

6.9 Algoritmo para ciclos hamiltonianos en grafos con vértices de grado 2



Alberto Conejero y Cristina Jordán

Depto. Matemática Aplicada

E.T.S. Ingeniería Informática

Universitat Politècnica de València



¿Es G hamiltoniano?

- No existe ningún método general válido aplicable a todos los grafos para determinar si es o no hamiltoniano
- El método que tratamos a continuación es válido, en términos generales, si el grafo tiene vértices de grado dos y no tiene un gran número de aristas (aunque la aplicabilidad o no del método depende siempre del grafo en concreto)



Características

¿De qué tipo de método se trata?

El método es constructivista, buscando no sólo la existencia sino el ciclo hamiltoniano, caso de que exista

¿En qué se apoya?

El método se apoya en el hecho de que si existe un ciclo hamiltoniano, éste debe contener exactamente dos de las aristas de cada uno de los vértices (por definición de ciclo)



Estrategia

- Dado un grafo no dirigido G , con $|V| > 2$, suponemos que tiene ciclo hamiltoniano e intentaremos construirlo a partir de cuatro reglas.
- Si las reglas 1 ó 4 no se cumplen, el grafo no será hamiltoniano.
- En caso contrario habremos obtenido, tras un número determinado de pasos, un ciclo hamiltoniano en G



Reglas

Suponemos que existe un ciclo hamiltoniano C en G

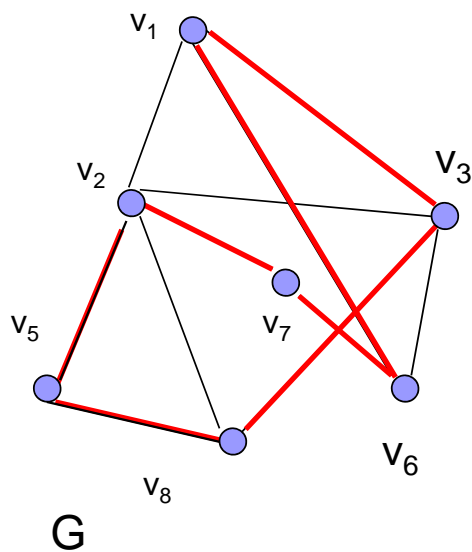
Regla 1: Si existe ciclo hamiltoniano en G entonces todos los vértices tienen grado mayor o igual que dos

Regla 2: Sea v un vértice de grado 2. Entonces las dos aristas incidentes en v deben pertenecer al ciclo C

Regla 3: Si v es un vértice de grado mayor que 2, y ya hemos incorporado al ciclo C que estamos reconstruyendo dos de sus aristas, el resto de aristas incidentes en v deben ser desechadas

Regla 4: Si el grafo es realmente hamiltoniano, con la construcción “obligada” que estamos realizando no podemos encontrar un ciclo que contenga un número de vértices menor que $|V|$

Ejemplo 1

¿Es G hamiltoniano?Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_5)=2 \longrightarrow (v_5, v_2), (v_5, v_8) \in E(C)$$

$$d(v_7)=2 \longrightarrow (v_7, v_2), (v_7, v_6) \in E(C)$$

Como $(v_5, v_2), (v_7, v_2) \in E(C)$

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_8) \notin E(C)$$

Definimos

$$G := G - \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_8)\}$$

$$d(v_1)=2 \longrightarrow (v_1, v_3), (v_1, v_6) \in E(C)$$

$$d(v_8)=2 \longrightarrow (v_8, v_3) \in E(C)$$

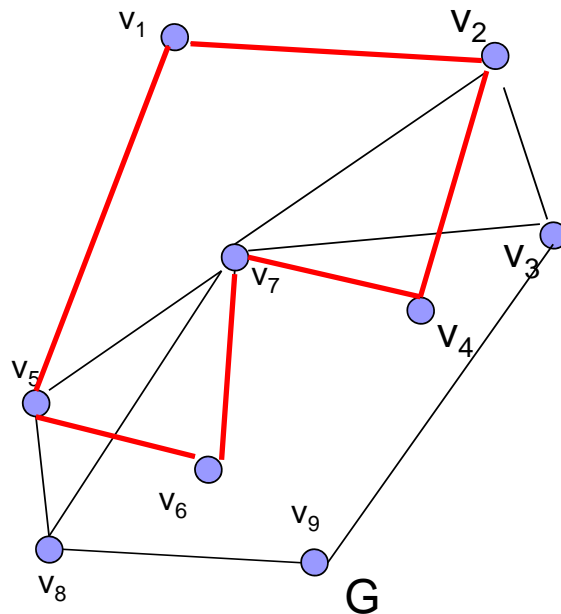
$$C = v_1 v_3 v_8 v_5 v_2 v_7 v_6 v_1$$



Ejemplo 2

¿Es G hamiltoniano?

Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C



$$d(v_1)=2 \longrightarrow (v_1, v_2), (v_1, v_5) \in E(C)$$

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_7), (v_4, v_2) \in E(C)$$

$$d(v_6)=2 \longrightarrow (v_6, v_5), (v_6, v_7) \in E(C)$$

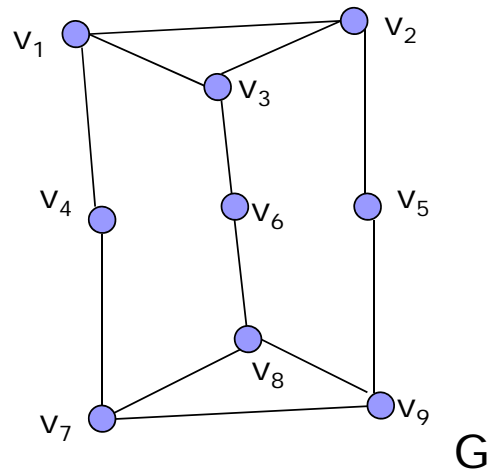
Como se construye obligatoriamente un ciclo antes de colocar todos los vértices hemos llegado a una contradicción

No existe ciclo hamiltoniano



Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



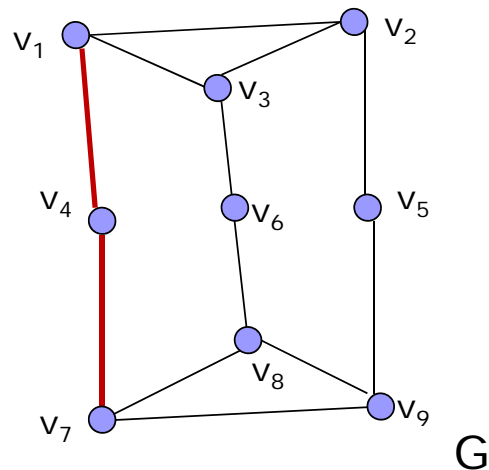
Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$



Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



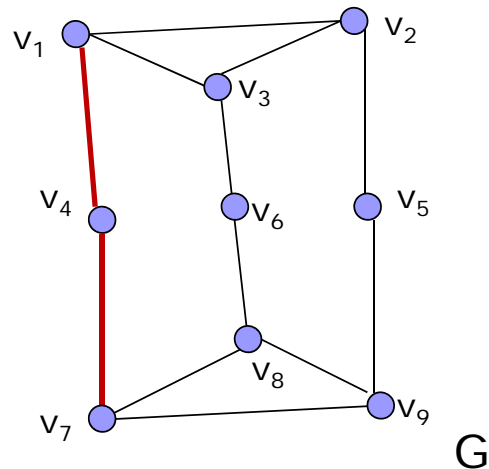
Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$



Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



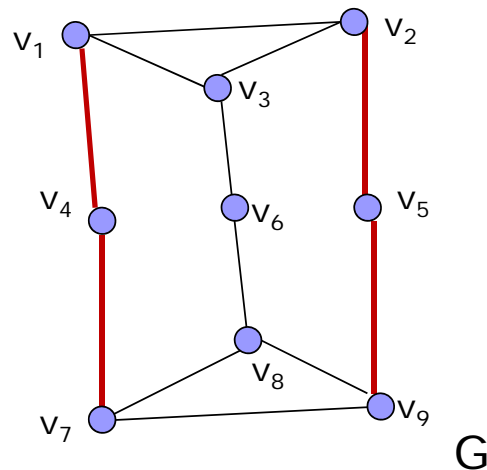
Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \quad \longrightarrow \quad (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

$$d(v_5)=2 \quad \longrightarrow \quad (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?

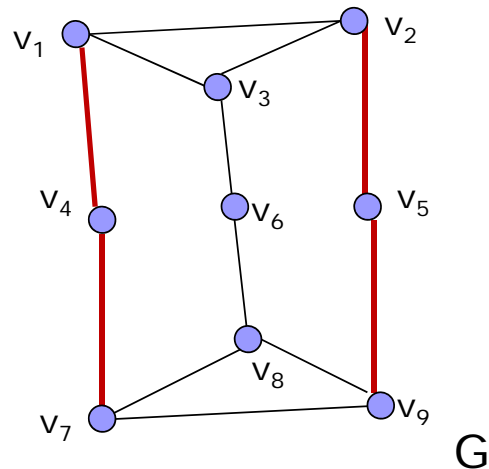


Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \quad \longrightarrow \quad (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

$$d(v_5)=2 \quad \longrightarrow \quad (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

¿Es G hamiltoniano?



Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \quad \longrightarrow \quad (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

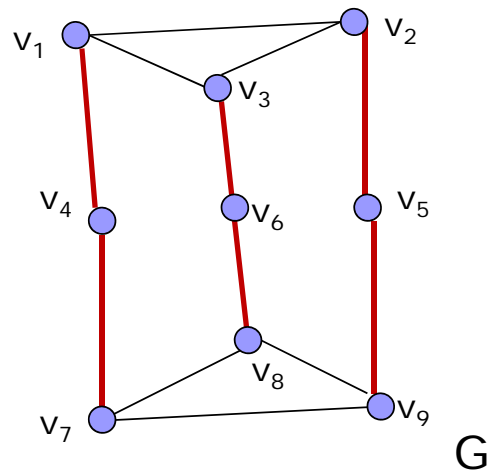
$$d(v_5)=2 \quad \longrightarrow \quad (v_5,v_2), (v_5,v_9) \in E(C)$$

$$d(v_6)=2 \quad \longrightarrow \quad (v_6,v_3), (v_6,v_8) \in E(C)$$



Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

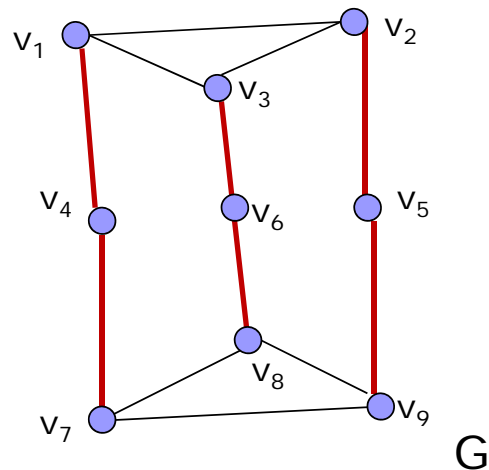
$$d(v_5)=2 \longrightarrow (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

$$d(v_6)=2 \longrightarrow (v_6, v_3), (v_6, v_8) \in E(C)$$



Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



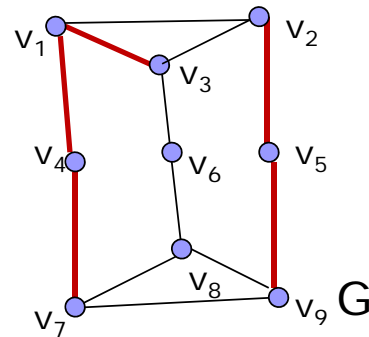
Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

$$d(v_5)=2 \longrightarrow (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

$$d(v_6)=2 \longrightarrow (v_6, v_3), (v_6, v_8) \in E(C)$$

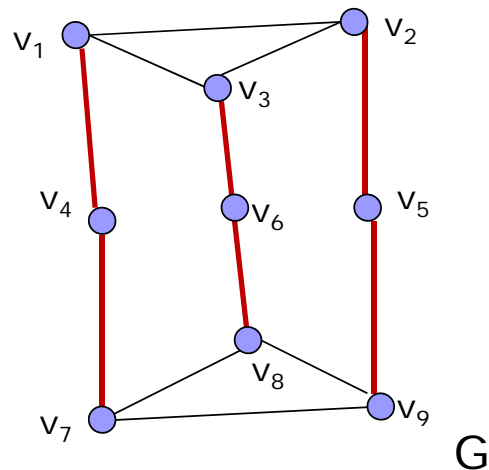
$$a) (v_1, v_3) \in E(C) \longrightarrow (v_1, v_2), (v_3, v_2) \notin E(C)$$





Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

$$d(v_5)=2 \longrightarrow (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

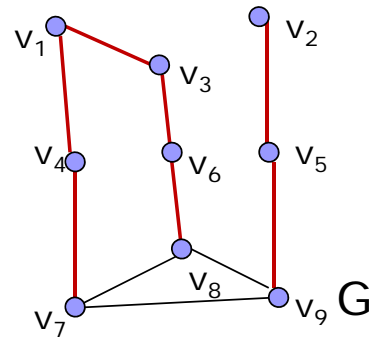
$$d(v_6)=2 \longrightarrow (v_6, v_3), (v_6, v_8) \in E(C)$$

$$a) (v_1, v_3) \in E(C) \longrightarrow (v_1, v_2), (v_3, v_2) \notin E(C)$$

$$\longrightarrow G := G - \{(v_1, v_2), (v_3, v_2)\}$$

$$\longrightarrow d(v_2)=1$$

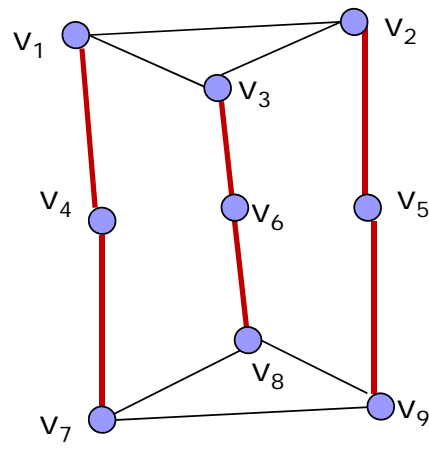
Absurdo





Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

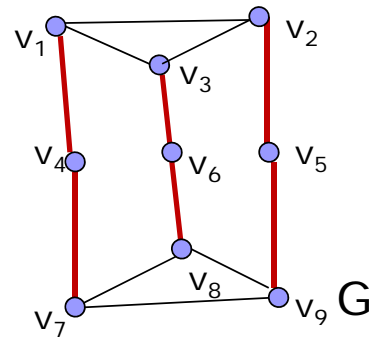
$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

$$d(v_5)=2 \longrightarrow (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

$$d(v_6)=2 \longrightarrow (v_6, v_3), (v_6, v_8) \in E(C)$$

$$a) (v_1, v_3) \in E(C) \quad \text{Absurdo}$$

$$b) (v_1, v_3) \notin E(C) \longrightarrow G := G - \{(v_1, v_3)\}$$

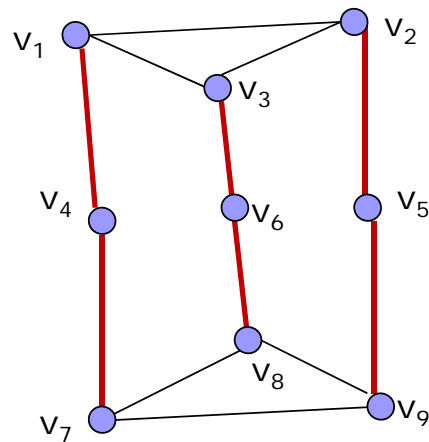



$$d(v_6)=2 \quad \longrightarrow \quad (v_6,v_3), (v_6,v_8) \in E(C)$$
$$\longrightarrow (v_1, v_2) \in E(C)$$




Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



G

Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

$$d(v_5)=2 \longrightarrow (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

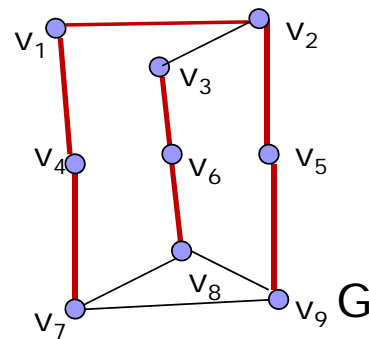
$$d(v_6)=2 \longrightarrow (v_6, v_3), (v_6, v_8) \in E(C)$$

$$a) (v_1, v_3) \in E(C) \quad \text{Absurdo}$$

$$b) (v_1, v_3) \notin E(C) \longrightarrow G := G - \{(v_1, v_3)\}$$

$$\longrightarrow (v_1, v_2) \in E(C)$$

$$\longrightarrow (v_2, v_3) \notin E(C)$$

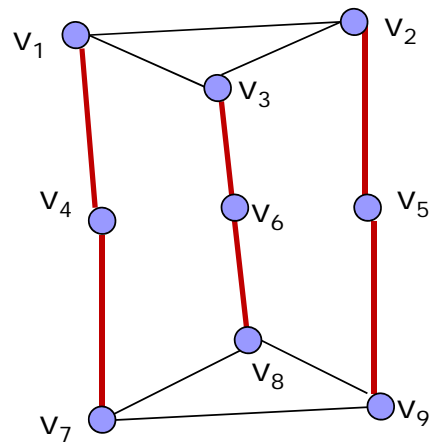


G



Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



G

Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

$$d(v_5)=2 \longrightarrow (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

$$d(v_6)=2 \longrightarrow (v_6, v_3), (v_6, v_8) \in E(C)$$

$$a) (v_1, v_3) \in E(C) \text{ Absurdo}$$

$$b) (v_1, v_3) \notin E(C) \longrightarrow G := G - \{(v_1, v_3)\}$$

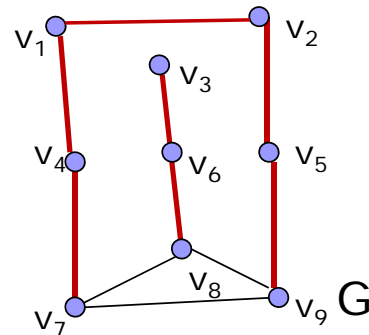
$$\longrightarrow (v_1, v_2) \in E(C)$$

$$\longrightarrow (v_2, v_3) \notin E(C)$$

$$\longrightarrow G := G - \{(v_2, v_3)\}$$

$$\longrightarrow d(v_3)=1$$

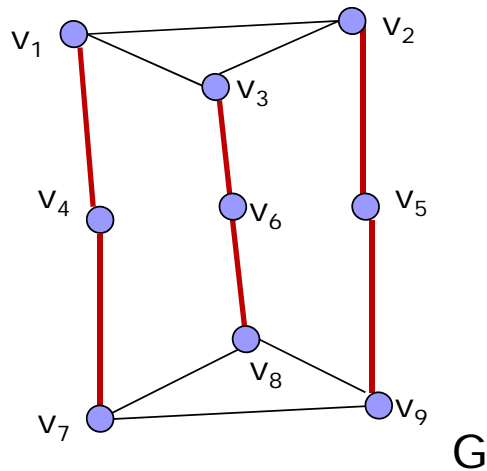
Absurdo



G

Ejemplo 3

¿Es G hamiltoniano?



Supongamos que existe ciclo hamiltoniano C

$$d(v_4)=2 \longrightarrow (v_4, v_1), (v_4, v_7) \in E(C)$$

$$d(v_5)=2 \longrightarrow (v_5, v_2), (v_5, v_9) \in E(C)$$

$$d(v_6)=2 \longrightarrow (v_6, v_3), (v_6, v_8) \in E(C)$$

$$a) (v_1, v_3) \in E(C) \quad \text{Absurdo}$$

$$b) (v_1, v_3) \notin E(C) \quad \text{Absurdo}$$

Luego G no es hamiltoniano