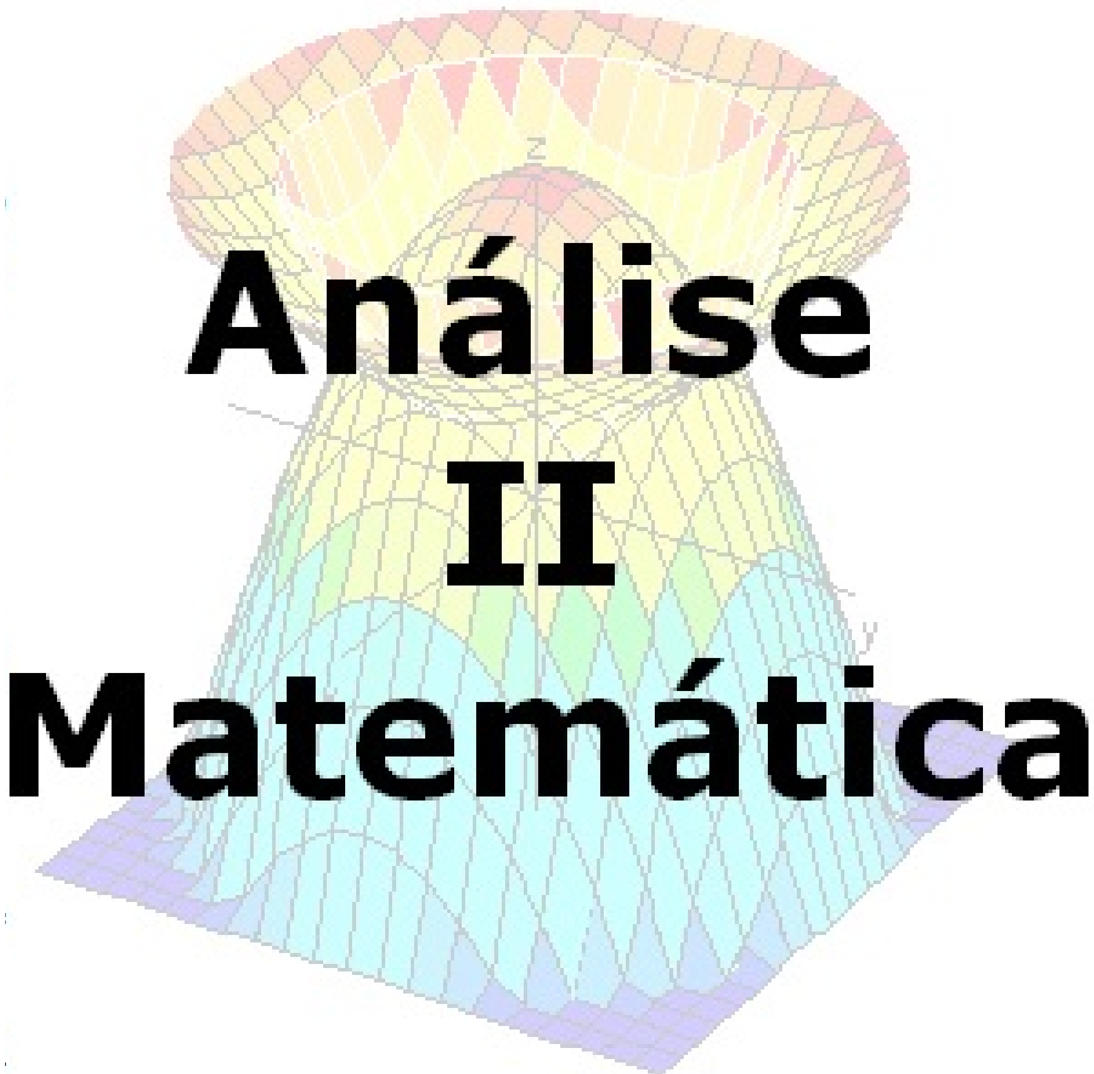
Atividade 03 Trabalho

MNuméricos para EDO/PVI



Realizado por:

Igor Coimbra Carvalheira – 2024128677– Eng. Informática CE

Lucas de Carvalho Pantarotto Vidigal Alves – 2024143625– Eng. Informática CE

Rafael José da Cruz Carvalho – 2024143302– Eng. Informática CE

isec Engenharia

Índice

Introdução

Este trabalho tem como objetivo adquirir conhecimentos sobre métodos numéricos para resolução de EDOs/PVIs. Deste modo é encorajado que sejam desenvolvidos os métodos numéricos na ferramenta Matlab de modo a adquirir capacidades e competências em computação no mesmo.

Equação diferencial

Uma equação diferencial é uma equação que utiliza a respetiva derivada de uma ou mais funções, tendo em conta as variáveis independentes correspondentes a cada função. Tem como incógnita uma função que aparece na equação como derivada.

São frequentemente usadas na construção de modelos matemáticos de fenómenos físicos. (wikipedia, 2024)

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada presente na equação diferencial. Exemplo de uma *EDO* de segunda ordem:

$$2y'' + y' + 2 = 0$$

Uma equação diferencial é linear se for possível escrevê-la na forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Equação Diferencial Ordinária (EDO)

Se uma equação diferencial depende apenas e exclusivamente de uma variável independente, esta designa se equação diferencial ordinária, ou, EDO.

Exemplo:

$$\frac{dx}{dt} + x = 1$$

Equação Diferencial Parcial (EDP)

Se uma equação diferencial contém uma ou mais funções e respectivas derivadas dependentes de duas ou mais variáveis independentes, esta designa se equação diferencial parcial, ou, EDP

Exemplo:

$$y\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} = a$$

Definição de PVI

Na matemática, um problema de valor inicial (PVI), problema de condições iniciais, ou também conhecido como problema de *Cauchy*, é uma equação diferencial que é acompanhada pelo valor da função objetivo num determinado ponto, chamado de valor inicial ou condição inicial.

Uma PVI é uma equação diferencial que descreve uma relação entre uma função e as suas derivadas, e que é acompanhada de um valor inicial para a função e as suas derivadas.

Um problema de valor inicial é composto por uma equação diferencial juntamente da atribuição do valor das funções desejadas num ponto que denotamos abaixo por t_0. Formalmente um problema de valor inicial (PVI) é definido pelas equações

$$y'(t) = f(t, y(t)), \ t > t0$$

$$y(t0) = y0,$$

em que

$$y : R \to R, \ f : R \times R \to R \ e \ t0, \ y0$$

Podemos assim concluir que são constantes reais.

Métodos Numéricos para resolução de PVI

Método de Euler

Na matemática e na ciência computacional, o método de Euler, é um procedimento numérico de primeira ordem para solucionar equações diferenciais ordinárias com um valor inicial conhecido. É o tipo mais básico de método explícito para integração numérica para equações diferenciais ordinárias.

Fórmulas

Supondo-se que se quer aproximar a solução de um problema de valor inicial:

$$y'(t)=f(t,y(t)),y(t0)=y0$$

Escolhendo um valor para o tamanho do passo hhh e atribuindo a cada passo um ponto dentro do intervalo, temos que:

$$tn=t0+nh$$

No próximo passo, o valor de “t n+1”, a partir do anterior “tn”, fica definido como:

$$tn+1=tn+h$$

Então, a fórmula de Euler é dada por:

yn+1=yn+h · f(tn,yn)

Com isso, para um valor menor de hhh, iremos ter mais passos dentro de um dado intervalo, o que fará com que a exatidão seja muito superior (isto é, mais próxima do valor real).

O valor de yn é uma aproximação da solução da **EDO** no ponto tn:

yn≈y(tn)

Enquanto o Método de Euler integra uma EDO de primeira ordem, qualquer EDO de ordem N pode ser representada como uma equação de primeira ordem: tendo a equação

$$y^{(N)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(N-1)}(t)),$$

temos a introdução de variáveis auxiliares

$$z_1(t) = y(t), z_2(t) = y'(t), \ldots, z_N(t) = y^{(N-1)}(t)$$

obtendo a seguinte equação:

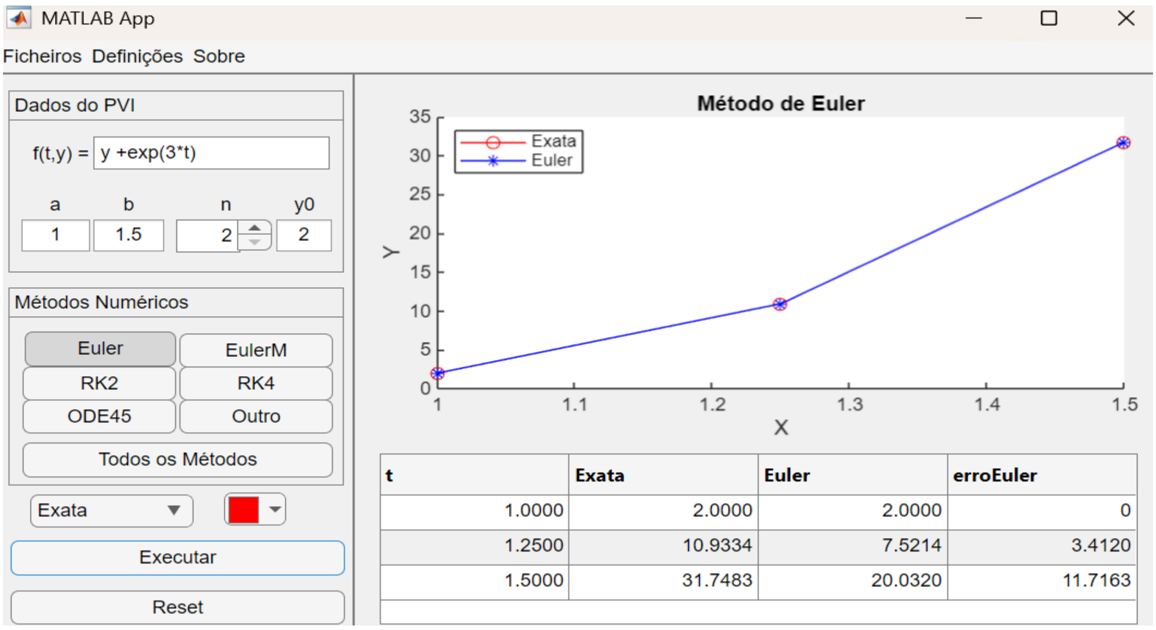
$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_{N-1}'(t) \\ z_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(t) \\ y^{(N)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \\ f(t, z_1(t), \ldots, z_N(t)) \end{pmatrix}$$

Este é um sistema de primeira ordem na variável $z(t)$ e pode ser usada através do Método de Euler ou quaisquer outros métodos de resoluções de sistemas de primeira ordem.

Algoritmo/Função

```matlab
% ---> NEULER Método de Euler para resolução numérica de EDO/PVI
%INPUT:
% f - função da EDO y'=f(t,y)
% [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
% n - número de subintervalos ou iterações do método
% y0 - aproximação inicial y(a)=y0
%OUTPUT:
% t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
% y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
%     com t(i+1)=t(i)+h;
%AUTORES:
% Igor Carvalheira a2024128677@isec.pt
% Lucas Pantarotto a2024143625@isec.pt
% Rafael Carvalho a2024143302@isec.pt
function [t,y] = NEuler(f,a,b,n,y0)
    h = (b-a)/n;            % Calcula o tamanho do passo (h) com base no intervalo [a,b] e número de subintervalos n
    t = a:h:b;              % Cria o vetor t com os pontos discretizados do intervalo [a,b]
    y = zeros(1,n+1);        % Inicializa o vetor y com n elementos (devia ser n+1 para ser geral)
    y(1) = y0;              % Define a condição inicial: y(a) = y0
    for i = 1:n
        y(i+1) = y(i)+h*f(t(i),y(i));  % Aplica o método de Euler: aproxima o valor de y(i+1) com base na inclinação local
    end
    end
```

Exemplo para a ***ED*** ”$y' = y + exp(3 * t)$“, com n = 2 e y0 = 2



Método de Euler Melhorado ou Modificado

O método de **Euler Melhorado**, também conhecido como **método de Heun**, é uma extensão do método de Euler simples, cuja principal finalidade é melhorar a precisão da solução aproximada de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com problemas de valor inicial (PVI).

Enquanto o método de Euler utiliza apenas a inclinação no ponto inicial do intervalo para estimar o valor seguinte da função, o método de Heun introduz uma **correção baseada na média de inclinações** — uma no início e outra no final do intervalo. Isto permite uma aproximação significativamente mais precisa sem grande aumento do esforço computacional.

Fórmulas

$$k_1 = f\left(t^{(k)}, u^{(k)}\right),$$

$$k_2 = f\left(t^{(k+1)}, u^{(k)} + k_1\right),$$

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + h\frac{k_1+k_2}{2},$$

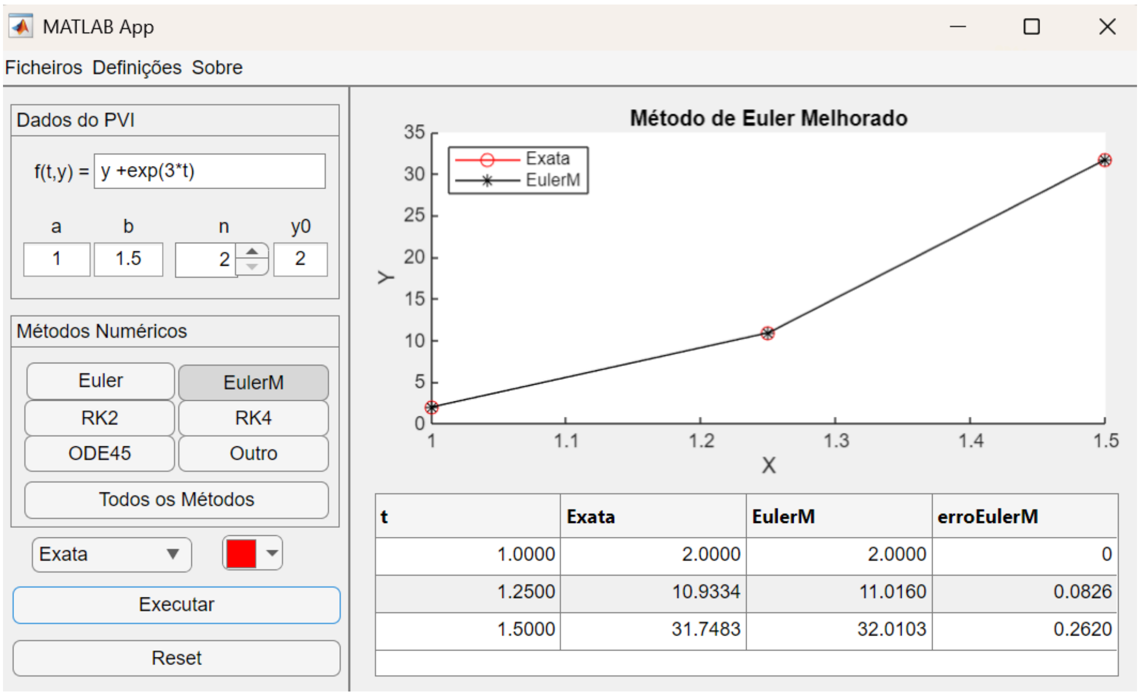
$$u^{(1)} = a\ (condição\ inicial)$$

Algoritmo/Função

```matlab
% --> NEULER Método de Euler Melhorado (Heun) para resolução numérica de EDO/PVI
%INPUT:
%   f - função da EDO y'=f(t,y)
%   [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
%   n - número de subintervalos ou iterações do método
%   y0 - aproximação inicial y(a)=y0
%OUTPUT:
%   t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
%   y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
%   t(i+1) = t(i)+h;
%AUTORES
% Igor Carvalheira a2024128677@isec.pt
% Lucas Pantarotto a2024143625@isec.pt
% Rafael Carvalho a2024143302@isec.pt
function [t, y] = NEulerM(f, a, b, n, y0)
    h = (b - a) / n;          % Passo
    t = a:h:b;                % Vetor de tempo
    y = zeros(1, n+1);        % Inicializa vetor das soluções
    y(1) = y0;                % Condição inicial

    for i = 1:n
        k1 = f(t(i), y(i));                         % Pendente no início
        y_pred = y(i) + h * k1;                     % Previsão com Euler
        k2 = f(t(i+1), y_pred);                     % Pendente na previsão
        y(i+1) = y(i) + (h/2) * (k1 + k2);           % Correção (média das pendentes)
    end
end
```

Exemplo para a ***ED*** "$y' = y + exp(3 * t)$ ",com n = 2 e y0 = 2:



Método de RK2

Em análise numérica, os métodos de Runge–Kutta formam uma família importante de métodos iterativos implícitos e explícitos para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Fórmulas

Trata-se de um método por etapas que tem a seguinte expressão geral:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{i=1}^{e} b_i k_i,$$

onde

$$k_i = F(u^n + \Delta t \sum_{j=i}^{e} a_{ij} k_j ; t_n + c_i \Delta t) \; i = 1, \ldots, e$$

com a_{ij}, b_i, c_i constantes próprias do esquema numérico.

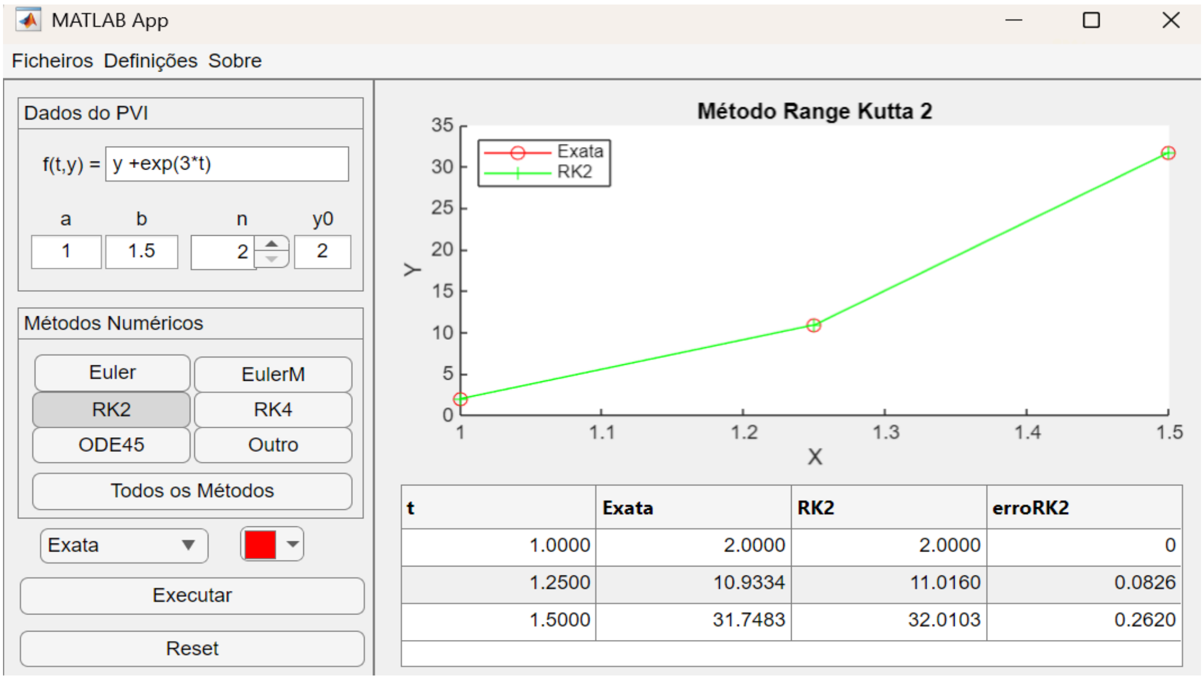
Algoritmo/Função

```matlab
% ---> NRK2 Método de Runge-Kutta de ordem 2 para resolução numérica de EDO/PVI
%INPUT:
% f - função da EDO y'=f(t,y)
% [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
% n - número de subintervalos ou iterações do método
% y0 - aproximação inicial y(a)=y0
%OUTPUT:
% t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
% y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
%     com t(i+1)=t(i)+h;
%AUTORES:
% Igor Carvalheira a2024128677@isec.pt
% Lucas Pantarotto a2024143625@isec.pt
% Rafael Carvalho a2024143302@isec.pt
function [t,y] = NRK2(f,a,b,n,y0)

    h=(b-a)/n;                          %Calcula o passo h com base no intervalo e no número de subintervalos
    t=a:h:b;                            %Cria o vetor de pontos t no intervalo [a,b]
    y=zeros(1,n+1);                     %Inicializa o vetor y com zeros
    y(1)=y0;                            %Define a condição inicial y(a)=y0

    for i=1:n
        k1=h*f(t(i),y(i));              %Calcula k1 com base em t(i) e y(i)
        k2=h*f(t(i+1),y(i)+k1);         %Calcula k2 usando t(i+1) e y(i)+k1
        y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;          %Atualiza y(i+1) pela média dos incrementos k1 e k2
    end
end
```

Exemplo para a ED "$y' = y + exp(3 * t)$ ", com n = 2 e y0 = 2:



Método de RK4

Um membro da família de métodos *Runge–Kutta* é usado com tanta frequência que costuma receber o nome de "**RK4**" ou simplesmente "*o* método *Runge–Kutta*"

Fórmulas

Seja um problema de valor inicial (PVI) especificado como segue:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Então o método RK4 para este problema é dado pelas seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

onde y_{n+1} é a aproximação por RK4 de $y(t_{n+1})$ e

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Então, o próximo valor (yn+1) é determinado pelo valor atual (yn) somado com o produto do tamanho do intervalo (h) e uma inclinação estimada.

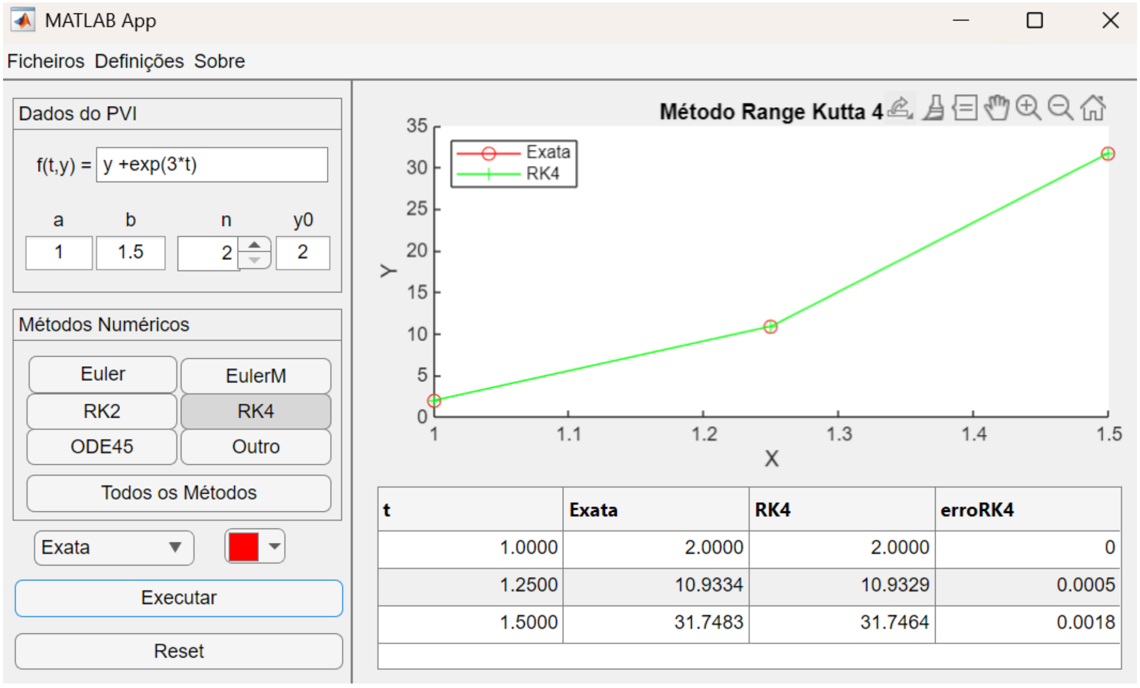
Algoritmo/Função

```
function [t,y] = NRK4(f, a, b, n, y0)
% ---> NRK4 Método de Runge-Kutta de ordem 4 para resolução numérica de EDO/PVI
% y' = f(t,y), t = [a,b], y(a) = y0
% y(i+1) = y(i) + 1/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
%
%INPUT:
% f - função da EDO y'=f(t,y)
% [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
% n - número de subintervalos ou iterações do método
% y0 - aproximação inicial y(a)=y0
%
%OUTPUT:
% t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
% y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
%
%AUTORES
% Igor Carvalheira a2024128677@isec.pt
% Lucas Pantarotto a2024143625@isec.pt
% Rafael Carvalho a2024143302@isec.pt
h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
y = zeros(1, n+1);
y(1) = y0;

for i = 1:n
    k1 = h * f(t(i), y(i));
    k2 = h * f(t(i) + h/2, y(i) + k1/2);
    k3 = h * f(t(i) + h/2, y(i) + k2/2);
    k4 = h * f(t(i) + h, y(i) + k3);

    y(i+1) = y(i) + (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
end

end
```

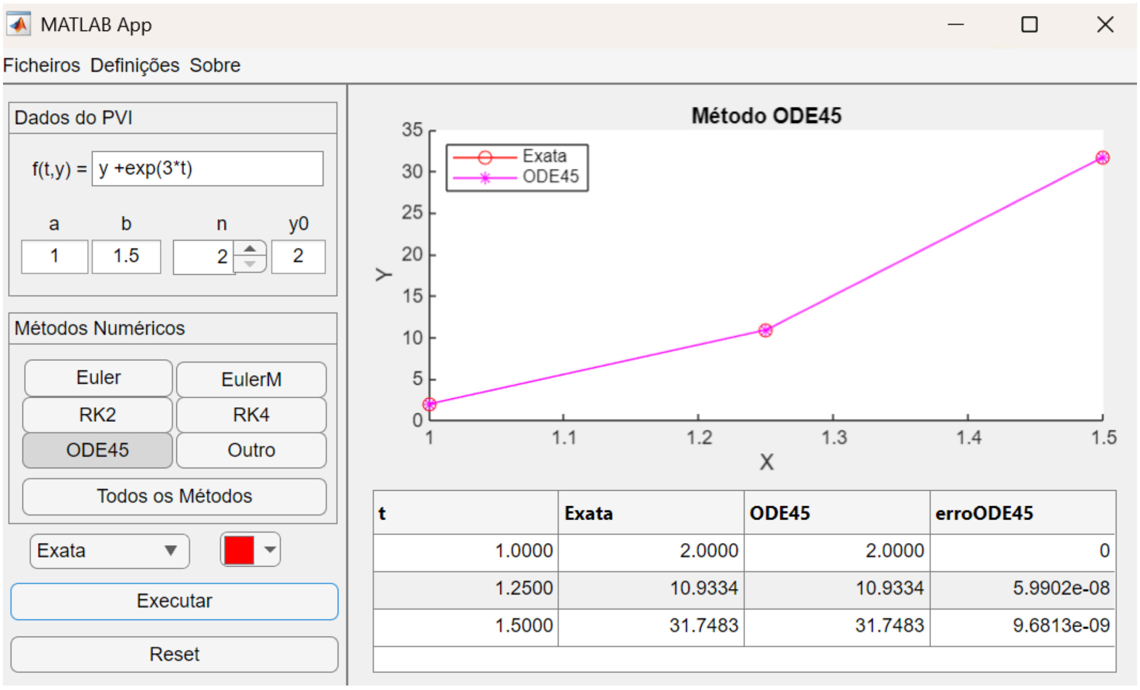


Exemplo para a **ED** ”$y' = y$ + exp(3*t) “, com n = 2 e y0 = 2:

Função ODE45 do Matlab

```
%FUNCODE Resolução de EDO/PVI utilizando o método ode45 do MATLAB
%INPUT:
% f - função da EDO y'=f(t,y)
% [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
% n - número de subintervalos (define a discretização do vetor t)
% y0 - aproximação inicial y(a)=y0
%OUTPUT:
% y - vetor transposto com as soluções aproximadas do PVI nos pontos t(i)
%AUTORES:
% Igor Carvalheira a2024128677@isec.pt
% Lucas Pantarotto a2024143625@isec.pt
% Rafael Carvalho a2024143302@isec.pt
function y = funcODE(f,a,b,n,y0)
    h=(b-a)/n;                          %Calcula o passo de discretização h
    t=a:h:b;                            %Cria o vetor t no intervalo [a,b]
    [~,yODE45]=ode45(f,t,y0);          %Resolve a EDO com ode45
    y=yODE45.';                         %Transpõe o resultado para manter consistência com os outros métodos
    end
```

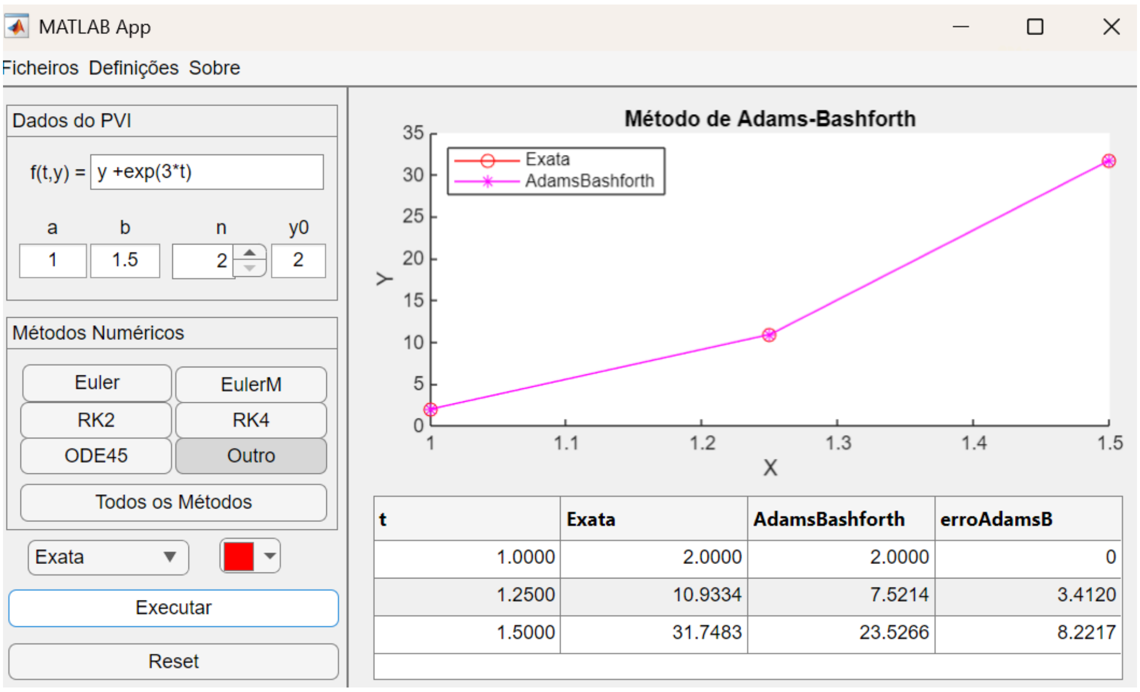
Exemplo para a **ED** ”$y' = y + exp(3 * t)$ com n = 2 e y0 = 2:



Função Adams-Bashforth do MATlab

```matlab
% ---> Método de Adams-Bashforth de ordem 2
%INPUT:
% f - função da EDO y'=f(t,y)
% [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
% n - número de subintervalos ou iterações do método
% y0 - aproximação inicial y(a)=y0
%OUTPUT:
% t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
% y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada t(i)
%     com t(i+1)=t(i)+h;
%AUTORES:
% Igor Carvalheira a2024128677@isec.pt
% Lucas Pantarotto a2024143625@isec.pt
% Rafael Carvalho a2024143302@isec.pt
function [t,y] = AdamsBashforth(f,a,b,n,y0)
    h=(b-a)/n;                        %Calcula o passo com base no intervalo e no número de subintervalos
    t=a:h:b;                          %Cria o vetor de pontos no intervalo [a,b]
    y=zeros(1,n+1);                   %Inicializa o vetor y com zeros
    y(1)=y0;                          %Define a condição inicial y(a)=y0
    y(2)=y(1)+h*f(t(1),y(1));         %Calcula o segundo valor usando o método de Euler
    for i=2:n
        y(i+1)=y(i)+h/2*(3*f(t(i),y(i))-f(t(i-1),y(i-1)));  %Fórmula de Adams-Bashforth de 2ª ordem
    end
```

Exemplo para a **ED** "$y' = y + exp(3 * t)$ com n = 2 e y0 = 2:



Exemplos de aplicação e teste dos métodos

Exercício 3 do Teste Farol

PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais

3. Considere o problema de valor inicial $y' = -2ty$, $y(0) = 2$, $t \in [0{,}1.5]$

(a) Verifique que $y(t) = 2\exp(-t^2)$ é a solução exata do problema.

(b) Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos. Para o preenchimento da coluna das aproximações de Euler, deve apresentar os cálculos das iterações da aplicação da fórmula do método de Euler.

			Aproximações		Erros	
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2
0	0	2			0	0
1		1.5576		1.5000		0.0576
2	1					0.0142
3	1.5	0.2108		0.3750		

a)

Nesta alínea observa-se o seguinte **PVI**:

$$\{y' \; + \; 2xy \; = \; 0 \;\; t \in [0, 1.5] \;\; y(0) = \; 2$$

Resolução:

$y' \; + \; 2xy \; = \; 0 \; (=) \; \frac{dy}{dt} = \; - \; 2ty \; (=) \; \frac{1}{y} \, dy \; = \; - \; 2t \, dt$ (ED Separáveis)

$(=) \int \frac{1}{y} \, dy \; = \; \int - \; 2t \, dt \;\; (=) \int \frac{1}{y} \, dy \; = - \; 2 \int t \, dt$

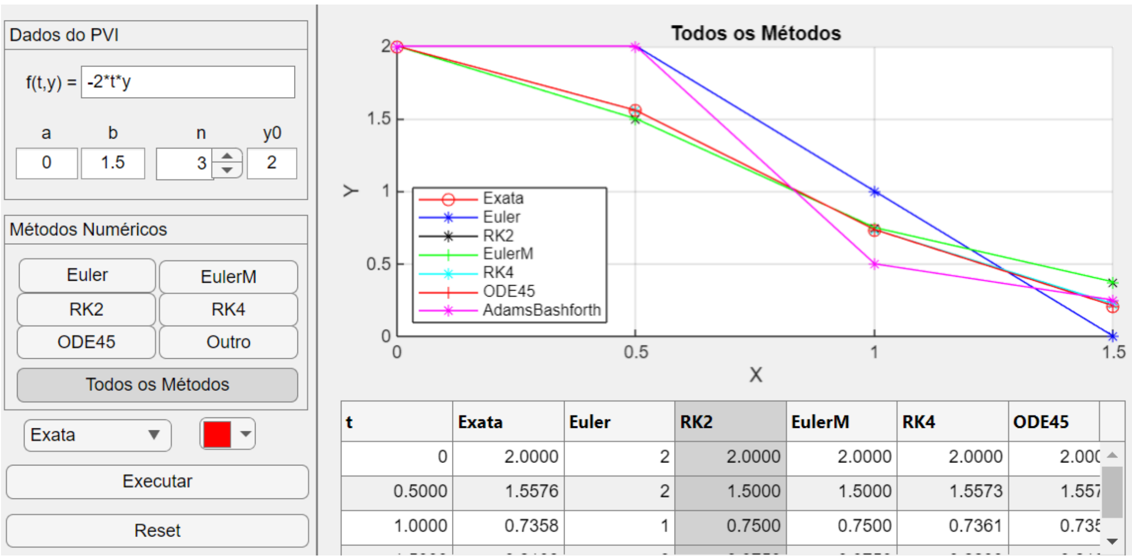
$$(=) \; \ln ln \, |y| \; = - \; 2 \frac{t^2}{2} + \; c (=) \, |y| = e^{-t^2+c} (=) \, y \; = e^{c} * e^{-t^2} (=) \, y \; = \; c_2 * \, e^{-t^2} (=) \, y \; =$$

$$y(0) = \; 2 \; (=) c \; * \; e^{-0^2} \; = \; 2 \; (=) \; c \; * \; 1 \; = \; 2 \; (=) c \; = \; 2$$

Então y(t)= $2e^{-t^2}$ é a solução exata do problema.

Exemplos de output - App com gráfico e tabela

b) Resolvendo a alínea através da aplicação:



t	Exata	Euler	RK2	erroEuler	erroRK2
0	2.0000	2	2.0000	0	0
0.5000	1.5576	2	1.5000	0.4424	0.0576
1.0000	0.7358	1	0.7500	0.2642	0.0142
1.5000	0.2108	0	0.3750	0.2108	0.1642

(c) Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

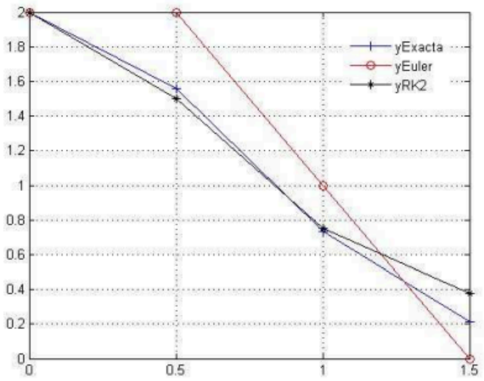


Figura 4

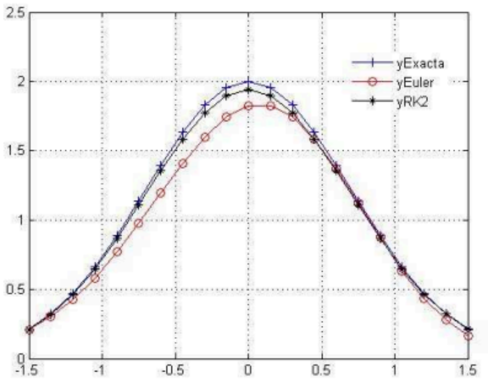
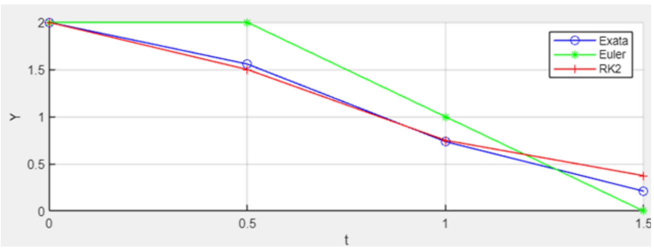


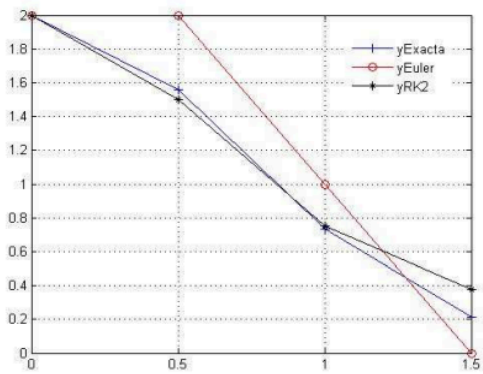
Figura 5

(d) Estabeleça um PVI cuja solução em modo gráfico coincide com a figura que excluiu na alínea anterior.

c)

Depois de analisar os dois últimos gráficos apresentados é fácil concluir que a figura 4 é a que representa graficamente uma solução do PVI dado.





d)

Depois de reparar que o intervalo da figura 5 é [-1.5,1.5] e o ajustarmos a execução da nossa aplicação, é possível reparar que o gráfico da figura 5 se assemelha mais ao nosso gráfico da execução.

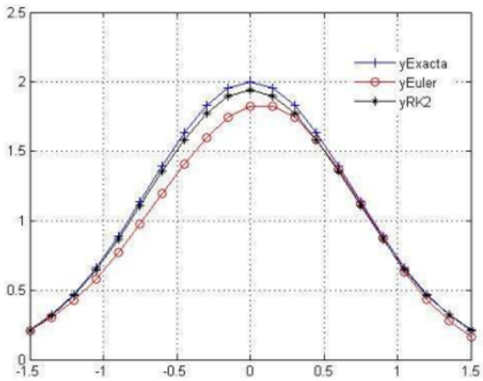
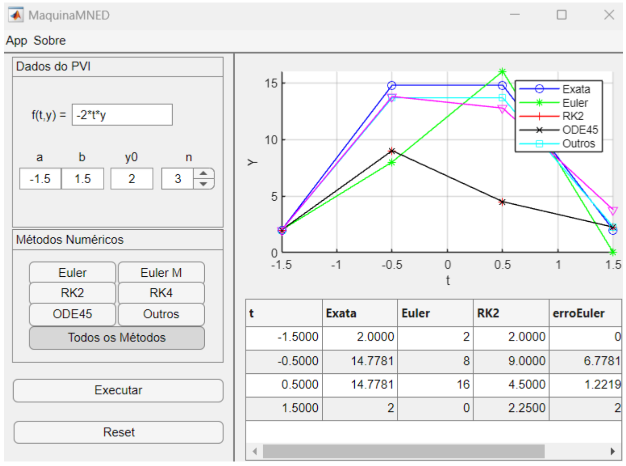


Figura 5



Se aumentarmos o número de sub-intervalos de 3 para 25 já conseguimos obter a figura 5 na nossa aplicação.

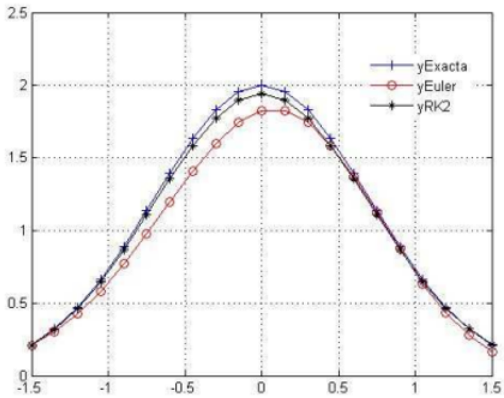
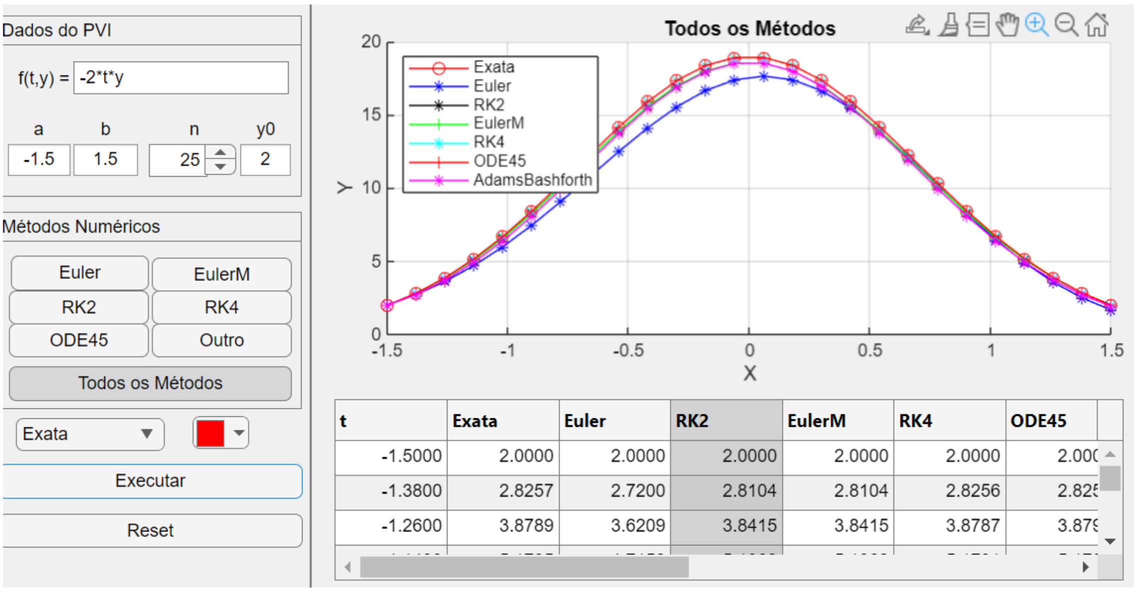

yExacta
yEuler
yRK2
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Figura 5


Dados do PVI
f(t,y) = -2*t*y
a
b
n
y0
-1.5
1.5
25
2
Métodos Numéricos
Euler
EulerM
RK2
RK4
ODE45
Outro
Todos os Métodos
Exata
Executar
Reset
Todos os Métodos
Exata
Euler
RK2
EulerM
RK4
ODE45
AdamsBashforth
Y
X
20
15
10
5
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
t Exata Euler RK2 EulerM RK4 ODE45
-1.5000 2.0000 2.0000 2.0000 2.0000 2.0000
-1.3800 2.8257 2.7200 2.8104 2.8104 2.8256
-1.2600 3.8789 3.6209 3.8415 3.8415 3.8787

Problema de aplicação do livro

Modelação Matemática do Problema

Exercício 1:

1. If air resistance is proportional to the square of the instantaneous velocity, then the velocity v of a mass m dropped from a height h is determined from

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0$$

Let $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5$ slugs, and $g = 32\,ft/s^2$.

(a) Use the Runge-Kutta method with $h = 1$ to find an approximation to the velocity of the falling mass at $t = 5\,s$.

(b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem.

(c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and find the true value $v(5)$.

$\{m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,\ k > 0\ v(0) = 0\ k = 0.125\ m = 5\ slugs\ h = 1\ g = 32ft/s^2$

$\Leftrightarrow \{mv' = mg - kv^2,\ k > 0\ v(0) = 0\ k = 0.125\ m = 5\ slugs\ h = 1\ g = 32ft/s^2 \Leftrightarrow$

$\{5 * v' = 5 * 32 - 0.125v^2\ v(0) = 0\ k = 0.125\ m = 5\ slugs\ h = 1\ g = 32ft/s^2$

$\{v' = 32 - \frac{0.125v^2}{5}\ v(0) = 0\ k = 0.125\ m = 5\ slugs\ h = 1\ g = 32ft/s^2$

$\Leftrightarrow \{v' = 32 - 0.025v^2\ v(0) = 0\ k = 0.125\ m = 5\ slugs\ h = 1\ g = 32ft/s^2$

Exercício 2:

2. A mathematical model for the area A (in cm^2) that a colony of bacteria (B. forbiddenkeyworddendroides) occupies is given by

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).$$

Suppose that the initial area is $0.24\,cm^2$.

(a) Use the Runge-Kutta method with $h = 0.5$ to complete the following table.

$t(days)$	1	2	3	4	5
$A(observed)$	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
$A(approximated)$					

(b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem. Estimate the values $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, and $A(5)$ from the graph.

(c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and compute the values $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, and $A(5)$.

$\{\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A)\ t\in[1,5]\ A(0) = 0.24cm^2\ h = 0.5$

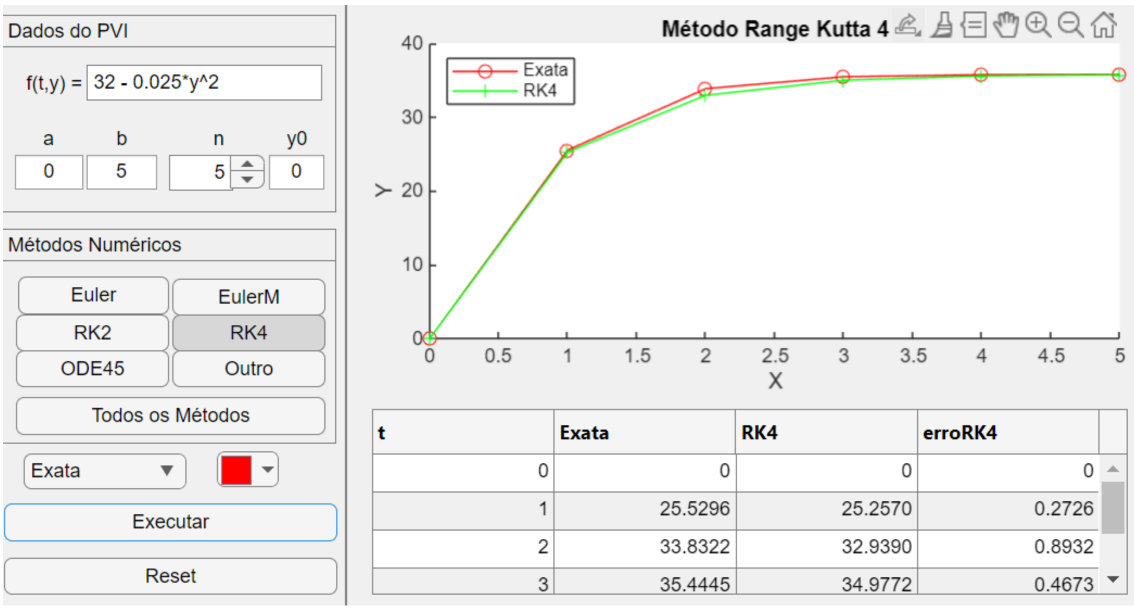
$\Leftrightarrow\{A' = A(2.128 - 0.0432A)\ t\in[1,5]\ A(0) = 0.24cm^2\ h = 0.5$

Resolução através da App desenvolvida

Exercício 1:

b)

Como a alínea a) pede uma aproximação à velocidade em t = 5s e a alínea c) pede o valor real de y(5), introduzimos a equação na aplicação com intervalo [0,5], y0 = 0 e o método Runge-Kutta de ordem 4 pois é o mais preciso.



Visto que h=1 então, $h = \frac{b-a}{n}\ (=)\ 1 = \frac{5-0}{n}\ (=)\ n = 5$

t	Exata	RK4	ErroRK4
0	0	0	0
1	25.5296	25.2570	0.2726
2	33.8322	32.9390	0.8932
3	35.4445	34.9772	0.4673
4	35.7213	35.5503	0.1709
5	35.7678	35.7128	0.0550

a) Ao analisar o gráfico e a tabela podemos afirmar que a aproximação da velocidade da massa em queda em t = 5s é 35.7128.

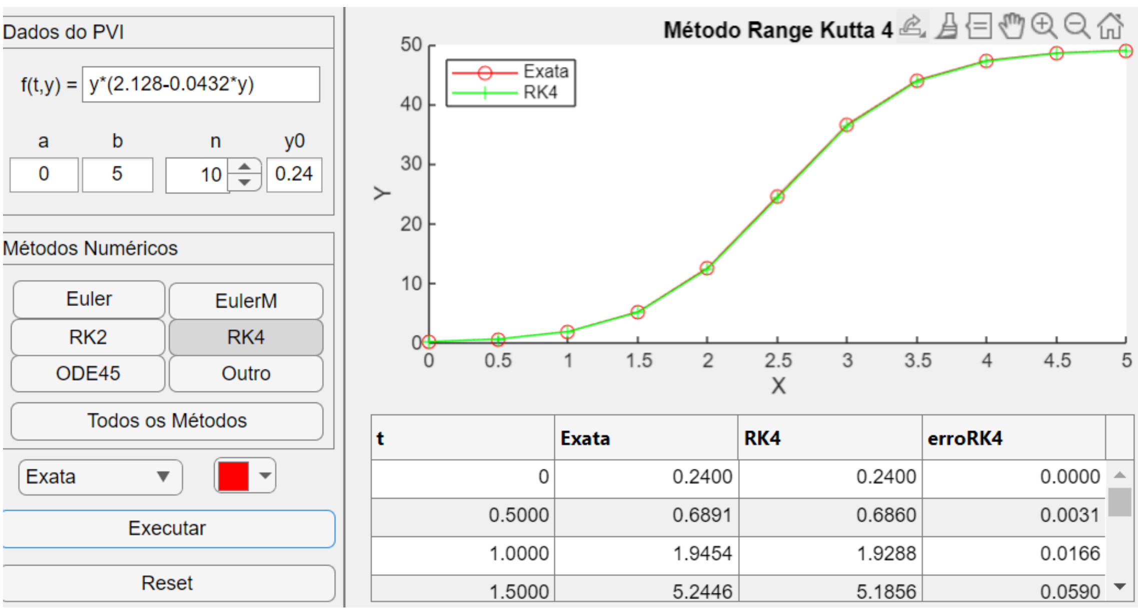
c) Mais uma vez após analisar o gráfico e a tabela reparamos que o valor real de y(5) é 35.7678.

Exercício 2:

Observando a tabela da alínea a) reparamos que nos são pedidos dados no intervalo [0,5]. O y0 é nos dado na questão, ou seja, y0 = 0.24.

Visto que h=0.5 então, $h = \frac{b-a}{n} (=) 0.5 = \frac{5-0}{n} (=) n = 10$

Usando a equação modelada anteriormente para este exercício com o método Runge-Kutta de ordem 4 mais uma vez pela razão de ser mais preciso, obtemos o seguinte gráfico e tabela:



t	Exata	RK4	ErroRK4
0	0.2400	0.2400	0
0.5000	0.6891	0.6860	0.0031
1.0000	1.9454	1.9288	0.0166
1.5000	5.2446	5.1856	0.0590
2.0000	12.6436	12.5007	0.1429
2.5000	24.6379	24.4334	0.2044
3.0000	36.6283	36.4618	0.1665
3.5000	44.0210	43.9020	0.1189
4.0000	47.3164	47.2349	0.0814
4.5000	48.5710	48.5245	0.0465
5.0000	49.0196	48.9965	0.0231

Completemos agora o gráfico de acordo com os valores da tabela acima representada:

a)

$t(days)$	1	2	3	4	5
$A(observed)$	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
$A(approximated)$	1.93	12.5	36.46	47.23	49

b)

t	Exata	RK4	ErroRK4	
0	0,24	0,24	0	
0,5	0,689133018	0,686013999	0,003119019	
1	1,94541126	1,928773847	0,016637413	A(1)
1,5	5,244572562	5,185556402	0,05901616	
2	12,64355504	12,50067932	0,142875729	A(2)
2,5	24,6378852	24,43344779	0,204437408	
3	36,6283009	36,46180136	0,166499538	A(3)
3,5	44,02096641	43,90203505	0,118931364	
4	47,31635176	47,23494199	0,081409773	A(4)
4,5	48,57103668	48,52452007	0,046516609	
5	49,01957926	48,99649487	0,023084387	A(5)

Problemas de aplicação do exercício 2 do teste Farol

Modelação matemática do problema

Exercício 2.a)

2. Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(a) A equação diferencial, de menor ordem possível, que possui a família de curvas $y = c \times \exp(-x^2)$ como integral geral é dada por $y' + 2xy = 0$ cujo campo direcional é dado pela figura 2 e o gráfico da solução geral pela figura 1. Justifique analiticamente e graficamente a sua resposta.

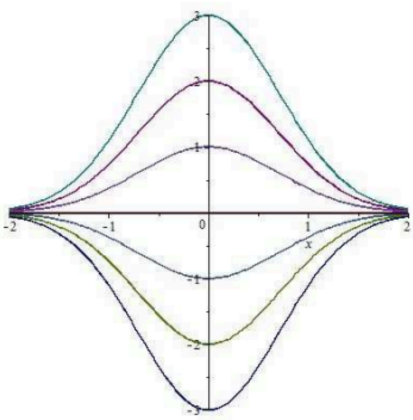


Figura 1

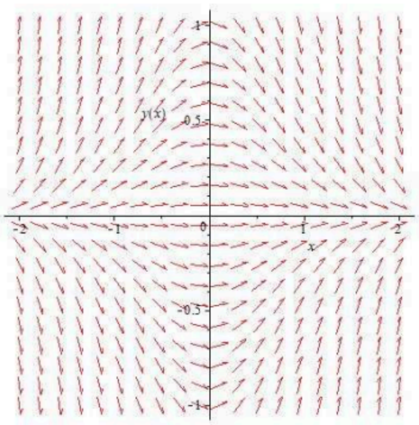


Figura 2

Passo 01 - Isolar y' na equação e verificar se a ED é de variáveis separáveis:

$$y' \ + \ 2xy \ = \ 0 \ (=) \ y' \ = \ - \ 2xy \ (=) \ \frac{dy}{dx} \ = \ - \ 2xy \ (=) \frac{1}{y} \ dy \ =- \ 2x \ dx$$

Nesta última situação observamos que é uma **ED** de variáveis separáveis.

Passo 02 - Calcular a integral geral usando a expressão anterior:

$$\frac{1}{y} \ dy \ =- \ 2x \ dx$$

$$(=) \int \frac{1}{y} \ dy \ = \ \int - \ 2x \ dx$$

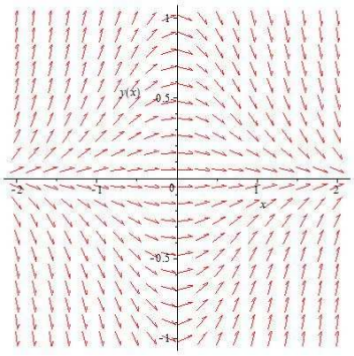
$$(=) \int \frac{1}{y} \ dy \ = \ - \ 2 \int x \ dx \ (=)$$

$$\ln ln \ |y| \ =- \ 2\frac{x^2}{2} + \ c (=) \ |y| = e^{-x^2+c} (=) \ y \ = e^{c} * e^{-x^2} (=) \ y \ = \ c_2 * e^{-x^2} (=) \ y \ = \ c* \ e^{-x^2}, \ \ c, \ \ c_2 \in$$

Passo 03 – Provar que o campo direcional de y' + 2xy = 0 (=) y' = -2xy é dado pela figura 2;

Substituindo os valores das variáveis “x” e “y” com os valores que conseguimos observar no gráfico da figura 2 e tendo em conta que y’ representa o declive (m) da reta tangente em cada ponto do gráfico da equação ou seja:

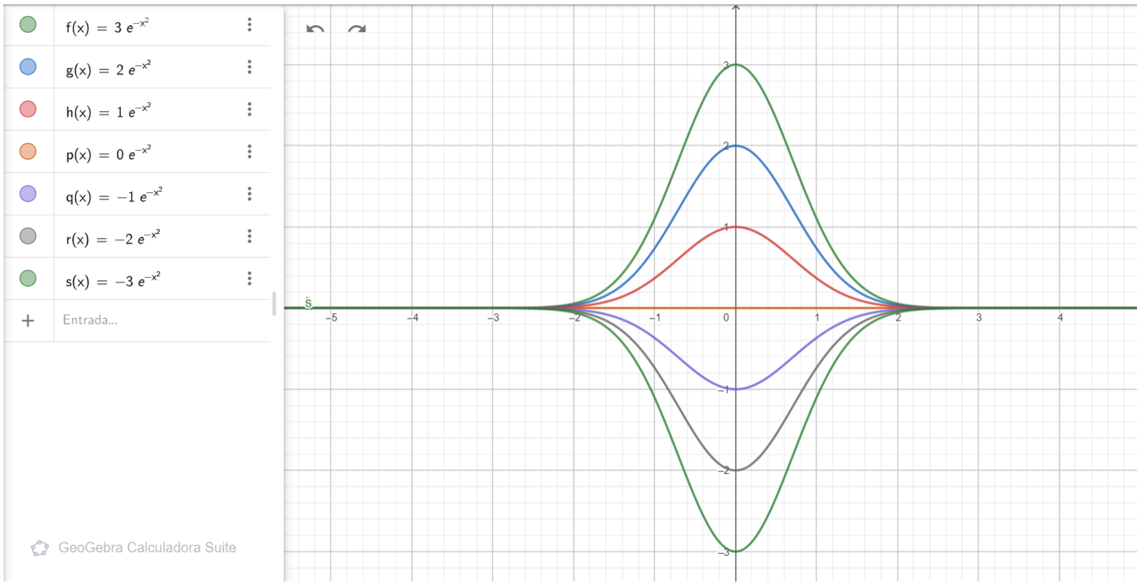
X					
	4	2			
	2	1			
				1	2
				2	4



Comparando os declives obtidos a cada respetiva coordenada na figura é possível observar que as curvas da figura 1 “encaixam” totalmente na figura 2 e o ajuste é perfeito, ou seja, a figura 1 é uma representação gráfica do campo direcional da figura 2.

Passo 04

Usando a expressão final obtida ($y = ce^{-x^2}, \quad c, \quad c_2 \in R^+$) no Geogebra e dando valores à variável c, obtemos uma figura exatamente igual à figura 1.



Concluindo assim após todos estes passos que a figura 1 descreve a trajetória do campo direcional da figura 2, provando que a afirmação da alínea a) é verdadeira.

Exercício 2.b)

(b) A força eletromotriz e de um circuito RL com intensidade i, resistência $R = 10\ \Omega$(ohms) e indutância $L = 0.5\ h$ (henry), é igual à queda de tensão Ri mais a força eletromotriz de autoindução $L\frac{di}{dt}$. Assim, a intensidade de corrente i, no instante t, se $e = 3\sin(2t)$ (em volts) e $i = 6$ quando $t = 0$ é dada pela solução particular $i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t$. À medida que o tempo aumenta, o termo que envolve e^{-20t} perde influência no valor da intensidade da corrente. Diz-se que este termo é o termo do *estado transitório* e o outro é o termo do *estado permanente*.

Passo 01

$$e = Ri + L * \frac{di}{dt} (=) e = Ri + L * i'$$

Passo 02

e = 3*sin(2t)

R = 10Ω

L = 0.5 henry

Passo 03

$$e = Ri + L * i^{'}$$

$$(=)\ 3 \sin sin\,(2t) = 10i + 0.5 * i^{'}$$

$$(=)\ 6 \sin sin\,(2t) = 20i + i^{'}$$

$$(=)\ i^{'} = 6 \sin sin\,(2t) - 20i$$

P{$i^{'} = 6 \sin sin\,(2t) - 20i\ y(0) = 6$

Passo 04

$$i(t) = \frac{609}{101} * e^{-20t} - \frac{30}{101} * \sin sin\,(2t) + \frac{3}{101} * cos(2t)$$

Verificar se esta é solução de P

$$i(0) = 6$$

$$(=)\ \frac{609}{101} * e^{-20*0} - \frac{30}{101} * \sin sin\,(2 * 0) + \frac{3}{101} * \cos cos\,(2 * 0) = 6$$

$$(=)\frac{609}{101} * e^{0} - \frac{30}{101} * \sin sin\,(0) + \frac{3}{101} * \cos cos\,(0) = 6$$

$$(=)\frac{609}{101} * 1 - \frac{30}{101} * 0 + \frac{3}{101} * 1 = 6$$

$$(=)\frac{609}{101} + \frac{3}{101} = 6$$

$$(=)\frac{612}{101} \neq 6$$

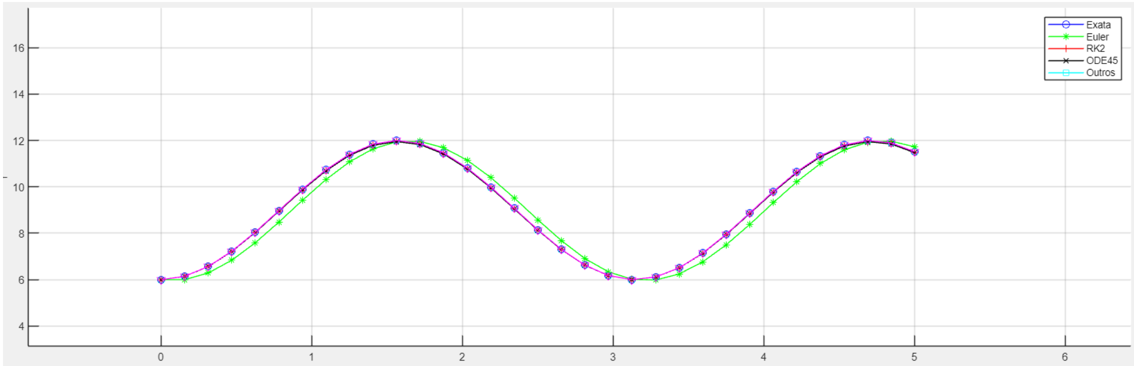
Proposição falsa

O valor lógico da afirmação colocada na questão da alínea b) é falso.

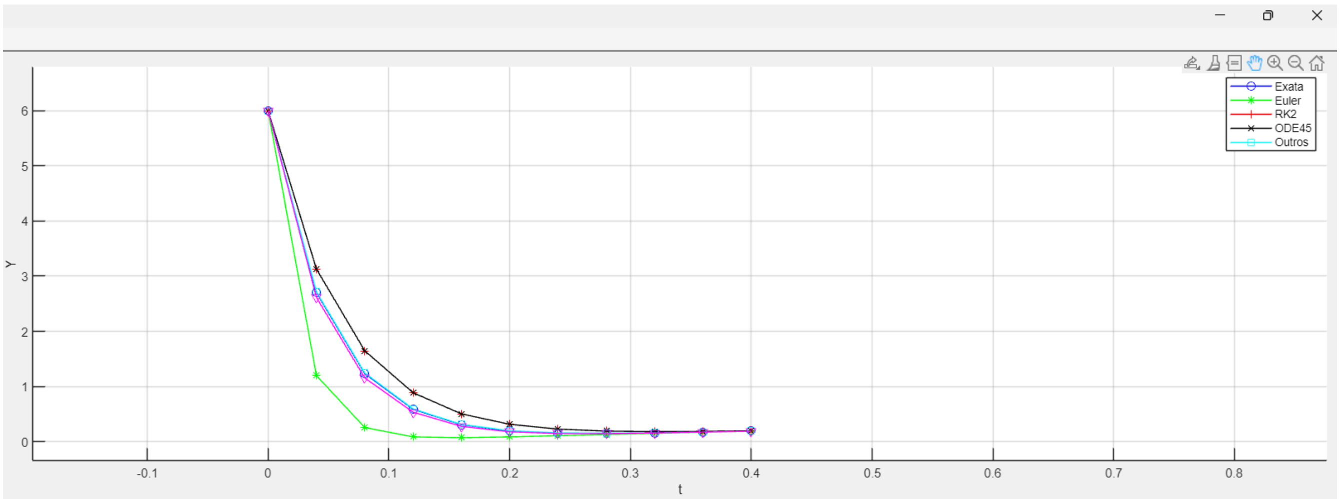
Resolução através da App desenvolvida

Analisando P notamos que a equação pode ser dividida em duas partes de forma a compreender melhor o exercício. Executando esta metade da equação de P, i' = 6sin(2t), com y(0) = 0 na app obtemos o seguinte gráfico:

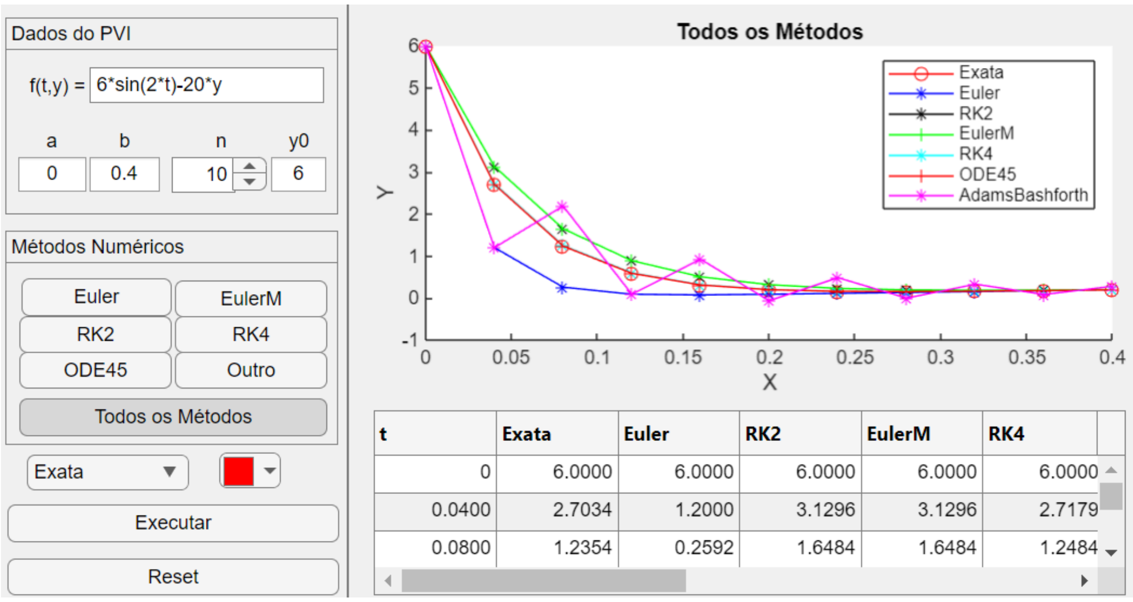
Analisando este gráfico, podemos observar uma função sinusoidal e suspeitar que este é o gráfico do estado permanente.



Por fim executando a restante equação, i' = -20i, na app obtemos o seguinte gráfico:



E analisando este segundo gráfico de declive negativo, podemos suspeitar que este é o gráfico do estado transitório.



Usando agora a equação total de P, i' = 6sin(2t) - 20i, na nossa app e no intervalo [0,0.4] com y(0) = 6, conseguimos observar o seguinte resultado:

Como conclusão final, após a análise do gráfico e da tabela da execução de P, observamos o instante em que ocorre a mudança entre o estado transitório para o estado permanente. Esse instante é t = 0.28, que podemos observar com mais clareza na tabela, e ocorre quando a função transitória perde influxo para a função sinusoidal.

t	Exata	Euler	Euler Modificado	RK2	RK4	ODE45	Heun	ErroEuler	ErroEulerMelhorado	ErroRK2	ErroRK4	ErroODE45	erroHeun
0	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	0	0	0	0	0	0
0.0400	2.7034	1.2000	3.1296	3.1296	2.7179	2.7030	2.6150	1.5034	0.4261	0.4261	0.0145	4.5176e-04	0.0884
0.0800	1.2354	0.2592	1.6484	1.6484	1.2484	1.2355	1.1572	0.9762	0.4130	0.4130	0.0131	1.4991e-04	0.0782
0.1200	0.5888	0.0901	0.8895	0.8895	0.5976	0.5890	0.5369	0.4987	0.3008	0.3008	0.0088	2.0283e-04	0.0518
0.1600	0.3110	0.0751	0.5060	0.5060	0.3163	0.3112	0.2805	0.2360	0.1950	0.1950	0.0053	1.5097e-04	0.0305
0.2000	0.1987	0.0905	0.3174	0.3174	0.2017	0.1988	0.1819	0.1082	0.1187	0.1187	0.0030	9.2920e-05	0.0169
0.2400	0.1604	0.1116	0.2298	0.2298	0.1620	0.1605	0.1515	0.0489	0.0694	0.0694	0.0016	5.3966e-05	0.0089
0.2800	0.1549	0.1331	0.1943	0.1943	0.1558	0.1549	0.1503	0.0218	0.0394	0.0394	0.0008	2.9724e-05	0.0046
0.3200	0.1636	0.1541	0.1855	0.1855	0.1640	0.1636	0.1613	0.0095	0.0219	0.0219	0.0004	1.5798e-05	0.0023
0.3600	0.1780	0.1741	0.1899	0.1899	0.1782	0.1780	0.1769	0.0039	0.0119	0.0119	0.0002	8.1746e-06	0.0011
0.4000	0.1944	0.1931	0.2007	0.2007	0.1945	0.1944	0.1939	0.0013	0.0063	0.0063	0.0001	4.2325e-06	0.0005

Conclusão

Concluímos que todos os métodos utilizados, em sua prestação através da ferramenta MatLab, propõem-nos soluções claras e sucintas, quando utilizadas para resolver exercícios.

Desenvolveram-se capacidades na ferramenta, assim como também foram gerados novos conhecimentos exteriores aqueles adquiridos semanalmente ao frequentar as aulas da cadeira Análise Matemática II.

Bibliografia

https://www.somatematica.com.br/superior/equacoesdif/eq.php
https://www.infoescola.com/matematica/equacoes-diferenciais/

https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta

https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_de_valor_inicial
https://www.ime.unicamp.br/~pjssilva/pdfs/notas_de_aula/ms211/Problemas_de_Valor_Inicial.pdf

https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler

Heteroavaliação e Autoavaliação

Igor Coimbra Carvalheira

Autoavaliação: 4

Justificação: Com a ajuda dos meus colegas, conseguimos desenvolver funcionalidades adicionais que não estavam inicialmente requisitadas, com o objetivo de melhorar a aplicação. Estive envolvido de forma ativa em todas as fases e acredito que o meu contributo justifica a nota pedida.

Heteroavaliação: 5

Justificação: Houve uma boa divisão do trabalho entre todos os elementos, o que permitiu uma execução eficiente. As discussões sobre a aplicação foram produtivas e contribuíram para a qualidade e coerência do resultado final. Os colegas demonstraram um grande compromisso e espírito de equipa.

Rafael Carvalho

Autoavaliação: 4

Justificação: Com o trabalho em equipa, conseguimos desenvolver funcionalidades extras que não estavam previstas no início, sempre buscando melhorar a aplicação. A participação foi constante em todas as etapas, e o resultado final refletiu esse esforço coletivo. Por isso, acredito que a nota está de acordo com o que foi entregue.

Heteroavaliação: 5

Justificação: O trabalho foi bem distribuído entre todos os membros, o que facilitou uma execução eficaz. As conversas em torno da aplicação foram construtivas e ajudaram a garantir a qualidade e a consistência do produto final. Todos os colegas mostraram empenho e um forte sentido de colaboração.

Lucas Pantarotto

Autoavaliação: 4

Justificação: Devido ao trabalho em equipa, conseguimos desenvolver uma aplicação com mais coerência e algumas funcionalidades extra, algumas das alterações feitas à aplicação original incluem mudanças estéticas para tornar a aplicação mais simples de usar. Acredito que apesar de não estar perfeito, ainda conseguimos fazer uma aplicação prática para resolver problemas que possam surgir, claro que nada disto seria possível sem a ajuda e envolvimento constante do grupo.

Heteroavaliação: 5

Justificação: Todos do grupo dividiram bem as tarefas, o que ajudou a fazer o trabalho de forma eficiente. As conversas sobre a aplicação foram úteis e ajudaram a deixar o resultado final com boa qualidade e bem feito. Cada um se dedicou e colaborou bastante.