Лабораторная работа N 4

по дисциплине «Алгоритмизация и программирование»

на тему: «Вычисления значений рядных функций»

1 Цель работы

Цель лабораторной работы состоит в формировании умений:

- вычисления значений рядных функций.

2 Задание

2.1 Формулировка задания

Есть f – рядная функция, есть F – функция взятая из стандартной математической библиотеки.

Необходимо:

- Вывести рекуррентную форму приращения рядной функции;
- написать программу для вычисления значения рядной и библиотечной функции;
- вычислить невязку δ (дельту) формула (1) значений рядной функции и стандартной библиотечной функции;
- проанализировать динамику изменения значения невязки в зависимости от количества слагаемых в ряде.

$$\delta = \sqrt{|f^2(\mathrm{x}) - F^2(\mathrm{x})|}, \qquad (1)$$

где f – рядная функция,

F – библиотечная функция.

Вычисления ряда проводить до условия минимизации значения разности двух соседних членов ряда меньше заданного ε формула (2). Ряд рассчитывать через рекуррентную форму расчета ряда, что есть в приложении А и Б в конце документа.

$$|f_k(x) - f_{k-1}(x)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Результаты вычислений оформить виде таблицы! Пример таблицы находится под вариантами заданий в пункте **2.4. Требования.**

2.2 Варианты

Вариант заданной собственной функции:

1) вычислить:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k};$$

2) π – число «пи», вычислить:

$$\frac{\pi}{4} + x = x + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1};$$

3) e – число Эйлера, вычислить:

$$e + x = x + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!};$$

4) вычислить:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!};$$

5) вычислить:

$$\sin^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!};$$

6) вычислить:

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(3^{2n}+3)x^{2n}}{(2n)!};$$

7) вычислить:

$$\mathrm{sh}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

8) вычислить:

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)!}x^{2n+1};$$

9) вычислить:

$$\mathrm{actg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

10) вычислить:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{4x}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2 - x^2};$$

11) вычислить:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots;$$

12) вычислить:

$$\mathrm{arcctg}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}, \quad (x^2 < +\infty);$$

13) вычислить:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots;$$

14) вычислить:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

15) вычислить:

$$\mathrm{cosec}(\pi x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x^2 - k^2};$$

16) вычислить:

$$\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2} = \frac{4x}{\pi} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2 - x^2};$$

17) вычислить:

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (x^2 < \infty);$$

18) вычислить:

$$\cos^2(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!};$$

19) вычислить:

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{x\pi} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2};$$

20) вычислить:

$$\sec(\frac{\pi x}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - x^2};$$

21) вычислить:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right), \qquad (|x| < 1);$$

22) вычислить:

$$\frac{1-x}{1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}, \qquad (x^2 < 1);$$

23) вычислить:

$$a^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k!};$$

24) вычислить:

$$x \cdot \cos(3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!};$$

25) вычислить:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots;$$

26) вычислить:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2} = x^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2(2k-1)^2 - x^2}{(1^2-x^2)(3^2-x^2)^2\cdots[(2k-1)^2-x^2]^2};$$

27) вычислить:

$$e^x(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k(k+1)}{k!};$$

28) вычислить:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!};$$

29) вычислить:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}kx^{k-1};$$

30) вычислить:

$$\frac{1}{x-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k-1}}{x^{2^{k-1}}+1} \quad (x^2 > 1);$$

31) вычислить:

$$\operatorname{arcth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (x^2 < 1);$$

32) вычислить:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!};$$

33) вычислить:

$$\sec(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} \quad \left(x^2 < \pi^2/4\right);$$

34) вычислить:

$$\operatorname{th}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} \quad \left(x^2 < \pi^2/4\right);$$

35) вычислить:

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2^{2n-1}-1)|B_{2n}|x^{2n-1}}{(2n)!} \quad (x^2 < \pi^2).$$

2.3 Дополнительные материалы

Для вычисления числа Бернулли B_n можно воспользоваться формулами (3), (4) или (5), где $B_0 = 1$.

$$B_n = (-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} \left((-1)^{k-1} \frac{B_k (2n)(2n-1)(2n-2)\dots(2n-2k+2)}{(2k)!}\right)\right]. \quad (3)$$

$$B_n = \sum_{k=2}^{2n+1} \left((-1)^{k-1} \frac{(2n+1)(2n)\dots(2n-k+2)}{k!} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} m^{2n}\right). \quad (4)$$

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}. \quad (5)$$

Для вычисления числа Эйлера E_n можно воспользоваться формулой 5.

$$E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2n+1}}. \quad (5)$$

2.4 Требования

В работе должны вводиться с клавиатуры следующие переменные: точность ε, границы промежутка вычисления x_{start} и x_{end}, шаг Δx и значение x_{ideal} для точного расчёта.

В результате работы на экране пользователя должно быть выведена таблица с вычислением значения заданной функции на отрезке $[x_{start}, x_{end}]$ для заданной точности ε (см. табл. 1).

Далее пользователю должно быть предложено ввести значение x_{ideal}, и после этого выведена таблица с вычислением значения функции для заданного x_{ideal} для различных значений точности $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots 10^{-7}\}$ (см. табл. 2).

Таблица 1 – Форма вывода данных для разных x

x	$f(x)$	$F(x)$	δ
x_{start}			
$\vdots$			
x_{end}			

Таблица 2 – Форма вывода данных для разной точности

ε	$f(x_{ideal})$	$F(x_{ideal})$	δ
0,1			
0,01			
$\vdots$			
0,0000001			

3 Отчёт

Отчёт должен содержать следующие разделы: титульный лист, описание программы, задание, текст программы, примеры работы программы, выводы.

Приложение А

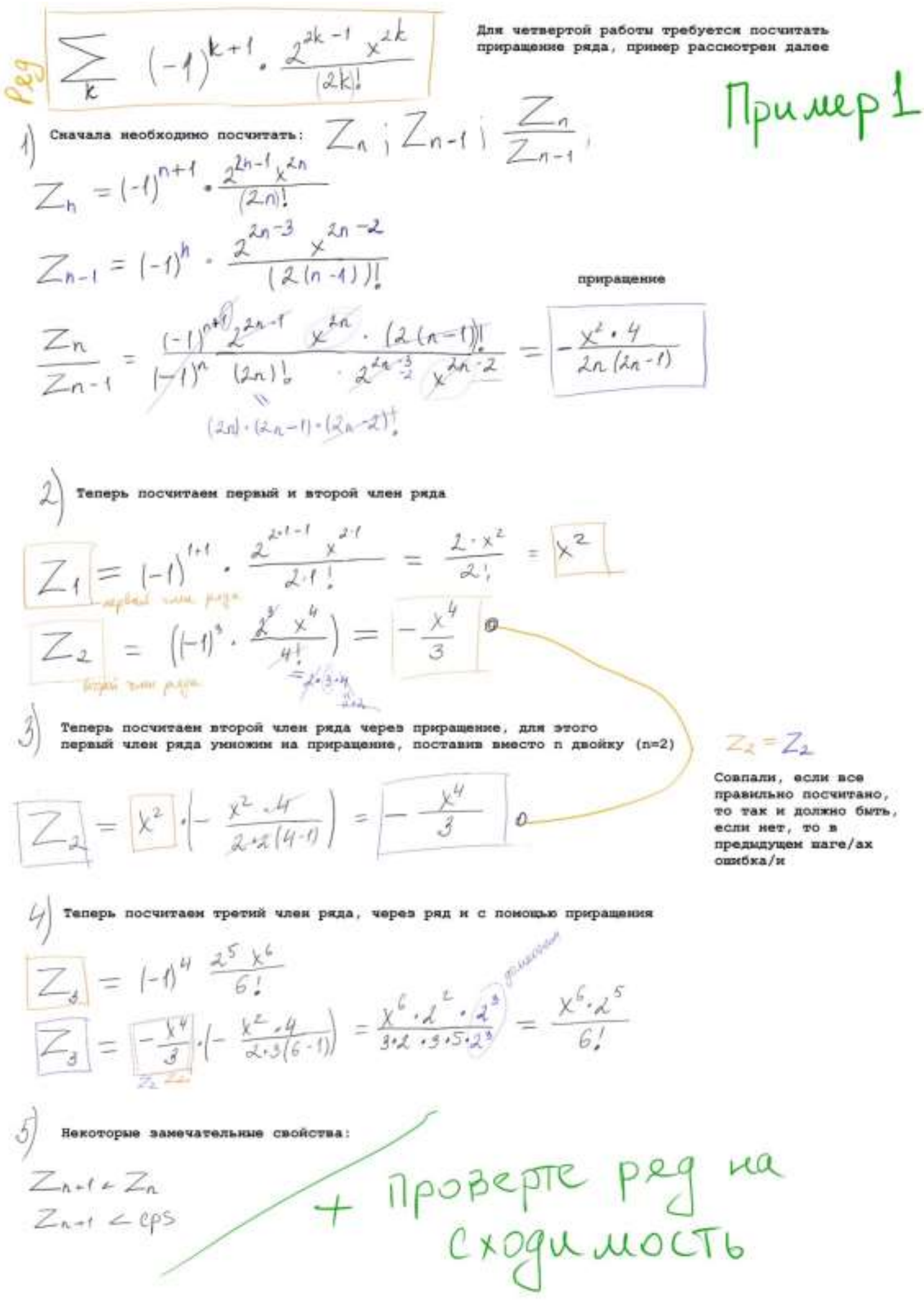

Рисунок 1 – пример расчета простого ряда через приращение

Пример 2

$$\boxed{\sum_k \frac{x^k}{(2k)!}}$$

Ряд

1) Z_n ; Z_{n-1} ; $\frac{Z_n}{Z_{n-1}}$

$$Z_n = \frac{x^n}{(2n)!} \; ; \; Z_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!}$$

$$\frac{Z_n}{Z_{n-1}} = \frac{\cancel{x^n} \cdot \cancel{(2n-2)!}}{\underbrace{(2n)!}_{(2n)\cdot(2n-1)\cdot\cancel{(2n-2)!}} \cdot \cancel{x^{n-1}}} = \boxed{\frac{x}{(2n)\cdot(2n-1)}}$$

2) $\boxed{Z_1} = \frac{x^1}{2!} = \boxed{\frac{x}{2}}$

$\boxed{Z_2} = \frac{x^2}{4!} = \boxed{\frac{x^2}{24}}$

$Z_2 = Z_2$

!!

3) $\boxed{Z_2} = \frac{\overset{Z_1}{\boxed{\frac{x}{2}}} \cdot x}{\cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \boxed{\frac{x^2}{24}}$

4) $\boxed{Z_3} = \boxed{\frac{x^3}{6!}}$

$\boxed{Z_3} = \frac{x^2 \cdot x}{24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \boxed{\frac{x^3}{6!}}$

$Z_3 = Z_3$

good

Рисунок 2 – пример № 2 расчета ряда через приращение.

Приложение Б

Вывод рекуррентной формы приращения члена ряда.

$$\sin3(\mathrm{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$Z_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$Z_{n-1} = (-1)^{n} \cdot \frac{3^{2n-1}-3}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$\frac{Z_n}{Z_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{(-1)^{n} \cdot \frac{3^{2n-1}-3}{(2n-1)!} x^{2n-1}} =$$

$$= (-1) \frac{\frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} x^{2n-1} \cdot x^2}{\frac{3^{2n-1}-3}{(2n-1)!} x^{2n-1}} =$$

$$= -\frac{\frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)(2n)} \cdot x^2}{\underline{3^{2n-1}-3}} =$$

$$= -\frac{(3^{2n+1}-3)x^2}{(2n+1)(2n)(3^{2n-1}-3)} = K$$

$$3^{2n-1} = A_n$$

$$K_z = -\frac{(A\cdot 9-3)x^2}{(2n+1)(2n)(A-3)};\ K_A = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}} = 9$$

N=1

$Z_1 = -\cdot\frac{24}{6}x^3$ *A1=3*

$$Z_2 = Z_1 * K = -\cdot\frac{24}{6}x^3 * -\frac{(A\cdot 9-3)x^2}{(2n+1)(2n)(A-3)}$$

$$A_2 = A_{1*}K_A = 27$$