Ma5 AO5 Omfångsrika problem

Eduards Abisevs
Tetek-21

April 26, 2024

Problemformulering

I en befolkningsmodell för en stor stad kan befolkningstätheten x km från centrum approximeras med funktionen

$$f(x) = \frac{95\,000}{x^2 + 10x + 16}$$

där y är antalet människor per kvadratkilometer.

Uppgiften handlar om att beräkna hur många människor som bor inom en radie från centrum.

Givet

Av uppgiften ett ledtråd. att teckna ett uttryck.

Sökt

(a) Uppskatta hur många människor som bor inom en radie 5 km från centrum.

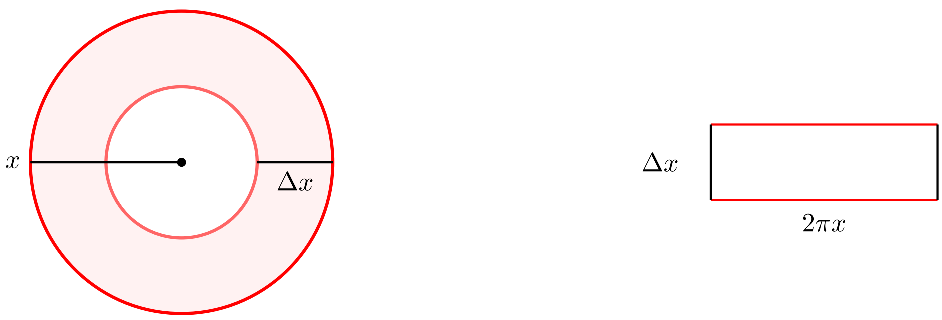
(b) Hur många människor bor mellan 5 och 10 km från centrum.

Påstående 1 (Befolkningsmodell inom en radie från centrum)**.** *Given nedre gräns a och övre gräns b där $a, b \in \mathbb{R}^+$ gäller modellen:*

$$\int_a^b (f(x) \cdot 2\pi x)\ dx = \int_a^b \frac{95\,000 \cdot 2\pi x}{x^2 + 10x + 16}\ dx \Rightarrow g(a,b)$$
$$g(a,b) = \frac{190\,000\pi}{3} \left(4 \ln \left(\frac{b+8}{a+8} \right) - \ln \left(\frac{b+2}{a+2} \right) \right)$$

Proof. För att bevisa att funktionen $g(a,b)$ gäller för godtyckliga a och b ska integrerings processen härledas, samt resultatet av godtyckliga tal jämföras med approxomitiv lössning med hjälp av digitala hjälp medel (Python program).

Steg 1 Riemannsumma



$$S \approx \sum_{k=a}^{b} f(x_k) 2\pi \cdot \Delta x$$

Steg 2: Låter vi $\Delta x \to 0$ övergår Reimannsumma till ett integral

$$\begin{aligned}
g(a,b) &= \int_a^b (f(x) \cdot 2\pi x)\ dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{95\,000 \cdot 2\pi x}{x^2 + 10x + 16} \right) dx \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{x}{x^2 + 10x + 16} \right) dx && \text{(Bryta ut konstanterna)} \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{x}{(x+8)(x+2)} \right) dx && \text{(Faktorisera nämnaren)} \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{A}{(x+8)} + \frac{B}{(x+2)} \right) dx && \text{(2.1 Simplifiera)}
\end{aligned}$$

Steg 2.1 Partialbråkupdelning

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x+8)(x+2)} &= \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x+2} \\
&= \frac{A(x+2)}{(x+8)(x+2)} + \frac{B(x+8)}{(x+8)(x+2)} \\
&= \frac{Ax + 2A + Bx + 8B}{(x+8)(x+2)} \\
&= \frac{x(A+B) + 2A + 8B}{(x+8)(x+2)}
\end{aligned}$$

För att lösa ut täljaren A och B kan en enkelt ekvationssytem defineras, där ekvationen (i) tillhör till antal x i ursrungliga bråkets täljare och (ii) till konstanterna.

$$\begin{cases} A + B = 1 & (i) \\ 2A + 8B = 0 & (ii) \end{cases}$$

Ekvationen (i) omvandlas till $A = 1 - B$ och sedan sätts in i ekvationen (ii)

$$\begin{aligned}
&2(1 - B) + 8B = 0 \\
&2 - 2B + 8B = 0 \\
&6B = -2 \\
&B = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Sätter man in B i (i) får man

$$\begin{aligned}
&A + (-\frac{1}{3}) = 1 \\
&A = 1 + \frac{1}{3} \\
&A = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Lössningen till ekvationssystemet är

$$\begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Steg 2.2 Lössningar till A och B sätts i integralen

$$\begin{aligned}
g(a,b) &= \int_a^b (f(x) \cdot 2\pi x)\ dx \\
&\vdots \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{A}{(x+8)} + \frac{B}{(x+2)} \right) dx \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{\frac{4}{3}}{(x+8)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(x+2)} \right) dx \\
&\text{bryt ut minus tecken utanför integralen} \\
&= 190\,000\pi \left(\int_a^b \frac{\frac{4}{3}}{(x+8)}\ dx - \int_a^b \frac{\frac{1}{3}}{(x+2)}\ dx \right)
\end{aligned}$$

Steg 2.3 beräkna första integralen

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\frac{4}{3}}{x+8}\ dx \Rightarrow \int_a^b \frac{a}{t}\ dt = [a \ln(|t|)]_a^b & \qquad \text{där } a = \frac{4}{3} \text{ och } t = x+8 \\
\Rightarrow \left[\frac{4}{3} \cdot \ln(|x+8|) \right]_a^b & \qquad \text{(Sätt tilbaba } a, t\text{)} \\
= \frac{4}{3} \cdot \ln(|b+8|) - \frac{4}{3} \cdot \ln(|a+8|) & \qquad \text{(Sätt integrands gränser)} \\
= \frac{4}{3} \cdot (\ln(|b+8) - \ln(|a+8|)) & \qquad \text{Bryt ut } \frac{4}{3} \\
\Rightarrow \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) & \qquad \text{(Logoritmiska egenskapen)} \\
\Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \ln\left(\frac{|b+8|}{|a+8|}\right) & \qquad \text{(Simplifiera genom egenskapen)} \\
= \frac{4 \ln\left(\frac{|b+8|}{|a+8|}\right)}{3} & \qquad \text{(Simplifiera genom multiplikation)}
\end{aligned}$$

För att $\ln(|t|)$ är definerat $t > 0$, används absolutbelopp men för att $a, b \in \mathbb{R}^+$ kan absolutbelopp utelämnas därmed gäller:

$$\int_a^b \frac{\frac{4}{3}}{x+8}\ dx = \frac{4 \ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right)}{3}$$

Steg 2.4 beräkna andra integralen

Andra integralen beräknas på exakt samma sätt som första för att den är av samma sorts.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\frac{1}{3}}{x+2}\ dx &= \left[\frac{1}{3} \cdot \ln(x+2) \right]_a^b \\
&= \frac{\ln(b+2)}{3} - \frac{\ln(a+2)}{3} \\
&= \frac{\ln(b+2) - \ln(|a+2|)}{3} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)}{3}
\end{aligned}$$

Steg 2.5 sätt beräknade integralerna tillbaka

$$
\begin{aligned}
g(a,b) &= \\
&\vdots \\
&= 190\,000\pi \left(\frac{4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right)}{3} - \frac{\ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)}{3} \right) \\
&= 190\,000\pi \left(\frac{4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)}{3} \right) && \text{(Simplifiera under ett bråk streck)} \\
&= 190\,000\pi \cdot \frac{1}{3} \left(4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right) \right) && \text{(Faktorisera ut } \tfrac{1}{3}\text{)} \\
&= \frac{190\,000\pi}{3} \left(4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right) \right) && \text{(Simplifiera bråk)}
\end{aligned}
$$

QEB

Lösning

Del (a)

Uppskatta hur många människor som bor inom en radie 5 km från centrum. För att lösa problemet tillämpas funktion $g(a,b)$ från Påstånde 1, där $a = 0$ d.v.s. nedre gräns börjar i centrum i storstad och $b = 5$.

$$
\begin{aligned}
g(a,b) &= \frac{190\,000\pi}{3} \left(4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right) \right) \\
g(0,5) &= \frac{190\,000\pi}{3} \left(4\ln\left(\frac{5+8}{0+8}\right) - \ln\left(\frac{5+2}{0+2}\right) \right) \\
&= \frac{760\,000\pi \cdot \ln\left(\frac{13}{8}\right)}{3} - \frac{190\,000\pi \cdot \ln\left(\frac{7}{2}\right)}{3} && \text{(Exakta svaret)} \\
&\approx 137\,142\,\text{(Människor)}
\end{aligned}
$$

Del (b)

Hur många människor bor mellan 5 och 10 km från centrum. För att beräkna detta tillämpas funktionen $g(a,b)$ från Påstånde 1, där $a = 5$ och $b = 10$.

$$
\begin{aligned}
g(a,b) &= \frac{190\,000\pi}{3} \left(4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right) \right) \\
g(5,10) &= \frac{190\,000\pi}{3} \left(4\ln\left(\frac{10+8}{5+8}\right) - \ln\left(\frac{10+2}{5+2}\right) \right) \\
&= \frac{760\,000\pi \cdot \ln\left(\frac{18}{13}\right)}{3} - \frac{190\,000\pi \cdot \ln\left(\frac{12}{7}\right)}{3} \\
&\approx 151\,751\,\text{(Människor)}
\end{aligned}
$$

Svar

Del (a): $\approx 137\,142$ (Människor)
Del (b): $\approx 151\,751$ (Människor)