DESAFIO DEL PEZ Y CRECIMIENTO DE UN ORGANISMO	
Materia:	INF 373 – Métodos Numéricos I
Docente:	Lic. Brigida Carvajal Blanco
Estudiante:	Mamani Mamani Abigail Blanca **CI:** 10062562

1. INTRODUCCION

En este desafio se comparan tres enfoques para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) que modelan crecimiento biológico:

- **Método de Euler**: Aproximación de primer orden, simple pero poco preciso con pasos grandes.
- **Método de Heun**: Aproximación de segundo orden (predictor-corrector), más preciso que Euler.
- **Solución de alta precisión ("Método Exacto")**: Obtenida mediante un solver numérico avanzado (IA/herramienta computacional), considerado como referencia.

Se analizan dos modelos:

Ejercicio 1: Crecimiento de organismo

$$\frac{dm}{dt} = km^{3/4}\left[1 - \left(\frac{m}{m_{\max}}\right)^{1/4}\right]$$

Ejercicio 2: Crecimiento de pez (von Bertalanffy)

$$\frac{dw}{dt} = aw^{2/3} - bw$$

2. RESULTADOS POR EJERCICIO

2.1. EJERCICIO 1 – CRECIMIENTOD DE ORGANISMO

Método	h (días)	Masa final (kg) a t = 400 días	Diferencia respecto a IA
Euler	20	≈ 299.8	+0.677336
Heun	20	≈ 299.1	+0.128781
IA ("Exacto")	25	**299.0**	-

CAPTURAS DE LA RESOLUCION DE LA IA POR EL METODO EXACTO:

Modelo de crecimiento del organismo

Resolveremos la ecuación diferencial por cambio de variable y obtendremos la solución cerrada, luego mostraremos una tabla de valores de $m(t)$ para $0 \le t \le 400$ días.

Derivación exacta

Partimos de:

$$\frac{dm}{dt} = k\, m^{3/4}\left[1 - \left(\frac{m}{m_{\max}}\right)^{1/4}\right].$$

Sea $y(t) = m(t)^{1/4}$ entonces $m = y^4$ y

$$\frac{dm}{dt} = 4y^3\frac{dy}{dt}.$$

El lado derecho se vuelve:

$$k\, y^3\left[1 - \frac{y}{M}\right], \quad \text{con } M = m_{\max 1/4}.$$

Al cancelar y^3 obtenemos una ecuación lineal de primer orden en y:

$$4\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{M}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{k}{4} - \frac{k}{4M}\,y.$$

Con condiciones iniciales $y(0) = m(0)^{1/4}$, su solución es:

$$y(t) = M - \left(M - y(0)\right)\, e^{-\frac{k}{4M}t}.$$

Volviendo a $m(t) = y(t)^4$,

$$m(t) = \left[M - \left(M - y(0)\right)\, e^{-\alpha t}\right]^4, \quad \text{donde } \alpha = \frac{k}{4M},\ M = m_{\max 1/4}.$$

Parámetros y constantes

- **Parámetros dados:** $k = 0.3\ \text{kg}^{1/4}/\text{día}$, $m_{\max} = 300\ \text{kg}$, $m(0) = 1\ \text{kg}$.
- **Constantes útiles:**

$$M = m_{\max 1/4} \approx 300^{1/4} \approx 4.16, \quad y(0) = m(0)^{1/4} = 1, \quad \alpha = \frac{k}{4M} \approx \frac{0.3}{4 \cdot 4.16} \approx 0.01802\ \text{día}^{-1}.$$

- **Solución cerrada numérica:**

$$m(t) = \left[\,4.16 - 3.16\, e^{-0.01802\, t}\,\right]^4.$$

Solución cerrada

$$m(t) = \left[M - (M-1)\, e^{-\alpha t}\right]^4, \quad M = 300^{1/4},\ \alpha = \frac{0.3}{4M}$$

Tabla de valores de m(t) (cada 25 días)

Tiempo (días)	m(t) (kg)
0	1.0
25	21.3
50	68.6
75	124.9
100	175.3
125	214.9
150	242.8
175	262.3
200	275.6
200	275.6
225	283.9
250	289.7
275	293.8
300	295.6
325	296.9
350	297.6
375	298.2
400	299.0

> Nota: Los valores están redondeados; la solución se acerca monótonamente a $m_{\max} = 300$ kg.

Observación:
Con h = 20 días, ambos métodos sobreestiman la masa final respecto a la solución IA (299.0 kg), pero con errores significativamente diferentes:

- ✓ Euler sobreestima en 0.677 kg (error relativo: ~0.23%)
- ✓ Heun sobreestima en 0.129 kg (error relativo: ~0.04%)

Esto muestra que Heun reduce el error en aproximadamente un 81% respecto a Euler para el mismo paso temporal grande, confirmando su mayor precisión en la aproximación de la pendiente promedio del crecimiento.

2.2. EJERCICIIO 2 – CRECIMIENTO DE PEZ (BERTALANFFY)

Método	h (días)	Peso final (lb) a t = 12 días	Diferencia respecto a IA
Euler	0.5	15.6248753	+0.0048753
Heun	0.5	15.6249733	+0.0049733
IA ("Exacto")	-	15.620	-

CAPTURAS DE LA RESOLUCION DE LA IA POR EL METODO EXACTO:

Modelo de crecimiento de von Bertalanffy

Vamos a resolver exactamente la ecuación

$$\frac{dw}{dt} = a\,w^{2/3} - b\,w,$$

con $a = 5\ \mathrm{lb}^{1/3}$, $b = 2\ \mathrm{día}^{-1}$ y $w(0) = 0.5\ \mathrm{lb}$.

Solución exacta por cambio de variable

Sea $y(t) = w(t)^{1/3}$. Entonces $w = y^3$ y

$$\frac{dw}{dt} = 3y^2\frac{dy}{dt}.$$

El lado derecho es $ay^2 - by^3$. Al dividir por y^2 (para $y > 0$) queda una ecuación lineal en y:

$$3\frac{dy}{dt} = a - by \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{a}{3} - \frac{b}{3}y.$$

Con condición inicial $y(0) = w(0)^{1/3} = (0.5)^{1/3}$, la solución es:

$$y(t) = \frac{a}{b} + \left(y(0) - \frac{a}{b}\right) e^{-\frac{b}{3}t}.$$

Volviendo a $w = y^3$:

$$w(t) = \left[\frac{a}{b} + \left(w(0)^{1/3} - \frac{a}{b}\right) e^{-\frac{b}{3}t}\right]^3.$$

Parámetros y constantes numéricas

- **Inicial:** $w(0) = 0.5\ \mathrm{lb} \Rightarrow y(0) = 0.5^{1/3} \approx 0.7937005.$
- **Razón y tasa:** $\frac{a}{b} = \frac{5}{2} = 2.5$, $\lambda = \frac{b}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.6666667\ \mathrm{día}^{-1}.$
- **Solución numérica compacta:**

$$w(t) = \left[2.5 - 1.7062995\, e^{-0.6666667\, t}\right]^3.$$

Peso máximo y ventana temporal suficiente

- **Peso máximo (límite cuando $t \to \infty$):**

$$w_{\max} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2.5^3 = 15.625 \text{ lb}.$$

- **Ventana de tiempo:** Con $\lambda = 2/3$, a $t \approx 10$ días se tiene $e^{-\lambda t} \approx 0.0013$, por lo que $w(t)$ está a menos del 0.2% de $w_{\max}$. Usar $t \in [0, 12]$ días es suficiente para "aproximarse" claramente al máximo.

Tabla de valores de w(t)

Tiempo (días)	w(t) (lb)
0	0.500
2	8.62
4	13.51
6	15.05
8	15.47
10	15.60
12	15.62

> Cálculos usando $w(t) = \left[2.5 - 1.7062995\, e^{-0.6666667\, t}\right]^3$. Redondeo a 2–3 decimales.

Observación:
Para este modelo, con h = 0.5 días, ambos métodos producen resultados prácticamente idénticos y muy cercanos al valor de referencia IA (15.620 lb). La diferencia es mínima (< 0.005 lb), lo que representa un error relativo de ~0.03%. Esto indica que cuando el paso temporal es suficientemente pequeño, incluso Euler puede proporcionar resultados aceptables para modelos con comportamiento suave como el de von Bertalanffy.

3. CONCLUSION GENERAL

Heun supera significativamente a Euler en precisión cuando se utilizan pasos temporales grandes (h=20 días), reduciendo el error en más del 80% en el Ejercicio 1. Para modelos con comportamiento más suave y con pasos pequeños (Ejercicio 2, h=0.5), ambos métodos pueden producir resultados similares y cercanos a la solución de referencia.

La validación con IA confirma que:

- Los métodos implementados en Excel son confiables cuando se selecciona un h apropiado para el modelo.
- Heun debería ser el método preferido en aplicaciones prácticas donde no es factible utilizar pasos muy pequeños debido a restricciones computacionales o de tiempo.

Recomendaciones prácticas:

- Para modelos de crecimiento biológico no lineal, usar Heun con h moderado.
- Siempre realizar una prueba de convergencia variando h para verificar la estabilidad de la solución.
- Comparar con una solución de referencia de alta precisión (IA/solver numérico) cuando se requiera máxima confiabilidad.