Ma5 AO5 Omfångsrika problem

Eduards Abisevs
Tetek-21

April 29, 2024

Problemformulering

I en befolkningsmodell för en stor stad kan befolkningstätheten x km från centrum approximeras med funktionen

$$f(x) = \frac{95\,000}{x^2 + 10x + 16}$$

där y är antalet människor per kvadratkilometer.

Uppgiften handlar om att beräkna hur många människor som bor inom en radie från centrum. Dvs att teckna ett radial area uttryck, given en täthetsfunktion beräkna befolkningen vid givna gränser a och b.

Sökt

(a) Uppskatta hur många människor som bor inom en radie 5 km från centrum.

(b) Hur många människor bor mellan 5 och 10 km från centrum.

Påstående 1 (Befolkningsmodell inom en radie från centrum)**.** *Given nedre gräns a och övre gräns b i km, där $0 \leq a < b \leq 10$ och $a, b \in \mathbb{R}^+$ därmed gäller modellen:*

$$\begin{aligned} g(a,b) &= \int_a^b (f(x) \cdot 2\pi x)\, dx = \int_a^b \frac{95\,000 \cdot 2\pi x}{x^2 + 10x + 16}\, dx \\ &= \frac{190\,000\pi}{3} \left(4 \ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right) \right) \end{aligned}$$

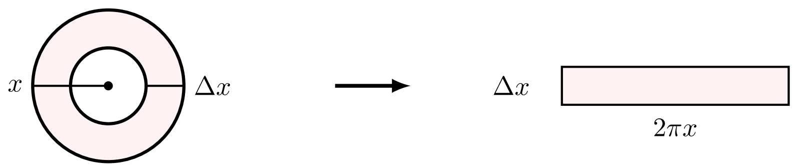
Motivering av $b_{\max=10}$ är av att i uppgiten är det inte givet i vilken interval $f(x)$ ger godtycklig approximation, därmed togs valet att ha gränsen vid högsta efterfrågade värden som är 10 km.

Proof. För att bevisa att funktionen $g(a, b)$ gäller för godtyckliga a och b ska integrerings processen härledas, samt resultatet av godtyckliga tal jämföras med approxomitiv lössning med hjälp av digitala hjälp medel (Python program).

Ett metod att göra detta är att teckna ett uttryck för ett litet cirklesegment för att beräkna radial area. Sedan multiplicera den area med befolkningstäthetsfunktionen och som sist summera alla små cirkleringar mellan gränserna a och b.

Steg 1. Teckna ett uttryck för area av små cirkel segment

Låt x vara avstånd från centrum av en storstad dvs radie och Δx ett litet avstånd in mot centrum.



Matematiskt kan detta sammband beskrivas som area A, där $2\pi x$ är cirkel segments omkrets och Δx tjockleken eller höjden

$$A = 2\pi x \cdot \Delta x$$

Steg 1.1 Teckna ett uttryck av befolkningen

Given täthetsfunktionen $f(x)$ multiplicerat med radial area uttryck A, ger detta ihop antal M människor i den radiala området x km från centrum.

$$M = f(x) \cdot A$$

Steg 1.2. Approximation med Riemannsumma

Låt S vara summa av alla människor M i intervallet från a till b. Sedan låt $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ och x_i var definerat som $x_i = a + i\Delta x$ för $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Därmed Reimannsumma kan approximera arean under kurvan M:

$$S = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot 2\pi x_i \cdot \Delta x$$

Låt nu $\Delta x \to 0$ därefter övergår Reimannsumma till ett bestämd integral,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i) \cdot 2\pi x_i \cdot \Delta x = \int_a^b \left(f(x) \cdot 2\pi x\right)\, dx$$

Steg 2. Beräkna bestämd integral

Låt nu $g(a, b)$ vara ett funktion till bestämd integral mellan gränserna a och b

$$\begin{aligned}
g(a,b) &= \int_a^b \left(f(x) \cdot 2\pi x\right)\, dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{95\,000 \cdot 2\pi x}{x^2 + 10x + 16}\right) dx \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{x}{x^2 + 10x + 16}\right) dx && \text{(Bryta ut konstanterna)} \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{x}{(x+8)(x+2)}\right) dx && \text{(Faktorisera nämnaren)} \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{A}{(x+8)} + \frac{B}{(x+2)}\right) dx && \text{(Simplifiera genom 2.1)}
\end{aligned}$$

Steg 2.1. Partialbråkupdelning

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x+8)(x+2)} &= \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x+2} \\
&= \frac{A(x+2)}{(x+8)(x+2)} + \frac{B(x+8)}{(x+8)(x+2)} && \text{(Förläng bråk)} \\
&= \frac{Ax + 2A + Bx + 8B}{(x+8)(x+2)} && \text{(Utveckla täljare)} \\
&= \frac{x(A+B) + 2A + 8B}{(x+8)(x+2)} && \text{(Faktorisera ut gemensam } x \text{)}
\end{aligned}$$

För att lösa ut täljaren A och B kan en enkelt ekvationssytem defineras, där ekvationen (i) tillhör till antal x i ursrungliga bråkets täljare och (ii) till konstanterna.

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + 8B = 0 \quad (ii) \end{cases}$$

Ekvationen (i) omvandlas till $A = 1 - B$ och sedan sätts in i ekvationen (ii)

$$\begin{aligned}
&2A + 8B = 0 \\
&2(1 - B) + 8B = 0 \\
&2 - 2B + 8B = 0 \\
&6B = -2 \\
&B = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Sätter man in B i (i) får man

$$\begin{aligned}
&A + (-\frac{1}{3}) = 1 \\
&A = 1 + \frac{1}{3} \\
&A = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Lössningen till ekvationssystemet är

$$\begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Steg 2.2. Lössningar till A och B sätts i integralen

$$\begin{aligned}
g(a, b) = &\int_a^b (f(x) \cdot 2\pi x)\ dx \\
&\vdots \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{A}{(x+8)} + \frac{B}{(x+2)} \right) dx \\
&= 190\,000\pi \int_a^b \left(\frac{\frac{4}{3}}{(x+8)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(x+2)} \right) dx && \text{(Bryt ut i två integraler)} \\
&= 190\,000\pi \left(\int_a^b \frac{\frac{4}{3}}{(x+8)}\ dx - \int_a^b \frac{\frac{1}{3}}{(x+2)}\ dx \right) && \text{(bryt ut -1 från andra integral)}
\end{aligned}$$

Steg 2.3. Beräkna första integralen

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\frac{4}{3}}{x+8}\ dx \Rightarrow \int_a^b \frac{a}{t}\ dt = [a \ln(|t|)]_a^b && \text{där } a = \frac{4}{3} \text{ och } t = x + 8 \\
\Rightarrow \left[\frac{4}{3} \cdot \ln(|x+8|) \right]_a^b && \text{(Sätt tilbaba a, t)} \\
= \frac{4}{3} \cdot \ln(|b+8|) - \frac{4}{3} \cdot \ln(|a+8|) && \text{(Sätt integrands gränser)} \\
= \frac{4}{3} \cdot (\ln(|b+8) - \ln(|a+8|)) && \left(\text{Bryt ut } \frac{4}{3}\right) \\
\Rightarrow \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) && \text{(Logoritmiska egenskapen)} \\
\Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \ln\left(\frac{|b+8|}{|a+8|}\right) && \text{(Simplifiera genom egenskapen)} \\
= \frac{4 \ln\left(\frac{|b+8|}{|a+8|}\right)}{3} && \text{(Simplifiera genom multiplikation)}
\end{aligned}$$

För att $\ln(|t|)$ är definerat $t > 0$, används absolutbelopp men för att $a, b \in \mathbb{R}^+$ kan absolutbelopp utelämnas därmed gäller:

$$\int_a^b \frac{\frac{4}{3}}{x+8}\,dx = \frac{4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right)}{3}$$

Steg 2.4. Beräkna andra integralen

Andra integralen beräknas på exakt samma sätt som första för att den är av samma sorts.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\frac{1}{3}}{x+2}\,dx &= \left[\frac{1}{3}\cdot\ln(x+2)\right]_a^b \\
&= \frac{\ln(b+2)}{3} - \frac{\ln(a+2)}{3} \\
&= \frac{\ln(b+2) - \ln(|a+2|)}{3} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)}{3}
\end{aligned}$$

Steg 2.5. Sätt beräknade integralerna tillbaka

$$\begin{aligned}
g(a,b) &= \int_a^b (f(x)\cdot 2\pi x)\,dx \\
&\vdots \\
&= 190\,000\pi\left(\frac{4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right)}{3} - \frac{\ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)}{3}\right) && \text{(Sätt in 2.3. och 2.4.)} \\
&= 190\,000\pi\left(\frac{4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)}{3}\right) && \text{(Simplifiera under ett bråk streck)} \\
&= 190\,000\pi\cdot\frac{1}{3}\left(4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)\right) && \left(\text{Faktorisera ut } \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{190\,000\pi}{3}\left(4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)\right) && \text{(Simplifiera bråk)}
\end{aligned}$$

Steg 3. Verifiering av Påstånde 1.

3 Tester utfördes för att jämföra approximativa svaret med svaret som $g(a,b)$ ger. I approximativa kaklyleringen med $\Delta x = 0.00001$ där dator utförde kaklyleringen av S, se Appendix A för källkod.

a	b	S	$g(a,b)$
0	1	13065.7	13065.6
4	6	65444.9	65444.5
9	10	28178.5	28178.2

QEB

Lösning

Del (a)

Uppskatta hur många människor som bor inom en radie 5 km från centrum. För att lösa problemet tillämpas funktion $g(a, b)$ från Påstånde 1, där $a = 0$ d.v.s. nedre gräns börjar i centrum i storstad och $b = 5$.

$$\begin{aligned} g(a,b) &= \frac{190\,000\pi}{3}\left(4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)\right) \\ g(0,5) &= \frac{190\,000\pi}{3}\left(4\ln\left(\frac{5+8}{0+8}\right) - \ln\left(\frac{5+2}{0+2}\right)\right) \\ &= \frac{760\,000\pi \cdot \ln\left(\frac{13}{8}\right)}{3} - \frac{190\,000\pi \cdot \ln\left(\frac{7}{2}\right)}{3} && \text{(Exakta svaret)} \\ &\approx 137\,142 \\ &\approx 137\,000\,\text{(Människor)} \end{aligned}$$

Del (b)

Hur många människor bor mellan 5 och 10 km från centrum. För att beräkna detta tillämpas funktionen $g(a, b)$ från Påstånde 1, där $a = 5$ och $b = 10$.

$$\begin{aligned} g(a,b) &= \frac{190\,000\pi}{3}\left(4\ln\left(\frac{b+8}{a+8}\right) - \ln\left(\frac{b+2}{a+2}\right)\right) \\ g(5,10) &= \frac{190\,000\pi}{3}\left(4\ln\left(\frac{10+8}{5+8}\right) - \ln\left(\frac{10+2}{5+2}\right)\right) \\ &= \frac{760\,000\pi \cdot \ln\left(\frac{18}{13}\right)}{3} - \frac{190\,000\pi \cdot \ln\left(\frac{12}{7}\right)}{3} \\ &\approx 151\,751 \\ &\approx 152\,000\,\text{(Människor)} \end{aligned}$$

Svar

Del (a): $g(0, 5) \approx 137\,000\,\text{(Människor)}$
Del (b): $g(5, 10) \approx 152\,000\,\text{(Människor)}$

Diskussion av resultatet

En storstad enligt Wikipedia defineras som stad med fler än 100 000 invånare. Föreställar man sig ett storstad därefeter svaret på (a) och (b) kan vara rimliga. Ja, de är nära varandra men arean mellan 5 och 10 km är 3 gånger större än mellan 0 och 5 km.

$$\begin{aligned} A_{0\text{-}5} &= 2\pi r^2 \Rightarrow 2\pi 5^2 = 50\pi\ \left(\text{km}^2\right) \\ A_{5\text{-}10} &= 2\pi 10^2 - 2\pi 5^2 \\ &= 2\pi(100-25) \\ &= 150\pi\ \left(\text{km}^2\right) \end{aligned}$$

Men tätheten är större mellan 0 och 5 km jämfört med 5 till 10 km.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{95\,000}{x^2+10x+16} \\ f(0) &\approx 5937.5 \\ f(5) &\approx 1043.96 \\ f(10) &\approx 439.8 \end{aligned}$$

A Python kod

```
import numpy as np

PI = np.pi
DX = 0.00001


def f(x):
    return (95000) / (x**2 + 10 * x + 16)


def approximate_population(a, b, dx):
    total_area = 0
    x = a
    while x < b:
        rectangle_area = f(x) * 2 * PI * x * dx
        total_area += rectangle_area
        x += dx
    return total_area


def main():
    a, b = 0,1
    print(f"Test 1: {approximate_population(a, b, DX)}")

    a, b = 4, 6
    print(f"Test 2: {approximate_population(a, b, DX)}")

    a, b = 9,10
    print(f"Test 3: {approximate_population(a, b, DX)}")

    a, b = 0,5
    print(f"Q (a) 2: {approximate_population(a, b, DX)}")

    a, b = 5,10
    print(f"Q (b) 2: {approximate_population(a, b, DX)}")


if __name__ == "__main__":
    main()
```