EL PROBLEMA DE LA ASIGNACIÓN Y LA TEORÍA DE GRAFOS

Contenidos

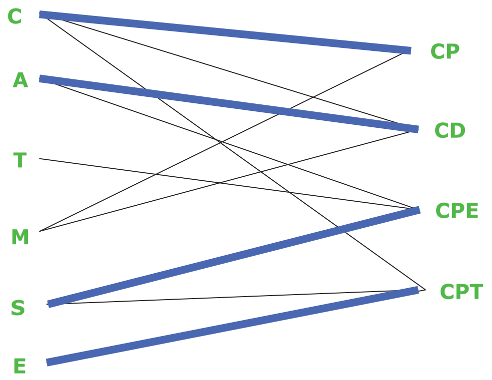
- El problema de la asignación
- Emparejamientos
- Perfeccionar un emparejamiento
- Resultados sobre emparejamientos
- Algoritmos
- Ejemplos
- Recubrimientos

Problema 1

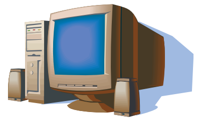
Se tiene que **elegir a cuatro miembros** de la unidad docente de Matemáticas de la FI para formar parte de las comisiones siguientes: **C. de Proyectos, C. Docente, C. Permanente, C. de Planes de Estudio**. La mencionada unidad está formada por **siete profesores**, que manifiestan su disponibilidad para pertenecer a una u otra. ¿Cuál sería una posible asignación que respete las posibilidades del profesorado?

	CP	CD	CPE	CPT
C	X	X		X
A		X	X	
T			X	
M	X	X		
S			X	X
E				X

Solución intuitiva problema 1

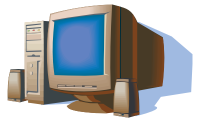


Problema 2

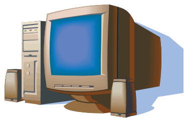


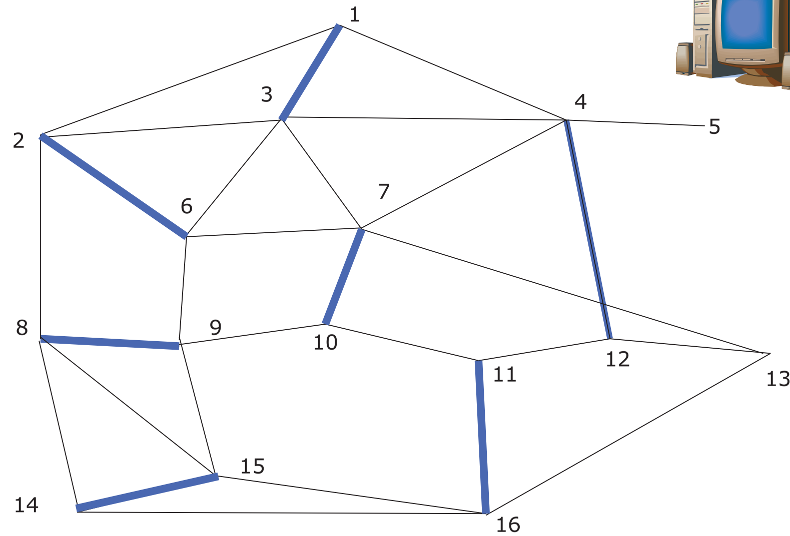
En el grupo PL1 de prácticas de laboratorio de la asignatura EMI2 se van a hacer prácticas por **parejas**, por lo que se solicita a los **16 alumnos** que, previo acuerdo entre ellos, indiquen con quienes les gustaría formar pareja. ¿Será posible establecer 8 parejas para las prácticas que respeten las preferencias de los alumnos?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		X	X	X												
2	X		X			X		X								
3	X	X		X		X	X									
4	X		X		X		X					X				
5				X												
6		X	X				X		X							
7			X	X		X			X	X			X			
8		X							X					X	X	
9						X		X		X					X	
10							X		X		X					
11										X		X				X
12				X							X		X			
13												X				X
14								X							X	X
15								X	X					X		X
16											X		X	X	X	



Solución intuitiva problema 2





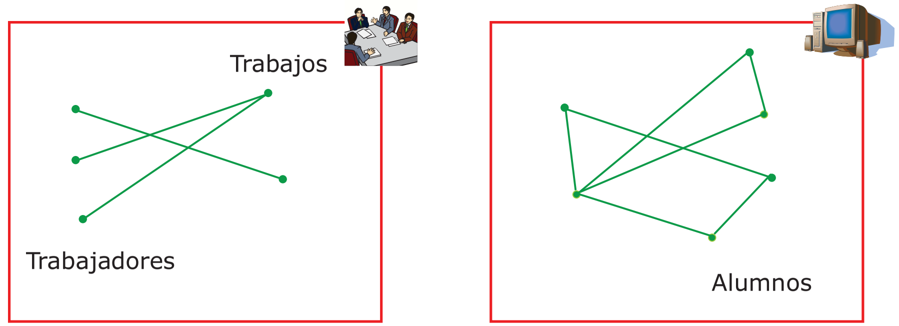
El problema de la asignación

- Plantea …
  - … la distribución de tareas entre los miembros de un conjunto de trabajadores …
  - … establecer parejas entre los elementos de un conjunto
- a partir de …
  - … una función que relaciona a los elementos de los conjuntos …
  - … en ocasiones una función que pondera la relación

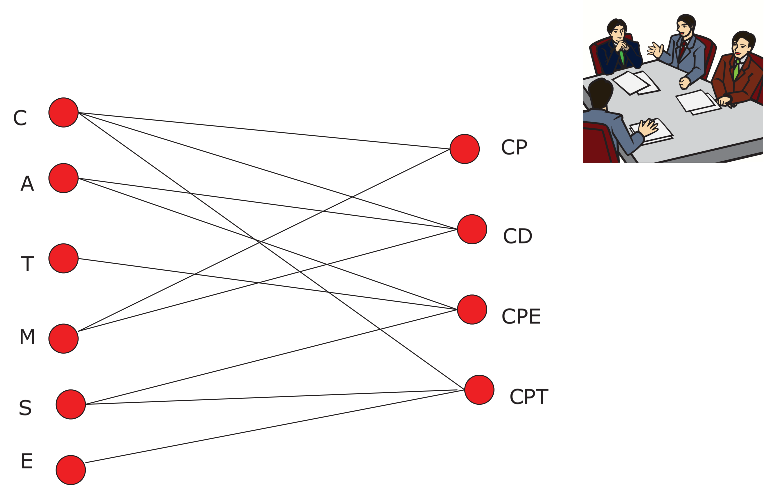
Herramientas matemáticas

Grafo no dirigido ponderado G=(V, E) que representa el problema

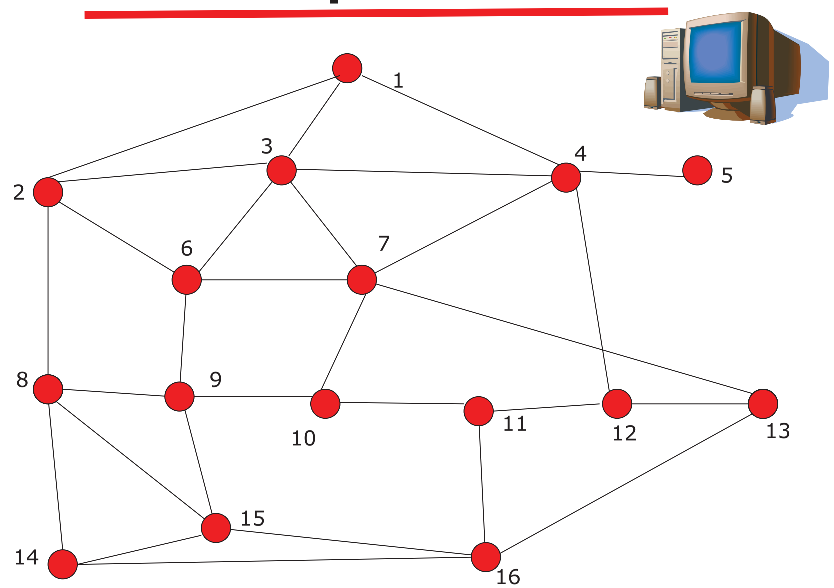
- V → Elementos de los conjuntos
- E → Relación entre los elementos
- Peso en cada arista (x,y)



Modelización problema 1



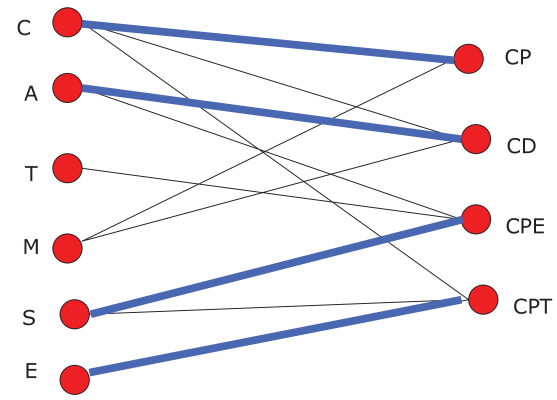
Modelización problema 2



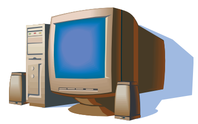
Herramientas matemáticas

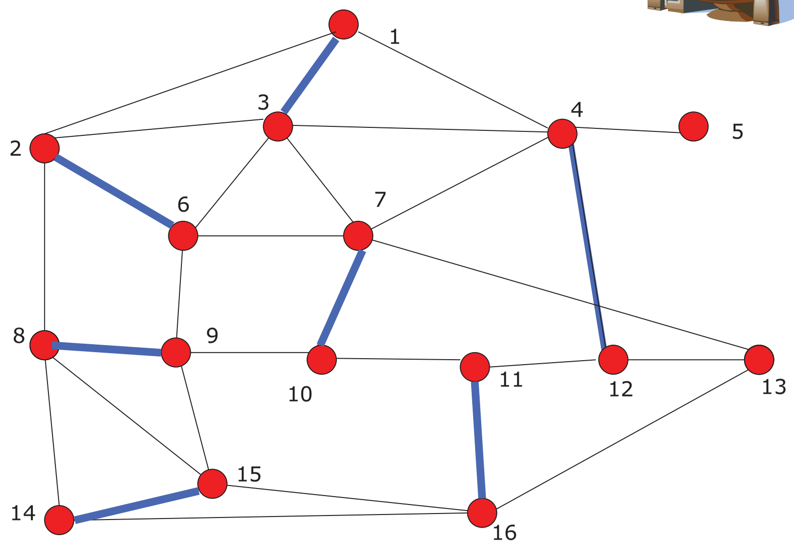
Un **emparejamiento** M de G=(V,E) es un subconjunto de E, sin bucles, tal que no hay dos aristas de M incidentes en el mismo vértice

Solución problema 1



Solución problema 2





¿Cuál es la solución al problema de la asignación?

Modelizados nuestros problemas como grafos en la forma vista, la solución consistirá en encontrar el emparejamiento que mayor número de aristas posea

¿Cómo seguir?

- Desarrollar el concepto de emparejamiento de forma que concretemos más nuestro objetivo
- Introducir nuevos conceptos que nos permitan resolver el problema

Emparejamientos

Definiciones

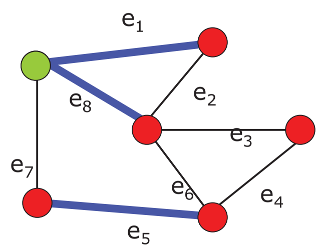
- Se dice que un vértice es **M-saturado** si es extremo de una arista de M.

En caso contrario se llama **M-insaturado**

Ejemplo

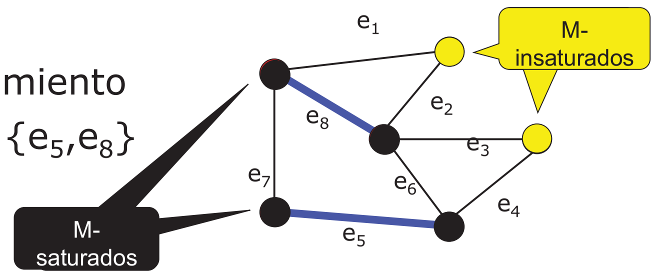
No emparejamiento

$\{e_1,e_5,e_8\}$



Emparejamiento

$\{e_5,e_8\}$



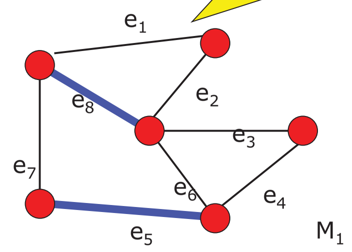
Tipos de emparejamientos

- Un emparejamiento M en G se dice que es **máximo** si no existe ningún otro emparejamiento cuyo número de aristas sea mayor que el de M
- Un emparejamiento M en G se dice que es **perfecto** si todos los vértices de G son M-saturados

Ejemplo

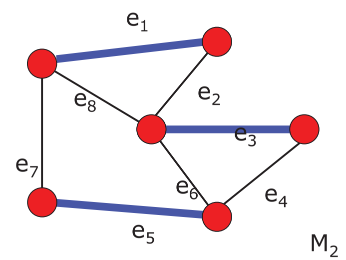
M$_1$ no es máximo

Emparejamiento $M_1=\{e_5,e_8\}$



Emparejamiento $M_2=\{e_1,e_3,e_5\}$

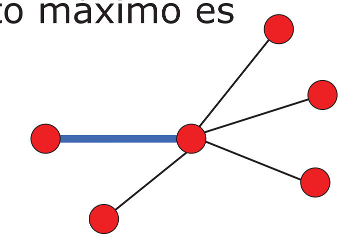
M2 es máximo
M2 es perfecto



¿?

- ¿Todo emparejamiento máximo es perfecto?

NO



- ¿Todo emparejamiento perfecto es máximo?

SÍ

Perfeccionar un emparejamiento

Perfeccionar el emparejamiento

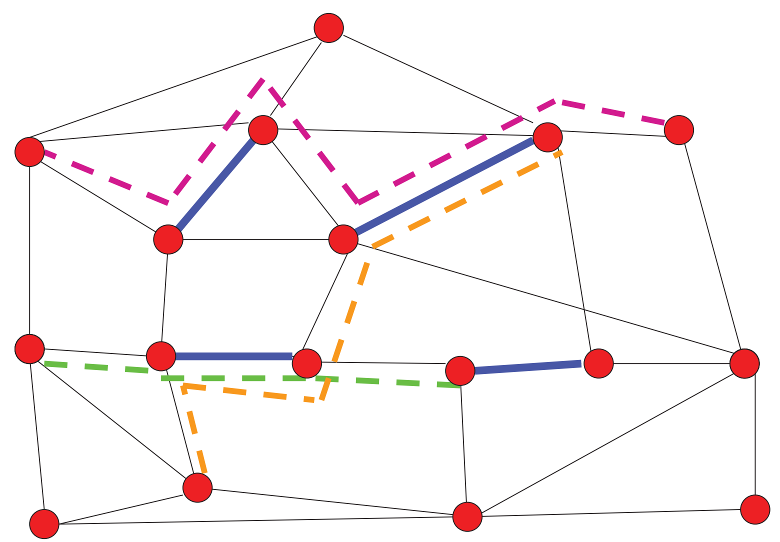
- Sea un emparejamiento M en G, se llama **perfeccionar el emparejamiento** al proceso de encontrar un emparejamiento con un número de aristas mayor que M

Caminos M-alternados

Sea un grafo no dirigido G=(V,E) y un emparejamiento M en G

- Se llama **camino M-alternado** a todo camino en G cuyas aristas pertenezcan alternativamente a M y E-M

Ejemplo



Caminos M-incrementables

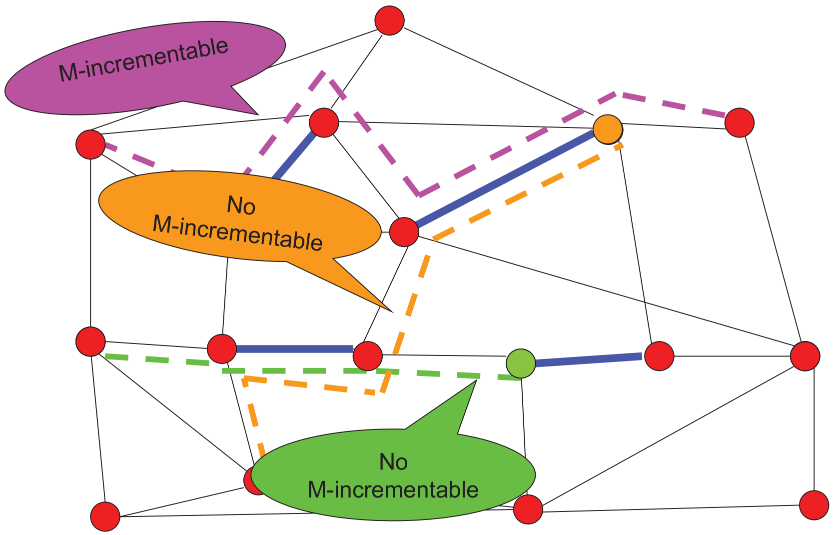
Sea un grafo no dirigido, G=(V,E), y un emparejamiento, M, en G

- Recordemos:

un vértice v es M-insaturado si ninguna arista de M incide en v

- Se llama **camino M-incrementable** a todo camino M-alternado en G cuyos extremos son M-insaturados

Ejemplo

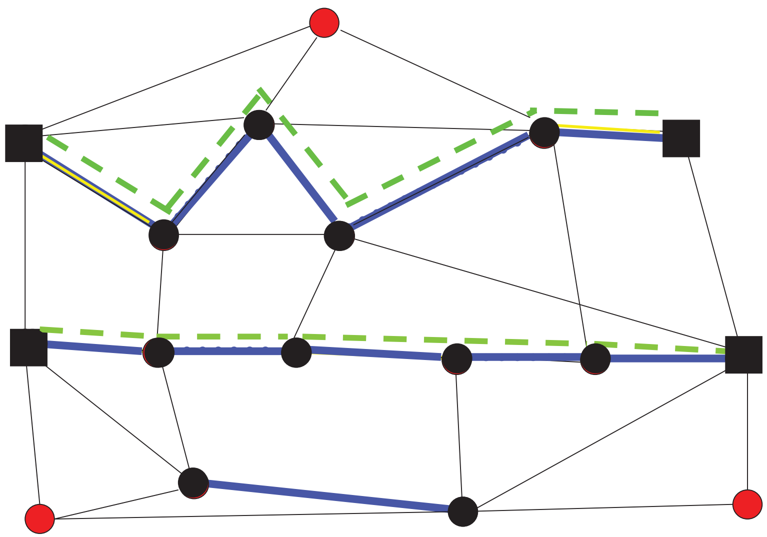


¿Cómo utilizamos los caminos M-incrementables?

- Se localiza un camino M-incrementable
- Las aristas del camino que no son del emparejamiento se añaden a M
- Las aristas del camino que son del emparejamiento se eliminan de M

✓ Con este proceso conseguimos un emparejamiento con una arista más que M

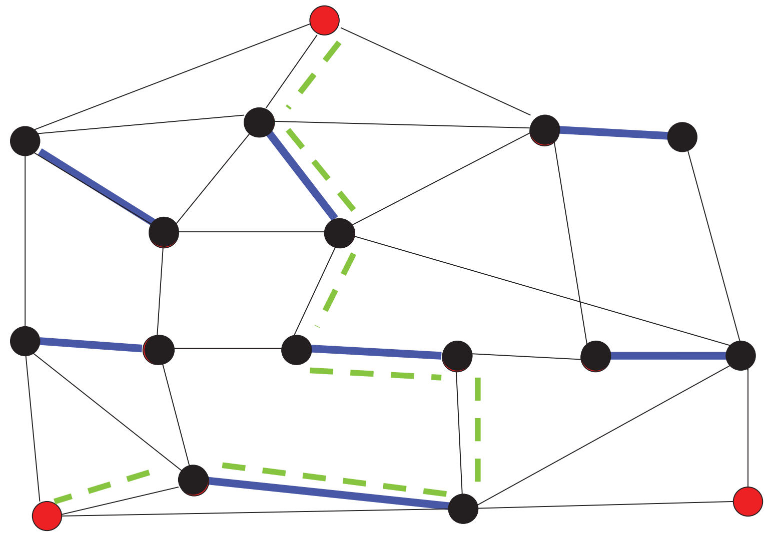
Ejemplo



¿?

- ¿Es máximo el emparejamiento obtenido?

Ejemplo



Teorema

Sea un grafo no dirigido G
Sea M un emparejamiento en G

$$\boxed{\text{M es máximo}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{No existen caminos M-incrementables}}$$

Resumiendo

Para encontrar un emparejamiento máximo

- Localizamos caminos M-incrementables
- Aplicamos el procedimiento visto
- Iteramos

Matemáticamente perfeccionar es...

Si P es un camino M-incrementable, la operación que perfecciona el emparejamiento es la diferencia simétrica siguiente

$$M \,\Delta\, E(P)=(M-E(P)) \cup (E(P)-M)$$

Resultados sobre emparejamientos

Algunos teoremas(I)

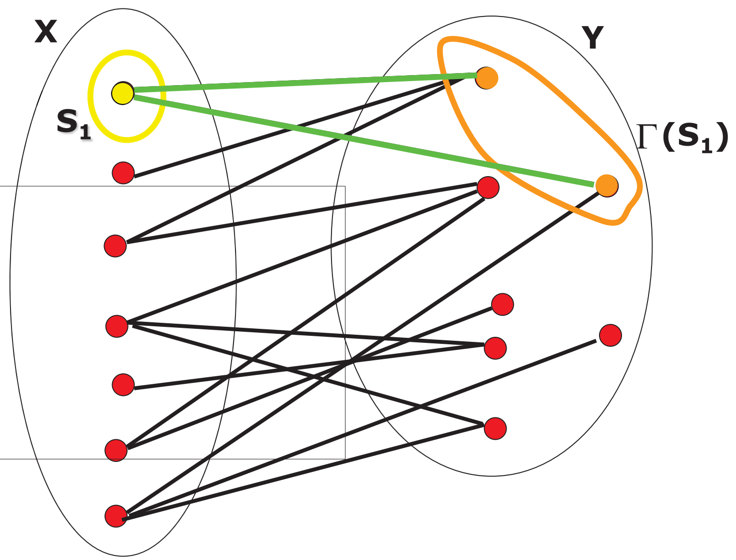
Teorema de Hall

Dado G=((X,Y)) grafo bipartido
Existe un emparejamiento que satura todo X
si y sólo si

$\forall S \subseteq X \quad card(S) \leq card(\Gamma(S))$

ACLARACIÓN

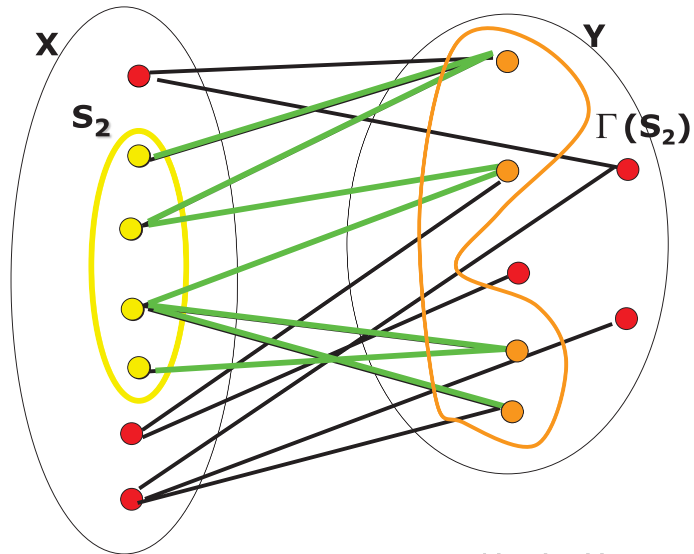
$\forall S \subseteq X \quad card(S) \leq card(\Gamma(S))$



$Card(S_1)=1 \quad \leq \quad Card(\Gamma(S_1))=2$

ACLARACIÓN

$\forall S \subseteq X \quad card(S) \leq card(\Gamma(S))$



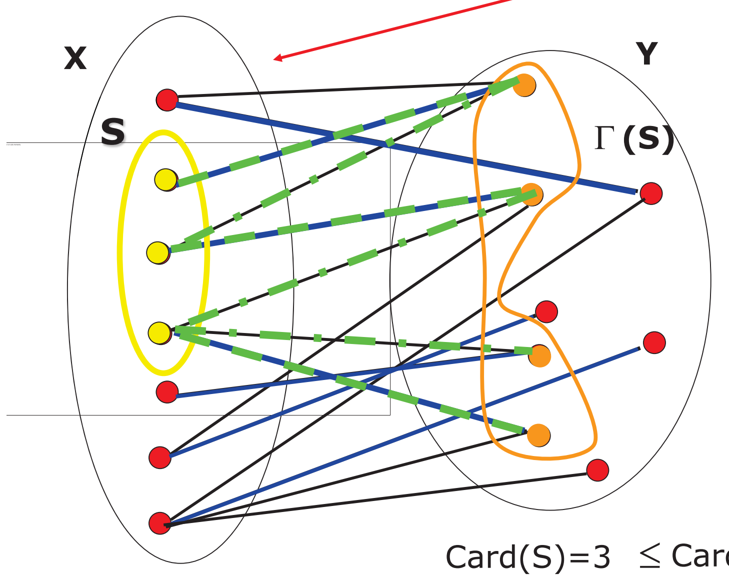
$Card(S_2)=4 \quad \leq \quad Card(\Gamma(S_2))=4$

Justificación

Existe un emparejamiento que satura todo X

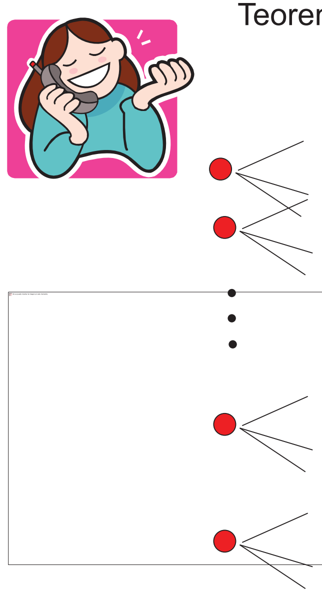
Entonces

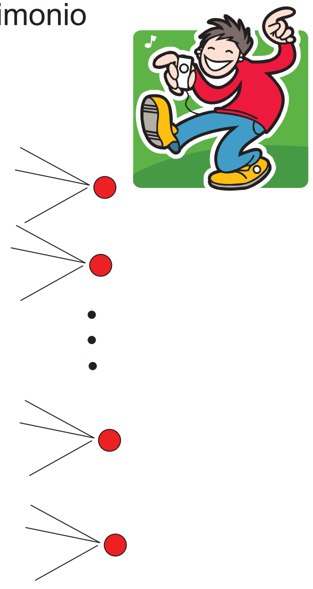
$\forall S \subseteq X \quad card(S) \leq card(\Gamma(S))$



$Card(S)=3 \quad \leq Card(\Gamma(S))=4$

Teorema del matrimonio





Algunos teoremas(II)

Teorema del matrimonio

Dado G=((X,Y)) grafo bipartido

Si G es k-regular, k>0, entonces

G tiene emparejamiento perfecto

¿Y si hay pesos?

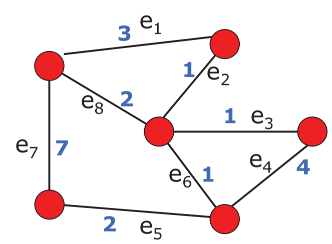
Emparejamiento óptimo

Sea G un grafo no dirigido ponderado

- Se llama **emparejamiento óptimo** al emparejamiento perfecto de mayor peso

Ejemplo

Grafo no dirigido ponderado



Emparejamiento $M_1=\{e_1,e_3,e_5\}$

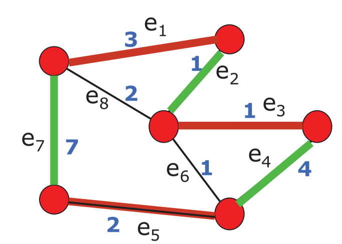
$M_2=\{e_2,e_4,e_7\}$

M_1 es perfecto, $p(M_1)=6$

M_2 es perfecto, $p(M_2)=12$

No hay más emp. perfectos

M_2 es óptimo



Resumiendo

El problema de la asignación consiste en encontrar emparejamientos máximos y emparejamientos máximos de máximo peso

Algoritmos

Algoritmos

Desarrollando y sistematizando el proceso de perfeccionamiento obtenemos algoritmos que nos permitirán obtener emparejamientos máximos y de máximo peso:

- algoritmo húngaro,
- algoritmo de Edmonds(I),

} **GRAFOS NO PONDERADOS**

- algoritmo de Kuhn-Munkres,
- algoritmo de Edmonds (II)

} **GRAFOS PONDERADOS**

Métodos

- **Grafos no ponderados**:

Alg. de Edmonds(I): Proporciona emparejamiento máximo

- **Grafos ponderados:**

Alg. de Kuhn-Munkres: Proporciona emparejamiento óptimo en un grafo bipartido completo con card(X)=card(Y)

Alg. de Edmonds(II): Proporciona emparejamiento máximo de máximo peso

Nota

El algoritmo de Edmonds (II):

- Es el más general
- Encuentra, en cualquier caso, el emparejamiento máximo o el emparejamiento máximo de máximo peso

Luego...

- Para encontrar un emparejamiento máximo de máximo peso en un grafo bipartido ponderado:

  Algoritmos de Kuhn-Munkres y Edmonds(II)

Recubrimientos

Contenidos

- ¿Qué es un recubrimiento?
- Relación entre recubrimiento y emparejamiento
- Aplicación

Recubrimiento

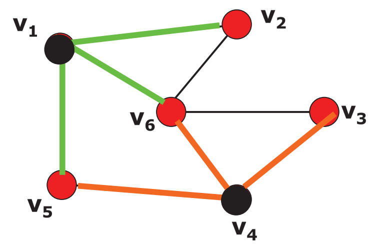
Sea G=(V,E) un grafo no dirigido

Se llama **recubrimiento** a todo conjunto, K, de vértices de G tal que toda arista de G posee al menos uno de sus extremos en K

Ejemplo

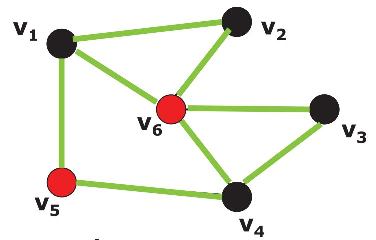
No recubrimiento

$\{v_1,v_4\}$



Recubrimiento

$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$



V es el recubrimiento trivial

¿Qué nos interesa?

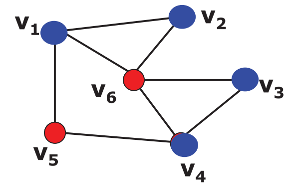
Sea G=(V,E) un grafo no dirigido

Un recubrimiento, K, se dice que es un **recubrimiento mínimo** si no existe ningún otro recubrimiento con más vértices que K

Ejemplos

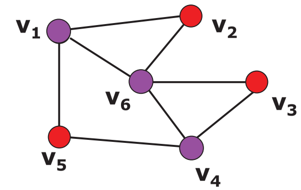
V es el recubrimiento trivial

Card(V)=5



$K_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$Card(K_1)=4$



$K_2=\{v_1,v_4, v_6\}$

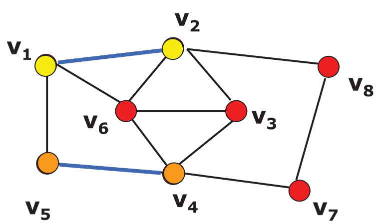
$Card(K_2)=3$

No existe recubrim. K con $Card(K)<3$

$\boxed{K_2 \text{ es mínimo}}$

¿Qué relación hay entre recubrimiento y emparejamiento?

Sea M_1 el emparejamiento de la figura



Sea K_1 un recubrimiento cualquiera

v_1 ó v_2 pertenecen a K_1

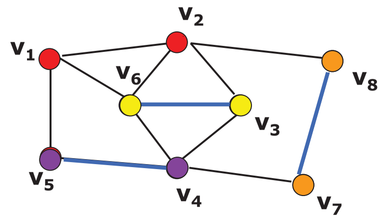
v_4 ó v_5 pertenecen a K_1

Luego K_1 tiene al menos 2 vértices, es decir,

$$\boxed{Card(M_1) \leq Card(K_1)}$$

Otro ejemplo

Sea M_2 el emparejamiento de la figura



Sea K_2 un recubrimiento cualquiera

v_3 ó v_6 pertenecen a K_2

v_4 ó v_5 pertenecen a K_2

v_7 ó v_8 pertenecen a K_2

Luego K_2 tiene al menos 3 vértices, es decir,

$$\boxed{Card(M_2) \leq Card(K_2)}$$

Algunos teoremas

Dado G=(V,E) grafo no dirigido,
M emparejamiento en G, K recubrimiento de G

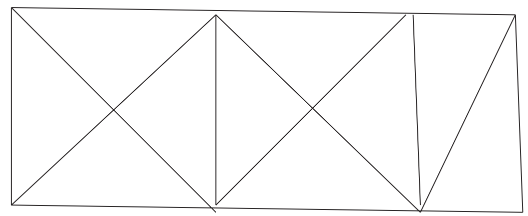
- **Teorema**
  - card(M) $\leq$ card(K)
  - card(M) = card(K) entonces M es máximo y K es mínimo

- **Teorema de Köning**

Si G=((X,Y)) es grafo bipartido,
M es máximo y K es mínimo entonces card(M) = card(K)

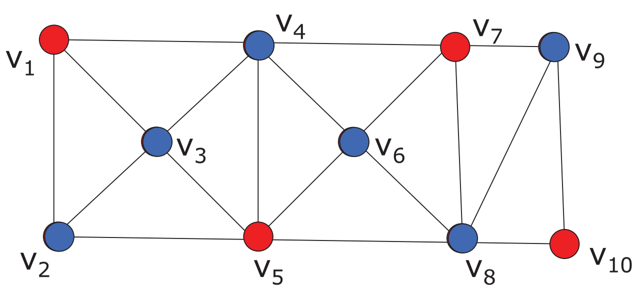
Aplicación

En la Feria de Muestras, cuyo plano se reproduce abajo, se van a instalar cámaras de vigilancia en los cruces de los pasillos. Cada cámara cubrirá todos los pasillos que concurren en el cruce donde se sitúe. ¿Cuántas cámaras colocarías, y en dónde, de manera que se minimicen los costes de instalación y todo el recinto quede vigilado?



Solución

Modelizamos la situación mediante el siguiente grafo



La solución al problema consiste en encontrar un recubrimiento mínimo

$K=\{v_2,v_3,v_4,v_6,v_8,v_9\}$

En resumen

- El concepto de recubrimiento está relacionado teóricamente con el de emparejamiento
- Hemos visto una aplicación práctica del concepto de recubrimiento