量子情報入門

椎葉あびら

August 30, 2025

1　量子力学の公理

量子状態は以下の五つの公理を満たす。

- 系の純粋状態は、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の元である。

$$|\psi\rangle := \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \tag{1}$$

  ただし純粋状態は正規化されているものとする。

$$||\psi\rangle| := \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1 \tag{2}$$

  系の混合状態は、M 個の純粋状態 $\{|\psi_m\rangle\}_{m=1}^{M}$ の各々が、確率 $\{p_m\}_{m=1}^{M}$ で配布される状態である。

$$\{|\psi_m\rangle, p_m\}_{m=1}^{M}, \quad \sum_{m=1}^{M} p_m = 1 \tag{3}$$

  以降は二種類の状態をまとめて「状態」と呼ぶ。

- 状態 $|\psi\rangle$ から状態 $|\varphi\rangle$ の観測する確率は、射影演算子

$$P[\varphi] := |\varphi\rangle\langle\varphi| \tag{4}$$

  を作用させた後のベクトルのノルムで定義される。

$$\mathrm{Prob}(\varphi|\psi) := |P[\varphi]\,|\psi\rangle|^2 = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \tag{5}$$

  観測後の状態は、正規化された射影後のベクトルである。

$$|\varphi\rangle = \frac{P[\varphi]\,|\psi\rangle}{|P[\varphi]\,|\psi\rangle|} \tag{6}$$

- 状態の変化はヒルベルト空間上のユニタリ演算子である。

$$|\psi\rangle \implies U\,|\psi\rangle \tag{7}$$

- 複合系の状態はベクトルのテンソル積である。

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \tag{8}$$

- 状態は古典情報が伝えられるまで変化することはない。

  e.g. 例えば実験者 (A とする) が測定器で観測を行う場合、量子状態は測定で変化するのではなく、A に観測結果が古典情報として伝達された場合に、A の認識する状態が観測後のものに変化する。

  もし観測結果を知らない他の実験者 (B とする) が存在すれば、B はその状態を必ずしも A と同じものと認識しない。

1.1　具体例：スピン

電子に存在するスピンという自由度を例に以上の公理を満たす状態を説明する。スピンとは磁石の持つ磁化の最小単位に相当する量であり、実験から、二つの量子状態

$$|\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle \tag{9}$$

で表されることが確認されている。$|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ は直交する。

$$\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0 \tag{10}$$

この二つの状態を基底ベクトルとした $\mathbb{C}^2$ がスピンの状態を表すヒルベルト空間となる。つまりスピンを表す一般の状態は、複素二次元ベクトルである。

$$|\psi(\theta,\phi)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|\downarrow\rangle \tag{11}$$

係数は一般的な長さが 1 のベクトルを表すために三角関数を使用した。二つの状態の内積を計算することで、得られる確率と、ベクトルの類似度をつなげることができる。

$$\begin{aligned} &\langle\psi(\theta,\phi)|\psi(\theta',\phi')\rangle \\ &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} + e^{-i(\phi-\phi')}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} \end{aligned} \tag{12}$$

$$|\langle\psi(\theta,\phi)|\psi(\theta',\phi')\rangle|^2 = \frac{1+\boldsymbol{n}(\theta,\phi)^\top \boldsymbol{n}(\theta',\phi')}{2} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{n}(\theta,\phi) := \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \tag{14}$$