2019

MATHEMATICS

Paper-I

(Algebra and Trigonometry)

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्न के अंक समान हैं।

Note: All questions are compulsory. Solve any **two** parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I/Unit-I

1. (a) यदि $R_1 = [3 \;\; 1 \;\; -4]$ $R_2 = [2 \;\; 2 \;\; -3]$, $R_3 = [0 \;\; -4 \;\; 1]$ हो तो दर्शाइए कि :

(i) पंक्ति आव्यूह R_1 तथा R_2 रैखिकत: स्वतंत्र हैं।

(ii) पंक्ति आव्यूह R_1, R_2 एवं R_3 रैखिकत: परतंत्र हैं।

If $R_1 = [3 \;\; 1 \;\; -4]$ $R_2 = [2 \;\; 2 \;\; -3]$, $R_3 = [0 \;\; -4 \;\; 1]$, show that:

(i) The row matrices R_1 and R_2 are linearly independent.

(ii) The row matrices R_1, R_2 and R_3 are linearly dependent.

(b) k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित आव्यूह की जाति 3 हो :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Find the value of k, for which given matrix has rank 3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$$

(c) यदि λ व्युत्क्रमणीय आव्यूह A का आइगेन मान है, तब दिखाइये कि $\frac{|A|}{\lambda}$, *adj* A का आइगेन मान होगा।

If λ is an eigen-value (characteristic root) of a non-singular matrix A, then prove that $\frac{|A|}{\lambda}$ is an eigen-value of *adj* A.

इकाई–II/Unit-II

2. (a) परीक्षण कीजिए कि λ, μ के किन मानों के लिए समीकरणों :

$x + y + z = 6$

$x + 2y + 3z = 10$

$x = 2y + \lambda z = \mu$

के :

(i) कोई हल नहीं हैं।

(ii) अद्वितीय हल हैं।

(iii) अनन्त हल हैं।

Investigate for what values of λ, μ the equations :

$x + y + z = 6$

$x + 2y + 3z = 10$

$x = 2y + \lambda z = \mu$

have :

(i) no solution

(ii) a unique solution

(iii) an infinity of solutions.

(b) वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल दिये हुए समीकरण के मूल से तीन-तीन क्रम हैं :

$x^3 - 9x^2 + 28x - 27 = 0$

Find the equation whose roots are equal to the roots of $x^3 - 9x^2 + 28x - 27 = 0$ each diminished by 3.

(c) देकार्ते विधि से चतुर्थघाती समीकरण $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ को हल कीजिए।

Solve the biquadratic equation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ by Descarte's method.

इकाई-III/Unit-III

3. (a) 'प्रतिचित्रणों का संयोजन' परिभाषित कीजिए। यदि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, प्रतिचित्रण $f: R \to R, f(x) = \sin x, x \in R$ से परिभाषित है तथा $g: R \to R, g(x) = x^2, x \in R$ से परिभाषित है तब $(fog)(x)$ एवं $(gof)(x)$ का मान ज्ञात कीजिए। क्या $fog = gof$?

Define 'composition of mappings'. If R is the set of real numbers, the mapping $f: R \to R$ is defined by the relation $f(x) = \sin x, x \in R$ and the mapping $g: R \to R$ is defined by the relation $g(x) = x^2, x \in R$ then find $(fog)(x)$ and $(gof)(x)$. Is $fog = gof$?

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G में सर्वांगसमता का सम्बन्ध जो निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$a \equiv b \,(mod\, H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H,$

एक तुल्यता सम्बन्ध होता है।

Show that the relation of congruency in group G, defined by :

$a \equiv b \,(mod\, H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H,$

is an equivalence relation .

(c) कैले प्रमेय का कथन लिखिए तथा उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley's therorem.

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) समूहों की तुल्यकारिता की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि समान कोटि के दो चक्रीय समूह तुल्यकारी होते हैं।

Define isomorphism of groups, Prove that, the two cyclic groups of equal orders are isomorphic.

(b) वलय की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजए कि, समुच्चय $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (मॉड्यूलो 5) योग एवं गुणन के सापेक्ष एक वलय हैं।

Define ring. Prove that the set $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (mod 5) is a ring with respect to addition and multiplication.

(c) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए एवं एक उदाहरण दीजिए :

(i) पूर्णांकीय प्रान्त

(ii) क्षेत्र

Define the following with an example :

(i) Integral Domain

(ii) Field

इकाई-V/Unit-V

5. (a) डी-मॉयवर प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove De-Moivre's theorem.

(b) दर्शाइये कि :

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2\tan^{-1} x$$

Show that :

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2\tan^{-1} x$$

(c) निम्नलिखित श्रेणियों का योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) $c\cos\alpha - \frac{1}{2}c^2\cos 2\alpha + \frac{1}{3}c^3\cos 3\alpha - \ldots\ldots\infty$

(ii) $c\sin\alpha - \frac{1}{2}c^2\sin 2\alpha + \frac{1}{3}c^3\sin 3\alpha - \ldots\ldots\infty$

Find the sum of the following series :

(i) $c\cos\alpha - \frac{1}{2}c^2\cos 2\alpha + \frac{1}{3}c^3\cos 3\alpha - \ldots\ldots\infty$

(ii) $c\sin\alpha - \frac{1}{2}c^2\sin 2\alpha + \frac{1}{3}c^3\sin 3\alpha - \ldots\ldots\infty$

MATHEMATICS
Paper-II
(Calculus)

नोट : प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : One question is compulsory from each unit. All questions carry equal marks.

इकाई-I/Unit-I

1. (a) लैबनीज प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove that Leibnitz theorem.

अथवा/Or

यदि $y = (x^2 - 1)^m$ तब सिद्ध कीजिये कि :

$y_{2m} = (2m)!$

If $y = (x^2 - 1)^m$ then prove that :

$y^2 m = (2m)!$

इकाई-II/Unit-II

2\. वक्र $y^2(x^2+y^2) + a^2(x^2-y^2) = 0$ को ट्रेस कीजिये।

Trace the curve :

$y^2(x^2+y^2) + a^2(x^2-y^2) = 0$

अथवा/Or

वक्र $x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 - xy + 2 = 0$ की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिये।

Find the asymptotes of the following curve

$x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 - xy + 2 = 0$

इकाई-III/Unit-III

3\. (a) मान ज्ञात कीजिये:

$$\int \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^2}\,dx$$

Evaluate : $\int \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^2}\,dx$

अथवा/Or

सिद्ध कीजिये :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e$$

Prove that :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e$$

इकाई-IV/Unit-IV

4\. हल कीजिये कि :

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$$

Solve :

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$$

अथवा/Or

हल कीजिये कि :

$(1 + 4xy + 2y^2)\,dx + (1 + 4xy + 2x^2)\,dy = 0$

Solve :

$(1 + 4xy + 2y^2)\,dx + (1 + 4xy + 2x^2)\,dy = 0$

इकाई-V/Unit-V

5\. हल कीजिये :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2x-1)\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$$

Solve :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2x-1)\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$$

अथवा/Or

हल कीजिये :

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

Solve :

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

MATHEMATICS

Paper-III

(Vector Analysis and Geometry)

नोट : सभी **पाँच** प्रश्न हल कीजिये। प्रत्येक इकाई से **दो** भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer all **five** question. Solution of 'two' parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I/Unit-I

1\. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}][\bar{a'}\ \bar{b'}\ \bar{c'}] = 1$$

Prove that :

$\left[\bar{a} \;\; \bar{b} \;\; \bar{c}\right]\left[\bar{a'} \;\; \bar{b'} \;\; \bar{c'}\right] = 1$

(b) यदि $\bar{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + at\tan t\,\hat{k}$ तब $\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ तथा

$\left[\frac{d\bar{r}}{dt}\;\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\;\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\bar{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + at\tan t\,\hat{k}$ then find the value of

$\left|\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ and $\left[\frac{d\bar{r}}{dt}\;\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\;\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]$

(c) सिद्ध कीजिए कि :

div grad $r^m = m(m+1)\,r^{m-2}$

Prove that :

div grad $r^m = m(m+1)\,r^{m-2}$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) दिया है कि $\bar{r}(t) = \begin{cases} 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} & \text{जब } t = 2 \\ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} & \text{जब } t = 3 \end{cases}$

सिद्ध कीजिएं कि :

$$\int_2^3 \left(\bar{r}.\frac{d\bar{r}}{dt}\right) dt = 10$$

Given that $\bar{r}(t) = \begin{cases} 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} & \text{when } t = 2 \\ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} & \text{when } t = 3 \end{cases}$

prove that :

$$\int_2^3 \left(\bar{r}.\frac{d\bar{r}}{dt}\right) dt = 10$$

(b) $\int_S \left(y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + x^2y^2\hat{k}\right).\,\hat{n}ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S, xy-तल क ऊपर तथा इसी से घिरा हुआ गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का एक भाग है।

Find the value of $\int_S \left(y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + x^2y^2\hat{k}\right).\,\hat{n}ds$ where S is a part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the plane-xy and bounded by it.

(c) स्टॉक प्रमेय को सत्यापित कीजिए जब $\bar{F} = y\hat{i} + 3\hat{j} + x\hat{k}$ तथा सतह S, गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का xy-समतल के ऊपर का हिस्सा है।

Verify Stoke's theorem when uniform $\bar{F} = y\hat{i} + 3\hat{j} + x\hat{k}$ and surface S is the part of the $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the xy-plane.

इकाई-III/Unit-III

3. (a) शांकव $3(3x - 2y + 4)^2 + 2(2x + 3y - 5)^2 = 39$ का अनुरेखण कीजिये।

Trace the conic .

$3(3x - 2y + 4)^2 + 2(2x + 3y - 5)^2 = 39$

(b) एक वृत्त, एक आयताकार अतिपरवलय $xy = 1$ को (x_r, y_r); $r = 1, 2, 3, 4$ पर काटता है तो सिद्ध कीजिए कि :

$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$

A circle cuts the rectangular hyperbola $xy = 1$ at (x_r, y_r); $r = 1, 2, 3, 4$ then prove that

$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$

(c) यदि PSP′ और QSQ′ एक शांकव की दो परस्पर लम्बवत् नाभिगत जीवायें हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'} = \text{अचर राशि।}$$

If PSP and QSQ' are two nutually perpendicular focal chords of a conic then prove that :

$$\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'} = \text{constant}$$

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) सरल रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ और समतल $x - y + z = 5$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से बिन्दु $(-1, -5, -10)$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the distance of the point $(-1, -5, -10)$ from the point of intersection of the line $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ and the plane $x - y + z = 5$.

(b) शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) और निर्देशांक वक्र परवलय $y^2 = 4ax, z = 0$ है।

Fine the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and guiding curve is the parabola $y^2 = 4ax, z = 0$.

(c) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक सरल रेखा $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा जिसका निर्देशक वक्र दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$ है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to straight line $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and guiding curve is the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 3$.

इकाई–V/Unit-V

5. (a) समतल $lx + my + nz = p$ के शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ will touch the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

(b) बिन्दु $(-1, 0, 3)$ से होकर जाने वाली, अति परवलयज $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ की जनक रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the generating lines of the hyperboloid $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ which pass through the point $(-1, 0, 3)$.

$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z = 3$ को असामान्य रूप में समानीत कीजिए।

Reduce the equation
$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z = 3$ to the normal form.

2018

MATHEMATICS
Paper-I
(Algebra & Trigonometry)

नोटः सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt all **five** questions. **One** question from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I/Unit-I

1. (a) निम्न आव्यूह को प्रसामान्य रूप में बदलिए तथा इसकी जाति ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix in the normal form and find its rank, where :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी हर्मिटियन आव्यूह के अभिलाक्षणिक मान वास्तविक होते हैं।

Prove that the eigen values of a Hermitian matrix are real .

(c) दर्शाइए कि आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

कैले-हेमिल्टन प्रमेय को सन्तुष्ट करता है। और A^{-1} ज्ञात कीजिए।

Show that the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

satisfies Cayley-Hamilton theorem. Hence find A^{-1}.

इकाई-II/Unit-II

2. (a) दर्शाइए कि λ का एकमात्र मान जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण अशून्य हल रखते हैं, 6 है :

$$x + 2y + 3z = \lambda x$$
$$3x + y + 2z = \lambda y$$
$$2x + 3y + z = \lambda z$$

Show that the only, real values of λ for which the equations :

$$x + 2y + 3z = \lambda x$$
$$3x + y + 2z = \lambda y$$
$$2x + 3y + z = \lambda z$$

have non-zero solution is 6.

(b) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$ को हल कीजिए जबकि इसके दो मूलों का गुणनफल 12 है।

Solve : $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$ when the product its two roots is 12.

(c) निम्न समीकरण को कार्डन-विधि से हल कीजिए :

$$x^3 - 21x - 344 = 0$$

Solve the following equation by Cardon method :

$$x^3 - 21x - 344 = 0$$

इकाई-III/Unit-III

3. (a) यदि Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है तथा $f : Q \to Q$ जो $f(x) = 2x + 3$, $x \in Q$ से परिभाषित है। f^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

If Q is the set of rational numbers and $f : Q \to Q$ is defined by $f(x) = 2x + 3$, $x \in Q$ then prove that f is one-one and onto. Find also f^{-1}.

(b) सिद्ध कीजिए कि परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि का भाजक होता है।

Prove that the order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.

(c) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that the intersection of any two normal subroups of a group is a normal subgroup.

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) सिद्ध कीजिए कि समूह G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब G को किसी विभाग समूह के तुल्याकारी होता है।

Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

(b) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ उपवलय होता है।

Prove that the intersection of two subrings is also a subring.

(c) सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त नहीं है।

Prove that the set of complex numbers is not an ordered integral domain.

इकाई-V/Unit-V

5. (a) यदि α, β समीकरण $x^2 - 2x + 4 = 0$ के मूल हों, तो सिद्ध कीजिए कि:

$$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$$

If α and β are the roots of the equation $x^2 - 2x + 4 = 0$, then prove that :

$$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$$

(b) यदि $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, तब ज्ञात कीजिए कि :

$$x \cot 2\alpha + y \coth 2\beta = 1$$

If $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, then prove that :

$$x \cot 2\alpha + y \coth 2\beta = 1$$

(c) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty$$

Find the sum of the following series :

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$$

MATHEMATICS
Paper-II
(Calculus)

नोट : प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : *Two* parts from each Unit is compulsory. All questions carry equal mar

इकाई-I/Unit-I

1. (a) मान लो $f(x) = x\,\dfrac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$ जब $x \neq 0$ तथा $f(0) = 0$ तो दर्शाइये फलन f, $x = 0$ पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

Let $f(x) = x\,\dfrac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$ for $x \neq 0$, $f(0) = 0$ show that f is continuo but not differentiable at $x = 0$

(b) यदि $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि:
$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$
If $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ then prove that :
$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$

(c) टेलर प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि :

$$\log(x+h) = \log h + \frac{x}{h} - \frac{x^2}{2h^2} + \frac{x^3}{3h^3} + \ldots\ldots$$

By Taylor's theorem, prove that :

$$\log(x+h) = \log h + \frac{x}{h} - \frac{x^2}{2h^2} + \frac{x^3}{3h^3} + \ldots\ldots$$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।
Find the asymptotes of the curve
$x^3 + y^3 = 3axy$

(b) सिद्ध कीजिए कि चक्रज $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ के कि बिन्दु θ पर वक्रता त्रिज्या $\oint 4a\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ है।

Prove that the radius of curvature at any point θ of the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ is $\oint 4a\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

(c) वक्र $y^2(a - x) = x^2(a + x)$ का अनुरेखण कीजिए।
Trace the curve :
$y^2(a - x) = x^2(a + x)$

इकाई-III/Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2a} x^3\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{7\pi a^5}{8}$$

Prove that :

$$\int_0^{2a} x^3\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{7\pi a^5}{8}$$

(b) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{8}\log 2$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{8}\log 2$$

(c) हृदयाभ $r = a(1 + \cos\theta)$ की परिमाप ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइये कि चाप का ऊपरी अर्द्धभाग $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ पर समद्विभाजित होता है।

Find the entire length of the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$. Also show that the arc of the upper half is bisected by $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) हल कीजिए :

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2\log x$$

Solve :

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\log x$$

(b) हल कीजिए :

$$(1+xy)y\,dx+(1-xy)x\,dy=0$$

Solve :

$$(1+xy)y\,dx+(1-xy)x\,dy=0$$

(c) हल कीजिए :

$$(D^2-3D+2)\,y=6e^{2x}+\sin 2x$$

Solve :

$$(D^2-3D+2)\,y=6e^{2x}+\sin 2x$$

इकाई-V/Unit-V

5. (a) हल कीजिए :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-(2x-1)\frac{dy}{dx}+(x-1)y=0$$

Solve :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-(2x-1)\frac{dy}{dx}+(x-1)y=0$$

(b) प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=4\tan 2x$$

Solve by method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=4\tan 2x$$

(c) हल कीजिए :

$$\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(x-y)}=\frac{dz}{x^2+y^2}$$

Solve :

$$\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(x-y)}=\frac{dz}{x^2+y^2}$$

MATHEMATICS

Paper-III

(Vector Analysis & Geometry)

ट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

ote : Attempt all five questions. two parts from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I/Unit-I

(a) सिद्ध कीजिए कि $\vec{a'}\times\vec{b'}+\vec{b'}\times\vec{c'}+\vec{c'}\times\vec{a'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]}$ जहाँ $\vec{a'}, \vec{b'}, \vec{c'}$ क्रमश: सदिशों a, b, c के व्युत्क्रम सदिश हैं तथा $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ असमतलीय हैं।

If $\vec{a'}, \vec{b'}, \vec{c'}$ are reciprocal of $\vec{a'}, \vec{b'}, \vec{c'}$ respectively then prove that $\vec{a'}\times\vec{b'}+\vec{b'}\times\vec{c'}+\vec{c'}\times\vec{a'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]}$ where $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are noncoplanar.

(b) $\phi=x^2-2y^2+4z^2$ का दिक् अवकलज P (1, 1, –1) पर $2\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$ की दिशा में ज्ञात कीजिए साथ ही P पर दिक्अवकल का महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of $\phi=x^2-2y^2+4z^2$ at P (1, 1, –1) in direction of $2\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$. Also find the maximum value of directional derivation at P (1, 1, –1).

(c) सिद्ध करो :

$$\text{curl}\,(\text{curl}\,\vec{F})=\text{grad}\,(\text{div}\,\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$$

Prove that :

$$\text{curl}\,(\text{curl}\,\vec{F})=\text{grad}\,(\text{div}\,\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) गॉउस के डाइवर्जेंस प्रमेय से सिद्ध कीजिए :

$$\iint_s (x^2 - yz)\hat{i} - 2x^2 y\hat{j} + 2\hat{k}).\vec{n}\, ds = \frac{a^5}{3}$$

जहाँ S समतल $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$ के द्वारा घि

पृष्ठ को दर्शाता है।

Prove that by use of Gause divergence theorem :

$$\iint_s (x^2 - yz)\hat{i} - 2x^2 y\hat{j} + 2\hat{k}).\vec{n}\, ds = \frac{a^5}{3}$$

Where S is plane bounded by $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0,$

(b) दिया गया है :

$\hat{r}(t) = 2\hat{j} - \hat{j} + 2\hat{k}$ जब $t = 2$

$= 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ जब $t = 3$

दर्शाइए $\int_2^3 \vec{r}.\frac{\vec{dr}}{dt} dt = 10$

Given :

$\hat{r}(t) = 2\hat{j} - \hat{j} + 2\hat{k}$ when $t = 2$

$= 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ when $t = 3$

then show that $\int_2^3 \vec{r}.\frac{\vec{dr}}{dt} dt = 10$.

(c) दर्शाइए कि $\iint_s (ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}).\vec{n}\, dS = \frac{4}{3}\pi\,(a+b+c)$ जहाँ

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का संपूर्ण पृष्ठ है।

Show that

$\iint_s (ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}).\vec{n}\, dS = \frac{4}{3}\pi\,(a+b+c)$ where S is the su

of $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

इकाई-III/Unit-III

3. (a) निम्नलिखित शांकव के अनुरेखण कीजिए तथा नाभियों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$

Trace the conic & find the coordinates of focus :

$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$

(b) शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ के बिन्दु α पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करो।

Find the equation of normal to $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ at point α.

(c) किसी शांकव में सिद्ध कीजिए कि लम्बरूप नाभिगत जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग अचर होता है।

Prove that the sum of reciprocal of focal chord of a conic is constant.

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) रेखाओं $3x + 2y + z = 0 = x + y - 2z, 2x - y - z = 0 = 7x + 10y - 8z$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between the straight lines.

$3x + 2y + z = 0 = x + y - 2z, 2x - y - z = 0 = 7x + 10y - 8z$

(b) एक समतल अचर बिन्दु (a, b, c) से गुजरता है तथा अक्षों को A, B, C पर काटता है, सिद्ध कीजिए कि गोले के केन्द्र का बिन्दु पथ $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = 2$ है।

A plane is passing through constant point (a, b, c) and cut the coordinate axes at A, B, C. Prove that the locus of centre of sphere is

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = 2$$

(c) $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ शंकु $5yz - 8zx - 3xy = 0$ के तीन परस्पर लम्ब रूप जनकों में एक है, तो अन्य दो के समीकरण ज्ञात कीजिए।

If $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ is one of the generator in three mutually perpendicular generators of $5yz - 8zx - 3xy = 0$, then find other two generators.

इकाई-V/Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (α, β, γ) से शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ पर खींचे गए सभी छः अभिलम्ब का एक द्विघातीय शंकु पर है।

Prove that all six normals drawn on $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ at point (α, β, γ) lie on a cone of second degree.

(b) प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जबकि समतल $lx + my + nz = p$ परवलयज $ax^2 + by^2 = 2cz$ को स्पर्श करता है।

Find the condition of tangency of $lx + my + nz = p$ on paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$.

(c) अति परवलयज $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ के लिए $(-1, 0, 3)$ से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generators of hyperboloid $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ passing through $(-1, 0, 3)$.

2017

MATHEMATICS

Paper : First

(Algebra and Trigonometry)

नोट : सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से **दो** भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt all the **five** questions. Two parts from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I/Unit-I

1. (a) प्रारम्भिक रूपान्तरण की सहायता से आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए जहाँ–

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

With the help of elementary transformation find the inverse of A Where :

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) निम्नलिखित आव्यूह का हर्मिटीय आव्यूह ज्ञात कीजिए–

$$\begin{bmatrix} 2 & 2-3i & 3+5i \\ 2+3i & 5 & i \\ 3+5i & i & 7 \end{bmatrix}$$

Find Hemition matrix of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2-3i & 3+5i \\ 2+3i & 5 & i \\ 3+5i & i & 7 \end{bmatrix}$$

(c) आव्यूह A के आइगेन मानों को ज्ञात कीजिए तथा संगत आइगेन सदिशों का निर्धारण भी कीजिए।

जहाँ–

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine the eigen values and the corresponding eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) आव्यूह विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए–

$$x+y+z=6$$
$$x-y+z=2$$
$$2x+y-z=1$$

Solve the following equations by using matix methed :

$$x+y+z=6$$
$$x-y+z=2$$
$$2x+y-z=1$$

(b) समीकरण $x^2-5x^2-16x+80=0$ को हल कीजिए जब इसके दो मूलों का योग शून्य है।

Solve the equation $x^2-5x^2-16x+80=0$ when the sum of its two roots is zero.

(c) कार्डन विधि से हल कीजिए–

$$x^3-16x-13=0$$

Solve by Cardan's method :

$$x^3-16x-13=0$$

इकाई-III/Unit-III

3. (a) सिद्ध करो कि समूह G का केन्द्र Z,G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that centre Z of group G should be normal subgroup of G.

(b) चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय होता है।

Each subgroup of cyclic group should be cyclic.

(c) यदि R तथा S समुच्चय X में तुल्यता सम्बन्ध हो, तो सिद्ध कीजिए कि $R \cap S$ भी X में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

If R and S be equivalance relation in the set X, then prove that $R \cap S$ is an equivalance relation in X.

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove the fundamental theorem of homomorphism.

(b) यदि R एक वलय इस प्रकार है कि

$$a^2 = a, \forall a \in R$$

तो सिद्ध कीजिए–

(i) $a + a = 0 \; \forall \; a \in R$

(i) $a + b = 0 \Rightarrow a = b,\; b \in R$

If R a ring is such that

$$a^2 = a, \forall a \in R$$

(i) $a \cdot a = 0 \; \forall \; a \in R$

(i) $a + b = 0 \Rightarrow a = b,\; b \in R$

(c) क्षेत्र व उपक्षेत्र की उदाहरण सहित परिभाषा दीजिए।

Define field and subfield with examples.

इकाई-V/Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5} = \sin 9\theta - i\cos 9\theta$$

Prove that :

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5} = \sin 9\theta - i\cos 9\theta$$

(b) यदि

$\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$

तो सिद्ध कीजिए–

$$\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ और } \phi = \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

If

$\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$

then prove that :

$$\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ and } \phi = \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

(c) सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1^2}{3} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2^3} + \frac{1}{7^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{7^5}\right) - \ldots\ldots$$

Prove that :

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1^2}{3} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2^3} + \frac{1}{7^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{7^5}\right) - \ldots\ldots$$

MATHEMATICS

Paper : Second

(Calculus)

नोट : प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Two parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I/Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है परन्तु विलोम सत्य नहीं है।

Prove that every differentiable function is continuous but converse is not true.

(b) लैबनीज प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Leibnitz theorem.

(c) टेलर प्रमेय से $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ का $(x - 2)$ की घातों में प्रसार कीजिए।

Expand $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ in powers of $(x - 2)$ by Taylor's theorem.

इकाई-II/Unit-II

2. (a) वक्र $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - 3x - y - 1 = 0$ की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Find the asymptotes of curve

$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - 3x - y - 1 = 0$

(b) सिद्ध कीजिए कि हृदयाभ $r = a(1 - \cos\theta)$ के किसी बिन्दु (r, θ) पर वक्रता त्रिज्या $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$ है।

Prove that the radius of curvature at any point (r, θ) of the cardioid $r = a(1 - \cos\theta)$ is $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$.

(c) वक्र $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve :
$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

इकाई-III/Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए कि–

$$\int_0^{2a} x^{9/2}(2a - x)^{-1/2}\,dx = \frac{63\pi a^3}{8}$$

Prove that :

$$\int_0^{2a} x^{9/2}(2a - x)^{-1/2}\,dx = \frac{63\pi a^3}{8}$$

(b) यदि $\phi(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$, तब दर्शाइये कि $\phi(n) + \phi(n-2) = \frac{1}{n-1}$ अतः $\phi(5)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\phi(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$, then prove that $\phi(n) + \phi(n-2) = \frac{1}{n-1}$.

Hence find the value of $\phi(5)$.

(c) वक्र $a^2x^2 = y^3(2a - y)$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the curve $a^2x^2 = y^3(2a - y)$.

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) हल कीजिए–

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}\left(e^x - e^y\right)$$

Solve :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}\left(e^x - e^y\right)$$

(b) हल कीजिए–

$(x^2y - 2xy^2)\,dx - (x^3 - 3x^2y)\,dy = 0$

Solve :

$(x^2y - 2xy^2)\,dx - (x^3 - 3x^2y)\,dy = 0$

(c) हल कीजिए–

$(D^2 - 3D + 2)\,y = 6e^{2x} + \sin^2 x$

Solve :

$(D^2 - 3D + 2)\,y = 6e^{2x} + \sin^2 x$

इकाई-V/Unit-V

5. (a) हल कीजिए–

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2x - 1)\frac{dy}{dx} + (x - 1)y = 0$$

Solve :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2x - 1)\frac{dy}{dx} + (x - 1)y = 0$$

(b) प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए–

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$$

Solve by method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$$

(c) हल कीजिए–

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

Solve :

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

MATHEMATICS

Paper : Third

(Vector Analysis & Geometry)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : *Attempt all the five questions. Two parts from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.*

इकाई-I/Unit-I

1. (a) मान ज्ञात कीजिए—

(i) div $\vec{r}$ (ii) Curl $\vec{r}$

Find the value :

(i) div $\vec{r}$ (ii) Curl $\vec{r}$

(b) व्युत्क्रम सदिश की परिभाषा लिखिए एवं $\vec{a}.\vec{a}' + \vec{b}.\vec{b}' + \vec{c}.\vec{c}'$ का मान निकालिए :

Define reciprocal vector and evaluate : $\vec{a}.\vec{a}' + \vec{b}.\vec{b}' + \vec{c}.\vec{c}'$

(c) हल कीजिए—

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$$

Solve :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) यदि $\vec{r}\times d\vec{r} = \vec{0}$ तब दर्शाइए $\hat{r}$ = अचर

If $\vec{r}\times d\vec{r} = \vec{0}$, then show that $\hat{r}$ = const

(b) $\vec{a} = 2ti - 3j + 2tk, \vec{b} = i - 2j + 3k, \vec{c} = 3i + tj + k$ तब $\int_0^2 \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\,dt$ निकालिए।

If $\vec{a} = 2ti - 3j + 2tk, \vec{b} = i - 2j + 3k, \vec{c} = 3i + tj + k$ then find $\int_0^2 \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\,dt$.

(c) ग्रीन प्रमेय का कथन लिखिए।

Write statement of Green's theoem.

इकाई-III/Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए शांकव परिच्छेद के लिए :

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$$

Prove that for conic section $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(b) शांकव $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the conic $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(c) $ax^2 + by^2 + 2hxy = 1$ के लिए विभिन्न शांकव परिच्छेदों की व्याख्या कीजिए।

Explain different conic sections for $ax^2 + by^2 + 2hxy = 1$

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) बिन्दु (α, β, γ) से जाने वाली $ax + by + cz = d, a'x + b'y + c'z = d'$ के समान्तर रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of line which is paraliel to $ax + by + cz = d, a'x + b'y + c'z = d'$ and passes through $(\alpha.\beta.\gamma)$.

(b) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के बिन्दु (α, β) पर स्पर्श रेखा का समीकरण निकालिए।

Find the equation of tangent line at (α, β) for the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

(c) बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखा $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ के समान्तर है तथा आधार वक्र $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$

Find the equation of a cylinder whose generator is parallel to $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ and base cuve is $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$.

इकाई-V/Unit-V

5. (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बिन्दु (α, β, γ) से जाने वाली जनकों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the generators of $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ passes through (α, β, γ).

(b) अतिपरवलयज के किसी बिन्दु पर स्पर्श समतल के समीकरण निकालिए।

Find the equation of tangent plane for paraboloid at any point.

(c) कनफोकल कोनिक्वाइड को समझाइए।

Explain cconfocal conicoid.

2016

MATHEMATICS

Paper : First

(Algebra and Trigonometry)

नोट : सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt all **five** questions. Two parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई–I/Unit-I

1. (a) प्रारम्भिक रूपान्तरण की सहायता से आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए जहाँ–

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

With the help of elementary transformation find the inverse of A. Where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) निम्नलिखित आव्यूह को प्रसामान्य रूप में बदलिए और उनकी जाति तथा शून्यता ज्ञात कीजिए–

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix to their normal forms and find their rank and nullity :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) आव्यूह A के आइगेन मानों को ज्ञात कीजिए तथा संगत आइगेन सदिशों का निर्धारण भी कीजिए।

जहाँ–

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine the eigen values and the corresponding eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) आव्यूह विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए–

$x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6$

$3x_1 + x_2 + x_3 = -18$

Solve the following equations by using matrix method :

$x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6$

$3x_1 + x_2 + x_3 = -18$

(b) कार्डन विधि से हल कीजिए–

$x^3 - 18x - 35 = 0$

Solve by Cardan's method :

$x^3 - 18x - 35 = 0$

(c) यदि समीकरण

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$

के दो मूलों का योग तीसरे मूल के बराबर हो तो सिद्ध कीजिए–

$p^3 - 4pq + 8r = 0.$

If the sum of two roots is equal to third root of the equation

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$

then prove that $p^3 - 4pq + 8r = 0.$

इकाई-III/Unit-III

3. (a) यदि समुच्चय A में R एक तुल्यता सम्बन्ध है तो सिद्ध कीजिए कि R^{-1} समुच्चय A में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

If R is an equivalence relation in the Set A, then prove that R^{-1} is an equivalence relation in the Set A.

(b) सिद्ध कीजिए कि सभी धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय संक्रिया " * " के सापेक्ष एक आबेली समूह बनाता है, जबकि संक्रिया " * " निम्न प्रकार से परिभाषित है–

$a * \dot{o} = ab/2$

Show that the set of all positive rational numbers forms and abelian group under composition " * " when composition " * " defined as follows :

$a * b = ab/2$

(c) गुणात्मक $G = \{1, w, w^2\}$ समूह से तुल्यांकारी नियमित क्रमचय समूह को ज्ञात कीजिए।

Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $G = \{1, w, w^2\}$

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिंब किसी विभाग समूह G से तुल्याकारी होता है।

Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G

(b) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।

Prove that the intersection of two subring is a subring.

(c) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रांत एक क्षेत्र होता है।

Prove that every finite integral domain is a field.

इकाई-V/Unit-V

5. (a) यदि $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ तो सिद्ध कीजिए कि—

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta.$$

If $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, then prove that :

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta.$$

(b) यदि

$\tan(x+iy)=\cos\alpha+i\sin\alpha$

तो सिद्ध कीजिए कि—

$$y=\frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

If $\tan(x+iy)=\cos\alpha+i\sin\alpha$

then prove that :

$$y=\frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

(c) श्रेणी का योग कीजिए—

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2^2}\sin 3\alpha+\ldots\ldots\infty$$

Sum of the series :

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2^2}\sin 3\alpha+\ldots\ldots\infty.$$

MATHEMATICS

Paper : Second

(Calculus)

नोट : प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Two parts from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I/Unit-I

1. (a) यदि

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{जब } x\neq 0\\ 0 & \text{जब } x=0\end{cases}$$

तो सिद्ध कीजिए कि $x=0$ पर फलन $f(x)$ संतत होगा किन्तु अवकलनीय नहीं।

If

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{when } x\neq 0\\ 0 & \text{when } x=0\end{cases}$$

then show that $f(x)$ is continuous but not differentiable at $x=0$.

(b) यदि $y=\sin(a\sin^{-1}x)$ तब $(y_n)_0$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $y=\sin(a\sin^{-1}x)$, then find $(y_n)_0$.

(c) टेलर प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि—

$$\tan^{-1}(x+h)=\tan^{-1}x+h\sin z.\frac{\sin z}{1}-(h\sin z)^2\frac{\sin 2z}{2}$$

$$+(h\sin z)^3\frac{\sin 3z}{3}-\ldots\ldots(-1)^{n-1}(h\sin z)^n\frac{\sin hz}{n}+\ldots\ldots$$

जब कि $z=\cot^{-1}x$

Use Taylor's theorem to prove that

$$\tan^{-1}(x+h)=\tan^{-1}x+h\sin z.\frac{\sin z}{1}-(h\sin z)^2\frac{\sin 2z}{2}$$

$$+(h\sin z)^3\frac{\sin 3z}{3}-\ldots\ldots(-1)^{n-1}(h\sin z)^n\frac{\sin hz}{n}+\ldots\ldots$$

where $z=\cot^{-1}x$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के लिए वक्रता त्रिज्या

$$p=\frac{a^2b^2}{p^3}$$ है। जहाँ p केन्द्र $(0, 0)$ से बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्ब

Prove that for the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, the radius of carvature, ρ = $\frac{a^2b^2}{p^3}$ when p is the length of the perpendicular from the centre (0, 0) upon the tangent at the point (x, y).

(b) निम्नलिखित वक्र के बहुल बिन्दु ज्ञात कीजिए तथा उनकी प्रकृति भी बताइये–

$y^3+3ax^2+x^3=0$

Find the multiple points of the following curve and determine its nature :

$y^3+3ax^2+x^3=0$

(c) वक्र $ay^2=x^2(a-x)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve :

$ay^2=x^2(a-x)$

इकाई–III/Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए कि–

$$\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{3/2}\,dx=\frac{3\pi}{128}$$

Prove that :

$$\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{3/2}\,dx=\frac{3\pi}{128}$$

(b) वक्र $r^2=a^2\cos 2\theta$ के एक लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of one loop of the curve $r^2=a^2\cos 2\theta$.

(c) एस्ट्रौइड (Astroid) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (या $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$) को x-अक्ष के परितः घुमाने से प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of the solid generated by revolving the Astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (or $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$) about the x-*axis*.

इकाई–IV/Unit-IV

4. (a) हल कीजिए–

$$\frac{x\,dy}{dx}+y=y^2\log x$$

Solve :

$$\frac{x\,dy}{dx}+y=y^2\log x$$

(b) हल कीजिए–

$$(1+e^{x/y})\,dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

Solve :

$$(1+e^{x/y})\,dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

(c) हल कीजिए–

$$\frac{d^3y}{dx^3}+y=\cos 2x$$

Solve :

$$\frac{d^3y}{dx^3}+y=\cos 2x$$

इकाई–V/Unit-V

5. (a) हल कीजिए–

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+(4x^2-3)y=e^{x^2}$$

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+(4x^2-3)y=e^{x^2}$$

(b) प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए–

$(D^2-2D)y=e^x\sin x$

Solve by method of valiation of parameters :

$(D^2-2D)y=e^x\sin x$

(c) हल कीजिए–

$$\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t$$

$$\frac{dy}{dt}-x+3y=e^{2t}$$

Solve :

$$\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t$$

$$\frac{dy}{dt}-x+3y=e^{2t}$$

MATHEMATICS

Paper : Third

(Vector Analysis & Geometry)

नोट : सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : *Attempt all **five** questions. **One** question from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.*

इकाई-I/Unit-I

1. (a) यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हों तो सिद्ध कीजिए—

$$\left[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]^2$$

If $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ be three non-coplanar vector, then prove that :

$$\left[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]^2$$

(b) यदि $\vec{r}$ किसी बिंदु की स्थिति सदिश है तथा r उसका मापांक है तो दर्शाइए कि—

(i) $\text{div}\left(r^n\vec{r}\right)=(n+3)r^n$.

(ii) $\text{curl}\left(r^n\vec{r}\right)=0$

If $\vec{r}$ is position vector on any point and r is its magnitude, then prove that :

(i) $\text{div}\left(r^n\vec{r}\right)=(n+3)r^n$.

(ii) $\text{curl}\left(r^n\vec{r}\right)=0$

अथवा/Or

(a) $\phi=x^2-2y^2+4z^2$ का दिक् अवकलज बिंदु $P(1,1,-1)$ पर $2\,i+j-k$ की दिशा में ज्ञात कीजिए। साथ ही P पर दिक् अवकलज का महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of $\phi=x^2-2y^2+4z^2$, in the direction of $2i+j-k$ at a point $P(1,1,-1)$. Find the maximums magnitude of directional derivative at P.

(b) एक कण वक्र $x=t^3+1, y=t^2, z=2t+5$ पर चल रहा है जहाँ t समय है। $t=1$ पर सदिश $\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ की दिशा में वेग त्वरण के घटक ज्ञात कीजिए।

A particle moves on a curve $x=t^3+1, y=t^2, z=2t+5$ where t is time. Find the component of velocity and acceleration in the direction of $\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$.

इकाई-II/Unit-II

(a) $\int_c \vec{F}\cdot d\hat{r}$ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ

$$\vec{F}=x^2y^2\hat{i}+y\hat{j}$$

और C, $y^2=4x$ xy-समतल (0, 0) से (4, 4) तक है।

Evaluate

$$\int_c \vec{F}\cdot d\hat{r}$$

where $\vec{F}=x^2y^2\hat{i}+y\hat{j}$ and C, is the part of a curve $y^2=4x$ in xy-plane from (0, 0) to (4, 4).

(b) $\iint_s \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ

$\vec{F}=4x\hat{i}-2y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$ व S,

$x^2+y^2=4, z=0$ और $z=3$ से परिबद्ध प्रदेश है।

Evaluate

$$\iint_s \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$$

where $\vec{F}=4x\hat{i}-2y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$, S is the region bounded by $x^2+y^2=4$, $z=0$ and $z=3$.

अथवा/Or

(a) ग्रीन प्रमेय से निम्नलिखित समाकल

$$\int_C[(y-\sin x)\,dx+\cos x\,dy]$$

का मान ज्ञात कीजिए जहाँ C, रेखाओं $y=0, x=\frac{\pi}{2}, \pi y = 2x$ से बना त्रिभुज है।

Find the value of following integral

$$\int_C [(y-\sin x)\, dx + \cos x\, dy]$$

by Green's theorem where C is the triangle formed by the lines $y = 0, x = \frac{\pi}{2}, \pi y = 2x$.

(b) स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जब

$$F = (2x-y)\, i - yz^2 \hat{j} - y^2 z\hat{k}$$

जहाँ S, गोले $x^2+y^2+z^2=1$ का ऊपरी अर्द्धपृष्ठ है तथा C उसकी परिसीमा है।

Verify Stoke's theorem where

$F = (2x-y)\, i - yz^2 \hat{j} - y^2 z\hat{k}$ and S, is the upper half surface of sphere $x^2+y^2+z^2=1$ and C is its boundary.

इकाई-III/Unit-III

3. शांकव $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the conic

$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$

अथवा/Or

(a) शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ के बिंदु 'α' पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent at any point 'α' on the conic

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(b) एक वृत्त आयताकार अतिपरवलय $xy = 1$ को

$(x_r, y_r) : r = 1, 2, 3, 4$

पर काटता है तो सिद्ध कीजिए कि

$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$

A circle intersects a rectangular hyperbola $xy = 1$ at points (x_r, y_r): $r = 1, 2, 3, 4$, then prove that

$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाने वाली रेखाओं

$x - y + 2z = 5, 3x + y + z = 6$

के समान्तर रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of line which is parallel to the line

$$x - y + 2z = 5, 3x + y + z = 6$$

and passess through the point (1, 2, 3).

(b) वृत्त $x^2+y^2+z^2=5, x+2y+3z=3$ से होकर जाने वाले और समतल $4x + 3y - 15 = 0$ को स्पर्श करने वाले गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of spheres passes through the circle $x^2+y^2+z^2 = 5, x+2y+3z=3$ and touches the plane $4x+3y-15=0$.

अथवा/Or

(a) उस लंबवृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (2, –3, 5) है, अक्ष निर्देशाक्षों से बराबर कोण बनाती है तथा अर्द्धशीर्ष कोण 30° है।

Find the equation of right circular cone whose vertex is (2, –3, 5), axis makes equal angle with co-ordinate axis and semi verticle angle is 30°.

(b) सिद्ध कीजिए कि लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण जिसका अक्ष

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{Z}{3}$$

है तथा जो बिंदु (0, 0, 3) से गुजरता है।

$10x^2 + 13y^2 + 5z^2 - 6yz - 12zx - 4xy - 36x - 18y + 30z - 135 = 0$.

Prove that right circular cylindrical equation whose axis $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{Z}{3}$ which passes through the point (0, 0, 3)

$10x^2 + 13y^2 + 5z^2 - 6yz - 12zx - 4xy - 36x - 18y + 30z - 135 = 0$.

इकाई-V/Unit-V

(a) सरल रेखा $x + 9y - 3z = 0, 3x - 3y + 6z = 5$ से होकर जाने वाले, अति-परवलयज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के स्पर्श तल के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation to the tangent plane to the hyperboloid $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ and which passes through the line $x + 9y - 3z = 0, 3x - 3y + 6z = 5$.

(b) अतिपरवलयज

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ के बिंदु (2, 3, –4) से होकर जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generating lines of hyperboloid

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

which passes through the point (2, 3, –4).

अथवा/Or

(a) किसी दिए हुए बिंदु से सकेन्द्र शांकवज पर छः अभिलंब खींचे जा सकते हैं। सिद्ध कीजिए।

Prove that there are 6 normals drawn from any given point on central conicoid.

(b) शांकवज $ax^2+by^2+cz^2=1$ के नियामक गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of director sphere of conicoid $ax^2+by^2+cz^2=1$.

2015

Note : *Attempt all the five questions. One question from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.*

इकाई-I/Unit-I

1. (a) आव्यूह A को प्रसामान्य रूप में परिवर्तित कीजिए और आव्यूह की जाति ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

Reduce the matrix A into its normal form and find the rank of the matrix, where :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

(b) कैले-हेमिल्टन प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley-Hamilton Theorem.

अथवा/Or

(a) सिद्ध कीजिए कि किसी हर्मिशियन आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

Prove that the eigen values of a Hermitian matrix are reals.

(b) प्रारंभिक रूपांतरणों की सहायता से निम्नलिखित आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Find the inverse of the following matrix by elementary operations only :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) कार्डन विधि से हल कीजिए :

$35x^2-18x^2+1=0$

Solve by Cardon's method :

$35x^2-18x^2+1=0$

(b) आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$2x-y+3z=9$

$x+y+z=6$

$x-y+z=2$

Solve by matrix method :

$2x-y+3z=9$

$x+y+z=6$

$x-y+z=2$

अथवा/Or

(a) यदि समीकरण $x^3-px^2+qx-r=0$ के मूल हरात्मक श्रेणी में हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

$27r^2-9pqr+2q^3=0$

If the roots of the equation $x^3-px^2+qx-r=0$ are in H.P., then prove that:

$27r^2-9pqr+2q^3=0$

(b) दर्शाइये कि समीकरण $2x^7-x^4+4x^3-5=0$ कम-से-कम चार अधिकल्पित मूल रखता है।

(b) Show that the equation $2x^7-x^4+4x^3-5=0$ has at least four imaginary roots.

इकाई-III/Unit-III

3. (a) यदि R तथा S समुच्चय X में तुल्यता सम्बन्ध हो, तो सिद्ध कीजिए कि $R\cap S$ भी X में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

If R and S be equivalance relation in the set X, then prove that $R\cap S$ is an equivalance relation in X.

(b) सिद्ध कीजिए कि गुणन संक्रिया के सापेक्ष इकाई के समस्त घनमूलों का समुच्चय एक परिमित आबेली समूह है।

Show that the set of cube roots of unity is a finite abelian group with respect to multiplication.

अथवा/Or

(a) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that the intersection of any two normal subgroup of a group is a normal subgroup.

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि का मापक होता है।

Prove that the order of each subgroup of a finite group is a divislor of the order of the group.

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) यदि R वास्तविक संख्याओं का योगात्मक समूह तथा R_+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का गुणात्मक समूह है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $f: R \to R$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है $f(x) = e^x, \forall x \in R$ एक तुल्याकारी है।

If R be the additive group of all real numbers and R_+ be the multiplicative group of real number, then show that the mapping $f: R \to R_+$ which is defind as follows :

$f(x) = e^x, \forall x \in R$ is an isomorphism

(b) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

Prove that every field is an integral domain.

अथवा/Or

(a) यदि R एक वलय इस प्रकार है कि $a^2 = a, \forall a \in R$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$a + a = 0, \forall x \in R$

If R is a ring such that $a^2 = a, \forall a \in R$ then prove that :

$a + a = 0, \forall x \in R$

(b) पूर्णांकीय प्रान्त की उदाहरण सहित परिभाषा दीजिए।

Define Integral Domain with example.

इकाई-V/Unit-V

5. (a) यदि n कोई धन पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

If n is any positive integer, then prove that :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

(b) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\tan\left(i \log\frac{1-b}{1+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

Prove that :

$$\tan\left(i \log\frac{1-b}{1+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

अथवा/Or

(a) यदि $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$

If $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, then prove that :

$x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$

(b) हल कीजिए :

$x^7 + 1 = 0$

Solve :

$x^7 + 1 = 0$

MATHEMATICS

Paper : Second

(Calculus)

नोट : *प्रत्येक इकाई से दो भाग हल करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Note : *Solve **Two** parts from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.*

इकाई-I/Unit-I

1. (a) निम्न फलन की सांतत्यता की जाँच $x = 0$ पर कीजिए—

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Test the continuity of the following function at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

(b) यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ हो तो लाइब्नित्ज प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि—

$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x\, y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

If $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ then by Leibnitz theorem prove that :

$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x\, y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

(c) मैक्सलारिन प्रमेय द्वारा फलन $\tan x$ का प्रसार ज्ञात कीजिए।

Expand the function $\tan x$ by Maclaurin's theorem.

2. (a) निम्नलिखित वक्र की समस्त अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए—

$x^3-2y^3+xy(2x-y)+y(x-1)+1=0$

Find all the asymptotes of the following curve :

$x^3-2y^3+xy(2x-y)+y(x-1)+1=0$

(b) सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2=(x-a)^2(x-b)$ के नाति परिवर्तन बिन्दु रेखा $3x+a=4b$ पर स्थित हैं।

Show that the point of inflexion of the curves $y^2=(x-a)^2(x-b)$ lie on the line $3x+a=4b$.

(c) वक्र $r=a(1-\cos\theta)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trance the curve :

$r=a(1-\cos\theta)$

इकाई-III/Unit-III

3. (a) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}$

(b) सिद्ध कीजिए—

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\frac{\pi}{4}$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\frac{\pi}{4}$$

(c) हृदयाभ (Cardiod) $r=a(1+\cos\theta)$ को प्रारंभिक रेखा के परितः घुमाने पर जनित पृष्ठ का आयतन ज्ञात कीजिए।

The Cardiod $r=a(1+\cos\theta)$ revolves about the initial line. Find the volume of the solid thus generated.

(a) अवकल समीकरण

$$x\frac{dy}{dx}-2y=x^2$$

का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the differential equation :

$$x\frac{dy}{dx}-2y=x^2$$

(b) अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए—

$p^2-5p+6=0$

Solve the differential equation :

$p^2-5p+6=0$

(c) हल कीजिए—

$(D^2-4)y=x^2$

Solve :

$(D^2-4)y=x^2$

इकाई-V/Unit-V

5. (a) हल कीजिए—

$$(3-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(9-4x)\frac{dy}{dx}+(6-3x)y=0$$

Solve :

$$(3-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(9-4x)\frac{dy}{dx}+(6-3x)y=0$$

(b) युगपत समीकरण

$\frac{d^2x}{dt^2}-3x-4y=0$ तथा $\frac{d^2y}{dt^2}+x+y=0$ को हल कीजिए।

Solve the simultaneous equation

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3x-4y=0 \text{ and } \frac{d^2y}{dt^2}+x+y=0$$

(c) हल कीजिए—

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

Solve :

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

MATHEMATICS

Paper : Third

(Vector Analysis & Geometry)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : *Attempt all the five questions. One questions from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.*

इकाई-I/Unit-I

1. (a) यदि a, b, c कोई तीन सदिश हों तो सिद्ध कीजिए कि–

$[a+b, b+c, c+a] = 2[a, b, c]$

If a, b, c be any three vectors, then prove that :

$[a+b, b+c, c+a] = 2[a, b, c]$

(b) फलन $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ का बिन्दु $P(1, 2, 3)$ पर PQ रेखा के अनुदिश दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए, जहाँ $Q(5, 0, 4)$ है।

Evaluate the directional derivative of the function $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ at the point $P(1, 2, 3)$ in the direction of the line PQ where Q has co-ordinate $(5, 0, 4)$.

अथवा/Or

(a) सिद्ध कीजिए कि–

$(b \times c).(a \times d) + (c \times a).(b \times d) + (a \times b).(c \times d) = 0$

यह भी सिद्ध कीजिए कि–

$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

Prove that :

$(b \times c).(a \times d) + (c \times a).(b \times d) + (a \times b).(c \times d) = 0$

Also prove that :

$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(b) दिखाइये कि–

div $r^n ? = (n+3)r^n$

Show that :

div $r^n ? = (n+3)r^n$

इकाई-II/Unit-II

2. (a) यदि $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$ तो दिखाइये–

$$\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,dt = -14\hat{i} + 75\hat{j} - 15\hat{k}$$

If $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$, then show that :

$$\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,dt = -14\hat{i} + 75\hat{j} - 15\hat{k}$$

(b) $\iint_s (yz\hat{i} + zx\hat{j} + xy\hat{k})\,d\vec{S}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का प्रथम अष्टांश का भाग है।

Evaluate $\iint_s (yz\hat{i} + zx\hat{j} + xy\hat{k})\,d\vec{S}$ where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in the first octant.

अथवा/Or

(a) $\int_C F.dr$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$\vec{F} = xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j}$ और C, xy-समतल में सरल रेखाओं $y = 2, x = 4, y = 10$ और $x = 1$ से बना आयत है।

Find the value of $\int_C F.dr$ where

$\vec{F} = xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j}$ and C is a rectangle in xy-plane which is made up of the straight lins $y = 2, x = 4, y = 10$ and $x = 1$.

(b) ग्रीन प्रमेय से xy-समतल में समाकल $\int_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ C परवलयों $y = \sqrt{x}$ और $y = x^2$ से परिबद्ध प्रदेश की परिसीमा है।

By Green's theorem, find the value of integral $\int_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ in xy-plane where C is the boundary of the region bounded by the parabolas $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$.

इकाई-III/Unit-III

3. (a) शांकव $21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$ अनुरेखण कीजिए।

Trace the conic $21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$

अथवा/Or

(a) मूल बिन्दु से होकर जाने वाला तथा वृत्तों $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ एवं $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ का लम्बकोणीय प्रतिच्छेदन करने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find quation of cricle passing through the origin and cut the circles $x^2+y^2-6x+8=0$ and $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ orthogonally.

(b) यदि PSP' किसी शांकव की नाभीय जीवा है जिसकी नाभि S तथा समीकरण $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{SP}+\frac{1}{SP'}=$ अचर

If PSP' is a focal chord of a conic whose focus is S and the equation is $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$, then prove that $\frac{1}{SP}+\frac{1}{SP'}=$ constant.

इकाई-IV/Unit-IV

4. (a) समतल $x-y+z=5$ का बिन्दु $(1,-2,3)$ से दूरी सरल रेखा $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-6}$ के समांतर ज्ञात कीजिए।

Find the distance of the point $(1,-2,3)$ from the plant $x-y+z=5$ measured parallel to the line

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-6}$$

(b) उन गोलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2+y^2+z^2=5, x+2y+3z=3$ से गुजरता है और समतल $4x+3y-15=0$ को स्पर्श करता है।

Find the equation of spheres which pass through the circle $x^2+y^2+z^2=5, x+2y+3z=3$ and touch the plane $4x+3y-15=0$.

अथवा/Or

(a) सिद्ध कीजिए कि समीकरण

$ax^2+by^2+cz^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ एक शंकु निरूपित करता है यदि

$\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}=d$ हो।

Prove that the equation

$ax^2+by^2+cz^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ a cone if $\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}=d$.

(b) उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका, निर्देशक वृत्त $x^2+y^2+z^2+9, x-y+z=3$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose guiding circle is $x^2+y^2+z^2+9, x-y+z=3$.

इकाई-V/Unit-V

5. (a) वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जब समतल $lx+my+nz=P$, दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ को स्पर्श करता है।

Find the condition when plane $lx+my+nz=P$ touches the ellipsoid

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(b) सरल रेखा $x+9y-3z=0, 3x-3y+6z=5$ से होकर जाने वाले, अतिपरवलयज $2x^2-6y^2+3z^2=5$ के स्पर्श तलों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation to the tangent plane to the hyperboloid $2x^2-6y^2+3z^2=5$ which pass through the line $x+9y-3z=0, 3x-3y+6z=5$.

अथवा/Or

(a) शांकवज $ax^2+by^2+cz^2=1$ के नियामक गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of director sphere of conicoid $ax^2+by^2+cz^2=1$.

(b) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ की जनक रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1,2,-3)$ से गुजरते है।

Find the equation of generating lines of hyperboloid $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ which passes through the point $(1,2,-3)$.