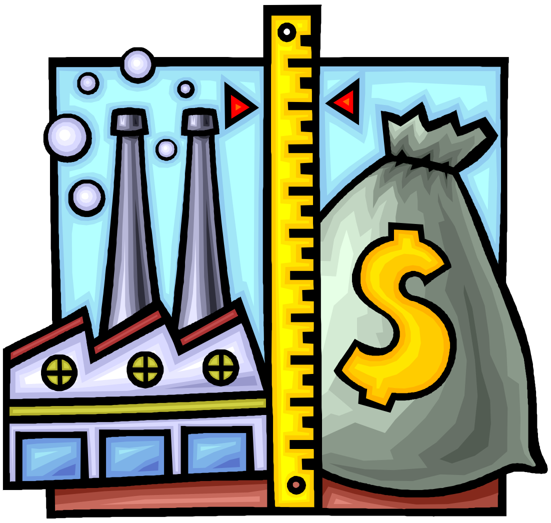


Temas de este capítulo

- Introducción a la Programación Lineal
- Pasos para la elaboración del modelo matemático.
- Solución gráfica
- Agregar una restricción al modelo
- Variación de bi (disponibilidades)
- Variación de ci (beneficios)
- Agregado de una restricción de ≥
- Introducción a la resolución con 3 o más variables
- Pérdidas, Agregado, Reciclaje, Mezcla y Capacidad de Producción

Introducción a la Programación lineal

La Programación Lineal utiliza un Modelo Matemático para describir el problema. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra programación no se refiere a la programación de computadoras; en esencia es un sinónimo de Planificación.

La **Programación Lineal** trata la ***Planificación de las actividades*** para obtener un ***resultado óptimo***, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución.

Un problema de **Programación Lineal** se refiere al ***uso eficiente o distribución de recursos limitados*** para alcanzar los objetivos deseados. Aunque esta es su aplicación más frecuente, la Programación Lineal tiene muchas otras posibilidades.

Los problemas de **Programación Lineal** se caracterizan por el gran número de soluciones que satisfacen las soluciones básicas de cada problema.

La elección de una solución en particular como la mejor solución del problema en estudio dependerá en cierto grado del objetivo global implícito en el enunciado del mismo; y esa será la ***Solución Optima***.

Ejemplo:

La Empresa ***Química NODO S.A.*** el año pasado, saco a la venta dos nuevos productos, dos tipos de plaguicida, uno de uso familiar y otro de uso industrial, cuya venta deja los siguientes beneficios por litro: $ 3 el primero de ellos, y $ 4 el segundo.

La elaboración de estos productos, si bien utiliza una serie de materias primas y se realiza en varios lugares de la planta química, solo presenta un gran problema en 3 áreas bien específicas que son las de:

1. Mezclado.
2. Filtrado
3. Envasado

Pero estos sectores disponen de muy limitado tiempo para su trabajo:

- 900 minutos diarios = 15 horas diarias (Área de Mezclado).
- 3000 minutos diarios = 50 horas diarias. (Área de Filtrado)
- 300 minutos diarios = 5 horas diarias. (Área de Envasado)

Los respectivos **insumos** de cada producto, en cada sector, suministrados por los empleados de la Empresa Química se pueden visualizar en el siguiente cuadro:

Expresados en **minutos diarios/litro**

SECTOR / SISTEMA	**GESTION COMERCIAL**	**PRODUCCIÓN**
MEZCLA	30	60
FILTRADO	50	250
ENVASADO	12	12

La Gerencia de la Empresa Química desea tener un plan diario de producción que le aporte el **mayor beneficio económico** y en cada proceso de los tres mencionados, **se reduzcan los tiempos ociosos** ya que esto último representa una gran pérdida.

Por estas razones, la Gerencia de la Empresa decide contratar el asesoramiento de una Consultora y les proporciona los datos mencionados en la anterior tabla, los cuales corresponden a los únicos sectores que limitan la producción (son el cuello de botella de la empresa).

En base a estos datos, el equipo de trabajo comienza su trabajo.

Para ello se tienen en cuenta una serie de hipótesis, algunas suministradas directamente por la Gerencia de la Empresa Química, y otras deducidas por los consultores

- Se puede disponer de toda materia prima que se desee,
- Toda la fabricación se vende,
- Los otros sectores de la empresa no presentan ningún problema, cualquiera sea la producción,
- La empresa desea elaborar los dos tipos de plaguicidas,
- Ninguna otra producción de la planta interfiere con la elaboración de los plaguicidas,
- El tiempo de los tres sectores en conflicto destinado a los plaguicidas y que no se utiliza, se pierde,
- Los tiempo de estos sectores son muy costosos,
- La empresa desea ganar lo máximo.

Teniendo en cuenta las distintas hipótesis y los datos disponibles se elabora un modelo matemático.

Para ello debemos seguir los siguientes pasos:

Pasos para la elaboración del modelo matemático

1. ¿Que es lo que se produce?

Plaguicida Familiar: PLAFA
Plaguicida industrial: PLAIN

¿Que es lo que se desea calcular?

Cuantos litros de cada uno de ellos se desea producir.

Estas son las incógnitas, las que pueden tomar valores variables y que se designa con:

$\mathbf{x_1}$ = cantidad de litros de PLAFA
$\mathbf{x_2}$ = cantidad de litros de PLAIN

Estas cantidades se producen o no, y nunca puede existir una producción negativa, esto implica:

$x_i >= 0$, $\forall$ i, ***Condición de no negatividad de las variables***.

2. ¿Cual es el objetivo de la empresa?

El objetivo debe ser único. Si hubiera varios todos se subordinan a uno solo.

En este caso existen varios:

- *Producir lo máximo.*
- *No desperdiciar tiempo en los sectores nombrados.*
- *Ganar lo máximo.*

Pero puede verse que todo se reduce a un solo objetivo:

Ganar lo máximo; y esto se consigue produciendo lo máximo que se pueda.

En este caso:

$$Z = 3 \frac{\$}{\cancel{\text{litro}}} x_1 \cancel{\text{litros}} + 4 \frac{\$}{\cancel{\text{litro}}} x_2 \cancel{\text{litros}} \Rightarrow \text{MAXIMIZAR}$$

O sea:

$$Z = 3\, x_1 + 4\, x_2 \Rightarrow \text{MAXIMIZAR}$$

A esta función se le da el nombre de **Función Objetivo,** donde se cumple:

$z = f(x)$ **Función lineal** de las variables que forman la segunda condición, llamada también **Funcional**.

3. ***Condición***

Al analizar cada sector surge:

- <u>En el sector de **Mezcla**</u>:

Este sector dispone de una cantidad fija de minutos diarios que limitan o restringen cada producción. Es decir, el tiempo total de tiempo usado aquí no puede exceder lo que se dispone, debe ser ≤ 900 minutos diarios.

Si sólo se produce el PLAFA, ese único producto se mezclaría en el sector, y por lo tanto debería cumplirse que $30\ x_1 \leq 900$ con lo cual se obtendría la cantidad exacta de fabricación de ese sólo artículo.

Análogamente pasaría si sólo se fabricara PLAIN, debería cumplirse ahora que $60\ x_2 \leq 900$.

Pero como la empresa Química quiere elaborar los dos artículos simultáneamente, debe cumplirse:

$$\mathbf{R_1}\text{:}\ 30\ \frac{\text{minutos diarios}}{\cancel{\text{litro}}}\ x_1\ \cancel{\text{litros}} + 60\ \frac{\text{minutos diarios}}{\cancel{\text{litro}}}\ x_2\ \cancel{\text{litros}} \leq 900\ \text{minutos diarios}$$

Queda así formulada la **primera restricción R_1** del modelo matemático.

Lo que hace es aproximar una ecuación lineal a la realidad, porque lo modelo lo admite y es conveniente.

Además se establecen las siguientes suposiciones:

- *El uso de recurso es **proporcional** a cada unidad fabricada.*
  Esos 30 minutos o esos 60 minutos, son valores promedios, obtenidos como resultado de una serie de observaciones y pueden utilizarse en dicha forma.
- *La proporcionalidad no es suficiente para garantizar la linealidad de todo el modelo.*
  Además el uso del recurso para cada artículo debe ser **aditivo**. Pueden sumarse los minutos destinado a cada uno de los litros de PLAFA y los destinados a cada uno de los litros de PLAIN hasta completar las 900 minutos diarios que dispone el sector.
- *Todos los parámetros son constantes.*

  Esta es una ***suposición determinística***. En realidad no siempre se satisface. Pues se están utilizando datos extraídos de observaciones pasadas y las conclusiones serán utilizadas en actos futuros. Por lo tanto los parámetros deberían basarse en condiciones futuras o en una predicción de ellas. Esto introduce un cierto grado de ***incertidumbre***.

  La ***suposición de determinismo*** es la que permite realizar un cuidadoso **Análisis de sensibilidad**, que se efectuara después de encontrar la solución del problema de **Programación Lineal**.

  Por el momento se mantiene la permanencia de los valores de los parámetros.
- *Algunas veces las variables pueden ser significativas solamente si están expresadas (si asumen) valores enteros.*

  Pero generalmente la solución obtenida después del cálculo matemático, no es entera. Por lo tanto la suposición de la **divisibilidad** es que las unidades de los artículos producidos puedan tomar valores fraccionarios. En otras palabras, son permisibles los valores no enteros para las variables.

En el caso de no cumplirse esta 4ta condición, se pasaría a otro subconjunto de problemas que el de **PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA**.

Volviendo al modelo de la Empresa Química:

Con análogo razonamiento a la primera restricción, se obtienen las siguientes restricciones:

- En el de **Filtrado**:

R₂: $50 \dfrac{\text{minutos diarios}}{\cancel{\text{litros}}}\ x_1 \cancel{\text{litros}} + 250 \dfrac{\text{minutos diarios}}{\cancel{\text{litros}}}\ x_2 \cancel{\text{litros}} \leq 3000$ minutos diarios

- En el de **implementación**:

R₃: $12 \dfrac{\text{minutos diarios}}{\cancel{\text{litro}}}\ x_1 \cancel{\text{litros}} + 12 \dfrac{\text{minutos diarios}}{\cancel{\text{litro}}}\ x_2 \cancel{\text{litros}} \leq 300$ minutos diarios

Dichas restricciones forman una ***condición de ligadura***.

El ***modelo matemático*** tiene la siguiente forma:

$\mathbf{x_i >= 0}$, $\forall$ i

$\mathbf{z = 3\, x_1 + 4\, x_2} \Rightarrow$ **MAXIMIZAR**

R₁: $30\, x_1 + 60\, x_2 \leq 900$
R₂: $50\, x_1 + 250\, x_2 \leq 3000$
R₃: $12\, x_1 + 12\, x_2 \leq 300$

Las condiciones son:

1. $x_j \geq 0; \ \forall j$ $\Rightarrow$ **Condición de no negatividad de las variables**
2. z = f(x) ==> MAX $\Rightarrow$ **Función Objetivo**
3. $\sum a_{ij}\ x_j \leq b_j$ $\Rightarrow$ **Restricciones**

Donde los:

$\mathbf{a_{ij}}$ = insumo de cada restricción por cada litro de plaguicida producido.
$\mathbf{b_i}$ = cantidad disponible de cada uno de los recursos.

El modelo matemático es un sistema formado por 3 inecuaciones lineales con dos incógnitas y una función objetivo.

Si solo existiera la función objetivo: z, cuanto más plaguicida de los dos tipos se produce (x_1 y x_2 aumentan hasta el infinito), mas se gana. Pero la producción está limitado por las 3 disponibilidades (una en cada sector)

Además en el sector de mezcla de los 900 minutos diarios que se dispone pueden darse dos casos:

- No existe equipo ocioso (se utiliza todo el tiempo disponible en ese sector)
- Existe sobrante de ese tiempo, el cual si bien podría alcanzar para elaborar otra unidad de plaguicida, como no hay más tiempo en los otros sectores, no se puede producir más.

A ese tiempo sobrante desconocido se lo indica como otra variable $\mathbf{x_3}$, la que puede adoptar por lo tanto solamente los valores:

$= 0$
≥ 0

según cada caso, es decir $x3 \geq 0$, con lo cual sigue vigente la condición de no negatividad de las variables.

La primera restricción R1, queda escrita:

$$\mathbf{R_1:} \quad 30\,x_1 + 60\,x_2 + x_3 = 900$$

Análogamente:

$$\mathbf{R_2:} \quad 50\,x_1 + 250\,x_2 + x_4 = 3000$$
$$\mathbf{R_3:} \quad 12\,x_1 + 12\,x_2 + x_5 = 300$$

Con lo cual las restricciones quedan escritas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \mathbf{R_1:} \\ \mathbf{R_2:} \\ \mathbf{R_3:} \end{array} \left\{ \begin{array}{lllcl} 30\,x_1 + & 60\,x_2 + & x_3 & = & 900 \\ 50\,x_1 + & 250\,x_2 + & x_4 & = & 3000 \\ 12\,x_1 + & 12\,x_2 + & x_5 & = & 300 \end{array} \right.$$

Donde $\mathbf{x_4}$ y $\mathbf{x_5}$ representan el sobrante de tiempo en los otros dos sectores.

A estas variables (x_3, x_4, x_5), se les da el nombre de variables de **slacks** o de **holgura**.

Las variables ***slack o de holgura*** se introducen en las restricciones para convertir las desigualdades en igualdades. Si la restricción es de menor e igual, la **slack** representa el faltante del recurso para llegar a la disponibilidad total del mismo. Si la restricción es de mayor o igual, la **slack** representa el sobrante del mismo. Estas variables solamente pueden tomar valores positivos o cero y tienen las mismas unidades que las disponibilidades.

Las variables $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, son las **variables de decisión** que en el modelo de **Programación Lineal** llevan el nombre de variables **reales.**

El conjunto de variables puede resumirse en el siguiente cuadro:

VARIABLE	CLASE	SIGNIFICADO	UNIDAD
X_1	Real	Plaguicida familiar producido. PLAFA	Litros diarios
X_2	Real	Plaguicida industrial producido. PLAIN	Litros diarios
X_3	Slack	Sobrante de tiempo en el sector de mezcla	Minutos diarios
X_4	Slack	Sobrante de tiempo en el sector de filtrado	Minutos diarios
X_5	Snack	Sobrante de tiempo en el sector de envasado	Minutos diarios
Z	Funcional		$

Solución gráfica

Este pequeño problema tiene sólo dos variables de decisión y por lo tanto sólo dos dimensiones, así que se puede usar un **procedimiento gráfico** para resolverlo.

Este procedimiento incluye la construcción de una gráfica de dos dimensiones con x_1 y x_2 en los ejes, que son las variables reales, y como se supone buscamos el óptimo que será aquel que utilice todo el tiempo disponible de los sectores, las **slacks** tomaran valores iguales a cero.

El primer paso es identificar los valores de (x_1, x_2) permitidos por las restricciones. Esto se hace dibujando cada una de las rectas que limitan los valores permitidos por una restricción.

Para comenzar, nótese que las restricciones de no negatividad, $\begin{matrix} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{matrix}$ exigen que (x_l, x_2) estén en el lado positivo de los ejes (incluyendo que esté sobre cualquiera de los dos ejes), es decir, en el **primer cuadrante**.

- **Analizando R_1: $30\ x_1 + 60\ x_2 = 900$**

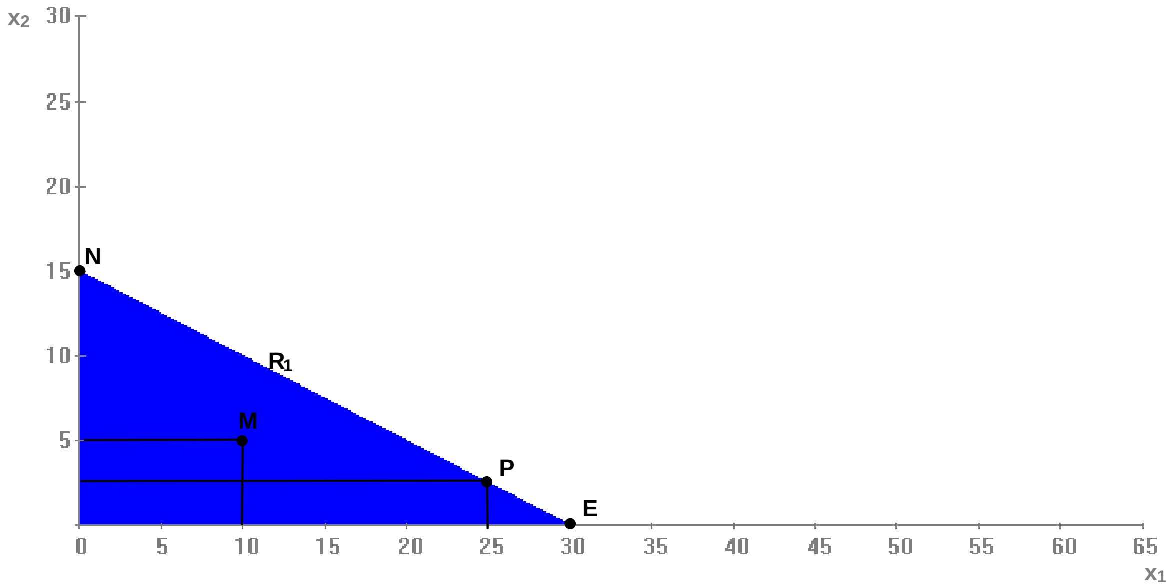
$x_3 = 0$, por lo dicho anteriormente.

Si $x_1 = 0 \Rightarrow 60\ x_2 = 900 \Rightarrow x_2 = 15$

Entonces nuestro primer punto es (0,15).

Si $x_2 = 0 \Rightarrow 30\ x_1 = 900 \Rightarrow x_1 = 30$

Entonces nuestro segundo punto es (30,0).



Como $\mathbf{R_1}$ es una relación de $\leq$ limita el semiplano sombreado.

Cualquier punto M = (10,5) indica una producción **factible** de realizar pues si:

$x_1 = 10$
$x_2 = 5$

Resulta:

$30 \times 10 + 60 \times 5 = 600 < 900$

Sobran $x_3 = 300$ minutos diarios en este sector.

En los puntos del segmento NE, se utiliza toda la restricción.

Por ejemplo:

P=(25, 2.5)

$30 \times 25 + 60 \times 2.5 = 900$

aquí, $x_3 = 0$

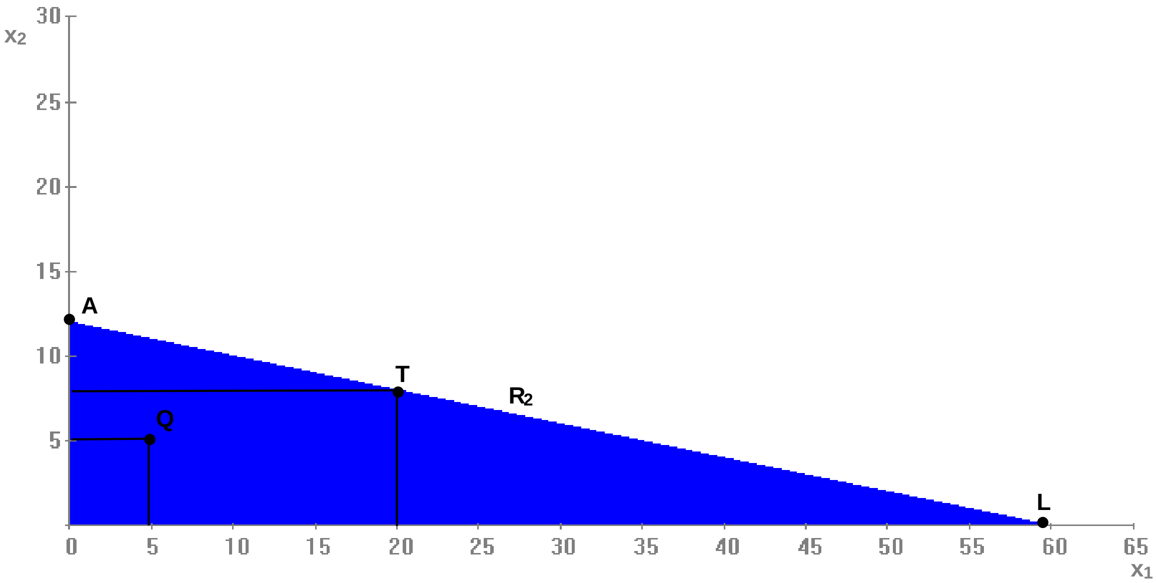
- **Analizando R_2: $50\ x_1 + 250\ x_2 = 3000$**

$x_4 = 0$.

Si $x_1 = 0 \Rightarrow\ 250\ x_2 = 3000 \ \Rightarrow\ x_2 = 12$

Entonces el punto es (0,12).
Si $x_2 = 0 \Rightarrow\ 50\ x_1 = 3000 \ \Rightarrow\ x_1 = 60$

Entonces el punto es (60,0).



Como R_2 es una relación de $\leq$ limita el semiplano sombreado.

En Q = (5,5)

se cumple:

50 x 5 + 250 x 5 = 2500 < 3000

x_4 = 3000-2500 = 500 de excedente

Q es factible de realizar pero hay un desperdicio de la restricción.

En T = (20,8), punto que pertenece al segmento AL

50 x 20 + 250 x 8 = 3000

aquí:

x_4 = 0, no hay sobrante

- **Analizando R_3: $12\ x_1 + 12\ x_2 = 300$**

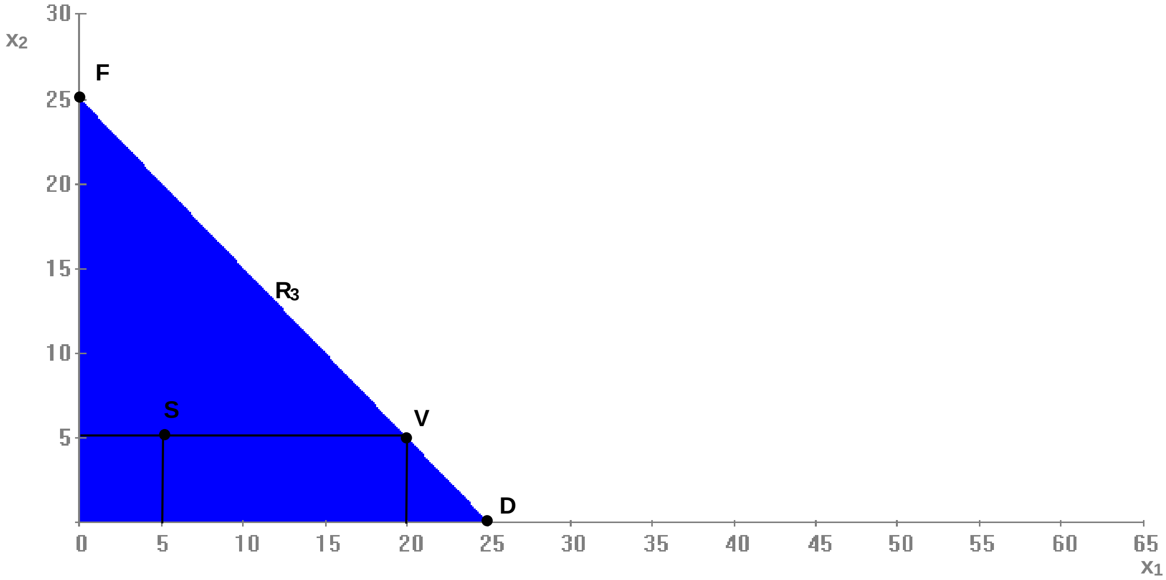
$x_5 = 0$.

Si $x_1 = 0 \Rightarrow\ 12\ x_2 = 300 \Rightarrow\ x_2 = 25$

Entonces el punto es (0,25).

Si $x_2 = 0 \Rightarrow\ 12\ x_1 = 300 \Rightarrow\ x_1 = 25$

Entonces nuestro segundo punto es (25,0).



Nuevamente, como R_3 es una relación de $\leq$ limita el semiplano sombreado.

En S = (5,5)

se cumple:

12 x 5 + 12 x 5 = 120 < 300

x_5 = 300-120 = 180 (sobrante)

En V = (20,5), punto que pertenece al segmento DF

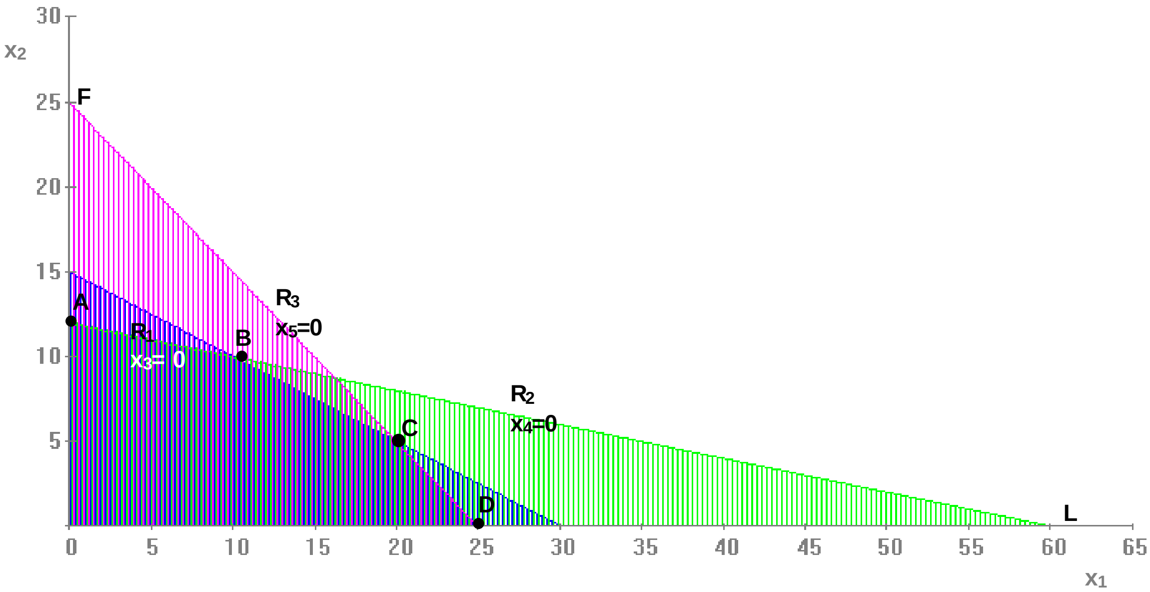
12 x 20 + 12 x 5 = 300

aquí:

x_5 = 0, no hay sobrante

Pero las tres restricciones deben cumplirse simultáneamente.

Entonces realizando todo en un solo grafico:



El conjunto de puntos que son **soluciones factibles** del problema, se reduce a los puntos que forman la superficie del polígono convexo: **0ABCD**, llamado **convexo de soluciones.**

Una **solución** – en programación lineal – ***es cualquier conjunto de valores*** para las variables de decisión o reales, sin importar si es una posibilidad deseable o ni siquiera permitida.

Una ***solución es factible*** es una **solución** para la que todas las restricciones se satisfacen.

Una ***solución es no factible*** es aquella para la que al menos una restricción no se cumple.

La ***región factible*** – también llamada ***convexo de soluciones*** – Es el conjunto de todas las soluciones factibles.

En el problema, en G = (10, 1)

sus valores son:

$x_1 = 10$
$x_2 = 1$
$x_3 = 540$
$x_4 = 2250$
$x_5 = 168$

G: Es una **solución factible** del problema en un punto que pertenece al convexo de soluciones.

G = $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

G = (10, 1, 540, 2250, 168)

G: Cumple con las condiciones de **no negatividad** de las variables y con las **condiciones de ligadura**.

Pero en el punto G, no se aprovechan totalmente los recursos. Con los tiempos sobrantes de los 3 sectores podrían elaborarse más litros de los 2 plaguicidas, y no existirían tantos tiempos ociosos.

Teniendo en cuenta que:

- Si la variable **slack** es nula significa que se aprovecha totalmente el recurso;
- Las variables **slacks**, cada una, sobre una arista del convexo; se anulan.
- En cada vértice se anulan dos variables **slacks**.

Luego:

"Conviene explorar solamente los vértices del convexo y analizar que pasa en cada uno de ellos para buscar la mejor solución"

A = ($x_2 \cap R_2$) = (0, 12, 180, 0, 156)

B = ($R_1 \cap R_2$) = (10, 10, 0,0,60)

C = ($R_3 \cap R_1$) = (20, 5, 0,750, 0)

D = ($R_3 \cap x_1$) = (25, 0, 150,1750,0)

E = No pertenece al polígono de soluciones.

En todos estos puntos el aprovechamiento de los recursos es el máximo.

No ocurre así en el origen:

0 = ($x_1 \cap x_2$) = (0, 0, 900,3000,300)
que también es un punto del convexo donde nada se fabrica y sobran todos los tiempos .

Luego:

El conjunto de las infinitas soluciones factibles se ha reducido a un grupo temor de soluciones que forman una **base de soluciones**. Son las **soluciones básicas factibles** del problema.

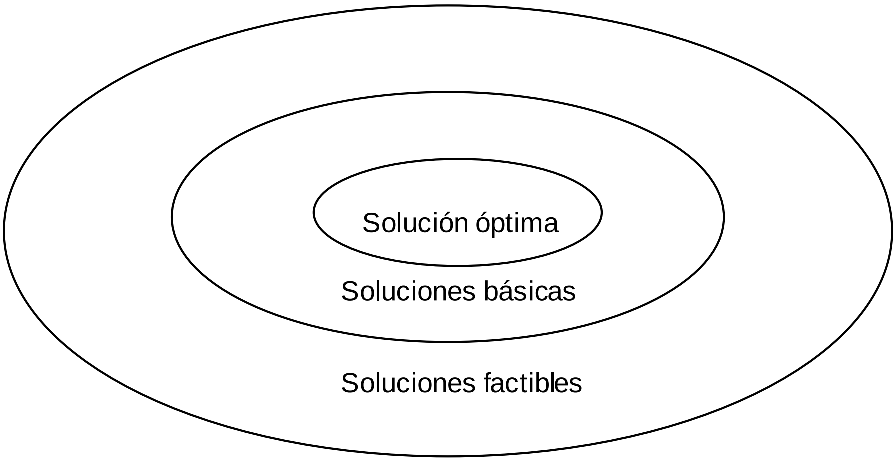
Dentro de las **soluciones básicas factibles** tenemos que encontrar una **solución factible básica** que sea la **mejor**, medida según el valor de la función objetivo en el modelo.

Una ***solución óptima*** es una **solución factible** que da el valor más favorable de la función objetivo – Este valor será el más grande si la función objetivo debe maximizarse y será el valor más pequeño, si la función objetivo debe minimizarse.

La solución óptima es única y no puede haber otra mejor.

Esa **solución optima** que aprovecha todos los recursos y da la mejor ganancia, debe estar entre las básicas.

Implica:



Luego la solución óptima es básica y es factible.

Para detectarla bastará con explorar solamente los vértices del polígono convexo.

Para hallarla, se puede seguir uno de los dos siguientes procedimientos:

1. ***Calcular el funcional en cada uno de los vértices***

Puntos	Rectas que lo forman	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Función Objetivo
A	$X_2 \cap R2$	0	12	180	0	156	48
B	$R1 \cap R2$	10	10	0	0	60	70
C	$R1 \cap R3$	20	5	0	750	0	80
D	$X_1 \cap R3$	25	0	150	1750	0	75

El cálculo indica que el punto C es el **punto óptimo**.

2. ***Gráficamente, dibujando la recta del funcional que pase por el punto (0,0) y luego trazando las paralelas hasta llegar a la que tenga el mayor beneficio.***

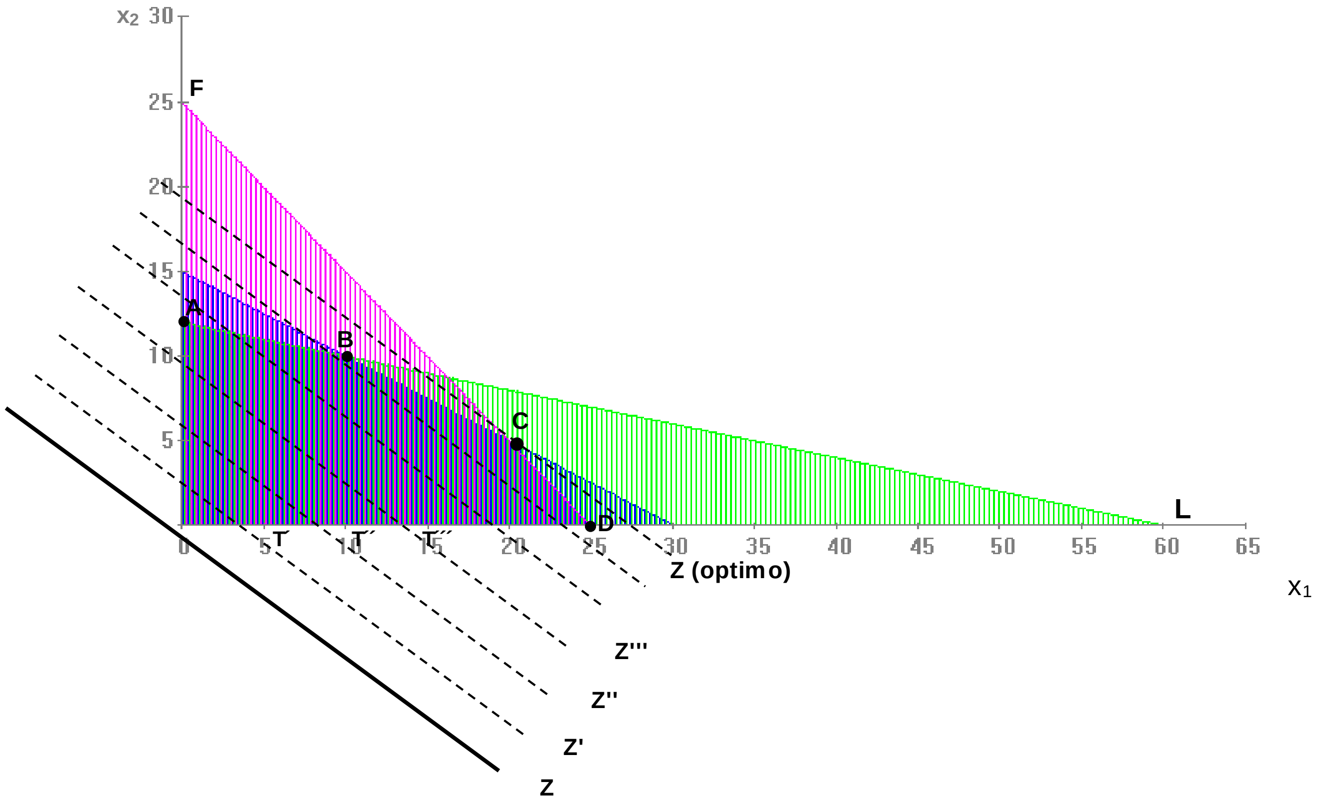
$z = 3\,x_1 + 4\,x_2$

Si z=0 resulta:

$$x_2 = \frac{-3\,x_1}{4}$$

Que es una recta que pasa por el origen de ordenadas. Allí se dibuja el funcional.

Todas las rectas <u>paralelas</u> a z tienen la misma pendiente.



z, z', z'', z''', z(optimo) tienen la misma pendiente; pero corresponden a distintos valores del termino independiente.

$z = 3\,x_1 + 4\,x_2$ = término independiente.

Si se desplaza la recta z saldrán las rectas z´, z´´, z´´´, z(óptimo), distintas rectas, cada una con un beneficio mayor:

z(óptimo) > z´´´ > z´´ > z´ > z

Pero para cada una de ellas el beneficio que se obtiene en cada uno de los puntos del segmento intersección de dicha recta y el polígono de soluciones, es el mismo.

Para todo punto que pertenece al segmento: S´T´´ su funcional = z´;

Análogamente todo punto del segmento S´´T´´ su funcional = z´´, y así para todas las rectas paralelas a z, llamadas de **isobeneficio.**

Como esta función crece a medida que la recta z se desplaza y se aleja del origen 0, el mayor funcional (z se MAXIMIZA y por consecuencia es el óptimo) se encontrará en el vértice más alejado del origen 0, último punto de contacto entre la recta y el polígono de soluciones.

En el ejemplo el punto C cuyas coordenadas son:

reales: $x_1 = 20$ Se fabricarán diariamente 20 litros de PLAFA

$x_2 = 5$ Se fabricarán diariamente 4 litros de PLAIN

slack: $x_3 = 0$ No existe tiempo ocioso en el sector de Mezcla

$x_4 = 750$ Sobran 750 minutos diarios en el sector de Filtrado

$x_5 = 0$ No existe tiempo ocioso en el sector de Envasado.

Funcional: $z= 80$ ganancia diaria

Estos valores con un significado real, forman la respuesta que la Consultora presentará a la empresa Química.

Tomando como punto de partida a este modelo matemático y a sus respuestas, la Gerencia de NODO S.A., decidirá tres cursos de acción futura.

Casos especiales

Incompatible
Es posible que un problema no tenga soluciones factibles. No se forma polígono de soluciones.-

Funcional no acotado
Otra posibilidad es que las restricciones no impiden que el valor del funcional mejore indefinidamente en la dirección favorable. El polígono de soluciones es abierto, no acotado.

Funcional trivial
En este caso la mejor solución es no hacer nada.

Agregar una restricción al modelo

Después de recibir este informe, un químico de la planta, entrega al Gerente de la empresa los siguientes datos:

"Durante el proceso de mezclado, las máquinas consumen diariamente combustible a razón de 1/4 litro, por cada litro de PLAFA y 1/8 de litro, por cada litro de PLAIN. Por el momento se dispone de 10 litros diarios de combustible"

Estos datos son llevados a la Consultora. Con ellos surge una nueva restricción en el modelo: R_4

R_4: $1/4\ x_1 + 1/8\ x_2 \leq 10$

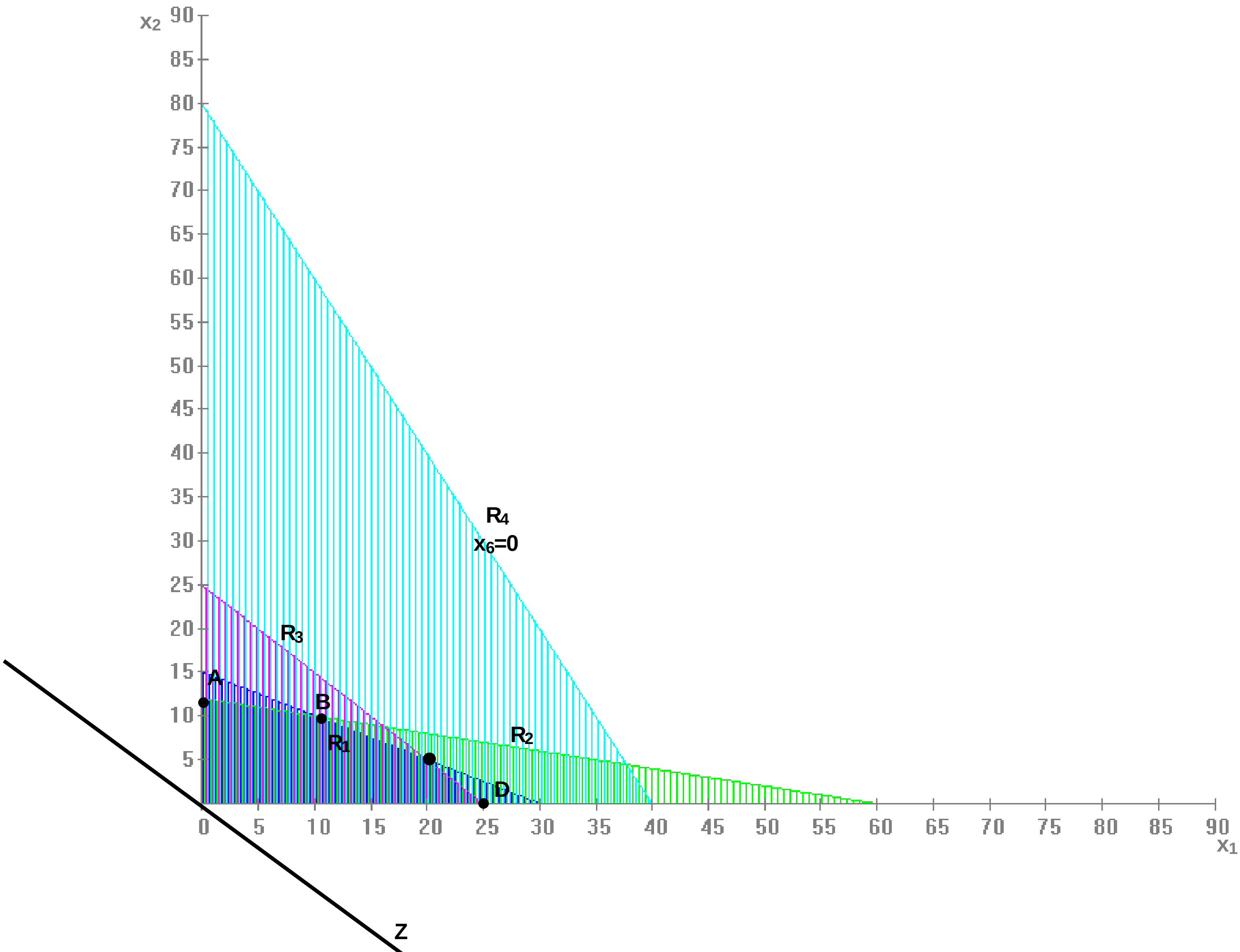
Al agregarle su correspondiente slack:

$1/4\ x_1 + 1/8\ x_2 + x_6 = 10$

donde:
$x_6 \geq 0$
en el cuadro de variables:

VARIABLE	CLASE	SIGNIFICADO	UNIDAD
X_6	Slack	Sobrante de litros diarios de combustible	Litros diarios

La representación gráfica queda:



Esta nueva restricción (R_4) no afecta al resultado.

En este gráfico no es una arista del polígono de soluciones; el punto óptimo sigue siendo el mismo punto C. Se produce lo mismo, en las mismas cantidades y la ganancia será la misma pero:

$x_6 = 35/8 = 4.375$ litros, ya que:

$1/4 \times 20 + 1/8 \times 5 + x_6 = 10$

A la respuesta solamente se agrega que:

"Existe un sobrante de 4,375 litros diarios de combustible"

Variación de b_i (disponibilidades)

Unos de los químicos comunican a la Gerencia un error a la estimación de los cálculos y que la cantidad de combustible aun no pudo determinarse con exactitud.

Para evitar continuas modificaciones, la Consultora procede a realizar el siguiente **Análisis de Sensibilidad**.

Llama b_i a cada una de las cantidades disponibles de las restricciones, resulta:

$b_1 = 900$

$b_2 = 3000$

$b_3 = 300$

$b_4 = 10$

Variación de b_4

Si se modifica, la representación de R'_4 resulta paralela a la recta R_4 original, con distintas situaciones:

i. Si b_4 aumenta, la recta R'_4 se aleja del polígono de soluciones, la situación descripta por la Consultora se mantiene igual, con el mismo punto óptimo C. Solamente aumentará el sobrante de la restricción. Cada vez habrá mayor cantidad de litros de combustible que diariamente no se utiliza y se desperdigan;

ii. Si b_4 disminuye, la recta R''_4, paralelamente se acerca al polígono de soluciones. Sigue existiendo un sobrante de combustible: $x_6 \geq 0$, el óptimo sigue siendo el mismo C, pero cada vez el sobrante de combustible es menor. ¿Hasta cuando?.

iii. Hasta que $b_4 = 5{,}625$ litros diarios.

   Aquí la restricción R'''_4 pasa por el punto C.

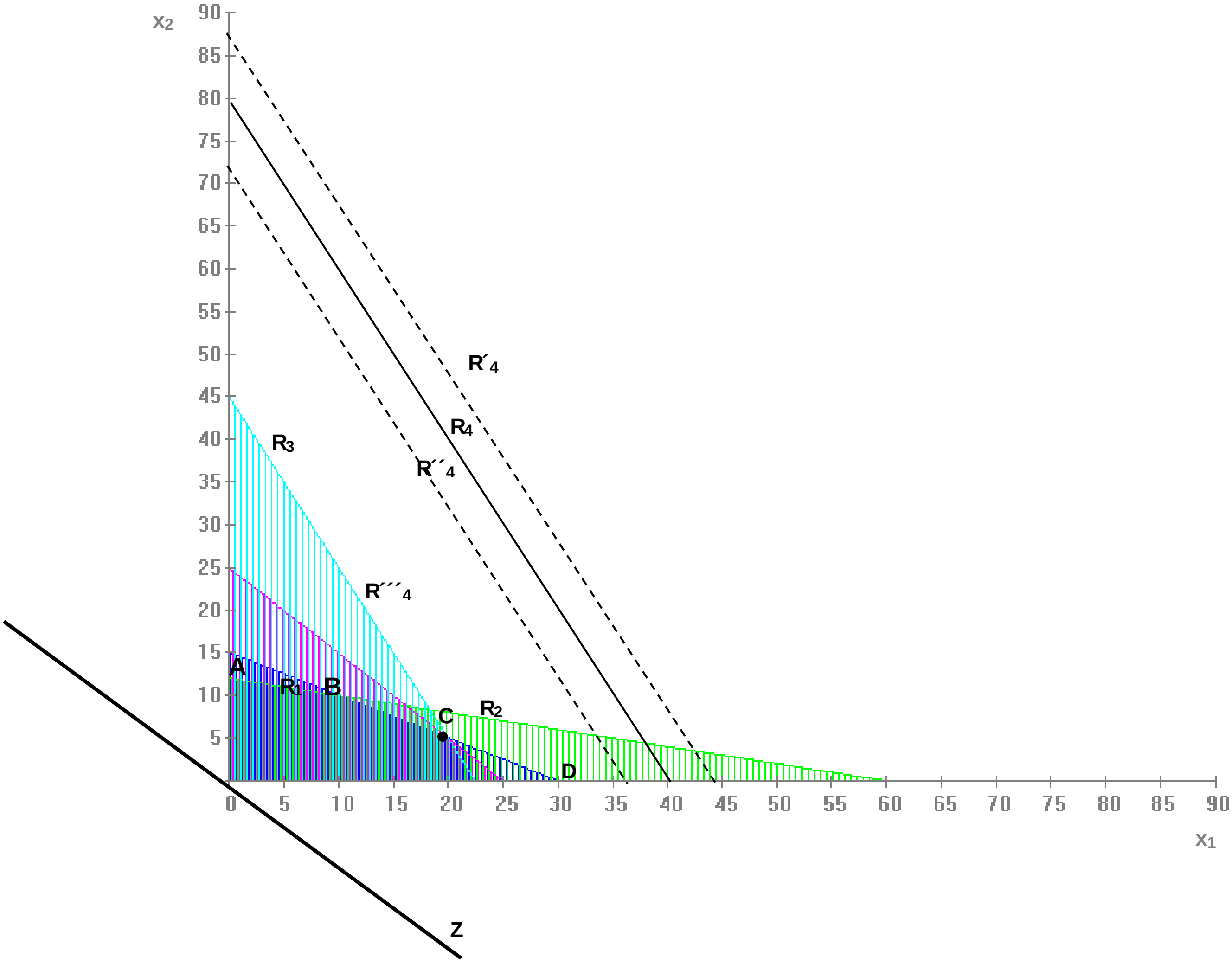
   Resulta:

   $1/4 \times 20 + 1/8 \times 5 = 5.625$

   $x_6 = 0$

   El óptimo sigue siendo el mismo punto C.

   Se elabora la misma cantidad de productos, pero la recta R'''_4 limita al nuevo polígono de soluciones:



iv. Recién cuando $b_4 < 5.625$ cambia la solución, el polígono de soluciones se modifica: R''''_4 determina una nueva solución.

Por ejemplo:

$b_4 = 4{,}875$

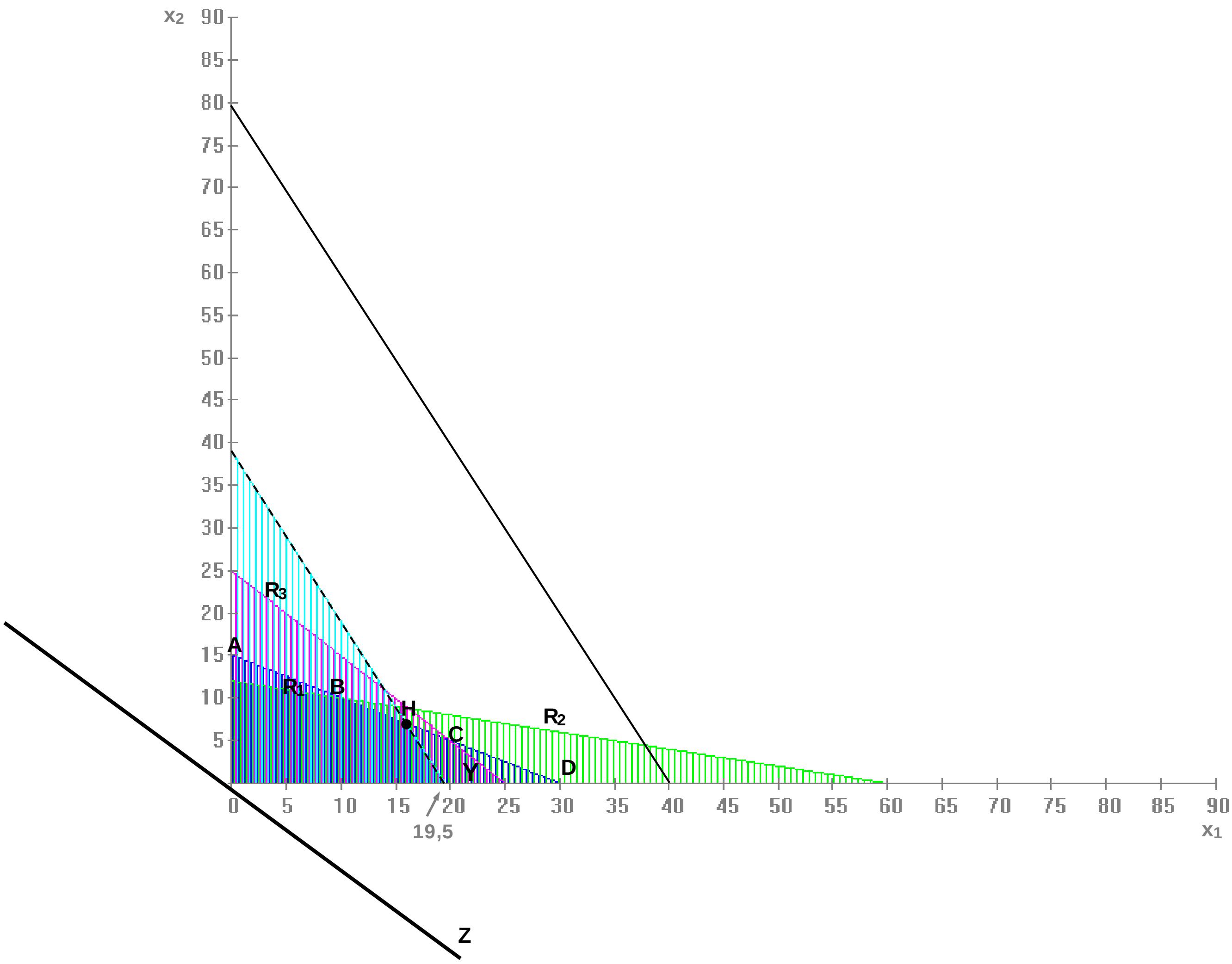
$H = R_1 \cap R''''_4$

El polígono de soluciones es: 0ABHY

H = (16, 7, 0, 450, 24, 0)

H = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)

z= 76



La respuesta que da la Consultora en este caso es la siguiente:

La solución no se altera mientras $b_4 \geq 5{,}625$ litros diarios. Cuando $b_4 < 5{,}625$ litros diarios, la solución cambia, las cantidades son distintas y el funcional es menor. Es decir b_4 tiene un rango de variabilidad que no afecta a la solución.

Variación de b_2

El mismo razonamiento puede hacerse con la otra restricción no saturada: R_2, donde x_4 = 750 (sobran 750 minutos diarios en el sector de filtrado).

Aquí:

$b_2 – x_4 = 3000 \ -750 = 2250$

Se utilizan 2250 minutos diarios de esa restricción. Entonces, mientras $b_2 \geq 2250$, el punto óptimo es C.

Recién cuando $b_2 < 2250$ cambia el punto óptimo y debe comenzar a replantearse el problema.

Variación de b_1

Con respecto a las restricciones saturadas, cualquier modificación de sus valores, altera totalmente el resultado del problema, pues se necesita toda la restricción para cubrir la producción.

Si la restricción saturada, varia, se puede presentar distintos casos:

$b_1 = 900$
$R_1 = 30\ x_1 + 60\ x_2 \leq 900$

i. Si b_1 aumenta, con $b_1>900$, la recta R_1 se desplaza paralelamente alejándose del origen.

   El polígono de soluciones aumenta su superficie.

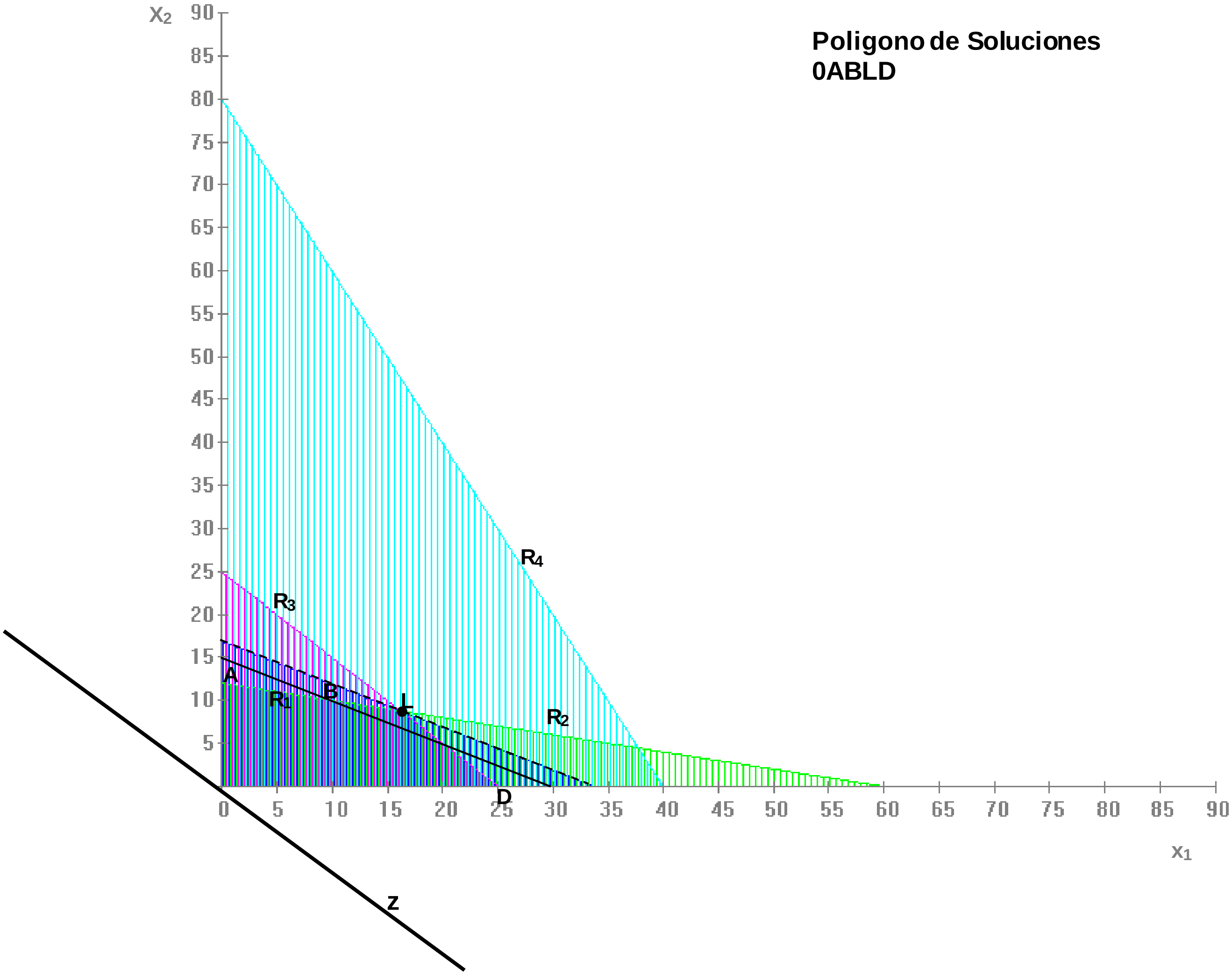
   El punto óptimo:

   C lo siguen formando las mismas restricciones;

   $C = R_3 \cap R_1$, pero se desplaza el punto L = (65/4; 35/4)

   Donde:

   $b_1 = 1012,5$



ii. Si $b_1 > 1012,5$, el óptimo sigue siendo el punto L.

El convexo de soluciones es el polígono: 0ABLD; pero la restricción deja de estar saturada. Hay sobrante en el sector de **Mezcla**.

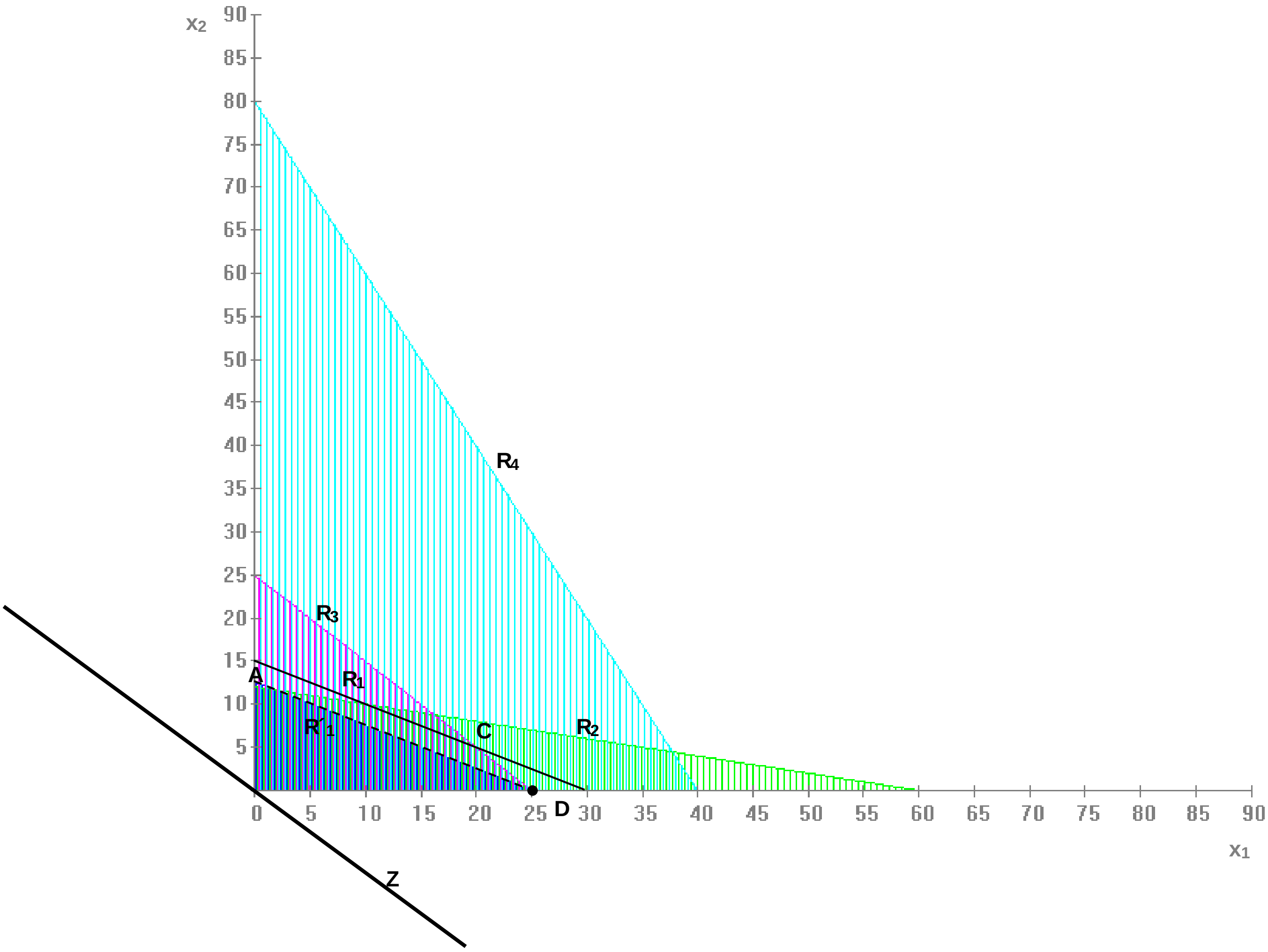
iii. Si b_1 disminuye, $b_1 < 900$.

La recta R_1 se desplaza paralelamente acercándose al origen de coordenadas.

El punto óptimo lo siguen formando las mismas restricciones.

$C = R_3 \cap R_1$, pero el óptimo se desplaza hasta el punto D.

D = (25; 0) con $b_1 = 750$.



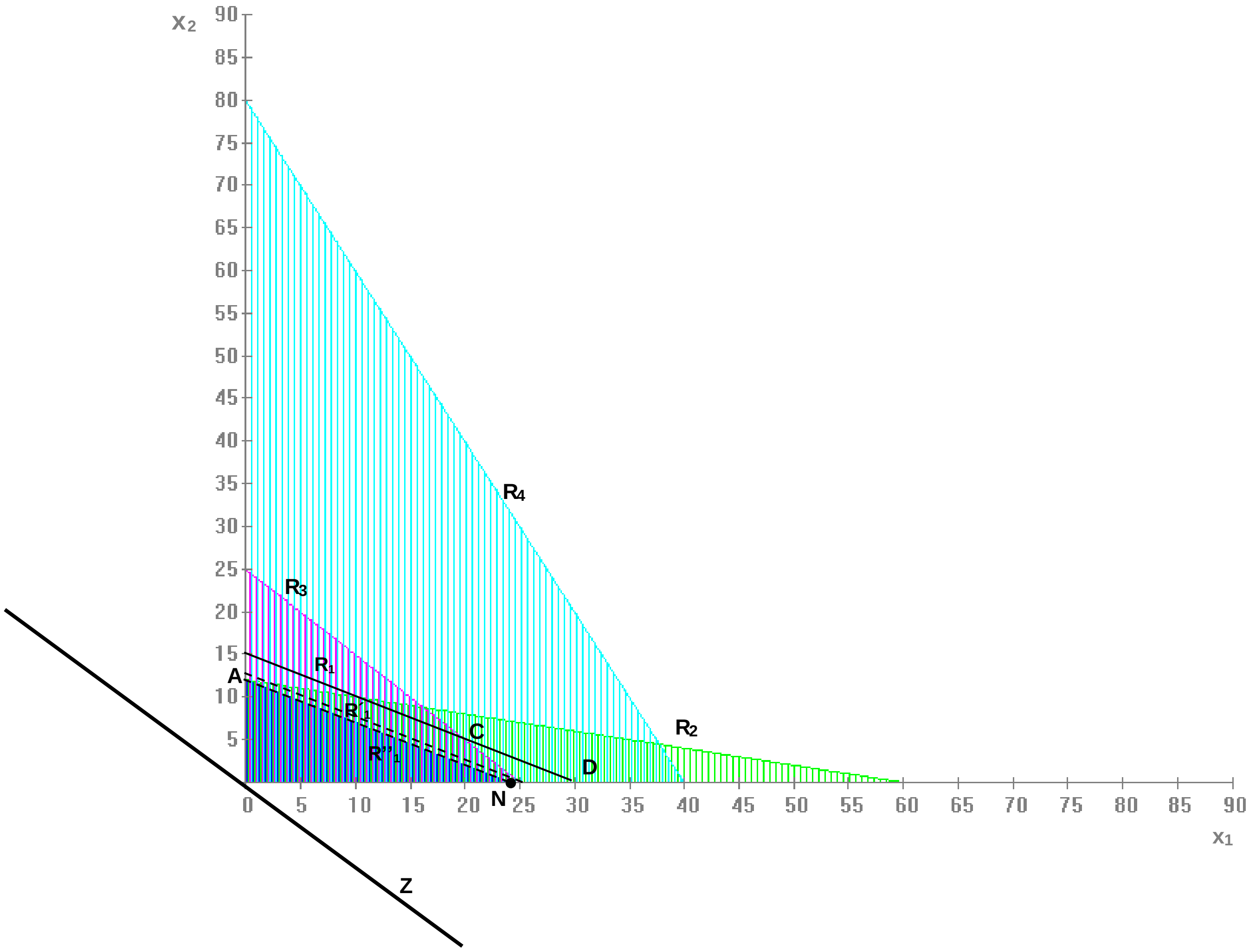
iv. Si $b_1 < 750$ y $b_1 > 720$

La recta R''''_1 sigue desplazándose paralelamente y acercándose al origen de coordenadas.

El punto óptimo lo forman ahora las rectas:

$R''_1 \cap X_1 = N$

El polígono de soluciones es: 0AN



v. Si $b_1 = 720$

El polígono de soluciones es: 0AN y el punto óptimo es el punto N

vi. Si $b_1 < 720$

El polígono de soluciones se reduce cada vez más hasta transformarse solamente en el punto 0; y el óptimo es el punto N, que se sigue desplazando hacia 0

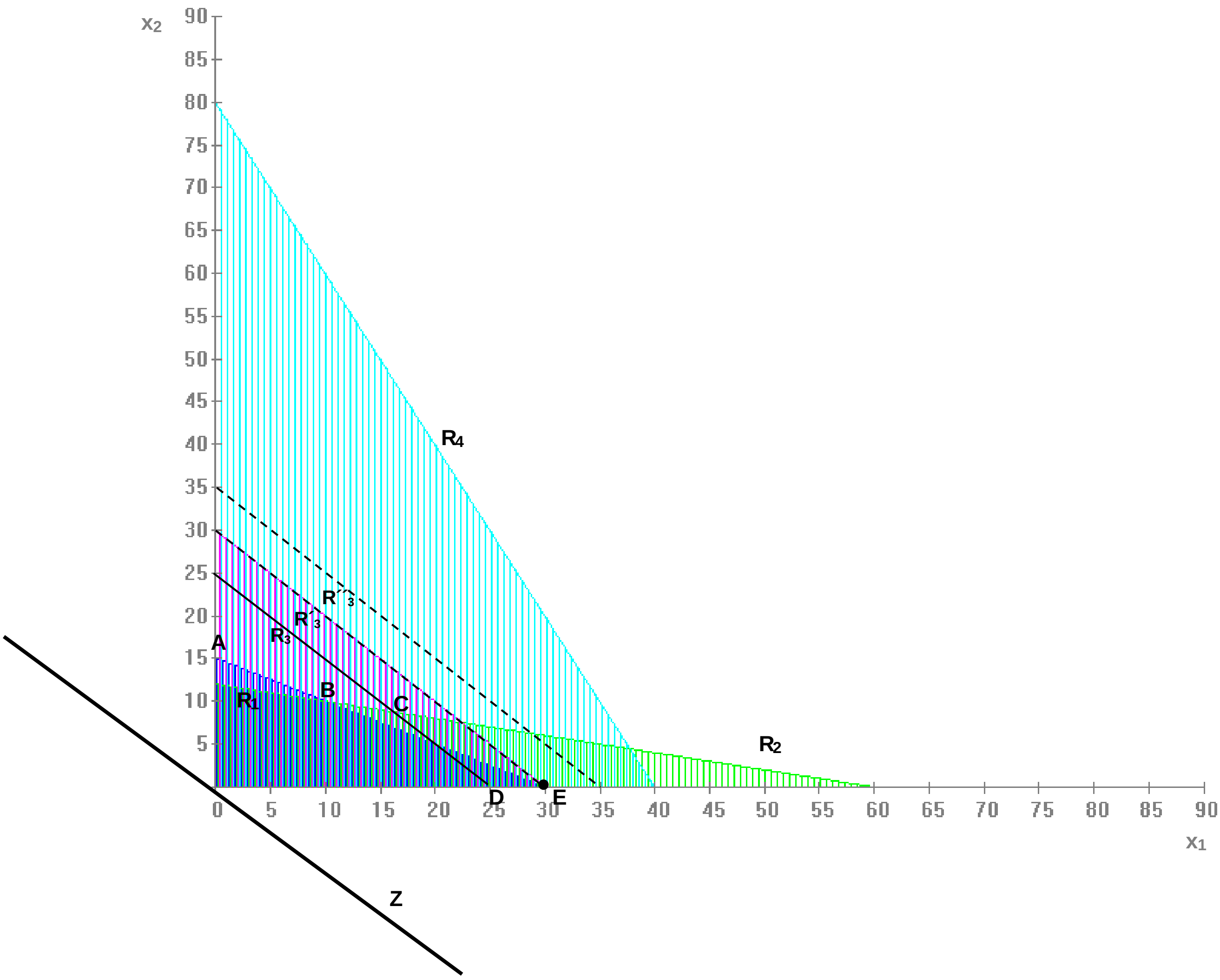
Variación de b_3

Un estudio análogo puede hacerse con R_3, que es la otra restricción saturada.

Las variaciones de $b_3 = 360$, son las siguientes:

i. Si $b_3 > 300$, hasta $b_3 = 360$ el punto óptimo se desplaza hasta el punto E = (30; 0).

El polígono de soluciones se modifica y aumenta. Queda $R´_3$



ii. Si $b_3 > 300$ la recta $R´´_3$ no forma el polígono de soluciones: 0ABE y el punto óptimo sigue siendo E.

iii. Si b_3 disminuye, hasta $b_3 = 300$, el punto óptimo se desplaza hacia B.

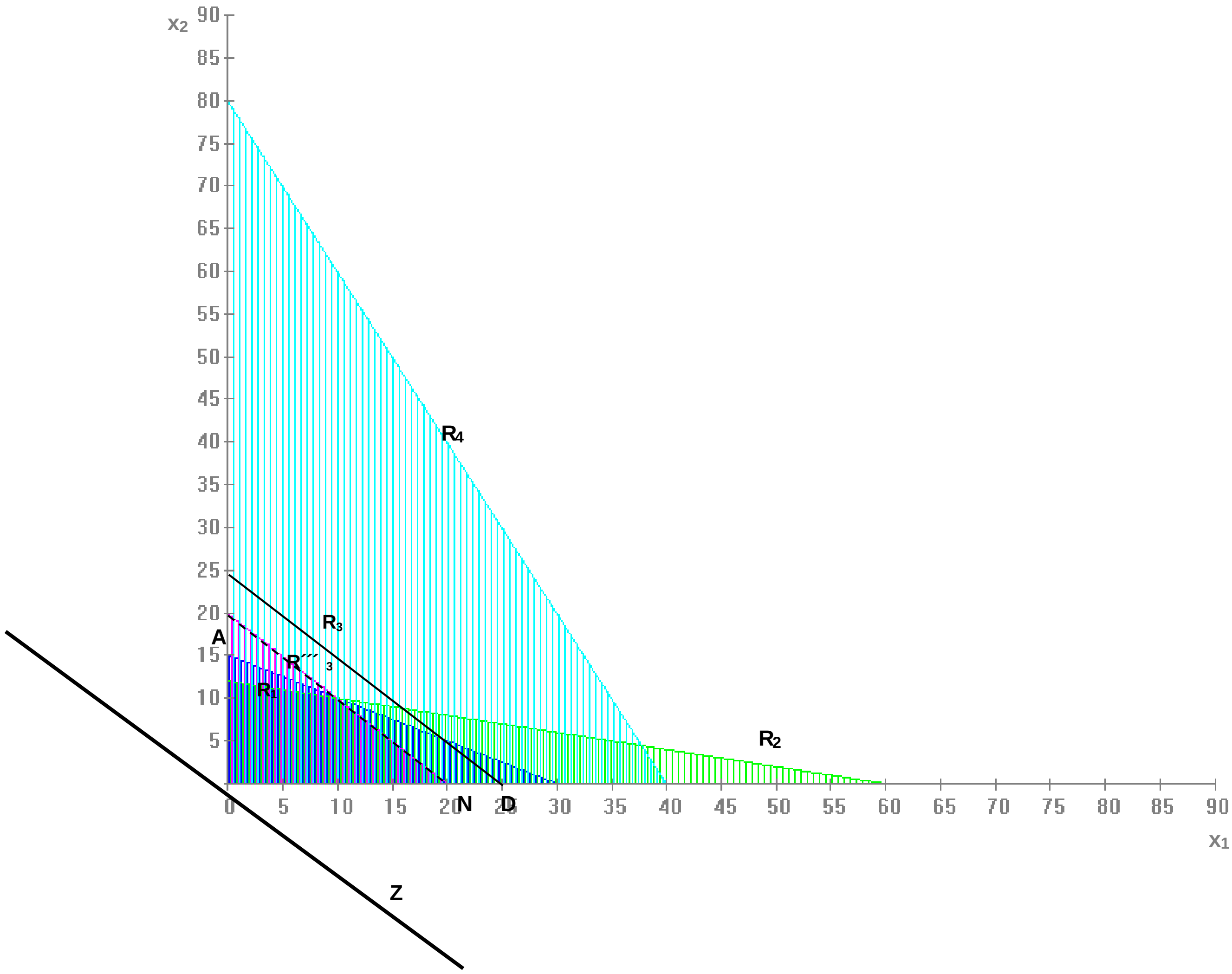
La recta es $R´´´_3$.

El polígono de soluciones es 0ABN.

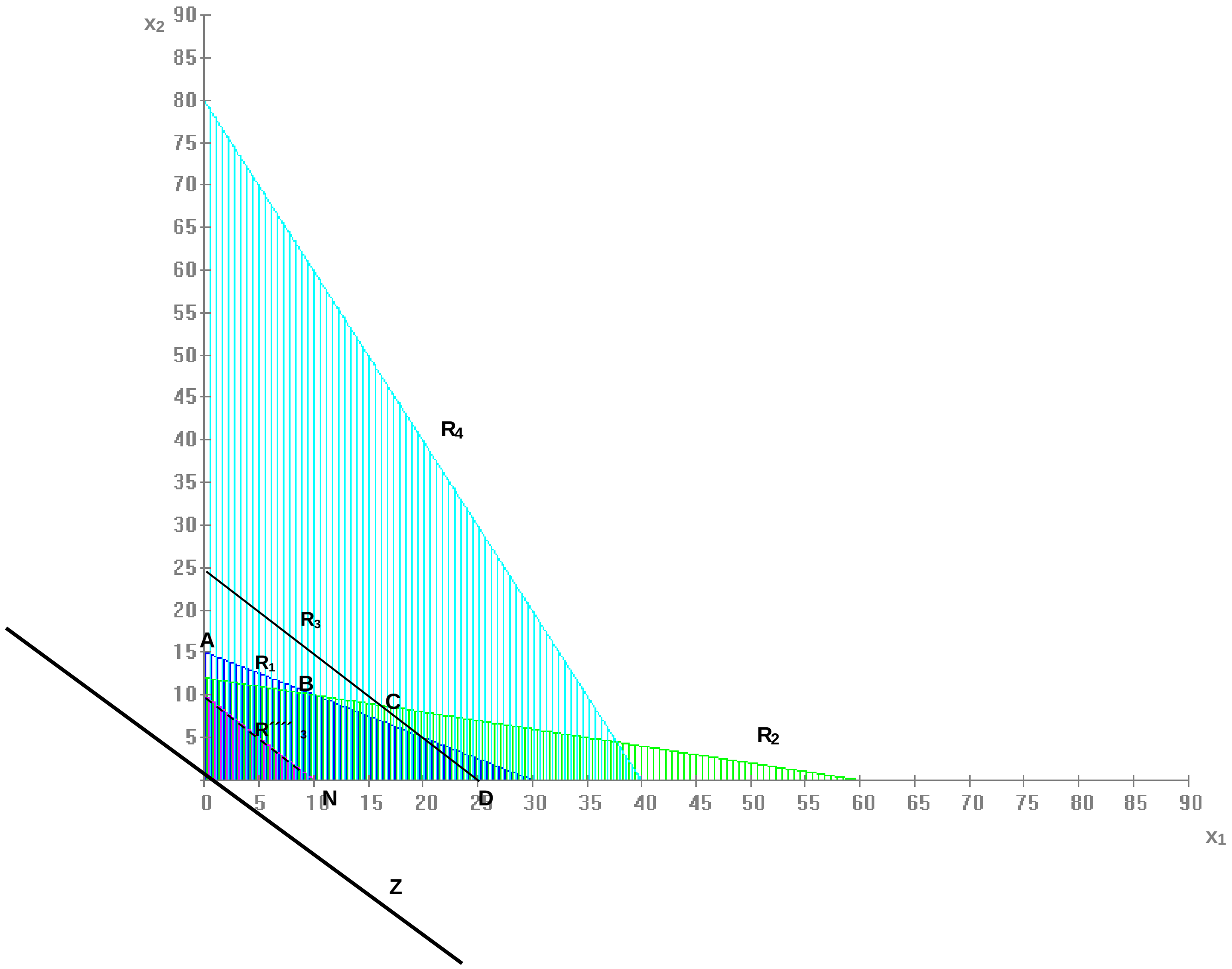
iv. Si $b_3 < 240$ hasta $b_3 = 120$ el punto óptimo se desplaza hasta A.

El polígono de soluciones se reduce al convexo: 0AN.

La recta es: R''''_3.



v. Si $b_3 < 120$, el punto óptimo se desplaza hasta 0 pues el polígono de soluciones se reduce hasta el punto 0.



Estos resultados son resumidos por la Consultora en el siguiente cuadro:

RANGO DE VARIACIONES DE LAS RESTRICCIONES DENTRO DE LAS CUALES NO SE ALTERA LA SOLUCION ÓPTIMA.

RESTRICCION	RANGO
b_1	Saturada, no puede modificarse sin modificar el resultado.
b_2	≥ 2250 minutos diarios, no se modifica el resultado, si b_2 > 2250 el excedente de esta cantidad no se utiliza. Si b_2 = 2250, restricción saturada (idem b_1)
b_3	saturada, idem b_1
b_4	≥ 5,625 litros diarios, (idem b_2)

Variación de c_i (beneficios)

La Gerencia por su parte también quiere conocer que fluctuaciones puede tener cada uno de los beneficios que deja cada artículo.

Si dichos beneficios aumentan, la ganancia será mayor, pero estos aumentos pueden no ser proporcionales entre si, en cuyo caso cabe la posibilidad de que la producción de uno de los dos artículos deje de ser conveniente.

La consultora estudió las variaciones de cada beneficio por separado.

$Z = 3\ x_1 + 4\ x_2$

Si se llama:
$Z = c_1\ x_1 + c_2\ x_2$

Variación de c_1

En el gráfico, la recta z (óptima) queda entre las restricciones, R_1 y R_3.
Las variaciones de c_1, modificaran la pendiente del funcional, la recta z oscilará, hasta ponerse coincidente con R1 o con R3 que serán los valores extremos que podrá tomar la pendiente de z, sin moverse del punto C.

Pendiente de $z = -\dfrac{c_1}{c_2}$

Si se deja fijo $c_2 = 4$, queda:

Pendiente de $z = -\dfrac{c_1}{4}$

como la pendiente de R_3 es $z = -\dfrac{12}{12}$

Si la pendiente de z = a la pendiente de R_3, entonces:

$$-\frac{c_1}{4} = -\frac{12}{12}$$

Resulta: C1 =4

Además, como la pendiente de $R_1 = -\frac{30}{60}$

Si la pendiente de z = a la pendiente de R_1

$$-\frac{c_1}{4} = -\frac{30}{60}$$

Resulta: C1 = 2

Luego el rango de variación de $c_1 = (2; 4)$

Es decir:
Mientras el beneficio de PLAFA se mantenga entre los valores de 2 y 4 el punto óptimo C no varia.

La producción de cada artículo no cambia, como tampoco los usos de las restricciones, si bien el beneficio total presenta modificaciones.

Variación de c_2

Pendiente de $z = -\frac{c_1}{c2}$

Si se deja fijo $c_1 = 3$, queda:

Pendiente de $z = -\frac{3}{c_2}$

si la pendiente de z = a la pendiente de R_1, entonces:

$$-\frac{3}{c_2} = -\frac{30}{60}$$

Resulta: C2 =6

Además, como la pendiente de $R_3 = -\frac{12}{12}$

Si la pendiente de z = a la pendiente de R_3

$$-\frac{3}{c_2} = -\frac{12}{12}$$

Resulta: C2 = 3

Luego el rango de variación de C2 = (3; 6)

Es decir:

Mientras el beneficio de PLAIN se mantenga entre los valores de 3 y 6 el punto óptimo C no varia.

La producción de cada artículo no cambia, si bien el beneficio total presenta modificaciones. Los usos de las restricciones no cambian.

Estos resultados se agregan a la respuesta de la Consultora:

RANGO DE VARIACIONES DE LOS COEFICIENTES DEL FUNCIONAL DENTRO DE LAS CUALES NO SE ALTERA EL PUNTO ÓPTIMO.

RESTRICCION	RANGO
c_1	2:3
c_2	3:6

Agregado de una restricción de ≥

Estudios de mercado realizados posteriormente, señalan la conveniencia de entregar una cantidad mínima de PLAFA de 8 litros diarios.

Este nuevo dato entregado a la Consultora, hace que al modelo matemático se le deba agregar una nueva restricción más: R_5.

R_5: $x_1 \geq 8$

Aquí $b_5 = 8$.
En este caso la restricción es de mínimo. La ecuación con el agregado de una nueva variable slack queda:

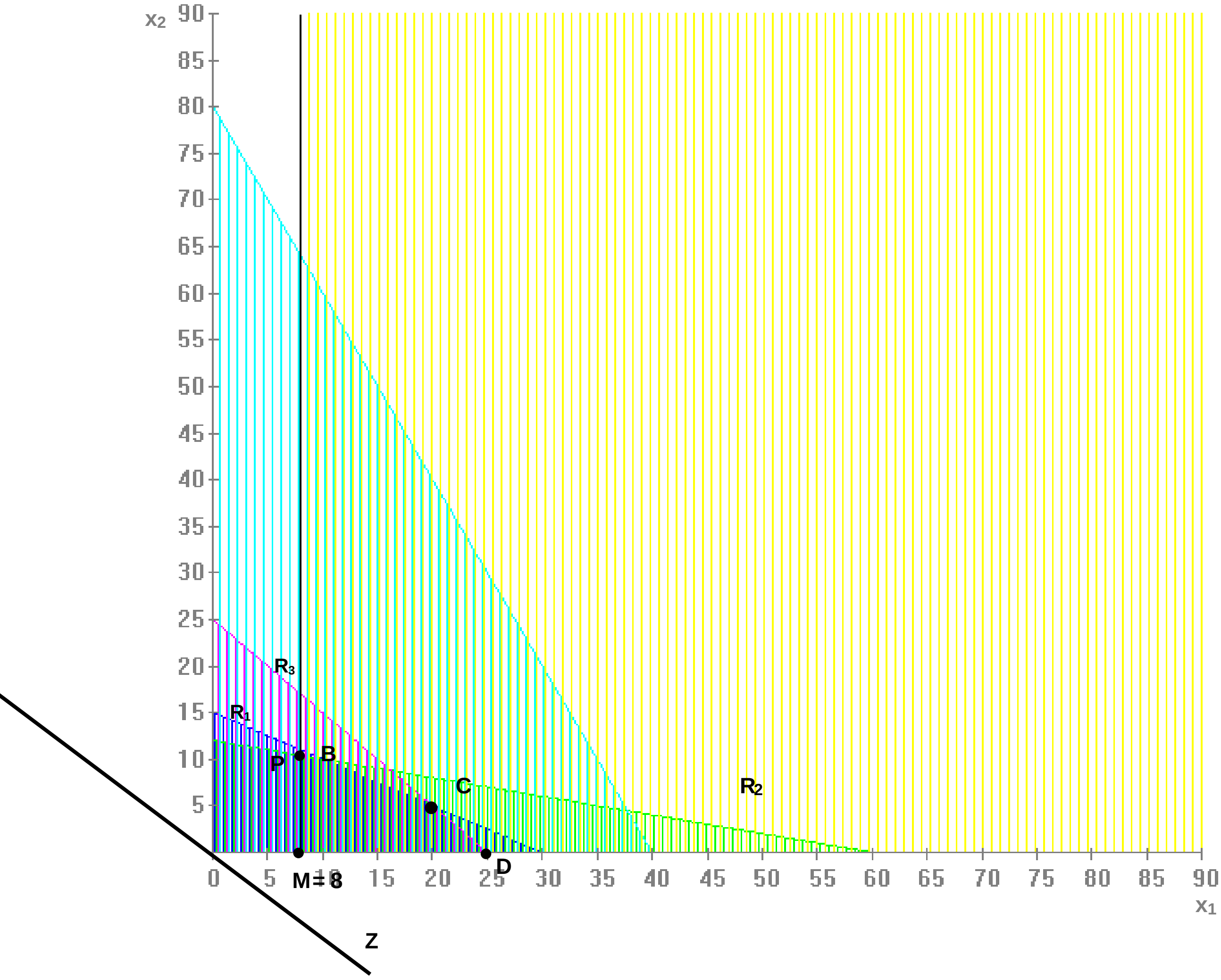
R_5: $x_1 - x_7 = 8$

Donde:

VARIABLE	CLASE	SIGNIFICADO	UNIDAD
X_7	Slack	Excedente de litros diarios de PLAFA producidos sobre el requerimiento mínimo	Litros de PLAFA

También $x_7 \geq 0$

El nuevo gráfico queda:



El convexo de soluciones se reduce al polígono MPBCD

Pero el punto óptimo sigue siendo C con una nueva coordenada: $x_7 = 12$ (se producen 12 litros diarios de PLAFA sobre el requerimiento mínimo).

$C = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7)$

$C = (20; 5; 0; 750; 0; 4{,}375; 12)$

Además mientras x_5 varíe entre 0 y 20, es decir:

i. $0 \leq b_5 \leq 20$

La recta x_5 se desplazará paralelamente al eje de las x_2, alejándose del origen de coordenadas y achicando el polígono de soluciones, pero manteniendo el mismo punto óptimo C.

x_7 se irá reduciendo hasta anularse (saturado).

$20 \geq x_7 \geq 0$

Si b_5 aumenta

ii. $20 \le b_5 \le 25$ el polígono de soluciones continua disminuyendo pero el punto óptimo cambia, desplazándose sobe el lado CD del polígono.

Por ejemplo, si $b_5 = 22$

El modelo matemático queda:

$z = 3\ x_1 + 4\ x_2$ ----> MAXIMIZAR

$$
\begin{cases}
30\ x_1 + 60\ x_2 + x_3 = 900 \\
50\ x_1 + 250\ x_2 + x_4 = 3000 \\
12\ x_1 + 12\ x_2 + x_5 = 300 \\
1/4\ x_1 + 1/8\ x_2 + x_6 = 10 \\
x_1 + x_7 = 22
\end{cases}
$$

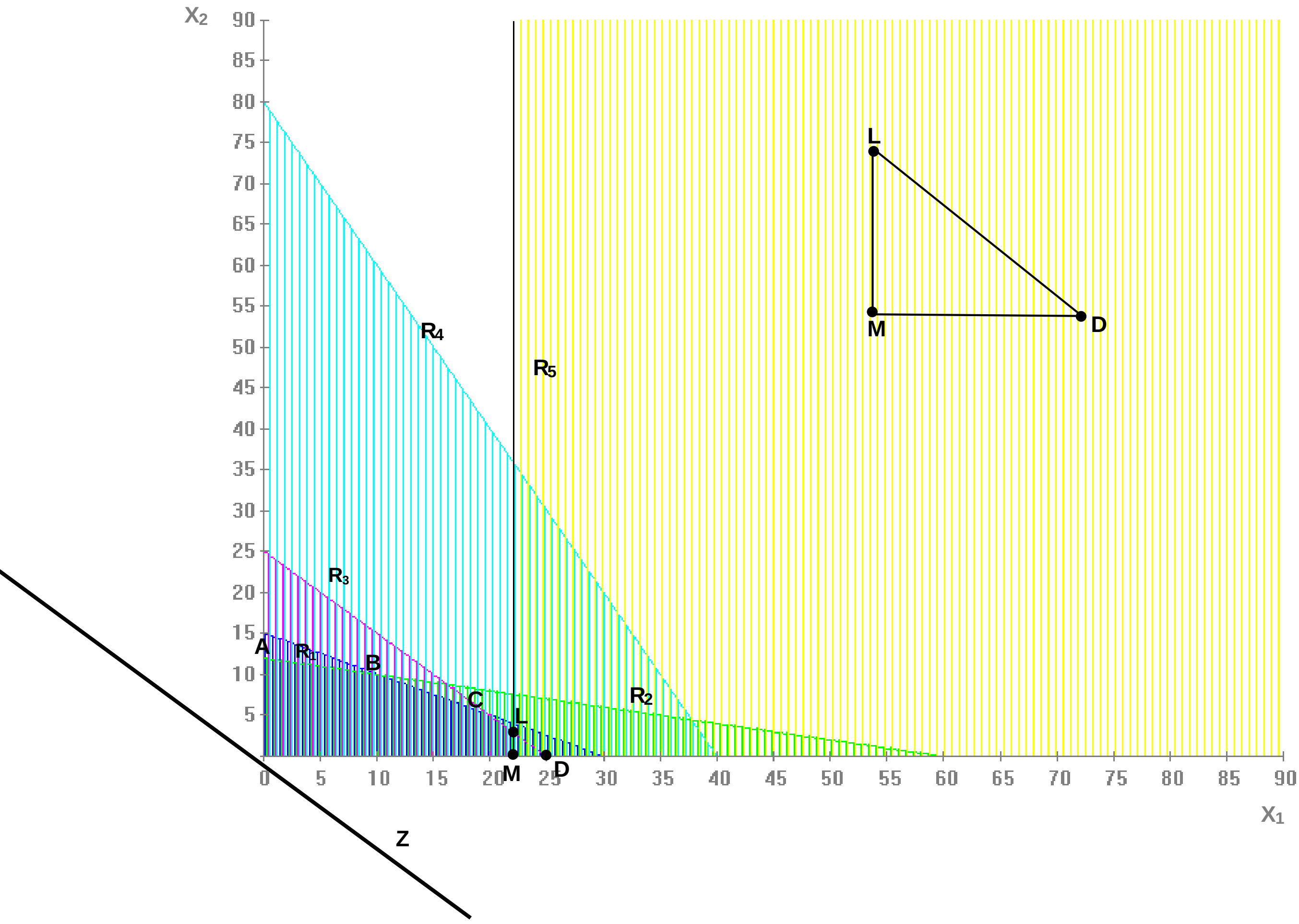
y en el gráfico:

El convexo de soluciones es MLD, con L como punto óptimo.

$L = R_3 \cap R_5$

L = (22; 3; 60, 1150; 0; 4,125; 0)

z = 78



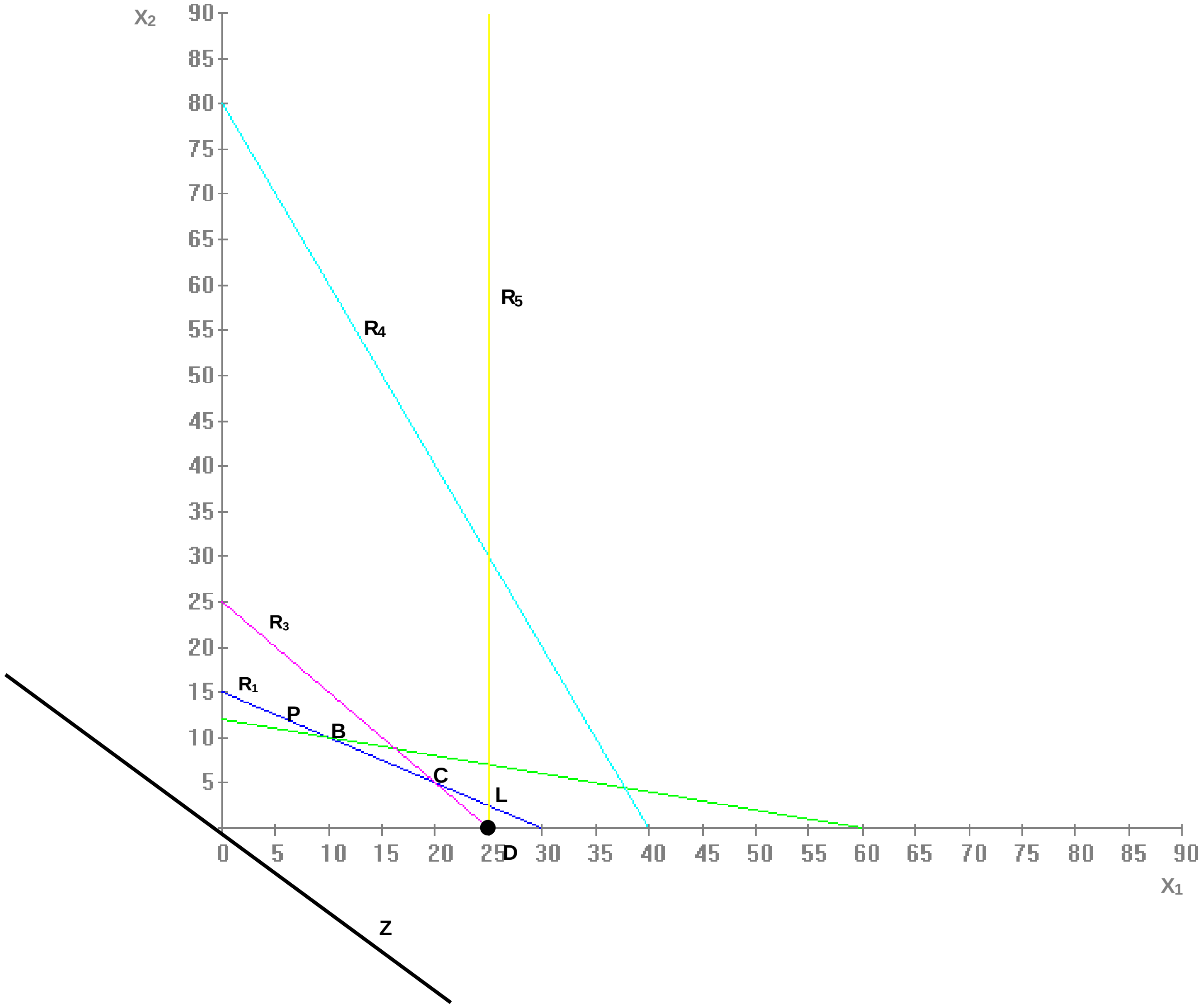
iii. Si $b_5 = 25$

El convexo de soluciones se reduce al punto D y este es el punto óptimo.

$D = R_5 \cap R_3 \cap x_1$

D = (25; 0; 150; 1750; 0; 3,75; 0)

z = 75

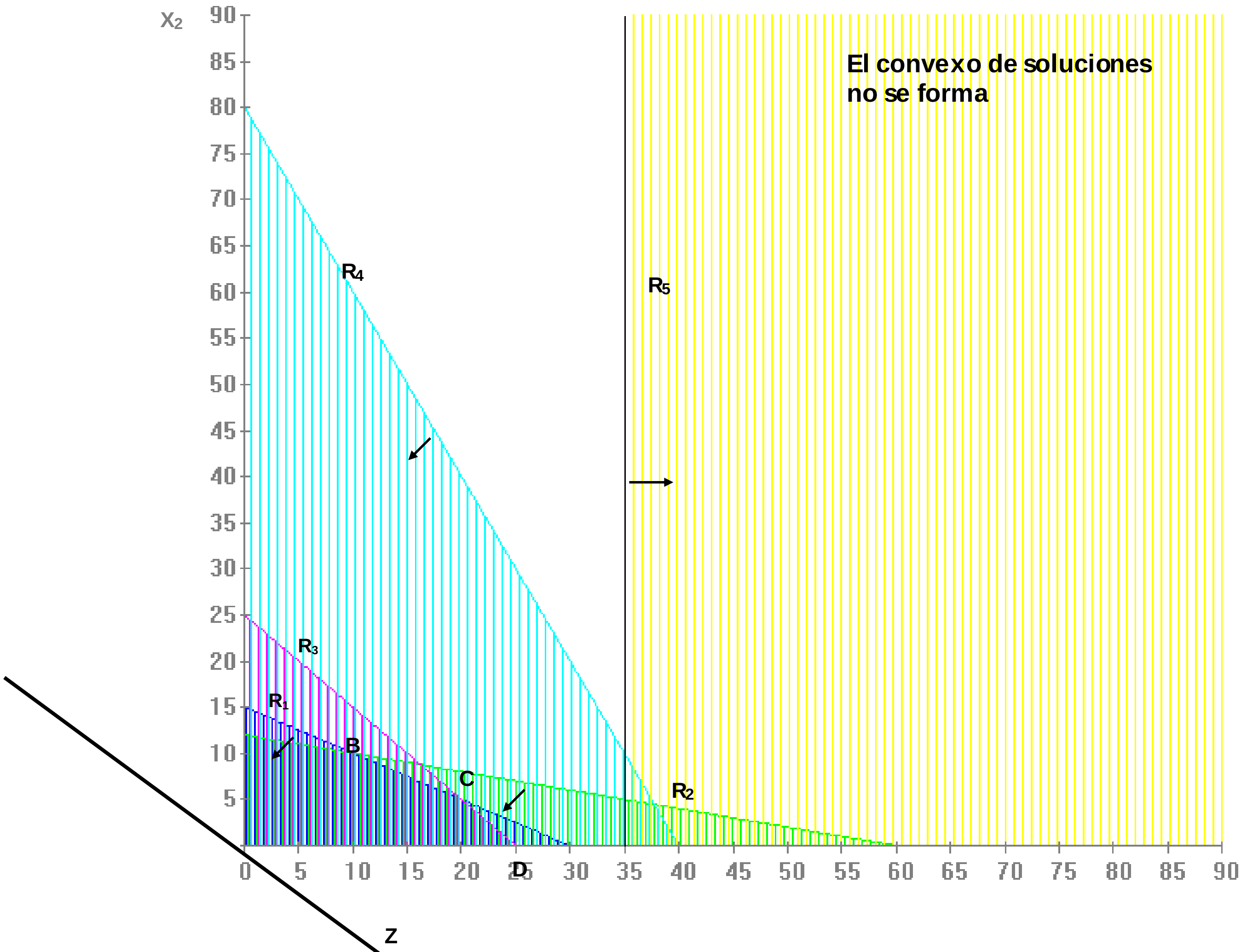


iv. Si $b_5 > 25$

Esto es un pedido incompatible con el resto de las restricciones de la planta. No se puede elaborar más de 25 litros diarios de PLAFA, pues no hay tiempos disponibles en el sector de elaboración.

Por ejemplo, si $b_5 = 35$

El gráfico queda:



A esta altura de la consultora surge otro planteo:

Introducción a la resolución con 3 o más variables

La empresa Química, decide elaborar en forma experimental un nuevo fertilizante, el cual deberá compartir con los otros 2 plaguicidas; los tiempos de los 3 sectores claves: Mezcla, Filtrado y Envasado.

Los tiempos que necesita de cada uno de ellos, por litro son:

20 minutos diarios
25 minutos diarios
12 minutos diarios, respectivamente.

Si bien la elaboración del fertilizante utiliza otros insumos y pasa por otras áreas, solo estas 3 constituyen el "cuello de botella" del problema. Solamente las 3 restricciones originales son las que van a intervenir ahora.
Además el beneficio que deja la venta es de 7$ por litro.

Con estos nuevos datos la Consultora trabaja en la elaboración de otro modelo matemático. Agrega una nueva variable real: x_N

VARIABLE	**CLASE**	**SIGNIFICADO**	**UNIDAD**
X_N	Real	Litros de fertilizante producido diariamente	Litros de fertilizante

Donde también se cumple $x_N \geq 0$

El modelo primitivo de inecuaciones queda:

R1: $30\ x_1 + 60\ x2 + 20\ x_N \leq 900$
R2: $50\ x_1 + 250\ x2 + 25\ x_N \leq 3000$
R3: $12\ x_1 + 12\ x2 + 12\ x_N \leq 300$
R4: $1/4\ x_1 + 1/8\ x2 + 0\ x_N \leq 10$

El coeficiente de X_N en la R_4 es nulo, dado que la fabricación del fertilizante, no requiere combustible.

El funcional queda:

$$z = 3\,x_1 + 4\,x_2 + 7\,x_N \text{ ---->MAXIMIZAR}$$

Aquí se tiene 3 variables reales: son los productos que se elaboran.

La representación gráfica corresponde a R_3 y en el espacio de 3 dimensiones encontrar la solución gráfica.

Las respectivas ecuaciones son:

$$\begin{array}{lllllllll}
30 & x_1 + 60 & x_2 + 20 & x_N & + x_3 & & & = & 900 \\
50 & x_1 + 250 & x_2 + & x_N & & + x_4 & & = & 3000 \\
12 & x_1 + 12 & x_2 + 12 & x_N & & & + x_5 & = & 300 \\
1/4 & x_1 + 1/8 & x_2 + 0 & x_N & & & \quad + x_6 & = & 10
\end{array}$$

Donde x_3, x_4, x_5 y x_6 son variables slack y tienen el mismo significado anterior.

Si la cantidad de artículos que se quiere producir fueran 4, la representación debería hacerse en R_4 y así sucesivamente.

Para hallar la solución numérica es necesario recurrir entonces a otros métodos.

Los teoremas que fundamentan esta respuesta constituyen la base del **METODO SIMPLEX DE PROGRAMACION LINEAL**.

El mecanismo de este método, es un algoritmo muy fácil de realizar, puede hacerse manualmente. Pero también, actualmente se encuentra implementado en programas utilitarios de computadora.
Estos programas no solo dan como respuesta las coordenadas del punto óptimo:

$x_0 = (x_1; x_2; \ldots; x_N)$

o los valores de las variables reales, slack y el valor del funcional, sino que ofrecen al usuario otras informaciones adicionales, con respecto a los recursos (saturados o no) y a los artículos (producidos o no).

En el primer ejemplo daría:

$x_0 = (20; 5; 0; 750; 0, 4{,}375)$

Dadas en orden, las 2 primeras son las variables reales y las siguientes las slacks de las restricciones sucesivas.

Z = 80

Pérdidas, Agregado, Reciclaje, Mezcla y Capacidad de Producción

Pérdida

Situación que sucede habitualmente en la realidad, cuando se trabaja con porcentajes.

- <u>**Pérdida en un centro**</u>

O también se puede plantear:

¿Cuánto debe entrar?

x ———————— (1-P) x

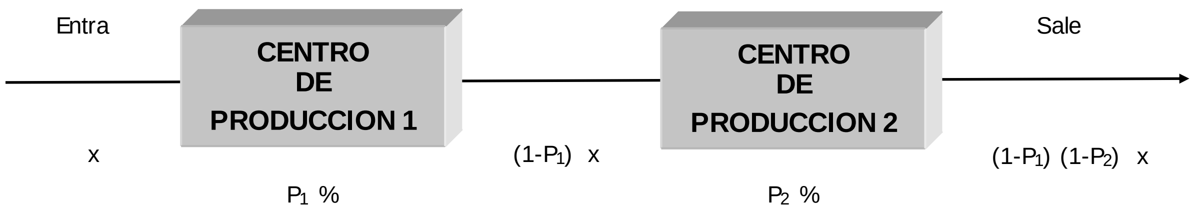
? ———————— x

Regla de 3 simple

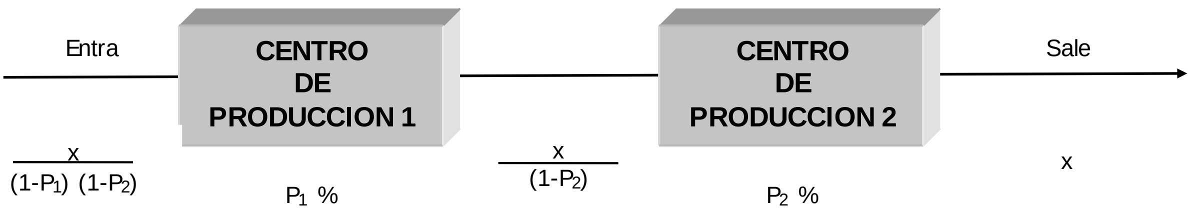
$$\frac{x^2}{(1-P)\,x}$$

P: Pérdida (%)
1-P: Rendimiento
x: cantidad original
Entra x en un centro y durante el proceso se produce una pérdida P (%).

- **Pérdida en varios centros sucesivos**



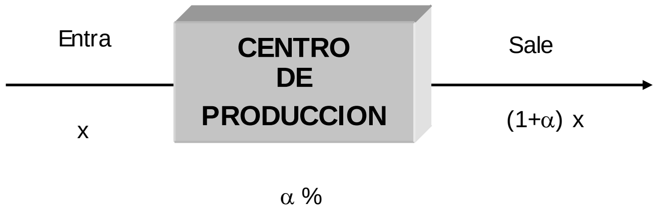
Planteado de la otra manera:



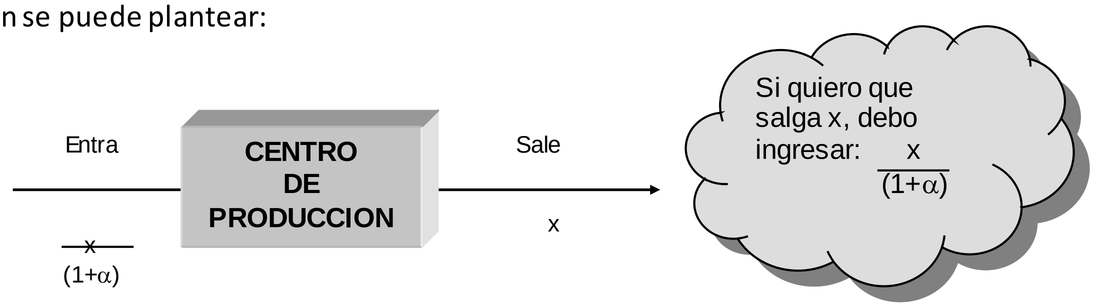
Agregado

Se introduce durante el proceso un porcentaje de “algo” .

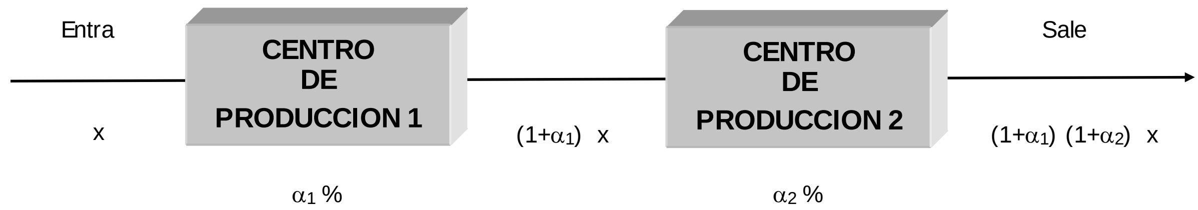
- **<u>Agregado en un centro</u>**



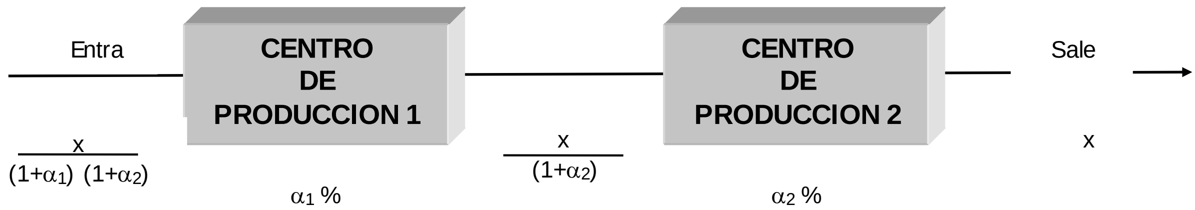
O también se puede plantear:

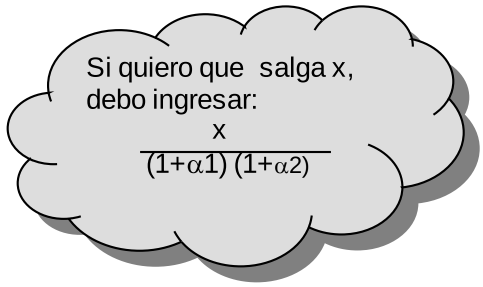


- **Agregado en varios centros sucesivos**



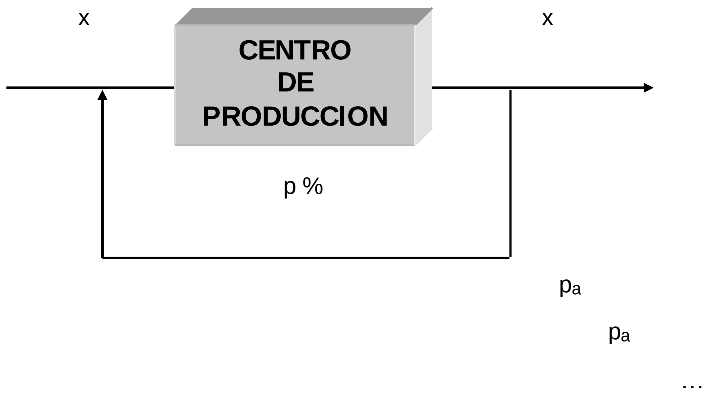
Planteado de la otra manera:





Reciclaje

Por cada unidad **x** se pierde **p**, ese **p** que se pierde se lo hace ingresar nuevamente a la línea de proceso.



Por cada unidad en el centro pasan

$$\frac{x}{(1-P)}$$

Serie 1+ Pa + Pa + …

Serie geométrica con n --> ∞, es la cantidad inicial + la suma de lo que se va reciclando.

Mezcla

Vamos a verlo con un ejemplo.-

- **Ejemplo**

Una empresa tiene 2 oficinas y se quiere distribuir personal, hombres y mujeres de tal manera que en la oficina 1 haya al menos un 40% de mujeres y en la oficina 2 a lo sumo el 60% de mujeres, el total del personal no debe superar a 51 personas. El sueldo de cada uno es:

SEXO	OFICINA	SUELDO ($)
F	Oficina 1	100
M	Oficina 1	120
F	Oficina 2	80
M	Oficina 2	150

Variables reales

x_1: Cantidad de mujeres en la oficina 1 a contratar por mes.
x_2: Cantidad de varones en la oficina 1 a contratar por mes.
x_3: Cantidad de mujeres en la oficina 2 a contratar por mes.
x_4: Cantidad de varones en la oficina 2 a contratar por mes.

Función Objetivo:

$z = 100\ x_1 + 120\ x_2 + 180\ x_3 + 150\ x_4$ -----> MIN

Restricciones:

R1: $x_1 \geq 40\ \underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{Total de personas en la oficina 1}}$ ó $x_1 \geq 0.40\ (x_1+x_2)$

Haciendo pasaje de términos:

$x_1 – 0,4\ x_1 – 0,4\ x_2 \geq 0$

Queda:

$\boxed{\textbf{R1}: \quad 0,6\ x_1 – 0,4\ x_2 \geq 0}$

R2: $x_3 \leq 0.60\ (x_3+x_4)$

Total de personas en la oficina 1

Queda:

R2: $0,4\ x_3 - 0,6\ x_4 \leq 0$

R3: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 51$

Agrego slacks

$z = 100\ x_1 + 120\ x_2 + 180\ x_3 + 150\ x_4 + 0\ x_5 + 0\ x_6 + 0\ x_7$ -----> MIN

R1: $0,6\ x_1 - 0,4\ x_2 - x_5 = 0$

R2: $0,4\ x_3 - 0,6\ x_4 + x_6 = 0$

R3: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 51$

Análisis:

Oficina

$x_1 + x_2$

P%

$$x_i \quad \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \quad \mathbf{P\,\%} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Capacidad de Producción

Vamos a verlo con un ejemplo.-

- **Ejemplo 1**

Una máquina estampa circuitos, su capacidad de producción es 1 y se mide por cantidad de productos estampados; la capacidad de la máquina es la misma y no depende de los tamaños de los circuitos, si se estampa 3 tipos de circuitos y la cantidad que se puede estampar es:

CLASE	CANTIDAD QUE SE PUEDE ESTAMPAR
A	N_A
B	N_B
C	N_C

De cada una, si se procesa sólo una clase, la capacidad es de 100% = 1. Pero si se desea estampar las 3 clases hay que designar variables.

Variables
Xi: Cantidades de circuitos que se pueden estampar de cada clase.

$x_A \leq N_A$

$x_B \leq N_B$

$x_C \leq N_C$

Restricciones:

Para estampar solo un tipo

R1: $\frac{1}{N_A} x_A \leq 1$

Donde $1/N_A$ es la capacidad de producir un plato A.

Para estampar los tres tipos

R1: $\frac{1}{N_A} x_A + \frac{1}{N_B} x_B + \frac{1}{N_C} x_C \leq 1$