Algorithms for Problem Solving – 11650

Grids

Jon Ander Gómez Adrián
jon@dsic.upv.es

Departament de Sistemes Informàtics i Computació
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Informàtica
Universitat Politècnica de València

1 de abril de 2014

Grids I

- Los Grids (o mallados) son el soporte de muchas estructuras que aparecen en la naturaleza.
- Tablero de ajedrez, manzanas en una ciudad, ...
- Una de las medidas más utilizada en los mallados es la distancia de "Manhattan".
- Otro ejemplo es el sistema de paralelos (latitud) y meridianos (longitud) definido sobre la superficie de la Tierra.
- Los Grids aparecen en todas partes porque son la manera más cómoda y natural de seccionar un espacio en regiones fácilmente localizables.

Grids II

- Los Grids pueden utilizarse para identificar puntos o áreas, según el problema nos interesará una modalidad u otra.
- Los Grids regulares son aquellos donde todas las áreas son iguales en forma y tamaño y aparecen de manera regular.
- Los más comunes son los Grids rectangulares o rectilíneos.
- Otros que aparecen en la naturaleza bastante son los triangulares y los hexagonales. Recordemos los panales de las abejas.

Grids rectangulares I

- Son los definidos por líneas horizontales y verticales distribuidas de manera regular (equiespaciadas).
- Cuando no están equiespaciadas los denominaremos no-uniformes.
- Los tridimensionales son una extensión de añadiendo un eje en el que se distribuyen los grids planares.
- Estos tienen caras (grids planares) definidos entre cada dos caras de cubos adyacentes.
- Debemos distinguir tres componentes de los grids planares: **vértices**, **bordes (líneas)** y áreas interiores.
- Dependiendo del problema nos centraremos en los vértices (ajedrez), en las líneas (mapas de carreteras) o en las áreas interiores (problemas de geometría).

Grids rectangulares II

- Los vértices en un grid planar conectan cuatro líneas y son la esquina de cuatro celdas.
- Los vértices en grids 3D conectan seis líneas y son la esquina de ocho celdas.
- En d dimensiones conectan $2d$ líneas y son la esquina de 2^d celdas.
- Cada celda en un grid planar está en contacto con otras 8 (celdas o caras). Cuadro en diagonal más cuatro con las que comparten línea de separación.
- Cada celda en un grid 3D está en contacto con otras 26: compartiendo cara con 6, compartiendo línea con 12, y únicamente un vértice con 8.

Recorrido de grids rectangulares

- A menudo es necesario recorrer las $n \times m$ celdas de un grid planar rectangular.
- Cada recorrido puede verse como la correspondencia de cada par índices de los nm a un entero desde 1 hasta nm.
- Según la estrategia para resolver un problema nos puede interesar un tipo de recorrido. Pensemos en algunos de los problemas de DP.
- Recorridos típicos:
    - *row major*
    - *column major*
    - *snake order*
    - *diagonal order*

Grids triangulares I

- Los grids triangulares y hexagonales son de gran importancia porque muchas estructuras que encontramos en la naturaleza presentan un patrón que es ajustable mediante uno de estos tipos de grid.
- Los hexagonales pueden considerarse un caso concreto de los triangulares. Básicamente es quitar un punto de cada 2.
- Los grids triangulares tienen tres ejes, el horizontal, uno inclinado 60 grados con respecto al horizontal y otro 120 grados.
- Cada área delimitada por las líneas es un triángulo.
- Cada vértice está conectado con otros 6 mediante 6 líneas.

Grids triangulares II

- Para trabajar con grids triangulares debemos poder identificar sin ambigüedad cada vértice con cada uno de sus vecinos. Así como sus posiciones geográficas.
- Necesitamos poder convertir coordenadas geográficas a triangulares/hexagonales y viceversa.
- Aunque se tengan tres ejes, con dos es suficiente para identificar los puntos.
- Los vértices vecinos de cualquier vértice se pueden obtener sumando cualquiera de los siguientes pares: $(0,1),(1,0),(1,-1),(0,-1),(-1,0)$ y $(-1,1)$.
- La conversión a puntos geográficos es:

$$(x_g, y_g) = (d \cdot x_t \cdot \sin(60^\circ), d \cdot (y_t + (x_t \cdot \cos(60^\circ))))$$

d es la distancia de un punto a otro en el grid triangular.

Grids hexagonales I

- Las celdas son hexágonos, cada una es adyacente de otras 6.
- Los vértices tienen grado 3, es decir, conectan tres líneas y son la esquina de tres celdas.
- Estructuralmente los grids hexagonales son más rígidos que los rectangulares.
- Asumiendo que cada celda incluye un círculo, las coordenadas hexagonales de una celda se refieren al centro del círculo.
- La correspondencia de las coordenadas hexagonales con las geográficas es:

$$x_g = (2 \cdot r) \cdot x_h \cdot (\sqrt{3}/2)$$

$$y_g = (2 \cdot r) \cdot x_h \cdot (1/2) + (2 \cdot r) \cdot y_h$$

donde r es el radio del círculo inscrito dentro del hexágono.

Grids hexagonales II

- Si queremos mapear un los exágonos en posiciones de una matriz,
- si las líneas horizontales corresponden a las filas de la matriz, entonces

$$fila = x_h$$

- y como las líneas verticales corresponden a las columnas de la matriz, entonces

$$columna = y_h + x_h - ceil(x_h/2)$$

111201/10161

- Este problema es tan sencillo que no voy a comentar nada.

111202/10047

- A cada celda podemos llegar con todas las orientaciones posibles y con todos los colores posibles.
- Por cada combinación de orientación y color en cada celda deberemos mantener el mejor coste.
- Solo cuando se alcance una celda con una orientación y un color determinados, y además se mejore su coste actual para dicha combinación, entonces la volveremos considerar una hipótesis activa.
- Podemos pensar que esto es un grafo donde cada celda de una matriz representa varios nodos ($colores \times orientaciones$).

  Los arcos están implicitos en las reglas de desplazamiento.
- Por ejemplo, si estamos en $[4, 5, blanco, norte]$, sin cambiar de orientación vamos a $[3, 5, verde, norte]$. Y con dos cambios de orientación llegaríamos a $[5, 5, verde, sur]$.

111203/10159

- Lo difícil de este problema reside en establecer la relación entre una de las letras mayúsculas que representan las filas y el índice en base a dicha letra con los índices de la matriz donde realmente almacenamos los valores.
- Una vez obtenida dicha relación se rellena la "estrella" según las reglas del enunciado, después sólo queda calcular los mínimos y los máximos.
- Si al intentar rellenar no se puede completar diremos que no existe solución.
- La estrella se debe rellenar dos veces, una vez para la suma de mínimos y otra para la suma de máximos.

111203/10159

					6					
				3	2	1				
1	3	0	2	4	1	0	2	5	0	0
	7	6	1	0	1	1	6	0	0	
	4	5	0	1	8	4	0	0	5	
3	2	1	1	9	3	0	0	3	1	2
				8	0	0				
					0					

Esta otra manera de ver la estrella puede ayudar a establecer la relación entre coordenadas de las filas identificadas con las letras, y la matriz donde en realidad guardamos los números.

Fijaros que $A(0)$ es $mat[2][0]$, y que $E(11)$ es $mat[0][5]$.

111204/10182

- Este problema no es difícil. El secreto consiste en descubrir como relacionar los números de *Willy* con las coordenadas de *Maja*.
- Es decir, en como recorrer las celdas en plan serpentín.
- Si nos fijamos bien veremos que hay 6 lados (maneras de actualizar las coordenadas de *Maja*). Identificando en cual estamos, podemos ir dando pasos desde la posición $(0, 0)$ hasta la que nos pidan.
- Por eficiencia mejor preparar un array de 10001 filas por 2 columnas con las soluciones precalculadas.
- Lo rellenamos todo de golpe al inicio del programa, empezando por la posición 1 de *Willy*. Después, por cada valor de entrada mostramos la correspondiente solución.

111206/10177

- Para este problema se deben implementar seis funciones.
- $S2(n)$, $S3(n)$ y $S4(n)$ para los cuadrados (2-D), los cubos (3-D) y los hipercubos (4-D) respectivamente.
- $R2(n)$, $R3(n)$ y $R4(n)$ para los rectángulos (2-D), cajas (3-D) e hipercajas (4-D) respectivamente.
- En base a la idea de $R2(n)$ se puede obtener $R3(n)$ y después $R4(n)$.
- Por el coste del cálculo se debe precalcular en una tabla y enviar un código fuente con las soluciones preparadas.
- Utilizad directamente enteros de 64 bits.

Resumen problemas

111201/10161	"Ant on a Chessboard"
111202/10047	"The Monocycle"
111203/10159	"Star"
111204/10182	"Bee Maja"
111206/10177	"(2/3/4) Sqr/Rects/Cubes/Boxes?"