Convolución Cheat Sheet

Compilado por Diana Abigail Gallegos Ruiz con contribuciones de Contreras Avilés Citlali Anahí,Morgado Reséndiz Lisardo René, Ramírez Aniceto Lauro Alexis y Rojas Gómez Ian. Material basado en el curso de Señales y Sistemas de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Tecnologías Avanzadas.

Definición

La respuesta de estado cero $y(t)$ está dada por una integral que ocurre frecuentemente en las ciencias físicas, la ingeniería y las matemáticas. La integral de convolución de dos funciones $f(t)$ y $x(t)$ se define como:

$$g(t) = f(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) * x(t-\tau)d\tau$$

Nota

- $u(t) * u(-t)$ No existe
- La convolución de señales periódicas no existe

Propiedades

1. **Conmutabilidad**
   $f(t) * x(t) = x(t) * f(t)$
2. **Asociatividad**
   $[f(t) * x(t)] * z(t) = f(t) * [x(t) * z(t)]$
3. **Distributividad**
   $f(t) * [x(t) + z(t)] = f(t) * x(t) + f(t) * z(t)$
4. **Identidad**
   $f(t) * \delta(t) = f(t)$
5. **Si** $m \in \mathbb{N}$
   $f(t) * \delta^m(t) = f^{(m)}(t)$
6. **Si** $a \in \mathbb{R}$
   $af(t) * x(t) = f(t) * ax(t) = a[f(t) * x(t)]$
7. Si la duración de f(t) es T_1 y la duración de x(t) es T_2 entonces:
   $g(t) = f(t) * x(t)$ tiene duración $T_1 + T_2$
8. **Translación horizontal**
   Sea $a \neq 0, t_0 \in \mathbb{R}$ si
   $f(t) * x(t) = g(t)$
   Entonces:
   $$\begin{aligned} f(t-t_0) * x(t) &= f(t) * x(t-t_0) \\ &= g(t-t_0) \end{aligned}$$
9. **Escalamiento horizontal**
   $f(at) * x(at) = \frac{1}{|a|} g(at)$
10. **Si** $m, n \in \mathbb{N}$
    $f^{(m)}(t) * x^{(n)}(t) = g^{(m+n)}(t)$

Convolución en señales causales

Si las señales son causales; la convolución es causal y la duración es infinita.

$$g(t) = \begin{cases} \int_0^t f(\tau)x(t-\tau)d\tau & si 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Pasos para realizar las convoluciones

Método Gráfico

1. Seleccionar una de las dos señales para graficar el argumento τ .
2. A la 2° señal invertir con el argumento τ $(-\tau)$.
3. En la 2° señal , para cada valor horizontal de cambio de geometría se suma la variable $\boldsymbol{t}$.
4. Trasladar la segunda señal mediante la variable $t \in \mathbb{R}$ hasta que $f(\tau)g(t-\tau) \neq 0$.
5. Elegir los valores de t para realizar la integral.
6. Anotar el intervalo de t oara los cuales los pasos 4 & 5 son válidos .
7. Repetir los pasos 4-6 hasta qye t tome todos los valores $\mathbb{R}$.

Tabla de convolución

El cálculo de laconvolución se simplifica considerablemente mediante una tabla de convolución lista para usar. Esta tabla, que enumera varios pares de señales y su convolución, puede determinar convenientemente y(t), una respuesta del sistema a una entrada x(t).

No.	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
1	x(t)	$\delta(t-T)$	x(t-T)
2	$e^{\lambda t}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1-e^{\lambda t}}{-\lambda}u(t)$
3	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
4	$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}u(t) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
5	$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$
6	$te^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$
7	$t^N u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{N!e^{\lambda t}}{\lambda^{N+1}}u(t)\sum_{k=0}^{N}\frac{N!t^{N-k}}{\lambda^{k+1}(N-k)!}u(t)$
8	$t^M u(t)$	$t^N u(t)$	$\frac{M!N!}{(N+M+1)!}t^{M+N+1}u(t)$
9	$te^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t}+(\lambda_1-\lambda_2)te^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}u(t)$
10	$t^M e^{\lambda t}u(t)$	$t^N e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{M!N!}{(N+M+1)!}\ t^{M+N+1}\ e^{\lambda t}u(t)$
11	$t^M e^{\lambda_1 t}u(t)$	$t^N e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k M!(N+k)!t^{M-k}e^{\lambda_1 t}}{k!(M-k)!(\lambda_1-\lambda_2)^{N+k+1}}u(t)+\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k N!(M+k)!t^{N-k}e^{\lambda_2 t}}{k!(N-k)!(\lambda_2-\lambda_1)^{M+k+1}}u(t)$
12	$e^{-\alpha t}cos(\beta t+\theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\theta-\phi e^{-\alpha t}cos(\beta t+\theta-\phi)}{\sqrt{(\alpha+\lambda)^2+\beta^2}} \quad \phi = tan^{-1}[\frac{-\beta}{\alpha+\lambda}]$
13	$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(-t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t}u(t)+e^{\lambda_2 t}u(-t)}{\lambda_2-\lambda_1} \quad Re\lambda_2 > Re\lambda_1$
14	$e^{\lambda_1 t}u(-t)$	$e^{\lambda_2 t}u(-t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}u(-t)$

Cuadro 1: Nota: Tomado de ”Linear systems and signals”por B.P Lathi, 2018 3° Edición, p.176 .

Correlación cruzada en señales de tiempo contínuo

Correlación cruzada

Se pueden tener 3 definiciones

- $r_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$
- $r_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(z-\tau)d\tau$
- $r_{xy}(t) = x(t) * y(-t)$

Propiedades de la correlación cruzada

1. No conmuta
   $r_{xy}(t) \neq r_{yx}(t)$
2. $r_{xy}(t) = r_{xy}(-t)$
3. La autocorrelación es par
   $r_{xx}(t) = r_{xx}(-t)$
4. La energía de una señal es:
   $r_{xx}(0) = E_x$

Nota

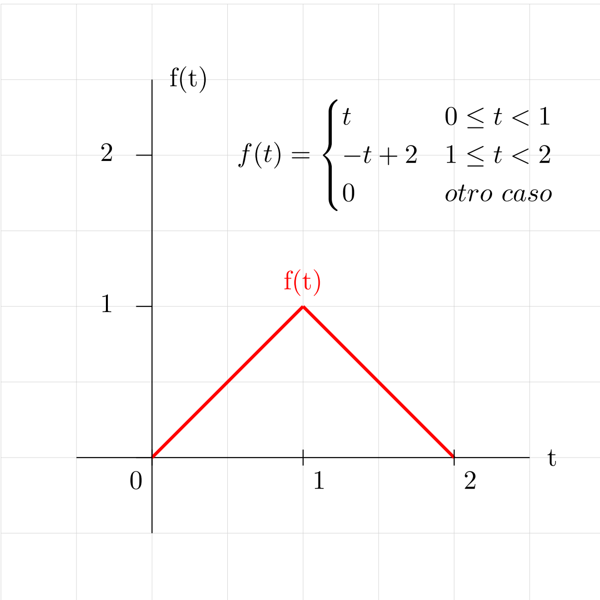
-
- Definición general
  $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y*(\tau-t)d\tau$
- r_{xx} es función de autocorrelación
- La función de correlación cruzada no siempre existe, por ejemplo la autocorrelación de u(t)
- La correlación cruzada presenta problemas en señales periódicas

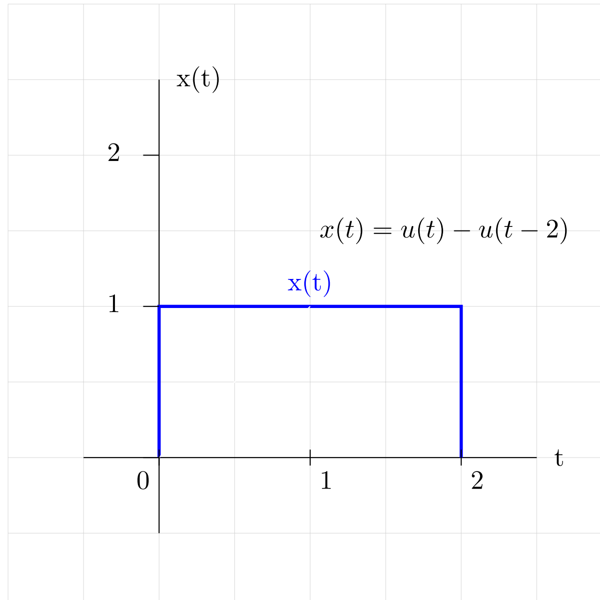
Pasos para realizar la correlación cruzada

1. Dibujar $y(\tau)$.
2. Dibujar $x(\tau)$.
3. Agregrar -t en cada cambio de la fórmula de $x(\tau)$
4. Se transalada la señal $x(\tau)$ de tal manera que se obtenga $x(t+\tau)$ y τ.
5. De la geometría del paso anterior, encontrar los valores de τ .
6. Encontrar los valores de t de tal manera que el paso 5 sea válido.
7. Repetir todos los pasos 4-6 para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$.

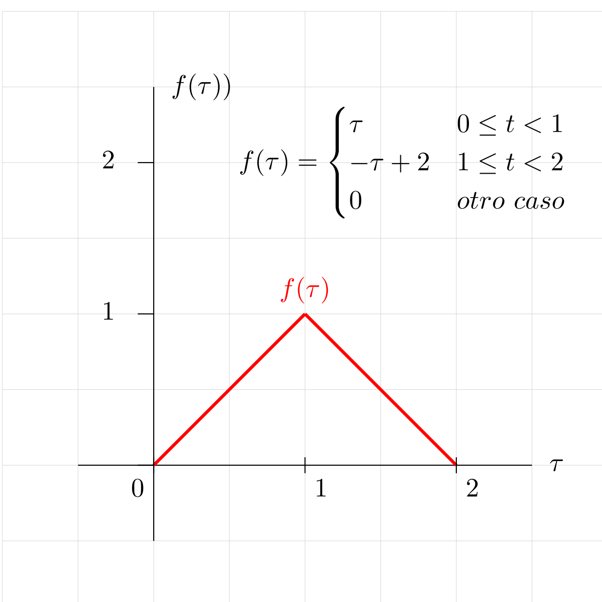
Ejemplo de convolución

Método gráfico para la convolución de las señales f(t) y x(t)

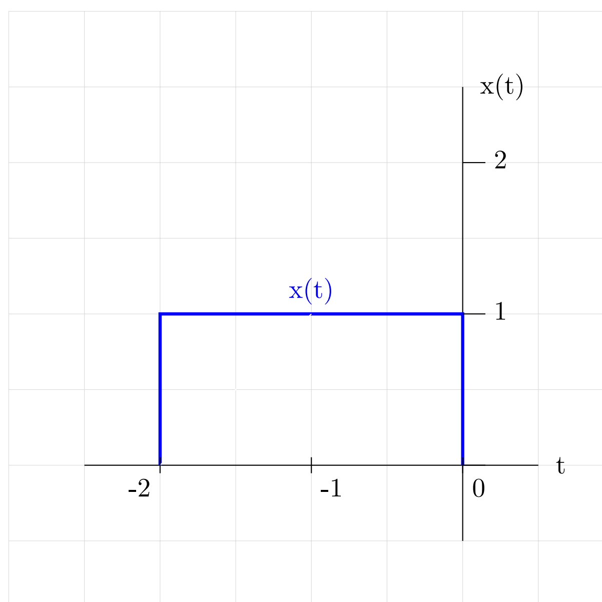




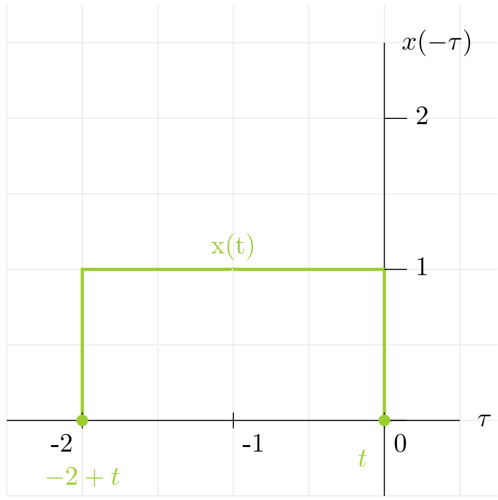
- Paso 1



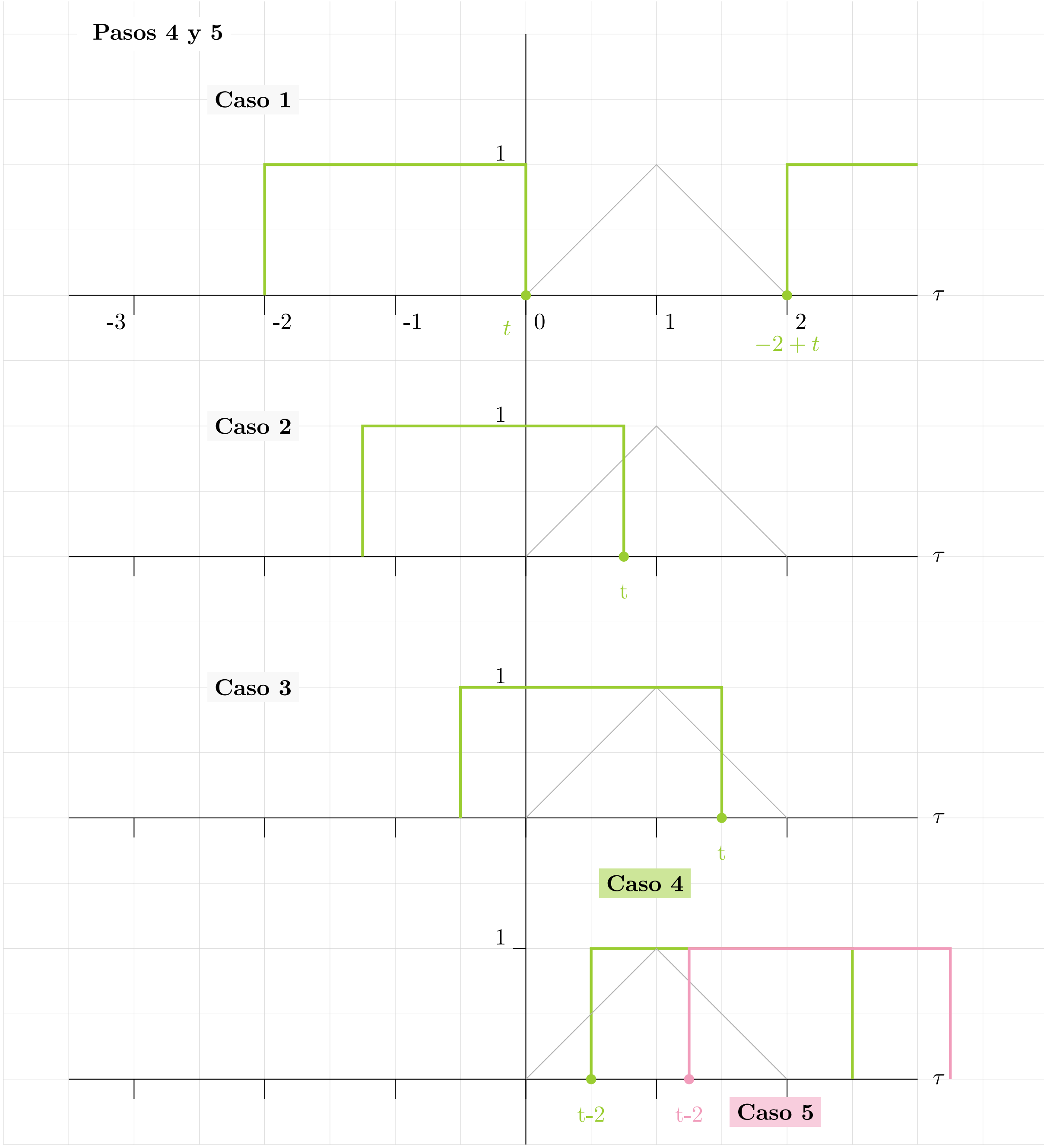
- Paso 2



Paso 3



$x(-\tau)$
2
1
x(t)
τ
-2
-1
0
t
$-2+t$



Pasos 4 y 5
Caso 1
1
τ
-3
-2
-1
t
0
1
2
$-2+t$
Caso 2
1
τ
t
Caso 3
1
τ
t
Caso 4
1
τ
t-2
t-2
Caso 5

Ejemplo de convolución

Analíticos de las señales

Caso 1 Al no haber señales que se multipliquen en la integral, para $t < 0 y t > 4$ la convolución es 0.

Caso 2 Cuando $0 < t < 1$
$= \int_0^t \tau d\tau$

$= \frac{\tau^2}{2}|_0^t = \frac{t^2}{2}$

Caso 3 Cuando $1 < t < 2$

$= \int_0^1 \tau d\tau + \int_1^t -\tau + 2d\tau$

$= \frac{\tau^2}{2}|_0^1 - \left[\frac{\tau^2}{2} + 2\tau\right]_1^t$

$= \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2} - 2$

$= -\frac{t^2}{2} + 2t - 1$

Caso 4 Cuando $2 < t < 3$
$= \int_{t-2}^1 \tau d\tau + \int_1^2 -\tau + 2d\tau$

$= \frac{\tau^2}{2}|_{t-2}^1 - \left[\frac{\tau^2}{2} + 2\tau\right]_1^2$

$= \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2} - 2$

$= -\frac{t^2}{2} + 2t - 1$

Caso 5 Cuando $3 < t < 4$
$= \int_{t-2}^2 -\tau + 2d\tau$

$= \left[\frac{\tau^2}{2} + 2\tau\right]_{t-2}^2$

$= 8 + \frac{t^2}{2} - 4t$

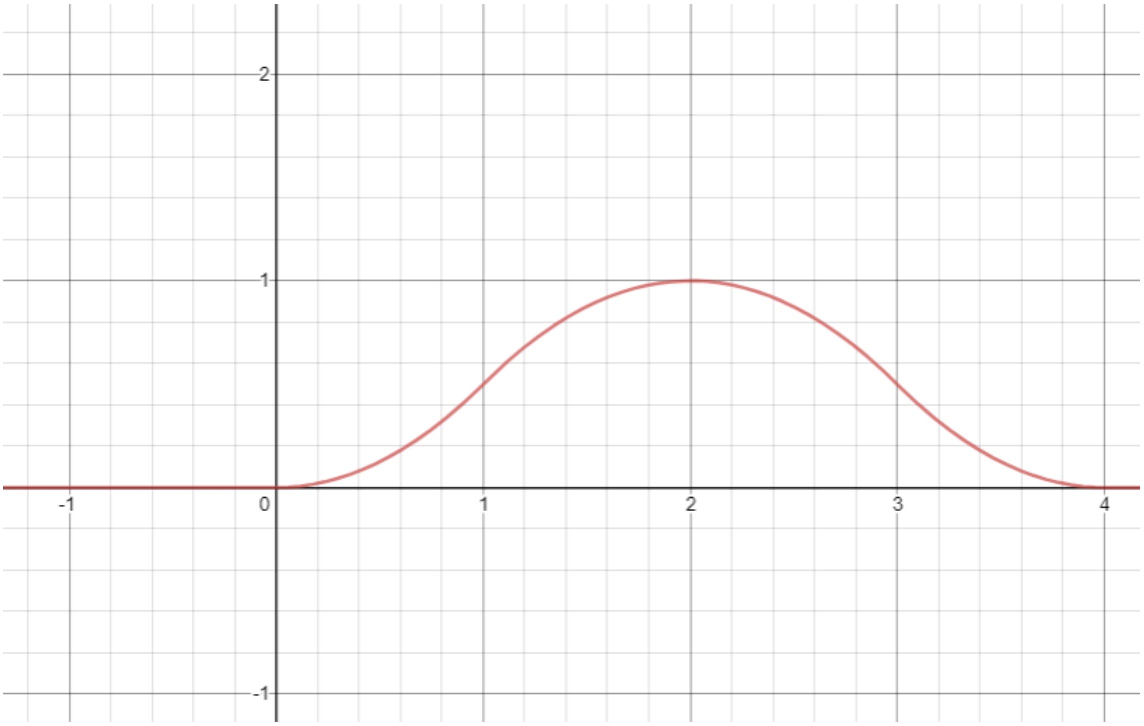


Figura 1: Gráfica de la convolución de $h(t) = f(t) * x(t)$ en Desmos.