

DINÁMICA DE ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

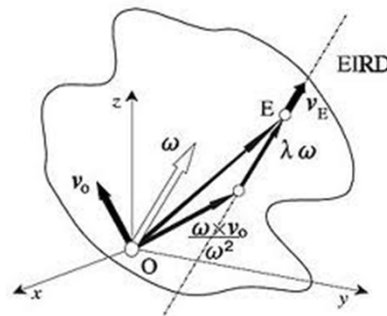
Fundamentos de Mecánica

Grupo 22

Saúl David Bertel Hoyos

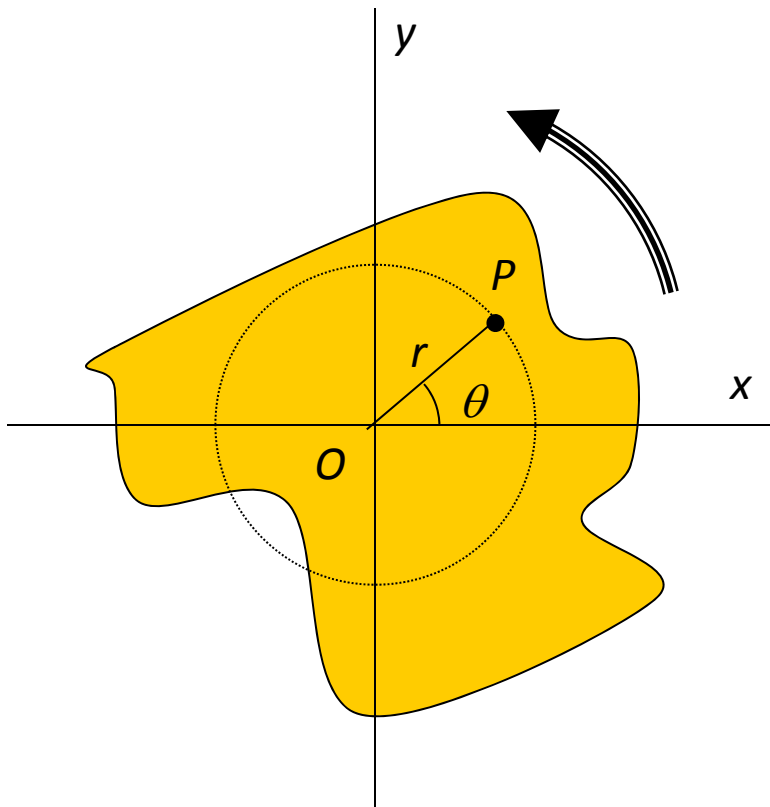
Introducción

Cuando un objeto real gira alrededor de algún eje, su movimiento no se puede analizar como si fuera una partícula, porque en cualquier instante, diferentes partes del cuerpo tienen velocidades y aceleraciones distintas. Por esto es conveniente considerar al objeto real como un gran número de partículas, cada una con su propia velocidad, aceleración. El análisis se simplifica si se considera al objeto real como un cuerpo rígido. En este capítulo se tratará la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, conocido como movimiento rotacional puro.



Velocidad angular y aceleración angular

Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje que pasa por O .



El punto P se mueve a lo largo de un círculo de radio r . El arco que describe esta dado por:

$$s = r\theta$$

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Donde θ está medido en radianes.

La velocidad angular promedio se define como:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La velocidad angular instantánea es:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

La aceleración angular promedio se define como:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

La aceleración angular instantánea es:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Al rotar alrededor de un eje fijo, toda partícula sobre un cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular y la misma aceleración angular.

Cinemática Rotacional

Las ecuaciones de cinemática se cumplen para movimiento rotacional sustituyendo x por θ , v por ω , a por α . De esta forma si $\omega = \omega_0$ y $\theta = \theta_0$ en $t_0 = 0$ se tiene:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Relaciones Angulares y Lineales

La velocidad tangencial se relaciona con la velocidad angular de la siguiente manera:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dr\theta}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$
$$v = r\omega$$

Similarmente para la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dr\omega}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$
$$a = r\alpha$$

5.3 Energía Cinética de Rotación

Para un cuerpo rígido formado por una colección de partículas que gira alrededor del eje z fijo con velocidad angular ω , cada partícula del cuerpo rígido tiene energía cinética de traslación. Si la partícula de masa m_i , se mueve con velocidad v_i , su energía cinética es:

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Cada partícula del cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular ω , pero distintas velocidades lineales, porque estas dependen de la distancia r al eje de rotación, y se relacionan por $v_i = \omega r_i$. Entonces la energía cinética de la partícula i es:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

5.3 Energía Cinética de Rotación

La energía cinética total del cuerpo rígido en rotación es la suma de las energías cinéticas de cada partícula individual, esto es:

$$E_c = \sum E_i = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

En donde el término entre paréntesis, se conoce como momento de inercia I

$$I = \sum m_i r_i^2$$

De la definición momento de inercia, sus unidades de medida en el SI son $kg \cdot m^2$. Con esta definición, se puede escribir la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido como:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

5.3 Energía Cinética de Rotación

La energía cinética de rotación no es una nueva forma de energía, sino que es el equivalente rotacional de la energía cinética de traslación, se dedujo a partir de esa forma de energía.

Existen técnicas del cálculo integral para calcular I , y teoremas asociados, que no se usarán en este curso. El momento de inercia I es una cantidad que depende del eje de rotación, el tamaño y la forma del objeto.

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

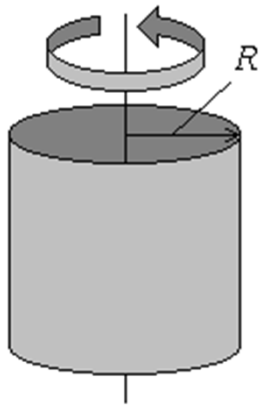
Para un objeto tridimensional es conveniente utilizar la densidad de volumen:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

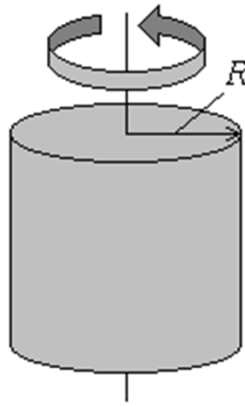
Entonces:

$$I = \int \rho r^2 dV$$

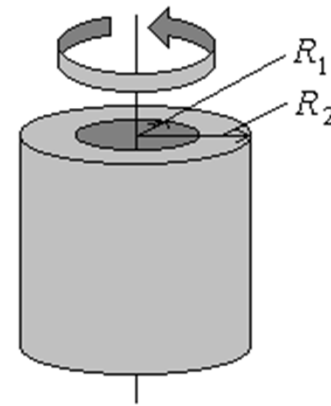
Ejemplos de momento de inercia



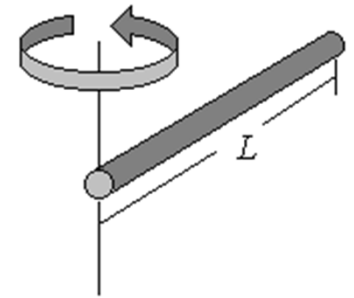
Aro o cascarón
cilíndrico $I_{CM} = MR^2$



Cilindro sólido
o disco $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$

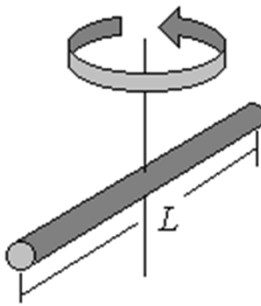


Cilindro hueco
 $I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

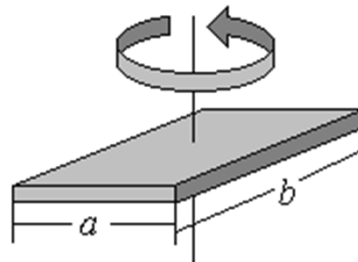


Barra delgada larga
con eje de rotación
que pasa por el
extremo.

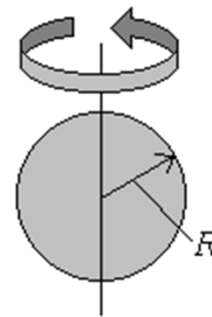
$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



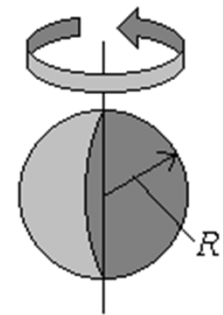
Barra delgada larga
con eje de rotación
que pasa por el
centro. $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$



Placa rectangular
 $I_{CM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



Esfera sólida
 $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$



Esfera hueca
 $I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$

5.4 RELACIÓN ENTRE TORQUE Y ACELERACIÓN ANGULAR.

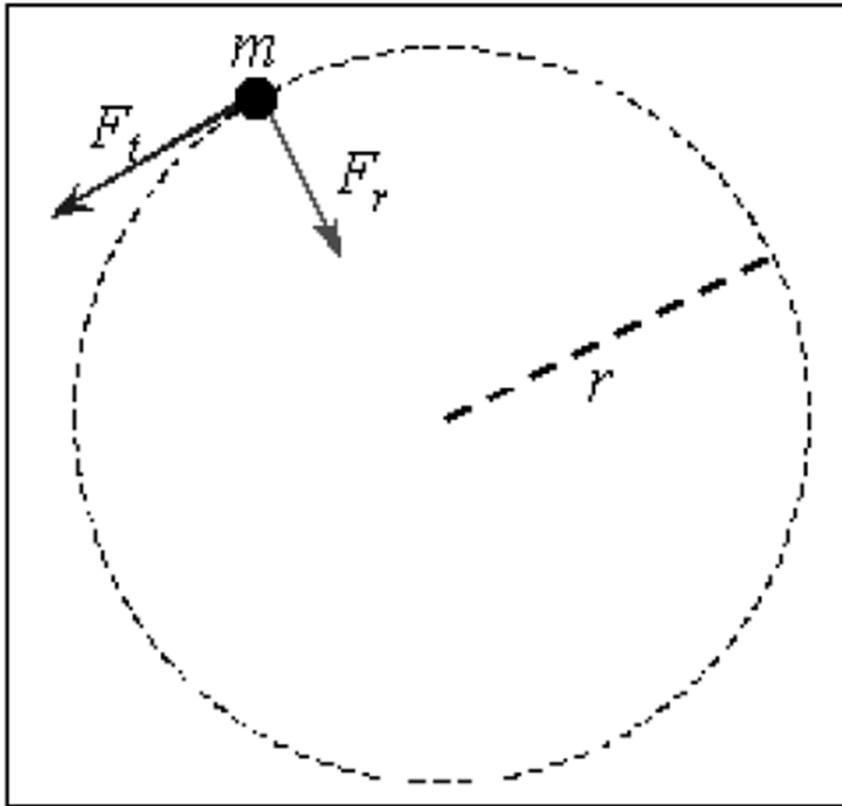


Figura 8.1

La fuerza tangencial se relaciona con la aceleración tangencial a_t por $F_t = ma_t$. El torque alrededor del centro del círculo producido por F_t es:

$$\tau = F_t r = (ma_t)r$$

Como la a_t se relaciona con la aceleración angular por $a_t = r\alpha$, el torque se puede escribir como:

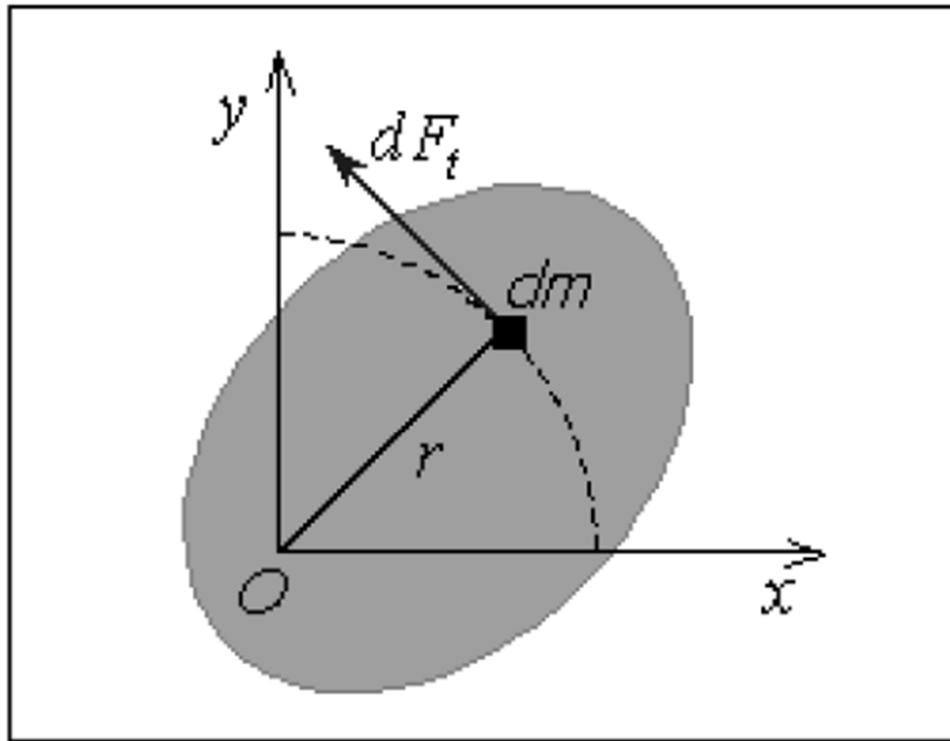
$$\tau = (m r \alpha) r = (m r^2) \alpha$$

Por tanto

$$\tau = I\alpha$$

$$F = ma.$$

5.4 RELACIÓN ENTRE TORQUE Y ACELERACIÓN ANGULAR.



Se puede extender este análisis a un cuerpo rígido arbitrario que rota en torno a un eje fijo que pase por O , como se ve en la figura 8.2. El cuerpo rígido se puede considerar formado por elementos de masa dm , que giran en torno a O en una circunferencia de radio r , por efecto de alguna fuerza tangencial externa dF_t que actúa sobre dm .

$$dF_t = (dm) a_t$$

Figura 8.2

$$d\tau = r dF_t = (r dm) a_t = (r dm) r \alpha = (r^2 dm) \alpha$$

El torque neto se obtiene integrando esta expresión, considerando que α tiene el mismo valor en todo el cuerpo rígido,

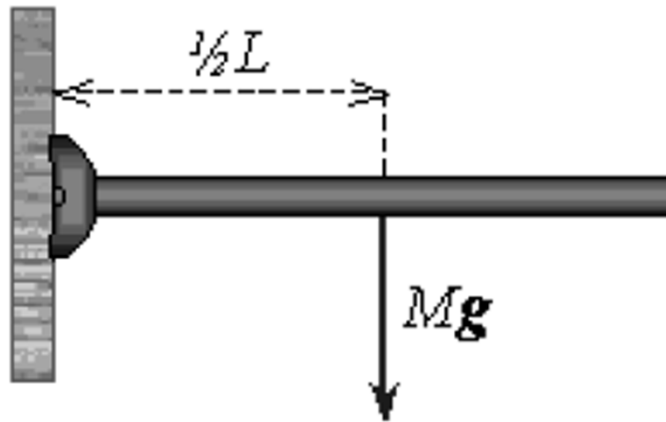
$$\tau_t = \int d\tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$

entonces

$$\tau_t = I \alpha$$

Ejemplo 1

Una barra uniforme de longitud L y masa M , que gira libremente alrededor de una bisagra sin fricción, se suelta desde el reposo en su posición horizontal, como se muestra en la figura. Calcular la aceleración angular de la barra y su aceleración lineal inicial de su extremo.



Solución

El momento de torsión es:

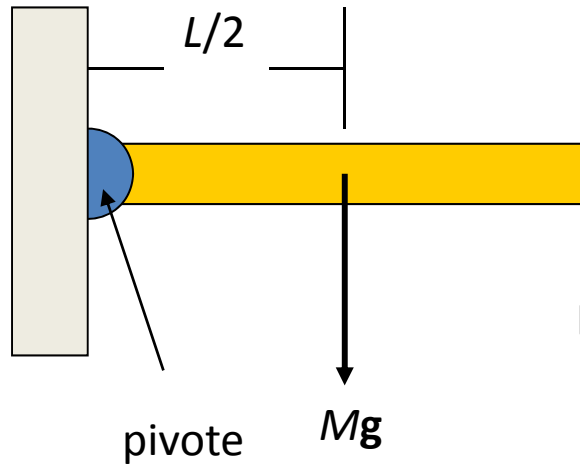
$$\tau = Fd = Mg(L/2)$$

La aceleración angular es

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{MgL/2}{1/3ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

La aceleración lineal del extremo es

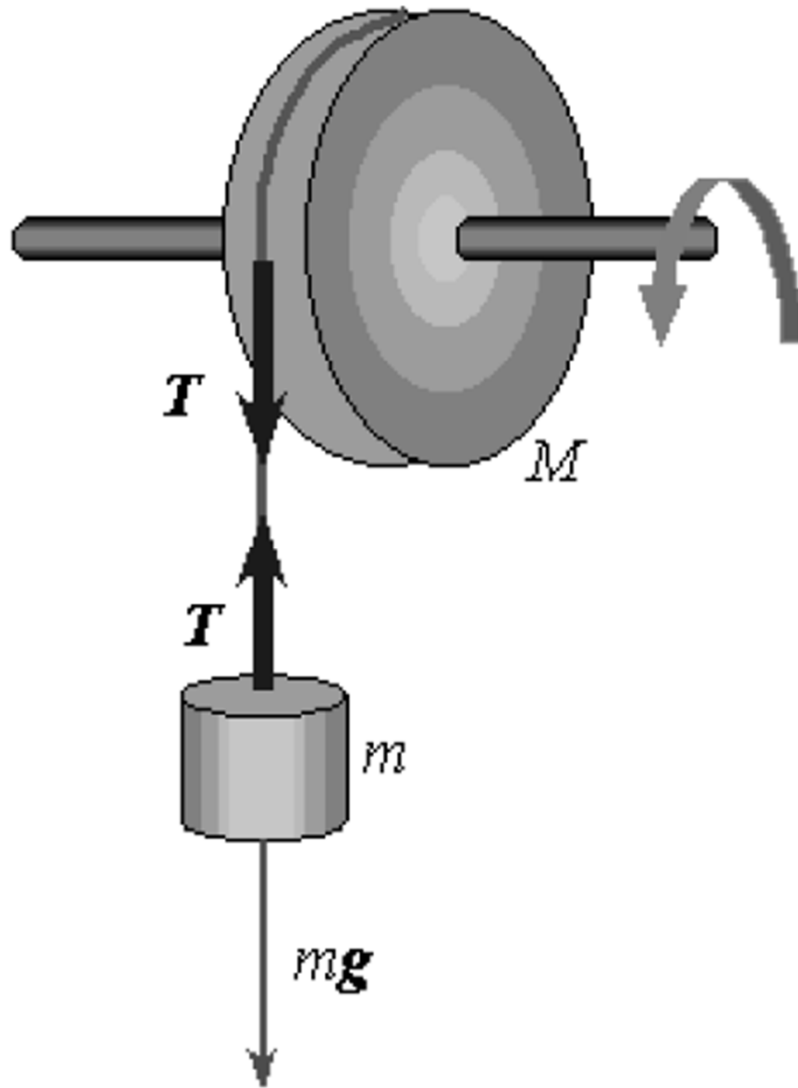
$$a = L\alpha = 3/2 g$$



Para calcular la aceleración lineal del extremo de la barra, usamos la ecuación $a_t = r\alpha$, con $r = L$, reemplazando α :

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Ejemplo 2

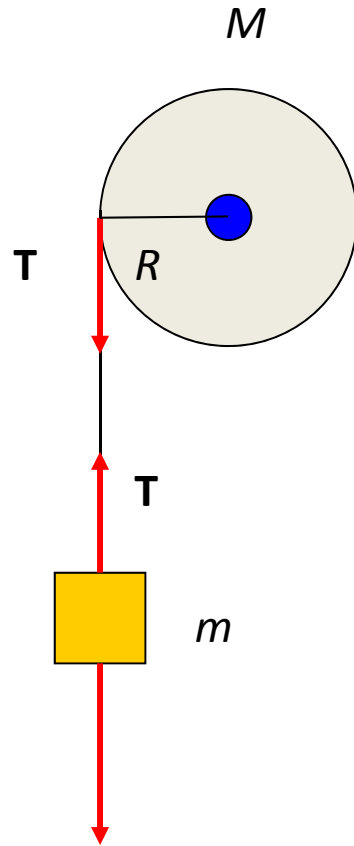


Una rueda de radio R , masa M y momento de inercia I , puede girar en torno a un eje horizontal sin roce (ver figura). Una cuerda ideal se enrolla alrededor de la rueda y sostiene un bloque de masa m . Cuando se suelta el bloque, la rueda comienza a girar en torno a su eje. Calcular la aceleración lineal del bloque, la tensión de la cuerda y la aceleración angular de la rueda.

Solución

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR}{I}$$

La 2a ley de Newton



$$F_y = mg - T = ma$$

$$a = \frac{mg - T}{m} = R\alpha = \frac{TR^2}{I}$$

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

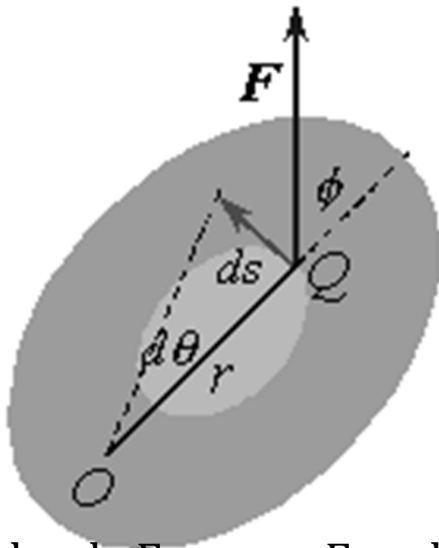
$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + \frac{I}{mR}}$$

$$M = 2 \text{ kg}, R = 30 \text{ cm}, I = 9.90 \text{ kg m}^2, m = 0.5 \text{ kg}$$

Es todo por hoy

5.5 TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN.



Para un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo que pasa por O, como se ve en la figura. Si una fuerza externa F se aplica en un punto Q del cuerpo rígido a una distancia r de O, el trabajo realizado por F cuando el objeto gira una distancia infinitesimal $ds = r d\theta$ es:

$$dW = F \cdot ds = (F \sen \phi) r d\theta = F_t r d\theta$$

donde $F \sen \phi = F_t$ es la componente tangencial de F o la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento ds , que es la componente que realiza trabajo. La componente radial de F no realiza trabajo porque es perpendicular al desplazamiento. Como el torque es: $\tau = r F \sen \phi$, el trabajo se escribe:

$$dW = \tau d\theta,$$

integrando, se obtiene:

$$W = \int_i^f \tau d\theta$$

5.5 TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN.

El trabajo de rotación es análogo el de traslación:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

La potencia con la cual se realiza el trabajo es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Por tanto, la potencia instantánea es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$

Tomando ahora la expresión del torque rotacional $\tau = I\alpha$, aplicando la regla de la cadena:

$$\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

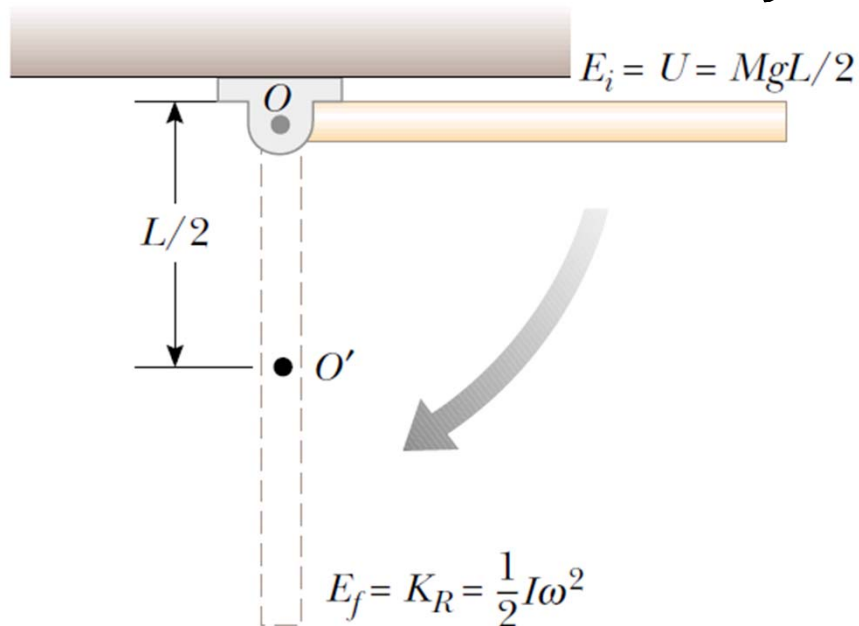
5.5 TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN.

Al reagrupar esta expresión y considerando que $\tau d\theta = dW \Rightarrow dW = I\omega d\omega$. Integrando se encuentra el trabajo total realizado durante la rotación:

$$W = \int_i^f \tau d\theta = \int_i^f I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

Por lo tanto, el trabajo neto realizado por las fuerzas externas al hacer girar un cuerpo rígido es igual a la variación de energía cinética rotacional del objeto.

Ejemplo 3



una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo (ver figura). La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

calcular su rapidez angular, la rapidez lineal de su centro de masa y del punto mas bajo de la barra cuando está vertical.

Solución

Aplicando conservación de energía mecánica

$$\frac{1}{2}MgL = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

Resolviendo para ω

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

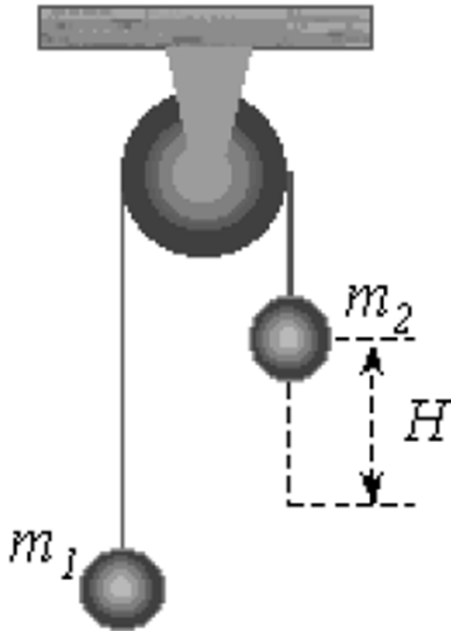
Para calcular la rapidez del centro de masa, se usa:

$$v_{cm} = r\omega = \frac{L}{2}\omega$$

$$v_{cm} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

En el punto mas bajo la rapidez es $v = 2v_{cm} = \sqrt{3Lg}$.

Ejemplo 4



Para el sistema de la figura, las masas tienen momento de inercia I en torno a su eje de rotación, la cuerda no resbala en la polea y el sistema se suelta desde el reposo. Calcular la rapidez lineal de las masas después que una ha descendido H y la rapidez angular de la polea.

Solución: como no hay roce en la polea, se conserva la energía, que aplicada a cada masa m_1 y m_2 , suponiendo que m_2 se encuentra inicialmente en la parte superior del sistema, es:

$$0 + m_2 g H = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m_1 g H$$

Solución ejemplo 4

$$\frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) v^2 = (m_2 - m_1) g H$$

Por tanto

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2 + I/R^2}}$$

Calcule la velocidad angular a partir del anterior resultado.



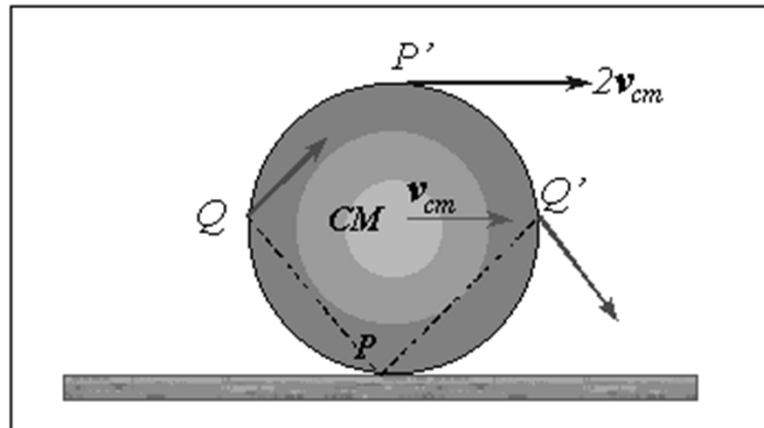
?????

5.6 MOVIMIENTO DE RODADURA DE UN CUERPO RÍGIDO.

Se considerará ahora el caso más general de movimiento de rotación, **donde el eje de rotación no está fijo en el espacio, sino que en movimiento, este se llama movimiento de rodadura.** El movimiento general de un cuerpo rígido es muy complejo, pero se puede usar un modelo simplificado limitando el análisis a un cuerpo rígido homogéneo con gran simetría, como un cilindro, una esfera o un aro, y **suponiendo que el cuerpo tiene movimiento de rodadura en un plano.**

Considerar un cilindro uniforme de radio R que rueda sin deslizar en una trayectoria recta, como en la figura. El centro de masa se mueve en línea recta, pero un punto en el borde se mueve en una trayectoria más compleja, llamada cicloide.

La cicloide es la curva que traza un punto situado en el borde de un círculo que rueda sin resbalar sobre una recta.



5.6 MOVIMIENTO DE RODADURA DE UN CUERPO RÍGIDO.

A medida que el cilindro gira un ángulo θ , su centro de masa se mueve una distancia $s = R\theta$, por lo tanto, las magnitudes de la velocidad y la aceleración del centro de masa para el movimiento de rodadura puro son:

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \qquad a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Un punto general del cilindro, como Q tiene una velocidad con componente horizontal y vertical. Pero los puntos P, CM y P' tienen velocidades respectivamente cero en P porque $R=0$, $v_{cm} = R\omega$ en el CM y $(2R)\omega = 2(R\omega) = 2v_{cm}$ en P', ya que todos los puntos del cilindro tienen la misma ω .

La energía cinética total del cilindro rodante es:

$$E_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

donde I_P es el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por P. Se puede demostrar que $I_P = I_{cm} + MR^2$ y al reemplazar en E_c se tiene:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

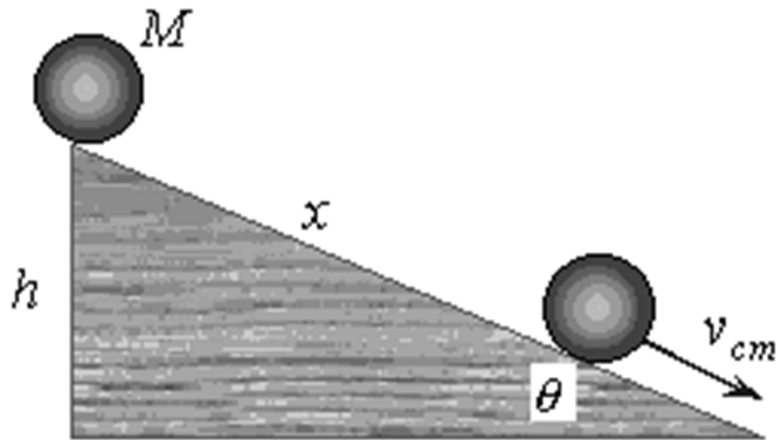
5.6 MOVIMIENTO DE RODADURA DE UN CUERPO RÍGIDO.

Pero $v_{cm} = R\omega$, entonces:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Esto significa que la energía cinética total de un objeto en movimiento de rodadura está dada por la energía cinética de rotación en torno al centro de masa y la energía cinética de traslación del centro de masa del objeto. El movimiento de rodadura sólo es posible si existe roce entre el cuerpo rígido que se mueve y la superficie, ya que la fuerza de roce produce el torque necesario para hacer rodar el cuerpo rígido en torno al centro de masa.

Ejemplo 5



Usar la conservación de la energía para describir el movimiento de rodadura de un cuerpo rígido de masa M que rueda por un plano inclinado y rugoso, que se muestra en la figura

Solución: Aplicando conservación de la energía se tiene:

$$Mgh = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

Como $v_{cm} = R\omega \Rightarrow \omega = v_{cm}/R$, se reemplaza en la ecuación anterior y se obtiene:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_{cm}/MR^2}}$$

Ejemplo 5

La aceleración lineal se puede calcular con la ecuación

$$v_{cm}^2 = v_{icm}^2 + 2a_{cm}x = 2a_{cm}x \Rightarrow a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2x}$$

5.7 Cantidad De Movimiento Angular



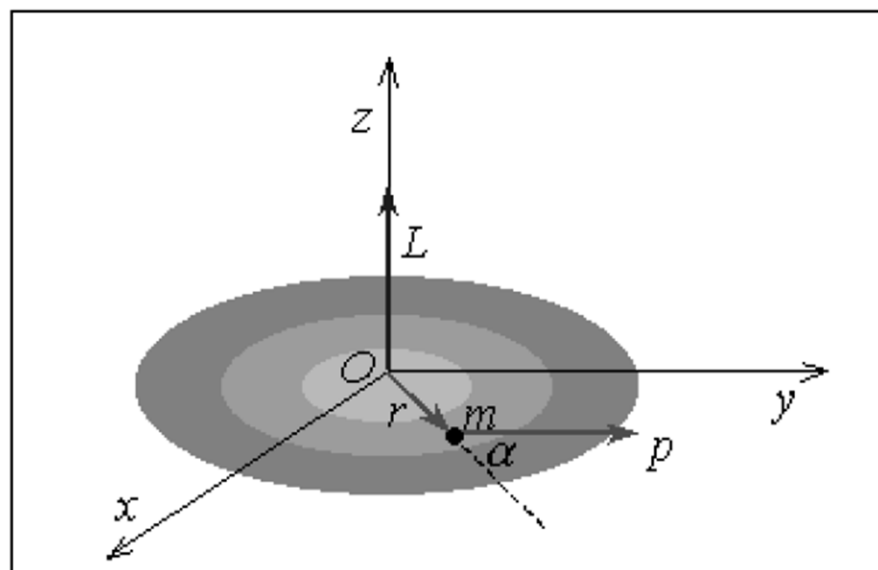
Una partícula de masa m , ubicada en una posición \vec{r} desde el origen O , que se mueve con velocidad \vec{v} , tiene momento lineal \vec{p} . Se define el momento angular \vec{L} de una partícula respecto al origen, como el producto vectorial entre la posición \vec{r} y el momento lineal \vec{p} , esto es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

La unidad de medida de \mathbf{L} en el SI es $kg\ m^2/s$. La dirección de \mathbf{L} es perpendicular el plano formado por \mathbf{r} y \mathbf{p} y su sentido dado por la regla de la mano derecha. En la figura se muestra los vectores \mathbf{r} y \mathbf{p} que están en el plano xy , por lo tanto \mathbf{L} apunta en dirección del eje z . \mathbf{L} es cero cuando \mathbf{r} es paralela a \mathbf{p} ($\alpha = 0$ ó 180°), este es el caso cuando la partícula pasa por el origen. Si \mathbf{r} es perpendicular a \mathbf{p} , $\alpha = 90^\circ$, entonces $L = mvr$.

Como $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$, la magnitud de \mathbf{L} si α es el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{p} , es:

$$L = mvr \sin \alpha$$



Si se calcula la derivada temporal del momento angular, se obtiene un resultado interesante, en efecto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, el primer término es cero ya que es el producto vectorial de vectores paralelos; en el segundo término se usa la segunda ley de Newton en la forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, entonces queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

que es el análogo rotacional de la segunda Ley de Newton. Esta ecuación indica que el torque sobre una partícula es igual a variación temporal del momento angular de la partícula.

Para un sistema de partículas, el momento angular total es la suma vectorial de los momentos angulares de las partículas individuales, esto es:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum \vec{L}_i$$

Si el torque neto, $\sum \vec{\tau}$, es distinto de cero, entonces puede cambiar el momento angular total del sistema de partículas ya que se tiene:

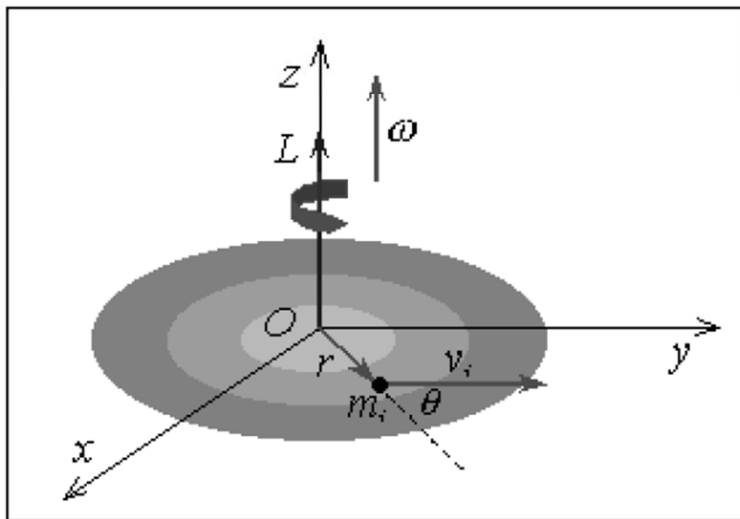
$$\sum \vec{\tau} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

que significa que la variación temporal del momento angular total del sistema de partículas en torno a algún origen es igual al torque neto que actúa sobre el sistema.

5.7.1 Cantidad De Movimiento Angular De un Objeto Rígido

Considerar un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje que tiene una dirección fija y supongamos que esta dirección coincide con el eje z , como se ve en la figura. Cada partícula del cuerpo rígido gira en el plano xy en torno al eje z con rapidez angular ω . Entonces la magnitud del momento angular de la partícula en torno al origen O es $L_i = m_i v_i r_i$, ya que \mathbf{v} es perpendicular a \mathbf{r} . Pero como $v_i = r_i \omega$, la magnitud del momento angular para una partícula i se puede escribir como:

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$



El vector \mathbf{L} está en dirección del eje z igual que el vector ω , por lo que se considera como la componente z del momento angular de la partícula i .

5.7.1 Cantidad De Movimiento Angular De un Objeto Rígido

Para todo el cuerpo rígido, la componente z del momento angular total es la suma de L_i de cada partícula del cuerpo rígido:

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega \Rightarrow L_z = I\omega$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo rígido alrededor del eje z . Notar que $L = I\omega$ es el análogo rotacional del momento lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Se puede derivar L_z respecto al tiempo considerando que I es constante:

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

donde α es la aceleración angular del cuerpo rígido. Pero dL_z/dt es el torque neto, entonces se puede escribir

$$\Sigma \tau = I\alpha$$

5.8 Conservación De la Cantidad De Movimiento Angular



De la ecuación:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero, entonces:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$$

Esta ecuación dice que el momento angular total de un sistema es constante si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero: es el *principio de conservación del momento angular*.

5.8 Conservación De la Cantidad De Movimiento Angular

Si un cuerpo rígido experimenta una redistribución de su masa, entonces su momento de inercia cambia, en este caso la conservación del momento angular se escribe en la forma:

$$L_i = L_f$$

Si el cuerpo gira entorno a un eje fijo, entonces $L = I\omega$, y se puede escribir

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Esta es la tercera Ley de conservación que hemos deducido. Entonces ahora podemos afirmar que para un sistema aislado, la energía, el momento lineal y el momento angular permanecen constantes. Son los principios de conservación en Física.

ES TODO POR HOY
GRACIAS POR SU ATENCIÓN