Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 7 / 1 / 3

Выполнила:
студентка 103 группы
Травникова А. С.

Преподаватель:
Дудина И. А.

Москва
2018

Содержание

Постановка задачи

Основной задачей работы является реализация численного метода для вычисления с точностью ε площади плоской фигуры, ограниченной треми кривыми, заданными уравнениями: $y = \ln(x)$, $y = -2 * x + 14$, $y = \frac{1}{2-x} + 6$.

Для вычисления определенного интеграла используется формула Симпсона, для поиска абсцисс точек пересечения функций - метод деления отрезка пополам. Определение пределов итегрирования, отрезков для поиска точек пересечения кривых и точнестей ε_1 и ε_2 вычисления корней и интегралов выполняется аналитически. Помимо написания функций, необходимо организовать их тестирование и привести математическое обоснование используемых методов.

Математическое обоснование

Проанализируем набор кривых, заданных уравнениями: $y = \ln(x)$, $y = -2 * x + 14$, $y = \frac{1}{2-x} + 6$, для вычисления площади плоской фигуры ограниченной ими.

Во-первых, необходимо определить абсциссы точек пересечения кривых методом деления отрезка пополам. Для каждой пары кривых f, g нужно корректно определить границы отрезка $[a, b]$, на котором функция $F(x) = f(x) - g(x)$ имеет ровно 1 корень (достаточно, чтобы на концах отрезка функция $F(x)$ принимала значения разного знака, а ее производная сохраняла знак на всем отрезке). Более подробное описание работы метода деления отрезка пополам приводится в книге [1].

В таблице 1 приведены численные обоснования выбора отрезков для поиска точек пересечения каждой пары кривых:

Кривые	$F(x)$	отрезок	знак $F(a)$	знак $F(b)$	$F'(x)$	знак $F'(x)$
1 и 2	$\ln(x) + 2 * x - 14$	$[2, 7]$	$-$	$+$	$\frac{1}{x} + 2$	$+$
2 и 3	$\frac{1}{2-x} + 2 * x - 8$	$[3, 5]$	$-$	$+$	$\frac{1}{(2-x)^2} + 2$	$+$
1 и 3	$\frac{1}{2-x} + 6 - \ln(x)$	$[2.1, 3]$	$-$	$+$	$\frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{x}$	$+$

Таблица 1: Отрезки для поиска точек пересечения

Во-вторых, нужно приближенно вычислить определенные интегралы формулы Симпсона. В качестве пределов интегрирования берутся абсциссы точек пересечения кривых. Подробное описание вычисления по формуле Симпсона приводится в книге [1].

В таблице 2 приведены пределы интегрирования для каждой кривой:

Кривая	нижний предел	верхний предел
1	2.1917	6.0961
2	4.2247	6.0961
3	2.1917	4.2247

Таблица 2: Пределы интегрирования

В-третьих, необходимо подобрать такие значения ε_1 и ε_2 погрешностей поиска абсцисс точек пересечения и вычисления определенных интегралов, чтобы гарантировалось вычисление площади плоской фигуры, ограниченной 3 заданными кривыми, с точностью $\varepsilon = 0.001$.

На чертеже (рис. 1) изображены графики функций и вертикальные прямые, проходящие через точки $x\_i - \varepsilon_1$, $x\_i + \varepsilon_1$, где x_i - действительные точки пересечения кривых: $f2, f3$; $f1, f3$; и $f1, f2$. Пунктирные прямоугольники построены на отрезках $[x\_i - \varepsilon_1, x\_i + \varepsilon_1]$, а их высота равна $m\_j =$

$max(fj(x\_i - \varepsilon_1), fj(x\_i + \varepsilon_1))$, где максимум берется по j не равном i. Приближенное значение корня x_i лежит в отрезке $[x\_i - \varepsilon_1, x\_i + \varepsilon_1]$

Пусть S - точное значение площади, S_1 - приближенное, которое отличается от S не более, чем на площади 3 построенных прямоугольников. Тогда $|S - S1| <= (m\_1 + m\_2 + m\_3) * 2 * \varepsilon_1 <= 3 * M * 2 * \varepsilon_1$, где M можно оценить как 7, так как все значения всех заданных функций на отрезке $[2.1, 7]$ не превосходят 7. Получим $|S - S1| <= 42 * \varepsilon_1$ Далее приближенно вычисляем $S1$ и получаем $S2$ такое, что $|S2 - S1| <= 3 * \varepsilon_2$, так как вычисления будет состоять из 3 интегралов. Тогда $|S - S2| <= 42 * \varepsilon_1 + 2 * \varepsilon_2$. Таким образом, $\varepsilon <= 42 * \varepsilon_1 + 2 * \varepsilon_2$.

Тогда значения $\varepsilon_1 = 0.0001$ и $\varepsilon_2 = 0.0001$ гарантирую итоговую точность $\varepsilon = 0.001$. Для достижения лучшей точности в программе возьмем $\varepsilon_1 = 0.0001$ и $\varepsilon_2 = 0.00001$

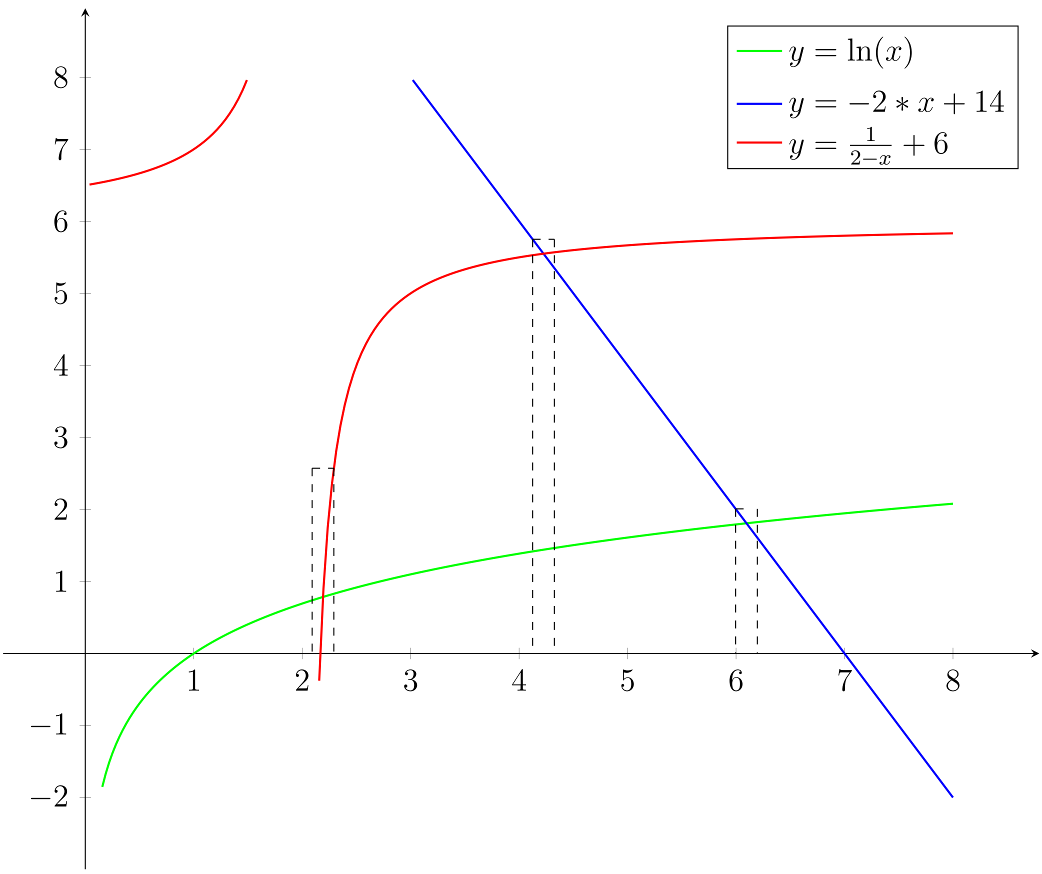

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Результаты экспериментов

Приведенная ниже таблица содержит результаты произведенных вычислений координат точек пересечения кривых на отрезке $[2, 7]$ с точностью $\varepsilon_1 = 0.0001$:

Кривые	x	y
1 и 2	6.0961	1.8077
2 и 3	4.2247	5.5505
1 и 3	2.1917	0.7847

Таблица 3: Координаты точек пересечения

Результаты вычисления площади фигуры представлены на графике (рис. 2):

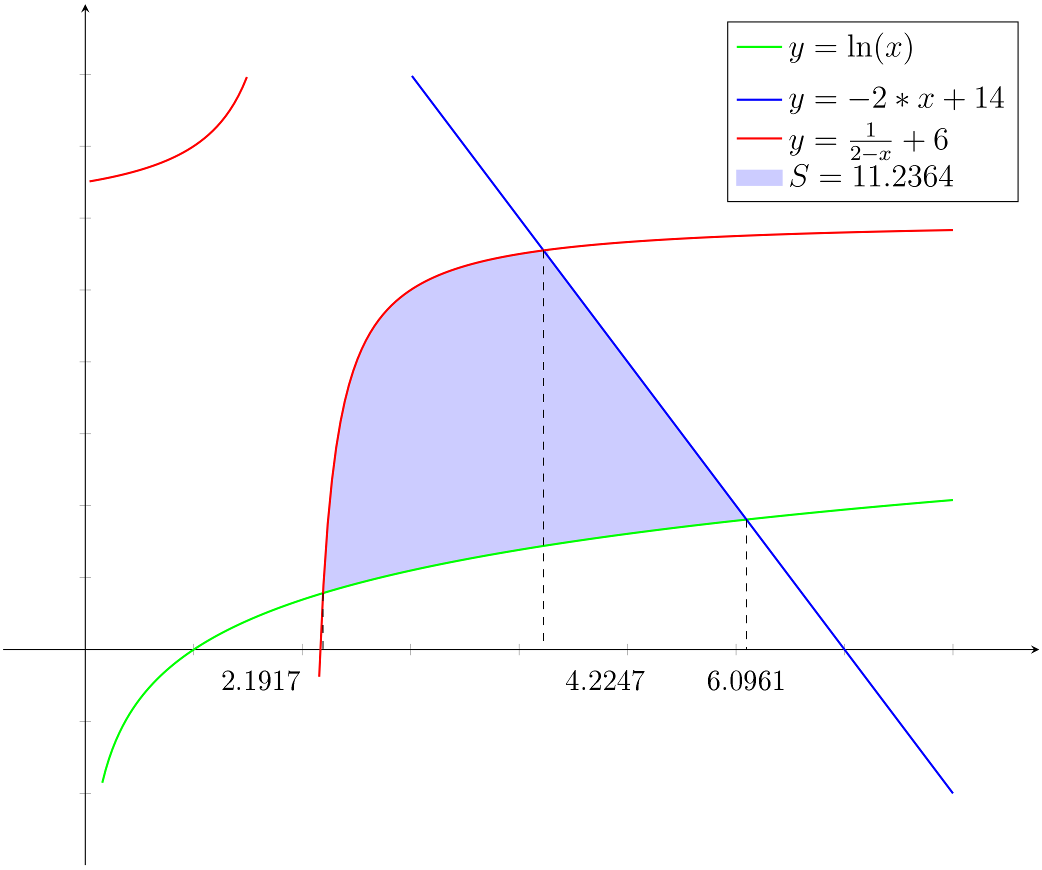

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

В данном разделе приведен список модулей и функций, использованный в написании программы.

1. Модуль f.asm содежит описание 6 глобальных функций на языке ассемблера:

    - double f1(double x) - функция, вычисляющая значение выражения $\ln(x)$
    - double f2(double x) - функция, вычисляющая значение выражения $-2 * x + 14$
    - double f3(double x) - функция, вычисляющая значение выражения $\frac{1}{2-x} + 6$
    - double f4(double x) - функция, вычисляющая значение выражения $5 * x - 14$, и необходимая для тестирования
    - double f5(double x) - функция, вычисляющая значение выражения $2 * x^2 - 10 * x + 13$, и необходимая для тестирования
    - double f6(double x) - функция, вычисляющая значение выражения $8 * x^3 + 2 * x^2 - 10 * x - 14$, и необходимая для тестирования

2. Модуль integral.c содержит 1 функцию на языке си:

    - double integral(double f(double), double a, double b, double eps2) - функция, вычисляющая приближенное значение определенного интеграла функции f на отрезке $[a, b]$ с точностью $eps2$

3. Модуль root.c содержит 1 функцию на языке си:

    - double root(double f(double), double g(double), double a, double b, double eps2) - функция, вычисляющая приближенное значение абсциссы точки пересечения функций f и g на отрезке $[a, b]$ с точностью $eps1$, а также считающая количество итераций, требуемых для их нахождения

4. Модуль functions.h содержит объявления функций f1, f2, f3, f4, f5, f6, integral, root, описанных в модулях f.asm, integral.c, root.c

5. Модуль main.c содержит 1 функцию:

    - int main(int count, char **key) - функция, которая обрабатывает ключи key и в зависимости от их значенияи может выполнять следующие действия:
        - ключ -help - печать всех допустимых ключей
        - ключ -test_root - тестирование функции root
        - ключ -test_integral - тестирование функции integral
        - ключ -ans - печать ответа на задачу

– ключ -roots - печать абсцисс точек пересечения кривых
– ключ -iters - печать количества итераций, требуемых для нахождения точек пересечения

На диаграмме (рис. 3) изображено разбиение программы на модули и связь между ними:

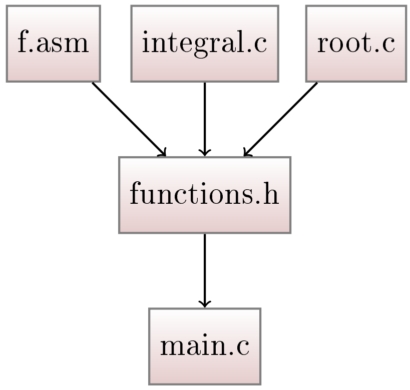

Рис. 3: Модули программы

Сборка программы (Make-файл)

Текст Make-файла:

```
CC=gcc
ASM=nasm
CFLAGS=-g -O2 -m32
ASMFLAGS=-g -f elf32
all: main

main: main.o integral.o root.o f.o
	$(CC) $(CFLAGS) $< -o $@

integral.o: integral.c
	$(CC) $(CFLAGS) $< -o $@

root.o: root.c
	$(CC) $(CFLAGS) $< -o $@

f.o: f.asm
	$(ASM) $(ASMFLAGS) $< -o $@

clean:
	rm -rf *.o main
```

На диаграмме (рис. 4) отображены зависимости между модулями программы:

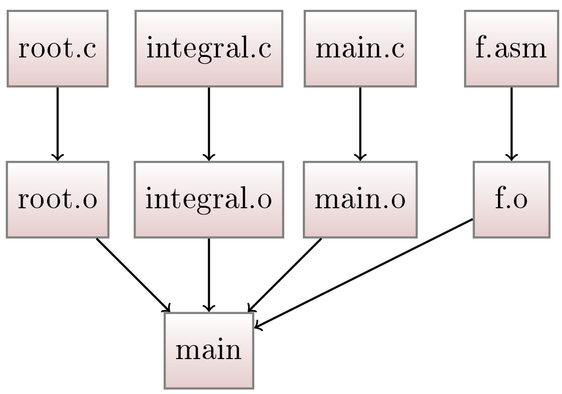

Рис. 4: Зависимости между модулями программы

Отладка программы, тестирование функций

Тестирование функций root и integral происходит на наборе из тестов для 3 кривых, заданных уравнениями: $y = 5 * x - 14$, $y = 2 * x^2 - 10 * x + 13$, $y = 8 * x^3 + 2 * x^2 - 10 * x - 14$.

В приведенных ниже таблицах 4 отображен выбор с обоснованием отрезков для поиска корней уравнения $F(x) = 0$, ответ, вычисленный аналитическим путем, и ответ, который выдает программа при запуске тестирования функции root с соответствующими параметрами.

Кривые	$F(x)$	отрезок	знак $F(a)$	знак $F(b)$
4 и 5	$2 * x^2 - 15 * x + 27$	$[2, 4]$	$+$	$-$
5 и 6	$8 * x^3 - 27$	$[1, 2]$	$-$	$+$
4 и 6	$8 * x^3 + 2 * x^2 - 5 * x$	$[-1, 1]$	$-$	$+$

Кривые	$F'(x)$	знак $F'(x)$	ответ аналитически	ответ программы
4 и 5	$4 * x - 15$	$-$	3	3
5 и 6	$24 * x^2$	$+$	1.5	1.5
4 и 6	$24 * x^2 + 4 * x$	$+$	0	0

Таблица 4: Тестирование функции root

В таблице 5 приведен неопределеннный интеграл для каждой функции, выбранные пределы интегрирования, определенный интеграл, вычисленный аналитическим путем, и ответ, который выдает программа при запуске тестирования функции integral с соответствующими параметрами.

Кривая	неопр. итеграл	отрезок	опр. интеграл	ответ программы
4	$\frac{10}{2} * x^2 - 14 * x$	$[1, 4]$	-4.5	-4.5
5	$\frac{2}{3} * x^3 - 5 * x^2 + 13 * x$	$[-1, 1]$	$27\frac{1}{3}$	$27\frac{1}{3}$
6	$2 * x^4 + \frac{2}{3} * x^3 - 5 * x^2 - 14 * x$	$[0, 1]$	$-16\frac{1}{3}$	$-16\frac{1}{3}$

Таблица 5: Тестирование функции integral

Программа на Си и на Ассемблере

Все исходные тексты программы содержатся в архиве Отчет.Травникова.103, приложенном к данному отчёту.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.