

En ny potentiell automatiskt kortleksblandare

Proof of Concept av en kortblandare

Innehåll

1	Inledning	2
1.1	Introduktion till ämnet	2
1.2	Syfte	2
2	Teori	2
2.1	Beräkningsteori	2
2.2	Slumpmässighet	2
2.3	Bakgrund av blandings metoder	2
2.3.1	Pile shuffle	3
2.3.2	Riffle shuffle	3
2.3.3	Spinny thingie shuffle	3
2.4	Klassiskt poker test	3
2.4.1	Chi-två-test	4
2.5	StdMean-testet	4
2.6	Pseudoslumptalsgenerator (PRNG)	4
2.7	Programmerings verktyg	4
3	Metod	5
3.1	Testmiljö	5
3.2	Simulation för kortblandningar och implementation	5
3.2.1	Val av datatyp & rådatalagring	6
3.3	Kortblandnings algoritmernas implemenation	6
3.3.1	Implemenation av Riffle shuffle	6
3.3.2	Implementation av Pile shuffle	6
3.4	Statistiska tester	6
3.4.1	Implementation av Klassiskt poker test	7
3.4.2	Implementation av StdMean testet	7
4	Resulat	8
5	Diskussion	8
	Ordlista	8
	Bibliografi	9
	Bilagor	10
A	Github	10
B	Template att bifoga ett inline kod	10
C	Template att bigoga källkod ifrån git repo	10

1 Inledning

1.1 Introduktion till ämnet

Spelbranschen är en industri som omsätter miljardbelopp och precis som alla industrier utvecklas den med resten av världen. Industrier över hela världen har som mål att hitta nya sätt att effektivisera och sänka kostnad på det arbete som utförs för att bedriva vinst och spelbranschen har följt denna långvariga trend med till exempel online casinon. Inom spelbranschen är kortspel vanligt förekommande, att försöka automatisera dem är ett logiskt steg att ta, men för en så stor industri vill man vara extra säker på att allt utförs på bästa sätt. Alla sätt att blanda kort är nämligen inte lika bra, vilken sorteringsmetod som används kan ha påverkan på resultatet. Teknologins inflytande inom spelbranschen ökar kraftigt, de största delarna av branschen bedrivs mer och mer av maskiner och algoritmer som får stor potentiellt inflytande på spelresultat, därför är det bäst att börja tänka på möjliga problem så snart som möjligt. Redan nu finns det blandningsmaskiner för kortlekar som vi inte vet någonting om; varken hur de funkar eller hur bra de är. Allt som vi vet är de är certifierade av tredjepartsföretag. Faktumet att de kan kosta upp till 100 000 kr betyder att inte vem som helst kan ha tillgång till en kortblandningsmaskin.

1.2 Syfte

Syftet med denna undersökning är att ta fram den hypotetiskt bästa kortblandaren utifrån två faktorer: 1) hur slumpmässigt den algoritm som den byggs efter kan blanda kort; 2) till vilken grad den potentiella maskinen byggd efter algoritmen skulle fungera i verkligheten. Med resultaten förväntas variationen i slumpmässighet för olika blandningsmetoder kunna visas upp samt kunna använda de resultaten för att komma fram till den hypotetiskt definitiva maskinen, något som är viktigt då spelbranschen handlar mycket om chans. Det är därför viktigt att se till så allt funkar på bästa sätt. I den här vetenskapliga rapporten kommer en jämförelse av hur effektivt framtagna blandningsmetoder kan fungera i en hypotetisk blandningsmaskin att utföras. Samtidigt som man kan utforska hur en dator kan göra slumpmässiga sekvenser på ett effektivt sätt med tanken att den ska tillämpas till en potentiell kortblandare. Detta är viktigt för att spelbranschen är en stor industri som handlar mycket om tur, att se till att de slumpmässiga resultaten är framtagna på bästa möjliga sätt är en essentiell del. Vi söker med hjälp av data svaret på frågan:

Utifrån slumpmässighet och effektivitet, vilken kort blandningsmetod är bäst för en potentiell spelkortsblandare som uppfyller följande:

- Fysiskt tillämpning: Hur pass väl den kan framställas i verkligheten
- Effektivitet: Utifrån mjukvaras och hårdvaras perspektiv
- Kortblandnings slumpmässighet

2 Teori

2.1 Beräkningsteori

Beräkningsteori är en del av matematik vars syfte är grundat i hur och om problem kan bli lösta på olika beräkningssätt. Beräkningsteori har flera olika grenar. En gren handlar om vad som går att bevisa inom matematik angående om nummer och funktioner är beräknelig eller inte. Med beräknelig menas något som kan beräknas, det vill säga värderas, uppfattas eller förutses, när det kommer till matematik syftar det på att bestämma något via matematiska modeller/processer, alltså att kalkylera.

2.2 Slumpmässighet

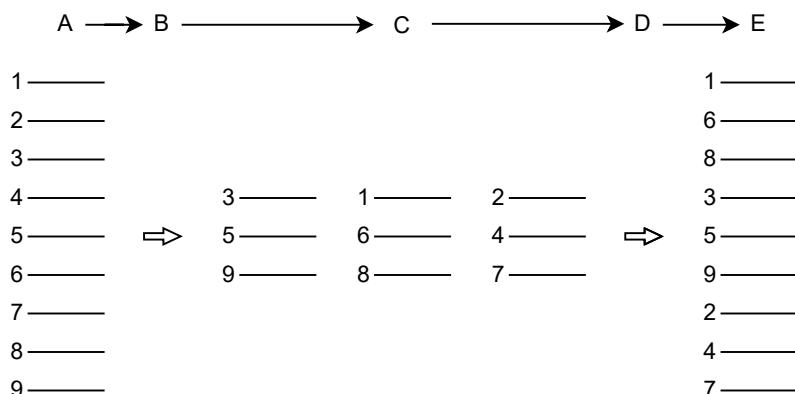
Slumpmässighet är en egenskap som anger att något sker utan klart mönster, när något är helt slumpmässigt är det i princip omöjligt att förutse. Slumpmässighet inom matematik är byggd beräkningsteori och den delas upp i två beroende på om det gäller slumpmässighet av en bestämd mängd eller en oändlig mängd av objekt (Terwijn, 2016, s. 49–66).

2.3 Bakgrund av blandings metoder

Theoretical Whats, Whys and Hows angående algorithmer.

2.3.1 Pile shuffle

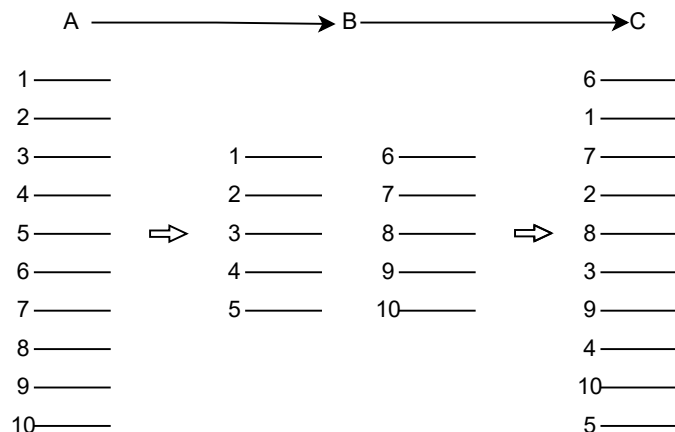
Pile shuffle är en kortleksblandnings metod som genomförs med fysiska kort. Processen ut går på att ett kort från kortleken läggs i en av flera olika högar. Processen försätts tills alla kort från kortleken har flyttats till en av högarna. Sedan läggs alla högar ihop för att bilda en ny kortlek.



Figur 1: Steg i processen för Pile Shuffle. Illustrationen visar de iterativa stegen från den ursprungliga högen (A), genom uppdelning i högar (B), temporära högar (C), omarrangering av temporära högar (D), och tillbaka till en enda hög (E). Pilar indikerar riktningen för blandningsprocessen.

2.3.2 Riffle shuffle

Det finns många olika metoder att blanda kort med riffle shuffle. Undersökningar har genomförts och dem har kommit fram till att



Figur 2: Steg i processen för Riffle Shuffle. Illustrationen visar de iterativa stegen från den ursprungliga högen (A), uppdelning i två högar (B), infoga dem två högarna med varandra för att bilda en ny hög. Pilar indikerar riktningen för blandningsprocessen.

2.3.3 Spinny thingie shuffle

2.4 Klassiskt poker test

Ett klassiskt poker test används att avgöra slumpmässighet i numeriska sekvenser, oftast för att testa slumpfelsgeneratorer. Testet utförs genom att 3 till 5 nummer väljs ut ur en sekvens och placeras i en av sju kategorier beroende på mönstret som talen har, mönsterna är baserade på händer i poker vilket är varför testet kallas poker test (Abdel-Rehim, Ismail och Morsy, 2014). Det olika mönster som letas efter i talen visas i tabell 1.

Tabell 1: Vanliga kategorier till poker test

Pokerhand	Mönster
Femtal	AAAAA
Fyrtal	AAAAB
Kåk	AAABB
Tretal	AAABC
Tvåpar	AABBC
Par	AABCD
Högt kort	ABCDE

Antalet mönster i varje kategori räknas för att få en distribution, som då jämförs med en distribution som stämmer överens med sannolikheten att få dem olika mönsterna. Om det total antalet mönster är n och sannolikheten för en pokerhand i är p_i , så borde antalet mönster i den kategori vara

$$e_i = p_i * n$$

Där o_i är antalet mönster som borde matcha pokerhand i . För att bestäma om resultaten kan komma från en rättvis kortlek så jämförs de resultat som fått av att plocka ut nummer mot de resultat som fås av sannolikhet via ett chi-två-test.

2.4.1 Chi-två-test

Inom statistik används ett *goodness-of-fit* test för att mäta hur pass väl fördelningen för den data som observerats stämmer överens med fördelningen som data förväntas ha utifrån en model. Karl Pearsons chi-två-test kan användas som *goodness-of-fit* test, det använder chitvåfördeling. I testet jämförs ett värde χ^2 med ett kritiskt värde för att bestäma om den observerade följer den förväntade fördelningen. χ^2 beräknas enligt formeln

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Där O_i är observerade frekvensen för en kategori av data i och E_i är förväntade frekvensen för kategorin i (National Institute of Standards and Technology, 2023). Det kritiska värdet fås av antalet frihetsgrader (kategorier - parametrar) och signifikansnivån som bestämts för testet.

Ett aspekt i chi-två-test är att data mängderna som testas inte kan vara för små. Det rekommenderas att O_i inte är mindre än 5.

2.5 StdMean-testet

Förklara logiken till standardavvikelse och medelvärde i logiken med avgörande av normal distribution och hur den ger ett mått/bild på randomness

2.6 Pseudoslumtalsgenerator (PRNG)

Här berätta om ChaCha20 (Bernstein, 2008) den som är bibliotekets rand (Developers, 2022) default PRNG och mersenne twister som egentligen var första hands val (Matsumoto och Nishimura, 1998) men som vi sedan bytte till ChaCha för att i rust är det relativt svårt att implementera och använda mersenne twister. Berätta om dem skillnaderna som finns.

En väldigt känd och testad algoritm är Mersenne Twister (MT 19937) som har en väldigt långt period innan siffrorna börjar att upprepa sig, mer exakt 2^{19937} (Matsumoto och Nishimura, 1998).

Alltså nämn att för att det här är som et proof of concept, borde vid senare tillfälle användas en hårdvara PRNG och icke software PRNG. Men på grund av detta undersökning handlar mesta dels om stora mängder av data simulationer så måste vi använda och Sacrifice verkliga till att lättare skapa simulationer!

2.7 Programmerings verktyg

Python är en objektorienterad, dynamiskt typad programmerings språk med fokus på läsbarhet med en enkelt syntax som tillför att det finns stora mängder av biblioteker (samling av färdig kod). Python används ofta i statistiskt och numeriskt analys på grund av dens läsbarhet och lätt användning. På grund av Python är skriven i

programmeringsspråket C finns det också tillgängliga C API's med andra betecknat CPython. Dem gör det möjligt att skapa program som är snabba och effektiva i stora datamängd analys. Dessa egenskaper har medföljt början av skapande av tiotals avancerade numeriska och bibliotek som är snabba i utförande och minskar antal rader av kod som behövs att skrivas i färdigt program. Dem bibliotek som är speciellt intressanta i detta undersökning är NumPy, Matplotlib, SciPy och Numba. NumPy som är snabbt i vektoriserad aritmetik och SciPy som har många inbyggda statistiska tester som χ^2 -testet (Harris m.fl., 2020; Virtanen m.fl., 2020).

Rust är ett programmeringsspråk som fokuserar på minnessäkerhet, parallellism och minneseffektivitet. Rust är känt för sina avancerade funktioner som ägarskapssystemet (ownership), vilket hjälper till att förhindra minnesläckor och tillåter säker minneshantering utan en skräpsamlare (garbage collector) (N. D. Matsakis och Klock II, 2014). Detta har ökat popularitet i användning av Rust i inbyggda system som ett motkandidat till c/c++.

3 Metod

Metoden kan indelas i tre huvudområdena 1) framtagande av algoritmerna. 2) simulation av kortleksblandningar. 3) statistiska tester av rådata. Målet är att besvara en av frågeställningens kriterium "Kortblandnings slumpmässighet". Därför valdes det att utföra ett kvantitativ undersökning med hjälp av simulation och statistiska tester. Simulation valdes till för att generera stora mängder av kortleksblandningar med målet att simulationen (processmässighet) skulle vara snarlik ett fysiskt kortleksblandare under sin livscykel.

3.1 Testmiljö

Typ	Specification
Processor	AMD Ryzen 5 3600 6 cores / 12 threads 3.6 GHz
RAM	15.93 GB
Hårdisk	KINGSTON SA400S3, 447 GB
Operativsystem	Ubuntu 22.04.3 (LTS) x86_64, Linux kernel 6.2.0-36-generic

Tabell 2: Linux Dator

I valet av testmiljö prioriterades operativsystemets kompatibilitet av dem utvecklingsverktyg som användes. Linux valdes på grund av dess robusta stöd för programmeringsmiljöer och bred stöd för mjukvaruutvecklingsverktyg. Dessutom erbjuder Linux bättre kontroll över systemsresurser. Vilket är avgörande för att uppnå följdriktiga och tillförlitliga testresultat. Därför kördes undersökningen på en Linux dator med specifikationerna listade i tabell 2.

3.2 Simulation för kortblandningar och implementation

Simulation och blandnings algoritmerna implementerades i programmerings språk Rust.

Programmet utvecklades med Rust version 1.73.0 och användes bibliotek (Rust Crates) som Rand version 0.8 för PRNG (Developers, 2022). Rayon för enkel användning av parallell multiprocessing (N. Matsakis och Stone, 2022). Simulation utgår från att man genererar tvådimensionella array, detta kan matematiskt beskrivas som matris med bestämd mängd av kortlekar. Vart varje kort, låt kalla dem till x som följer följande mängden $\{x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 51\}$ Resultaterande datamängden är en matris D med 52 kolumner och m antal rader, vart m värde visar hur många kortlekar det finns i datamängden.

$$D = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \cdots & x_{0,51} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,51} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,51} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m,0} & x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,51} \end{bmatrix}$$

För att bestämma m värde följdes ett kriterium från ett av testerna som ska utföras, klassiskt poker test mer i detalj beskriven i underrubriken 2.4.1 . Till hjälps användes (National Institute of Standards and Technology, 2023) internätkskälla, i denna nämns det att det är viktigt för chi-square approximationens trovärdighet att minsta kategorin ska inte vara mindre än fem teoretiska framkommande i den kategorin. Detta ska tillämpas

till simulationen på följande sätt. Det är viktigt att hitta den minsta kategorin som kan förekomma. I poker är den mest sällsynta pokerhand kungliga färgstege (Royal Flush) som kan räknas ut på följande sätt antal av alla kortkombinationer med fem kort. $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ Kungliga färgstege finns det fyra kombinationer av i kortleken som kan räknas ut på följande sätt totala antal kombinationer av kungliga färgstege delat med totala antal femkorts kombinationer från standardkortlek.

$$P(\text{Kunglig färgstege}) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{4}{2\,598\,960} \approx \frac{1}{649\,740}$$

$$m = P(\text{Kunglig färgstege}) \times 5 = 3\,248\,700$$

detta blir den minimala datamängden i simulationen .

3.2.1 Val av datatyp & rådatalagring

Efter teoretiska beräkningar av datamängden är det viktigt att välja lämplig datatyp att representera data i. Högsta talet som behövs är 51 definierad tidigare och betecknat med x . Detta betyder att minsta datatypen får användas som är 8 bit eller 1 byte långa som kan innehålla följande värden

$$\{b \in \mathbb{N}, 0 \leq b \leq 255\}$$

som översnsstämmer med datamängdens högsta talet x . Detta ger möjligheten att använda den fundermantala datatypen som används i minnes adressen. Fördelen med detta är det simplifierar lagring och inmatning av datamängder i t.ex Python med NumPy.

Andra aspekten till varför datatypen är viktigt är att spara minnen för att det kommer att simuleras och sparas tiotals rådata filer varje fil kommer att väga $161MB$, detta kan räknas ut på följande sätt

$$\frac{\text{totala bytes}}{\text{megabyte (MB)}} = \frac{52 \times m}{1024 \times 1024} = \frac{52 \times 3\,248\,700}{1024 \times 1024} = \frac{168\,932\,400}{1\,048\,576} \approx 161MB$$

som det är enkelt att spara data i binärt format för att 8 bits eller 1 byte är en fundamental och uniform mått i minnesadressen. Med det sagt ingen data bearbetning behövs och det är enkelt att ladda in denna i till exempel Python med numpy till statistiska testerna av rådata

Därför att sista teoretiska delen att bestämma är hur många iterationer per algoritm ska genomföras. Med iterationer menas hur många gånger kortleken blandas följande på varandra.

3.3 Kortblandnings algoritmernas implementation

Då tanken var att algoritmerna skulle potentiellt användas i ett fysiskt inbäddad system fanns det vissa kriterier som algoritmerna skulle följa: det skulle gå att bygga en maskin, den skulle vara slumpmässig, dvs. simulation

3.3.1 Implementation av Riffle shuffle

Mekaniskt och mjukvarumässigt enklaste versionen av riffle shuffle är perfekt riffle shuffle

3.3.2 Implementation av Pile shuffle

Inspiration att undersöka pile shuffle kom ifrån

3DprintedLife (2021), där pile shuffle implementerades i en 3d printat kortleksblandare.

3.4 Statistiska tester

Detta sektion handlar om hur statistiska metoder som Poker test och StdMean-testet implementerades för att analyser slumpmässighet av valda och simulerade algoritmerna.

Statistiska tester utfördes med Python version 3.11. Python valdes på grund av dens rika utbud av bibliotek, speciellt inom vetenskaplig databehandling och dataanalys. Därför valdes det att utföra statistiska tester som Poker test och StdMean-testet i Python. En till perspektiv till varför Python valdes är att analys och avgörande av slumpmässighet är fundamentalt komplex process icke räknebart, men det som underlättar framtagande av resultat är visuella grafer och tabeller. I denna studie saknas det erfarenhet och kunskaper inom högre grads områden inom matematiken som statistiskt analys. Detta betyder att rent matematiska modeller till avgörande av slumpmässighet som entropi eller ApEn var för komplexa att förstå (Delgado-Bonal och Marshak, 2019). Därför valdes dem bort på grund av bristande kunskaper. Men för att avgörande av slumpmässighet är domän specifikt och rent matematiskt komplex då krävs det högre förståelse i matematikens området inom statistik.

Istället valdes det att fokusera på normal distribution av kortlekar och kort. Dessutom implementerades det metoder som är visuellt representativa.

Med detta sagt Pythons Matplotlib bibliotek underlättar processen av graf ritade tillsammans i en symbios relation med NumPy som har styrka i datamängd representation och vektoriserad databearbetning. Utfördes det mindre matematisk komplicerade tester med fokus på storleken av datamängderna som ger en god överblick av slumpmässighet av dem olika blandnings algoritmerna som simulerades. På avseende på ett teoretiskt perfekt blandnings resultat för samtliga metoder.

Rådata som sparades efter simulationen är laddat in som en dimensionell array med hjälp av Numpy efter det är rådata återställt tillbaka till tvådimensionell matris för vidare analys. Statistiska tester delar datamängden.

3.4.1 Implementation av Klassiskt poker test

Poker Test utgår ifrån att man karakteriserar typer av mönster till pokerhänder och kalkylerar den absolutvärdet χ^2 i detalj beskrevs teorin bakom χ^2 testet i sektion 2.4.

Kategorisering

I standardkortlek finns det 52 kort med fyra olika färger (Spader, Hjärter, Ruter och klöver) och 13 valörer (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Knekt, Dam, Kung, Ess). Av skull att testerna utförs med standard kortleken,

Tabell 3: Alla pokerhänders namn, relativt mönster och antal av kombinationer

Pokerhand	Example på mönster	Antal kombinationer
Royal flush	$A\spadesuit K\spadesuit Q\spadesuit J\spadesuit 10\spadesuit$	4
Färgstege	$K\spadesuit Q\spadesuit J\spadesuit 10\spadesuit 9\spadesuit$	36
Fyrtal	$A\spadesuit A\heartsuit A\diamondsuit A\clubsuit K\spadesuit$	624
Kåk	$A\spadesuit A\heartsuit A\diamondsuit K\clubsuit K\spadesuit$	3 744
Färg	$K\spadesuit Q\spadesuit J\spadesuit, 10\spadesuit 8\spadesuit$	5 108
Stege	$K\spadesuit Q\heartsuit J\diamondsuit 10\clubsuit 9\spadesuit$	10 200
Triss	$A\spadesuit A\heartsuit A\diamondsuit K\clubsuit Q\spadesuit$	54 912
Två par	$A\spadesuit A\heartsuit K\diamondsuit K\clubsuit Q\spadesuit$	123 552
Ett par	$A\spadesuit A\heartsuit, K\diamondsuit Q\clubsuit J\spadesuit$	1 098 240
Högt kort	$A\spadesuit Q\heartsuit J\diamondsuit 5\clubsuit 4\spadesuit$	1 302 540
Summan:		2 598 960

valdes det att anpassa χ^2 testet att använda alla poker händer. Matematiken speciellt kombinatoriken att räkna ut sannolikheter och frekvensen av alla poker händer är relativt svårt uppdrag därför addofterdes det Armstrong (2006) uträkningar se tabell 3. Detta medföljde med mer komplex karakterisering av pokerhänder än när man använder χ^2 testet att till exempel testa slumpgeneratorer. Valet log med att datamängderna innehåller kortlekar till att göra simulationer mer realistiska och anpassade till hur ett riktigt kortleksblandare skulle fungera i drift. Därför valet att anpassa statistiska tester till slutmål användnings sätt verkade vara ett logiskt steg att ta.

Poker Test kan anpassas till vilken som helst sekvens av nummer 3-5 stora mängder. Men för att vår simulation använder vi samma nummer som pokerkort därför kan vi anpassa klassiska poker test var man använder alla möjliga pokerhänder av sekvens av 5 kort. Resultatet från karakterisering av händer använder man i en chi-square testet. För att göra testet rätt följde jag Engineering Statistics handbok (NIST 2012). Dvs för att avgöra hur många händer uppkom med avseende till teoretiska värdena EXPECTED vs OBSERVED värdena. sen jämför man chi-square resultatet till en CRITICAL värde om den värden som vi fick är mindre kan vi med säkerhet säga att algoritmen är slumpmässigt och vice versa.

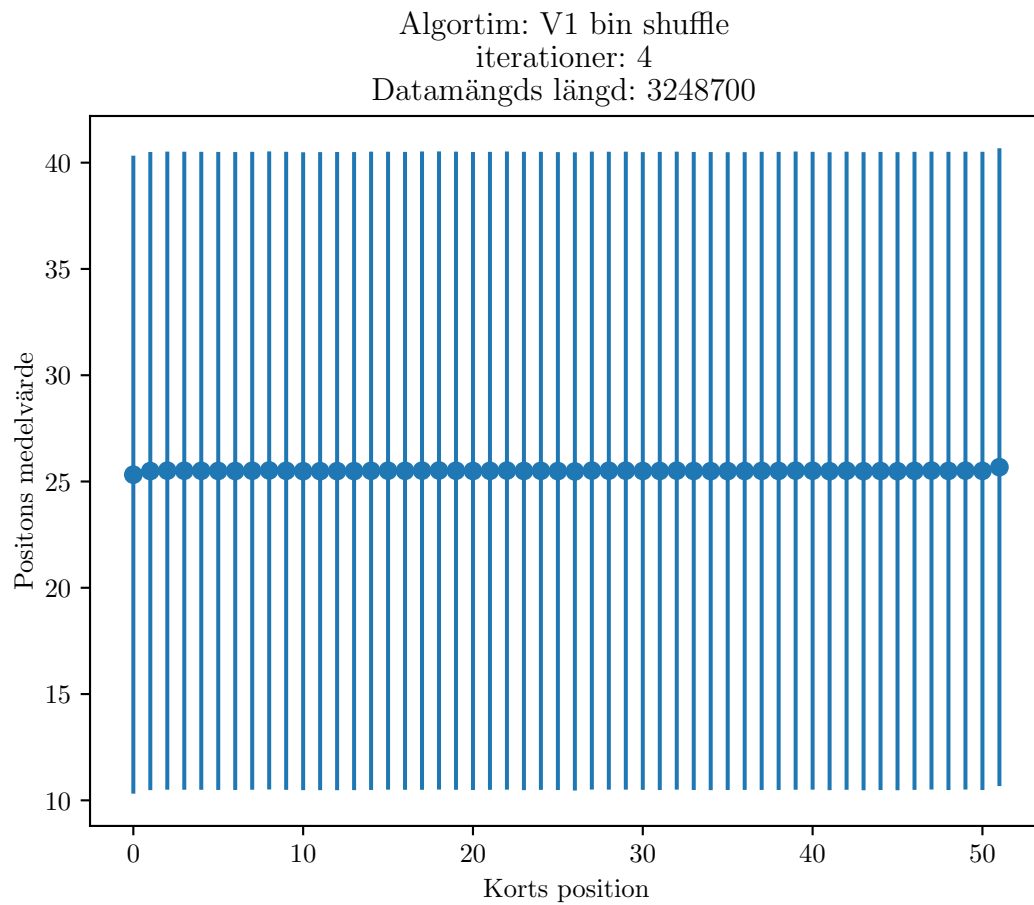
Testet utgår i två generella steg kategorisera fem kort och seden

3.4.2 Implementation av StdMean testet

Datamängden är utformat på sätt att kort värde är alltså dess position i kortleken. Första kort är 0 dvs position 0 i kortleken. Kalkylerar varje columns korts medelvärde och standaravvikelse ska man förutspå att medelvärde borde ligga nära $51/2 = 25.5$ detta betyder att i position 0 har alla kort varit i, och om standaravvikelse i figuren är höga torn har position 0 stort variation av vilka kort som var där. Detta är då en indikator på en uniform distribution som betyder en slumpmässigt algoritm.

4 Resultat

Result är icke bestämt i vilken format kommer att skrivas. Men dem kommer att innehålla figur 3. Antagligen mest intressanta figurer kommer att visas här och alla andra Bilagas i Appendix. För att det kommer att vara minst 30 figurer och chi två tabeller (dem kan göras i ett större tabel, antar jag)



Figur 3: Ett test resultat från StdMean testet

Och tabeller över resultat ifrån χ^2 testet.

Tabell 4: Test table resultat från v1 bin shuffle algoritmen

Pokerhand	Observerad frekvens	Förväntad frekvens	χ^2
Total	3 248 700	3 248 700	8.85

5 Diskussion

Och sista sektionen här, men den är relativt straightforward.

Ordlista

array En serie av värdena, där varje värde kallas för element

matris Data i två dimensioner som en tabell

Bibliografi

- 3DprintedLife (2021). *Rigged Card Sorting Machine - ALWAYS Get The Hand You Want!* URL: <https://www.youtube.com/watch?v=eMTXy17tPEk> (hämtad 2023-08-15).
- Abdel-Rehim, Wael MF, Ismail A Ismail och Ehab Morsy (2014). "Implementing the classical poker approach for Testing Randomness". I: *International Journal* 4.8. URL: https://www.researchgate.net/profile/Wael-Fawaz-2/publication/281178831_Implementing_the_Classical_Poker_Approach_for_Testing_Randomness/links/55da3a9608aec156b9ae74a7/Implementing-the-Classical-Poker-Approach-for-Testing-Randomness.pdf (hämtad 2023-12-07).
- Armstrong, Drew (2006). "Probability of Poker Hands". I: URL: <https://www-users.cse.umn.edu/~reiner/Classes/Poker.pdf> (hämtad 2023-12-09).
- Bernstein, D. J. (jan. 2008). "ChaCha, a variant of Salsa20". I: URL: <https://cr.yp.to/papers.html#chacha> (hämtad 2023-12-06).
- Delgado-Bonal, Alfonso och Alexander Marshak (2019). "Approximate Entropy and Sample Entropy: A Comprehensive Tutorial". I: *Entropy* 21.6. ISSN: 1099-4300. URL: <https://www.mdpi.com/1099-4300/21/6/541>.
- Developers, The Rand Project (2022). *Rand: A Rust library for random number generation*. Version 0.8. URL: <https://crates.io/crates/rand>.
- Harris, Charles R. m.fl. (2020). "Array programming with NumPy". I: *Nature* 585, s. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.
- Matsakis, Nicholas D och Felix S Klock II (2014). "The rust language". I: *ACM SIGAda Ada Letters*. Vol. 34. 3. ACM, s. 103–104.
- Matsakis, Niko och Josh Stone (2022). *Rayon: Data-parallelism library for Rust*. Version 1.8.0. URL: <https://crates.io/crates/rayon>.
- Matsumoto, Makoto och Takuji Nishimura (jan. 1998). "Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator". I: *ACM Trans. Model. Comput. Simul.* 8.1, s. 3–30. ISSN: 1049-3301. DOI: 10.1145/272991.272995. URL: <https://doi.org/10.1145/272991.272995>.
- National Institute of Standards and Technology (2023). *Engineering Statistics Handbook - Section 1.3.5.15: Chi-Square Goodness-of-Fit Test*. URL: <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35f.htm> (hämtad 2023-10-04).
- Terwijn, Sebastiaan A. (2016). "The Mathematical Foundations of Randomness". I: *The Challenge of Chance: A Multidisciplinary Approach from Science and the Humanities*. Utg. av Klaas Landsman och Ellen van Wolde. Cham: Springer International Publishing, s. 49–66. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-26300-7_3 (hämtad 2023-04-10).
- Virtanen, Pauli m.fl. (2020). "SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python". I: *Nature Methods* 17, s. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.

Bilagor

A Github

Länk till Github repository vart Rust och Python källkod till simulationen respektive statistikst analys är samlad, samt källkod till latex med vilken detta rapport hade skrivits länk: <https://github.com/Abishevs/gymarbete>

B Template att bifoga ett inline kod

Listing 1: Python example

```
# Your source code here  
print("Hello, World!")
```

C Template att bifoga källkod ifrån git repo