 8 Expandir las floraciones en orden inverso, induciendo un acoplamiento perfecto que deje insaturado en cada floración aquel vértice que estaba saturado antes de expandirla.

Cálculo de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta$. (25)

$$C := \{ (v,v') \in E(G) \text{ tal que } (v,v') \notin E(G') \}$$

$$C_1 := \{ (v,v') \in C \text{ tal que } v \in V(A), \text{ etiq. con E y } v' \notin V(A) \}$$

$$C_2 := \{ (v,v') \in C \text{ tal que } v,v' \in V(A) \text{ y están etiquetados con E} \}$$

Obtener :

$$\Delta_1 := \min_{(v,v') \in C_1} [\pi_v + \pi_{v'} - p(v,v')]$$

$$\Delta_2 := 1/2 \, (\min_{(v,v') \in C_2} [\pi_v + \pi_{v'} - p(v,v')])$$

Si existe r tal que S constituye un pseudovértice máximo de A etiquetado (I), calcular

$$\Delta_3 := (1/2) \min_{S_r} \{\lambda_r\}$$

Calcular

$$\Delta := \min(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$$

Posibles cambios. (26)

Si $\Delta \neq \infty$ hacer el siguiente cambio del vector $[\pi_i, \lambda_r]$:

a) Si $v \in V(A)$ etiquetado E o v es pseudovértice etiquetado E, entonces

$$\pi_v := \pi_v - \Delta$$

Si $v \in V(A)$ etiquetado I ó v es pseudovértice etiquetado (I), entonces

$$\pi_v := \pi_v + \lambda$$

b) $\forall \, S_r \subset V(G)$ que constituyan un pseudovértice máximo, Si S_r está etiquetado E entonces

$$\lambda_r := \lambda_r + 2\Delta$$

Si S_r está etiquetado I entonces

$$\lambda_r := \lambda_r - 2\Delta$$