

UNIVERSIDADE DO MINHO

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Trabalho Prático
Métodos Determinísticos de Investigação
Operacional

Catarina Machado (a81047) Gonçalo Faria (a86264)
João Vilaça (a82339) José Fernandes (a82467)

9 de Dezembro de 2018



(a) Catarina.



(b) Gonçalo.



(c) João.



(d) José.

Conteúdo

1	Questão 1	2
1.a	Alínea a	2
1.a.1	Variáveis de Decisão	2
1.a.2	Parâmetros	2
1.a.3	Função Objetivo	2
1.a.4	Restrições	2
1.a.5	Exemplificação com uma instância	3
1.b	Alínea b	4
1.b.1	Função Objetivo	4
1.b.2	Restrições	4
1.b.3	Exemplificação com uma instância	5
1.c	Alínea c	6
1.c.1	IBM ILOG CPLEX Optimization Studio	6
1.c.2	Obtenção da solução dual através do primal	9
1.d	Alínea d	10
1.d.1	IBM ILOG CPLEX Optimization Studio	10
1.d.2	Obtenção da solução primal através do dual	12
2	Questão 2	13
2.a	Alínea a	13
2.a.1	Variáveis de Decisão	13
2.a.2	Parâmetros	13
2.a.3	Função Objetivo	13
2.a.4	Restrições	13
2.b	Alínea b	14
2.b.1	Interpretação e Comentários	15
2.c	Alínea c	15
3	Questão 3	17
3.a	Alínea a	17
3.a.1	Variáveis de Decisão	17
3.a.2	Parâmetros	17
3.a.3	Função Objetivo	17
3.a.4	Restrições	17
3.b	Alínea b	18
3.b.1	Interpretação e Comentários	19
3.c	Alínea c	20

1 Questão 1

Neste trabalho consideram-se problemas relacionados com incêndios florestais. Uma forma de modelar a propagação do fogo numa região é representá-la por uma rede em que cada nodo corresponde a uma célula (ou área) e cada arco representa a possibilidade de o fogo se propagar entre células adjacentes. É conhecido que, estimando-se o tempo de propagação associado a cada arco e considerando-se um nodo de ignição, o instante de chegada do fogo a cada célula é determinado pelo caminho mais rápido entre o nodo da ignição e o nodo associado à célula em causa.

Para resolver esta e as restantes questões do trabalho, introduzimos o grafo direcionado $G = (V, A)$, que se assume ser conexo, que irá representar o incêndio mencionado no enunciado, A é o conjunto de arcos e c_{ij} é o peso associado à duração de propagação do fogo do vértice i para o j , $\forall (i, j) \in A$, que se assume ser positivo dado que o conceito de tempo negativo não existe.

Para saber qual é o instante em que o fogo chega a um dado vértice do gráfico partindo de um vértice $p \in V$, sendo que para este problema $p = 1$, ter-se-á que encontrar a árvore de caminhos mais curtos no grafo G , a partir de p , e associar a cada vértice a soma dos pesos do caminho a este.

1.a Alínea a

Considere uma rede com n nodos, o conjunto de arcos A , e tempos de propagação no arco ij de c , $\forall ij \in A$. Apresente um modelo programação linear que permita determinar o instante de chegada do fogo a cada nodo assumindo que o nodo de ignição é o nodo 1. Exemplifique com instância descrita em anexo.

Para o problema primal definimos as variáveis t_i , que corresponde ao instante a que chega o fogo ao vértice i , $\forall i \in V$.

1.a.1 Variáveis de Decisão

t_i - instante de chegada da frente do fogo ao nodo i

1.a.2 Parâmetros

c_{ij} - tempo que demora a percorrer o arco ij

1.a.3 Função Objetivo

$$\max z = \sum_{i \in V \setminus \{p\}} t_i + (1 - |V|) \cdot t_p \quad (1)$$

1.a.4 Restrições

sujeito a:

$$t_j - t_i \leq c_{ij}, \forall (i, j) \in A \quad (2)$$

$$t_p = 0 \quad (3)$$

$$t_i \geq 0, \forall i \in V \quad (4)$$

$$t_i \in \mathbb{R}, \forall i \in V \quad (5)$$

A função objetivo em (1), o valor que se pretende maximizar, é a soma dos valores de t_i , e foi concebida para forçar estas variáveis de decisão a tomar os limite superiores das restrições, excluindo assim a possibilidade de ter valores todos a zero, por exemplo. A última parcela está especificada desta forma pois ao passar para o dual o coeficiente $|V| - 1$ é importante na restrição de fluxo do vértice de ignição do fogo. Adicionalmente, a existência desta parcela não afeta a otimização pois é 0 na presente formulação.

No conjunto de restrições (2), para qualquer uma das arestas $(i, j) \in A$, t_j , o instante de chegada do fogo ao vértice j , terá que ser menor ou igual a t_i mais c_{ij} , que é o tempo de chegada do fogo ao vértice i mais o tempo entre a aresta que liga diretamente i a j . Adicionalmente, a restrição (3) fixa o valor do tempo de chegada do fogo ao vértice p a 0 devido ao facto de neste ocorrer a ignição do incêndio.

1.a.5 Exemplificação com uma instância

Para a exemplificação e aplicação da nossa resolução do problema primal numa instância concreta, decidimos construir um grafo pequeno para ser mais simples de desenvolver, visto que aumentando o número de nodos apenas aumenta a complexidade da resolução mas a essência do problema continua a mesma. Optamos então por construir um exemplo com 9 nodos, representando-os através de uma matriz quadrada de dimensão igual a 3. Relativamente aos tempos de propagação entre células adjacentes, seguimos o algoritmo fornecido no enunciado do trabalho prático, partindo do número de aluno A86284.

No nosso exemplo, o nodo de ignição é o nodo que se encontra na coordenada (1,1).

Assim, sendo $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A = \{(1,2), (1,4), (2,5), (2,1), (2,3), (3,2), (3,6), (4,1), (4,5), (4,7), (5,2), (5,8), (5,4), (5,6), (6,3), (6,5), (6,9), (7,4), (7,8), (8,5), (8,7), (8,9), (9,6), (9,8)\}$, o nosso grafo direccionado $G = (V, A)$ representa o incêndio.

Na figura seguinte encontra-se a representação visual da nossa rede de nodos exemplificativa:

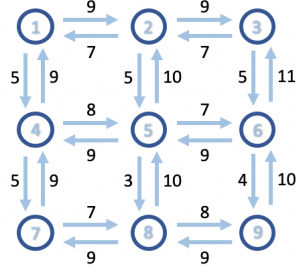


Figura 2: Rede de Nodos Exemplificativa.

Tendo em consideração os tempos de propagação representados na Figura 2 e substituindo os dados da nossa formulação, presente na Secção 1.a, obtemos a seguinte resolução:

Parâmetros:

c_{ij} - tempo de propagação na aresta (i, j) , onde $i = \{1..7\}, j = \{1..7\}$.

Variáveis de decisão:

t_i - instante a que o fogo chega ao vértice i , onde $i = \{1..9\}$.

Função Objetivo:

$$\text{Max } x = t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + (1 - 9) * t_1$$

Sujeito a:

$$t_1 = 0$$

$$t_2 - t_1 \leq 9$$

$$\begin{aligned}
t_2 - t_3 &\leq 7 \\
t_2 - t_5 &\leq 10 \\
t_3 - t_2 &\leq 9 \\
t_3 - t_6 &\leq 11 \\
t_4 - t_1 &\leq 5 \\
t_4 - t_5 &\leq 9 \\
t_4 - t_7 &\leq 9 \\
t_5 - t_2 &\leq 5 \\
t_5 - t_8 &\leq 10 \\
t_5 - t_4 &\leq 8 \\
t_5 - t_6 &\leq 9 \\
t_6 - t_3 &\leq 5 \\
t_6 - t_5 &\leq 7 \\
t_6 - t_9 &\leq 10 \\
t_7 - t_4 &\leq 5 \\
t_7 - t_8 &\leq 9 \\
t_8 - t_5 &\leq 3 \\
t_8 - t_7 &\leq 7 \\
t_8 - t_9 &\leq 9 \\
t_9 - t_6 &\leq 4 \\
t_9 - t_8 &\leq 8 \\
t_i &\geq 0, \forall i \in V
\end{aligned}$$

1.b Alínea b

Apresente o modelo dual do modelo da alínea anterior. Exemplifique com a mesma instância.

Para o problema dual correspondente definimos as variáveis de decisão $x_{ij} \forall (i, j) \in A$, estas variáveis são valores inteiros maiores ou iguais a zero, que representam o número de caminhos mais curtos que têm a aresta (i, j) . Adicionalmente, são também definidos os subconjuntos $Entrada(i) \subseteq A$, que contém as arestas incidentes no vértice i , e $Saída(i) \subseteq A$, que contém as arestas que saem do vértice i , para cada vértice $i \in V$, definidos por:

$$\begin{aligned}
Entrada(i) &= \{(a, b) \in A : a = i\} \\
Saída(i) &= \{(a, b) \in A : b = i\}
\end{aligned}$$

Este problema pode ser definido da seguinte forma:

1.b.1 Função Objetivo

$$min w = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (6)$$

1.b.2 Restrições

sujeito a:

$$\sum_{(i,j) \in Entrada(v)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in Saída(v)} x_{ij} = 1, \forall v \in V \setminus \{p\} \quad (7)$$

$$\sum_{(i,j) \in Entrada(p)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in Saída(p)} x_{ij} = 1 - |V| \quad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in A \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}, \forall (i, j) \in A \quad (10)$$

A função objetivo em (6), o valor que se pretende minimizar, é o custo total de todos os caminhos que partem do vértice de ignição do incêndio até todos os outros. Adicionalmente, o conjunto de restrições em (7) asseguram que apenas um caminho termina por vértice. Em (8) o vértice de ignição, como é a origem de todos os caminhos, terá como diferença entre os caminhos que entram e os que saem o valor de $|V| - 1$.

A formulação inicial deste problem era de programação inteira mista. No entanto, como a matriz de restrições deste problema primal é **totalmente unimodular**, como se pode ver através da Figura 3, todos os pontos do poliedro serão inteiros, logo podemos relaxar as restrições de x_{ij} , podendo esta variável tomar valores reais (10), por forma a tornar este problema num de programação linear.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
1		9						5																																									
2	7		9						5																																								
3		7		9						5																																							
4			8		9						4																																						
5				7		9						5																																					
6					9		7						4																																				
7						7								3																																			
8	9						8							5																																			
9		10						9							3																																		
10			11						9							4																																	
11				9						8							3																																
12					9						8							5																															
13						10						8							4																														
14							10						7							5																													
15								9						7							5																												
16									10						8							3																											
17										10						9							4																										
18											10						9							3																									
19												11						8							4																								
20													11						7							5																							
21														9						8							4																						
22															9						8							3																					
23																9						8								4																			
24																	9						8								3																		
25																		9						8								3																	
26																			9						8								3																
27																				9						8									5														
28																					9						8									5													
29																						9						8									5												
30																							9						8									5											
31																								9						8									5										
32																									9						8									5									
33																										9						8									5								
34																											9						8									5							
35																												9						8									5						
36																													9						8									5					
37																														9						8									5				
38																															9						8									5			
39																																9							8								5		
40																																	9														5		
41																																		9														5	
42																																			9														5
43																																				9													
44																																					9												
45																																						9											
46																																							9										
47																																								9									
48																																									9								
49																																										9							

Figura 3: Matriz de adjacência do grafo correspondente ao incêndio apresentado. As células vazias representam zeros.

1.b.3 Exemplificação com uma instância

Para a exemplificação e aplicação da nossa resolução do problema dual numa instância concreta, decidimos usar o mesmo grafo da Secção 1.a.5, com 9 vértices no total. Os tempos de propagação entre células adjacentes utilizados também foram os mesmos.

Neste nosso exemplo, o vértice de ignição é também o que se encontra na coordenada (1,1).

Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A = \{(1,2), (1,4), (2,5), (2,1), (2,3), (3,2), (3,6), (4,1), (4,5), (4,7), (5,2), (5,8), (5,4), (5,6), (6,3), (6,5), (6,9), (7,4), (7,8), (8,5), (8,7), (8,9), (9,6), (9,8)\}$, mais uma vez, o nosso grafo direccionado $G = (V, A)$ representa o incêndio e a representação visual da rede de nodos exemplificativa encontra-se na Figura 2.

Substituindo os dados da nossa formulação, presente na Secção 1.b, obtemos a seguinte resolução:

Parâmetros:

c_{ij} - tempo de propagação na aresta (i, j) , onde $i = \{1..7\}, j = \{1..7\}$.

Variáveis de decisão:

x_{ij} - número de caminhos mais curtos que têm a aresta (i, j) , onde $i = \{1..7\}, j = \{1..7\}$.

Função Objetivo:

Min $w = 9x_{12} + 5x_{14} + 5x_{25} + 7x_{21} + 9x_{23} + 7x_{32} + 5x_{36} + 9x_{41} + 8x_{45} + 5x_{47} + 10x_{52} + 3x_{58} + 9x_{54} + 7x_{56} + 11x_{63} + 9x_{65} + 4x_{69} + 9x_{74} + 7x_{78} + 10x_{85} + 9x_{87} + 8x_{89} + 10x_{96} + 9x_{98}$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x_{21} + x_{41} - (x_{12} + x_{14}) &= -8 \\ x_{52} + x_{12} + x_{32} - (x_{25} + x_{21} + x_{23}) &= 1 \\ x_{23} + x_{63} - (x_{32} + x_{36}) &= 1 \\ x_{14} + x_{54} + x_{74} - (x_{41} + x_{45} + x_{47}) &= 1 \\ x_{25} + x_{85} + x_{45} + x_{65} - (x_{52} + x_{58} + x_{54} + x_{56}) &= 1 \\ x_{36} + x_{56} + x_{96} - (x_{63} + x_{65} + x_{69}) &= 1 \\ x_{47} + x_{87} - (x_{74} + x_{78}) &= 1 \\ x_{58} + x_{78} + x_{98} - (x_{85} + x_{87} + x_{89}) &= 1 \\ x_{69} + x_{89} - (x_{96} + x_{98}) &= 1 \\ x_{ij} &\geq 0, \forall (i, j) \in A \end{aligned}$$

1.c Alínea c

Para a mesma instância, obtenha as soluções ótimas primal e dual através da resolução do modelo primal.

1.c.1 IBM ILOG CPLEX Optimization Studio

Para a obtenção da **solução ótima do problema primal**, com recurso ao software IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, foi necessário traduzir a formulação do problema presente na Secção 1.a para a linguagem do software.

A instância que utilizamos para este exemplo possui 49 nodos.

Numa primeira fase debruçamo-nos sobre qual seria a melhor forma de representar os **dados** relativos aos tempos de propagação. A decisão final foi a de dividir os tempos de propagação em 4 tabelas, onde cada uma diz respeito ao tempo de propagação para a respetiva orientação (norte, sul, este e oeste). Assim, se o problema tiver, por exemplo, 49 vértices, será necessário fornecer 4 matrizes de 7x7, onde cada uma delas terá a informação dos tempos de propagação de cada nodo para cada uma das orientações.

Para além dos tempos de propagação, os outros dados que são obrigatórios referir para que o nosso problema possa ser resolvido no OPL são a dimensão da matriz dos tempos de propagação (basta informar a dimensão do lado) e as coordenadas do vértice de ignição, que no nosso problema são (1,1).

Posto isto, fica clara a nossa intenção de representar os nodos numa matriz quadrada de dimensão igual à raiz quadrada do número total de nodos, onde cada uma das coordenadas (que, no caso de serem 49 nodos, irão estar entre (1,1) e (7,7)) representará um vértice.

Seguindo o algoritmo referido na Secção Dados do Enunciado do Trabalho Prático, construímos um excel com os dados gerados, que pode ser consultado no ficheiro excel em anexo.

Tendo em consideração esses dados, o esquema visual da nossa floresta encontra-se representado na Figura 4, ou seja, encontra-se representada a nossa rede de nodos onde cada nodo corresponde

a uma célula (ou área) e cada aresta representa a possibilidade do fogo se propagar entre células adjacentes.

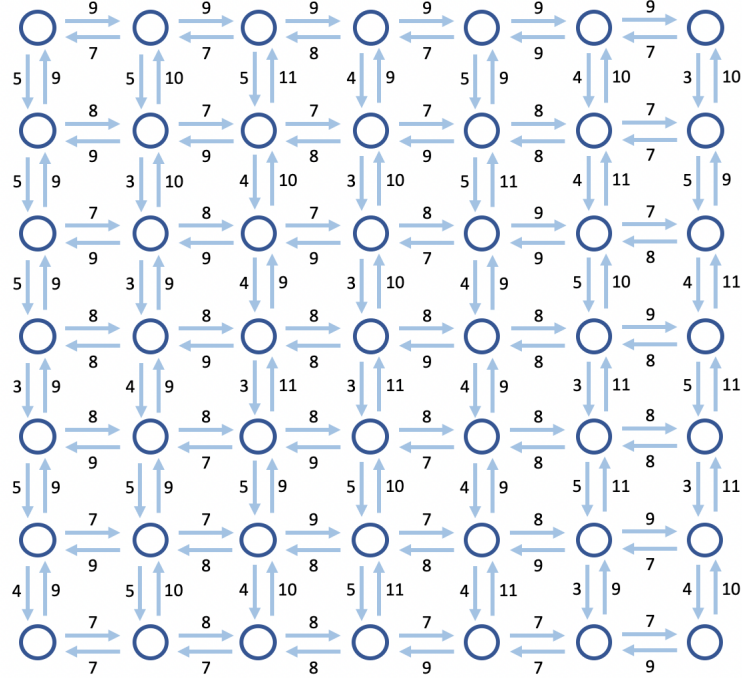


Figura 4: Rede de Nodos Questão 1.

No caso da representação das **restrições** no OPL, foi essencial ter em atenção que os ciclos que percorrem todas as coordenadas não podem visitar coordenadas inválidas (por exemplo a coordenada (1,0)) e que na coordenada (1,1) (vértice de ignição) não faz sentido ter nodos a tentar “enviar” valores, ou seja, a tentar propagar o fogo, tal como já foi mencionado na formulação da Questão 1. Consequentemente, a forma mais fácil que encontramos de resolver o problema foi separar as restrições em 9 grupos: canto superior direito, canto superior esquerdo, canto inferior direito, canto inferior esquerdo, linha central superior, linha central inferior, linha central direita, linha central esquerda e as coordenadas interiores.

Uma vez construído o modelo no IBM ILOG CPLEX Optimization Studio e clicando em “Run Configuration”, o resultado obtido é o que se encontra na Figura 5.

t	0	9	18	27	36	45	54
	5	13	20	27	34	42	49
	10	16	24	30	38	46	53
	15	19	27	33	41	49	57
	18	23	30	36	44	52	60
	23	28	35	41	48	56	63
	27	33	39	46	52	59	66

Figura 5: Solução ótima da Questão 1. a).

Tal como já foi referido na Secção 1.a, esta tabela informa-nos o **instante de chegada do fogo a cada um dos vértices**, assumindo que o vértice de ignição é o vértice presente na posição (1,1).

Na Figura 6 encontra-se a representação visual da nosso grafo com a solução ótima do problema primal.

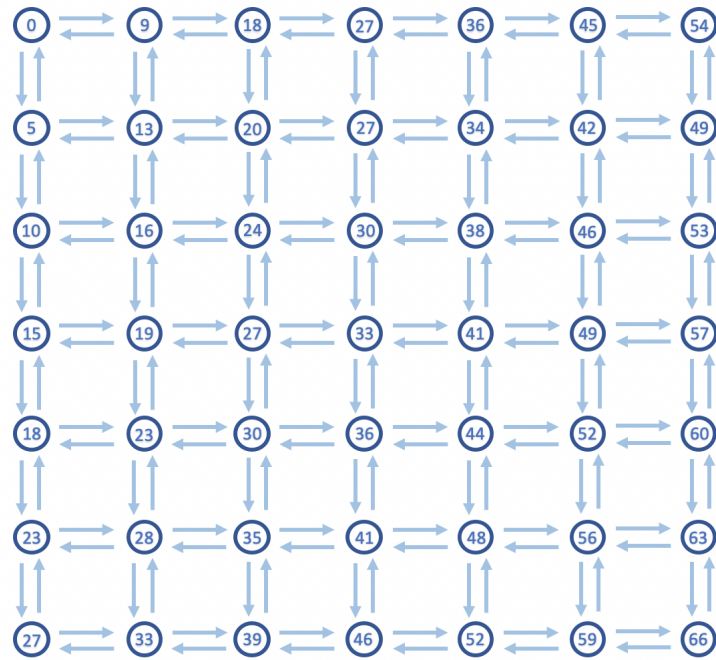


Figura 6: Rede de Nodos Solução Ótima da Questão 1 a).

O valor da **função objetivo**, apresentado na Figura 7, indica-nos o número total de instantes de tempo necessários para toda a floresta ficar incendiada.

FO	1716
----	------

Figura 7: Valor da Função Objetivo da Questão 1, alíneas a) e b).

Para a obtenção dos valores das **folgas** demos um nome a cada uma das restrições e consultamos os seus valores através da janela “Problem Browser”.

Com esses dados devidamente interpretados construímos as 4 tabelas que se podem ver na Figura 8.

s_norte							
		14	13	9	7	7	5
	14	13	14	13	15	15	13
	14	12	12	13	12	13	15
	12	13	14	14	12	14	14
	14	14	14	15	13	15	14
	13	15	14	16	15	12	13
s_este	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	
	1	0	1	0	1	0	
	4	0	2	0	0	1	
	3	1	2	0	0	0	
	2	0	3	0	0	2	
	1	2	1	1	0	0	
s_sul	0	1	3	4	7	7	8
	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	1	0	1	2	0
	0	0	0	0	1	0	2
	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	1
s_oeste			16	17	16	18	16
		17	16	15	16	16	14
		15	17	15	15	17	15
		12	17	14	17	16	16
		14	14	15	15	16	16
		14	15	14	15	17	14
		13	13	15	15	14	16

Figura 8: Valores das Folgas da Questão 1. a).

Em anexo, na pasta **ex1_a**, encontra-se todo código utilizado para a resolução do problema, assim como o ficheiro excel onde os dados foram extraídos e, posteriormente, adicionados.

1.c.2 Obtenção da solução dual através do primal

Seja t'_i o valor correspondente à solução do problema primal, $\forall i \in V$, e o z' o valor da função objetivo dessa solução, pelo teorema da dualidade geral podemos concluir que o valor das funções objetivo do primal e do dual serão iguais, o que significa que a seguinte expressão verifica-se:

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} = z' \quad (11)$$

Adicionalmente, para obtermos os valores de folga foi feita uma transformação à restrição (2) em:

$$t_j - t_i + s_{ij} = c_{ij}, \forall (i, j) \in A \quad (12)$$

Onde s_{ij} é a folga associado à aresta $(i, j) \in A$ e esta corresponde a um valor positivo ou nulo. Pelo teorema da folga complementar sabemos que sempre que $s_{ij} > 0$, então a seguinte condição verifica-se:

$$x_{ij} = 0 \quad (13)$$

Como quando $x_{ij} = 0$ significa que a aresta (i, j) não pertence à árvore de caminhos mais curtos que, como é uma árvore de n vértices terá que ter $n - 1$ arestas, então as restantes arestas, para além das $|V| - 1$ terão que necessariamente ser 0, ou seja a condição $s_{ij} > 0$ irá verificar-se em $|A| - |V| + 1$ dos casos.

Sendo que o modelo primal tem já $|V|$ equações, conjuntamente com as $|A| - |V| + 1$ equações em (13) e a equação em (11) obtém-se um sistema com $|A| + 2$ equações e $|A|$ variáveis. Este sistema, dado que o problema primal admite solução ótima, é possível e determinado, tendo apenas de ser feita uma seleção das equações a usar, visto que as $|A| + 2$, necessariamente, não são um conjunto unicamente composto por equações linearmente independentes. A solução desse sistema é a solução ótima dual.

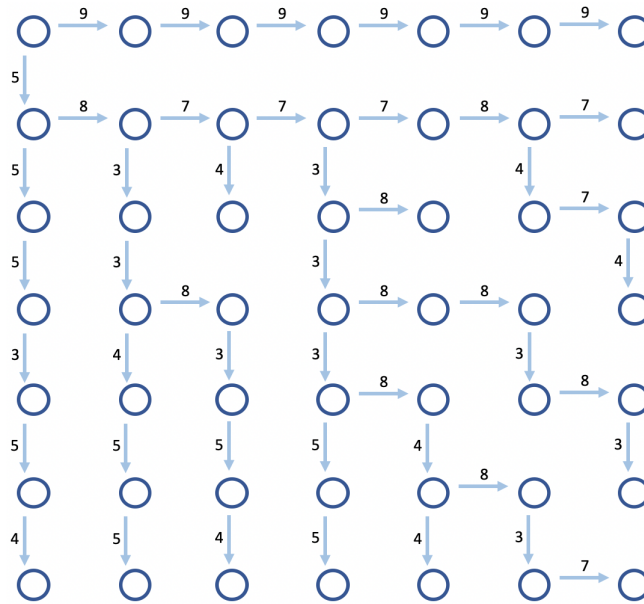


Figura 10: Rede de Nodos Solução Ótima da Questão 1 b).

Juntando as **soluções ótimas do problema primal e do problema dual** conseguimos obter mais informação relativamente à solução do problema uma vez que ficamos a saber quais as arestas pelas quais o fogo se propagou e também o tempo que cada nó demorou a ficar afetado.

A representação visual da solução final do problema é a seguinte:

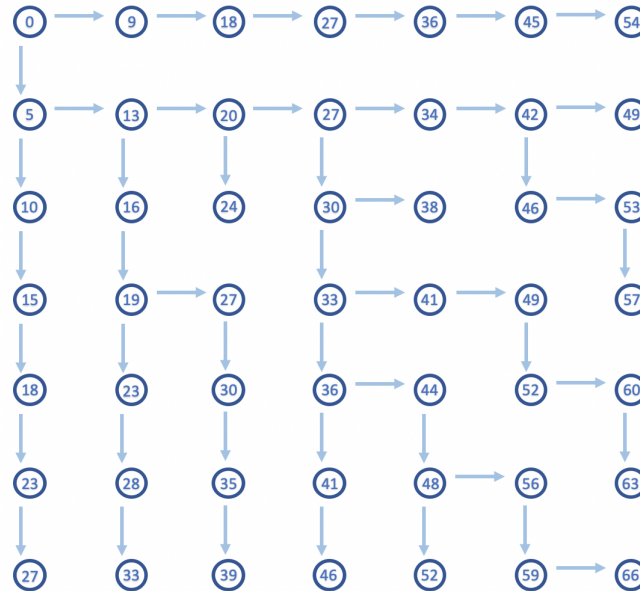


Figura 11: Rede de Nodos Solução Ótima da Questão 1.

Em anexo, na pasta **ex1_b**, encontra-se todo código utilizado para a resolução do problema, assim como o ficheiro excel onde os dados foram extraídos e, posteriormente, adicionados.

1.d.2 Obtenção da solução primal através do dual

Seja x'_{ij} , $\forall (i, j) \in A$ o valor correspondente à solução do problema dual e o w' o valor da função objetivo dessa solução, pelo teorema da dualidade geral podemos concluir que o valor das funções objetivo do primal e do dual serão iguais, o que significa que a seguinte expressão verifica-se:

$$\sum_{i \in V \setminus \{p\}} t_i + (1 - |V|) \cdot p = w' \quad (14)$$

Adicionalmente, para todos os valores da solução do problema dual que satisfazem a condição $x'_{ij} > 0$ sabemos, pelo teorema da folga complementar, que a seguinte restrição verifica-se:

$$t_j - t_i = c_{ij} \quad (15)$$

Sendo que uma árvore de caminhos mais curtos para n vértices tem necessariamente $n - 1$ arestas, como a variável de decisão do problema dual representa o número de caminhos mais curtos que passam pela aresta que esta representa, então, necessariamente, haverá $|V| - 1$ variáveis positivas, dado que existem $|V|$ nós no grafo.

A expressão (14), as $|V| - 1$ expressões (15) mais a igualdade contida na formulação do problema primal formam um sistema linear de $|V| + 1$ equações e $|V|$ variáveis. Este sistema, dado que o problema dual admite solução ótima, é possível e determinado, tendo apenas de ser feita uma seleção das equações a usar, visto que as $|V| + 1$ equações, necessariamente, não são um conjunto unicamente composto por equações linearmente independentes. A solução deste sistema é a solução ótima primal.

2 Questão 2

Considere agora que existe um conjunto de recursos para o combate ao incêndio (e.g. equipas de bombeiros) cuja localização pode ser escolhida (no máximo, um recurso por célula).

Pretende-se que o instante de chegada do fogo a uma determinada célula seja o mais tarde possível, sabendo-se que se tem disponíveis b recursos.

A presença de um recurso numa célula implica que o tempo de propagação para as células adjacentes é retardado numa constante dada, representada por Δ .

Para resolver a segunda questão, ao problema original, foi adicionado o conceito de recursos e vértice protegido. Dado que a cada vértice pode agora ser adicionado um recurso é usado o símbolo Δ para representar o tempo que este acrescenta à propagação do fogo e b para representar o número de recursos disponíveis. Adicionalmente, define-se também um vértice $u \in V \setminus \{p\}$ que será o vértice em que se pretende maximizar o tempo de chegada do fogo.

2.a Alínea a

Apresente um modelo de programação inteira mista (PIM). Para além de definir a notação, defina claramente as variáveis de decisão e justifique a função objectivo e cada restrição.

Para resolver este problema, para além das variáveis de decisão já formuladas no problema primal da **questão 1** definimos também $r_i, \forall i \in V$, que toma o valor um ou zero que, quando é um significa que são aplicados recursos no vértice i e quando é zero que não.

2.a.1 Variáveis de Decisão

t_i - instante de chegada da frente do fogo ao nodo i
 r_i - 1 se recurso foi colocado no nodo i , 0 se não

2.a.2 Parâmetros

c_{ij} - tempo que demora a percorrer o arco ij

2.a.3 Função Objectivo

$$\max z = t_u \quad (16)$$

2.a.4 Restrições

sujeito a:

$$t_j - t_i - \Delta \cdot r_i \leq c_{ij}, \forall (i, j) \in A \quad (17)$$

$$t_p = 0 \quad (18)$$

$$\sum_{i \in V} r_i \leq b \quad (19)$$

$$t_i \geq 0, \forall i \in V \quad (20)$$

$$t_i \in \mathbb{R}, r_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V \quad (21)$$

A função objetivo (16), o valor que se pretende maximizar, é o tempo que o fogo leva a chegar ao vértice u . A restrição (17) é uma modificação da restrição presente em (2), dado que é tido em consideração o acréscimo no tempo de propagação devido à presença de um recurso nos vértices. A restrição (18) é a mesma que em (3) e é lhe associada a mesma justificação. Por fim, a restrição (19) obriga a que as soluções admissíveis deste problema tenham de ter o número de recursos em uso igual ou inferior ao número de recursos disponíveis.

2.b Alínea b

Para a instância de sete por sete células e os tempos de propagação em anexo, obtenha uma solução através do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio (link para versão gratuita no final do enunciado) com uma ignição na célula (1,1) e pretendendo-se proteger a célula (7,7). Represente a solução de forma adequada e interprete-a.

Para resolução da questão 2 através do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, foram fornecidos ao programa 5 conjuntos de dados: os tempos de propagação entre células adjacentes, o nodo de ignição, o nodo para qual se quer maximizar o tempo que o fogo demora até o atingir, o número máximo de recursos disponíveis, Δ , e o tempo de retardamento, g . Estes dados foram todos colocados num folha de Excel que viria mais tarde a ser utilizada pelo *OPL*.

Utilizamos como variáveis de decisão os instantes de chegada do fogo aos vértices, *dvar float+ t[1..n][1..n]*, restringido no campo "subject to" pela adaptação de (17) e de (18) à sintaxe do *OPL*, e a aplicação, ou não, de recursos nos vértices, *dvar boolean r[1..n][1..n]*, restringida pela adaptação de (19). Ambas são ainda adicionalmente restringidas por (17) e, o seu domínio no programa, respetivamente float+ e boolean, garantem (20) e (21).

Os recursos disponíveis, para maximizar então o tempo de chegada do fogo a (7,7) caso tenha início em (1,1) deverão ser aplicados nos nodos indicados a 1 na Figura 12, que representa a aplicação ou não desses mesmos recursos para cada nodo.

r	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0

Figura 12: Aplicação de recursos nos nodos.

A representação visual do resultado é a que se encontra na figura seguinte, com os nodos onde serão colocados os recursos assinalados a vermelho.

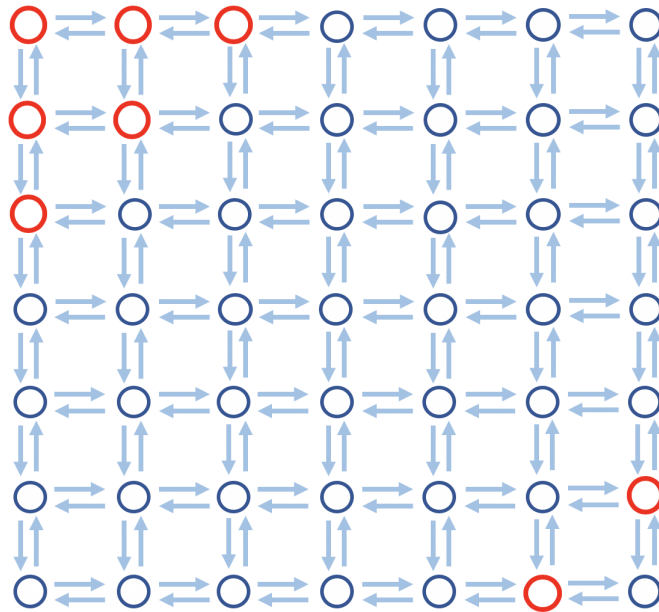


Figura 13: Rede de Nodos Solução Ótima da Questão 2.

O valor da função objetivo é então 98 unidades de tempo como se pode verificar na Figura 14, ou seja, com os recursos nas posições anteriormente mencionadas o fogo levará 98 unidades de tempo a atingir o nodo (7,7).

FO	98
----	----

Figura 14: Resultado da Função Objetivo Questão 2.

Em anexo, na pasta ex2, encontra-se todo código utilizado para a resolução deste problema, assim como o ficheiro Excel onde os dados foram extraídos e, posteriormente, adicionados.

2.b.1 Interpretação e Comentários

Como podemos ver na Figura 12 a maioria dos recursos foram colocados em redor do nodo de ignição, sendo que alguns foram colocados em redor do nodo que pretendemos proteger.

A colocação dos recursos está a ser feita de forma a maximizar o número de caminhos afetados pelos recursos, por isso foram selecionados os caminhos adjacentes ao nodo de ignição e ao nodo que temos de proteger, uma vez que são os nodos pelos quais é mais provável a passagem do fogo. Também podemos verificar que não são selecionados os nodos interiores. Isto acontece porque nestes nodos é mais provável que, ao alocar um recurso, o fogo contorne o nodo o que iria resultar num aumento no tempo menor ao aumento do tempo fornecido pelo recurso.

2.c Alínea c

Represente graficamente o tempo de chegada do fogo à célula de proteção em função do número de recursos usados. Interprete e comente.

Recursos - representa o número de recurso disponíveis a serem distribuídos pelos vários nodos.

Tempo de chegada a (7,7) - tempo que o fogo demora a chegar desde o nodo de ignição (1,1) até ao nodo (7,7)

Sendo R_i um determinado valor de Recursos e T o Tempo de chegada a (7,7) correspondente, então:

$$Ganho = (T_i - T_{i-1}) / (R_i - R_{i-1}) * 100, \forall i \in [2, 11] \quad (22)$$

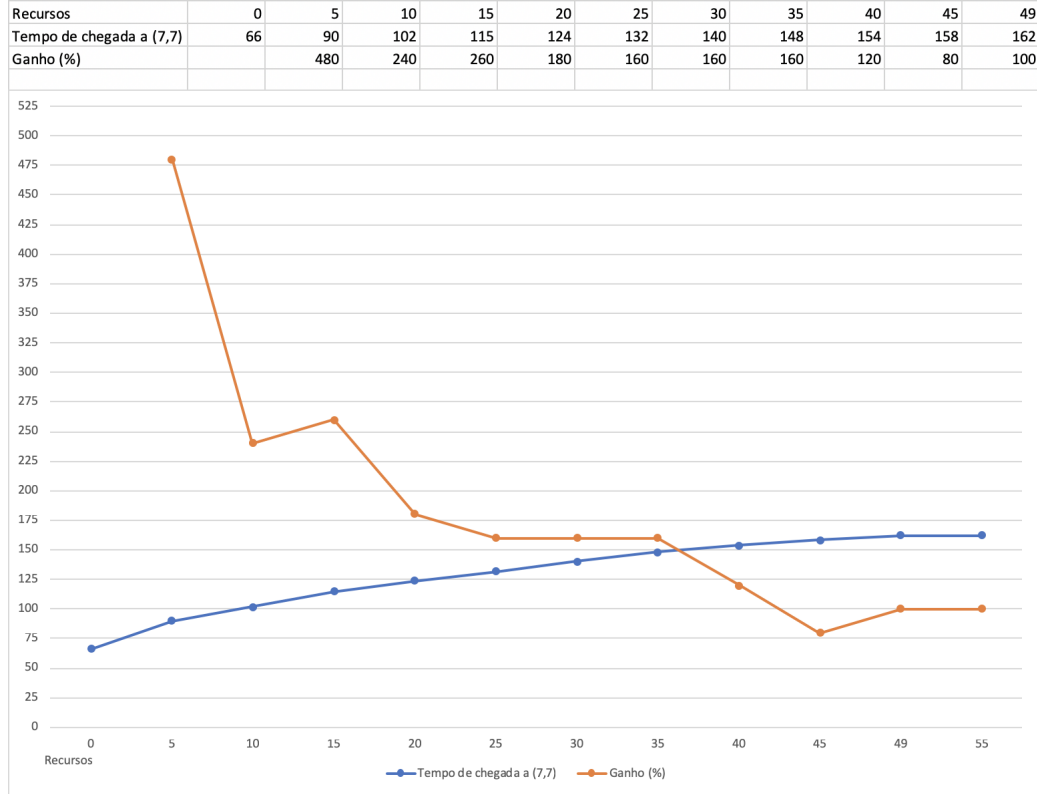


Figura 15: Tempo de chegada do fogo à célula de proteção em função do número de recursos usados.

Através da análise do gráfico podemos verificar que quando o número de recursos usados aumenta o tempo de chegada a (7,7) também aumenta.

Verificamos também que este aumento não é linear e que os ganhos são maiores quando temos poucos recursos, isto provavelmente está a acontecer porque os primeiros recursos são alocados aos nós que mais influenciam o tempo de chegada a (7,7), nodos como os que rodeiam a ignição e os que rodeiam, nós pelos quais é mais provável a passagem pela frente de fogo. A partir de um certo ponto os recursos começam a perder a eficiência uma vez que o fogo mais rapidamente os contorna resultando assim num aumento inferior ao aumento do tempo pelo recurso.

3 Questão 3

Considere agora que se pretende decidir onde localizar b recursos com objetivo de minimizar o valor esperado da área ardida ao fim de um intervalo de tempo. Considere que são conhecidas as probabilidades de ignição em cada célula.

Para resolver a terceira e última questão, à formulação da solução da **questão 2**, foi adicionado o conceito de floresta de caminhos mais curtos. Esta floresta é o conjunto de árvores de caminhos mais curtos em que a cada uma delas é correspondente um distinto vértice de ignição. Adicionalmente, a cada um dos elementos da floresta está também associado o parâmetro e_i , $\forall i \in V$, que é a probabilidade da árvore de caminhos mais curtos representar o incêndio a analisar. Isto acontece quando o vértice de ignição do incêndio é o correspondente à referida árvore de caminhos mais curtos. Por fim, para além do já mencionado, é também introduzido o parâmetro k que é o instante em que o incêndio apaga.

3.a Alínea a

Apresente um modelo de programação inteira mista (PIM). Para além de definir a notação, defina as variáveis de decisão claramente e justifique a função objetivo e cada restrição.

Para além das variáveis de decisão já descritas em questões anteriores foi introduzida f_{ij} e l_{ij} $\forall i, j \in V$. A variável f_{ij} é o tempo de chegada do fogo ao vértice i considerando a árvore de caminhos mais curtos que toma j como vértice de ignição. A variável l_{ij} toma o valor 1 caso o vértice i não tenha ardido quando considerando a árvore de caminhos mais curtos que toma j como vértice de ignição antes do instante k em que o incêndio terminou.

3.a.1 Variáveis de Decisão

f_{ij} - instante de chegada da frente do fogo ao nodo i na ignição j
 r_i - 1 se recurso foi colocado no nodo i , 0 se não
 l_{ij} - 1 se o nodo i não ardeu na ignição j , 0 se ardeu

3.a.2 Parâmetros

c_{ij} - tempo que demora a percorrer o arco ij
 e_p - probabilidade de ignição no nodo p
 k - instante de tempo após o qual o nodo passa a estar seguro

3.a.3 Função Objetivo

$$\max z = \sum_{p \in V} (e_p \cdot \sum_{i \in V} l_{ip}) \quad (23)$$

3.a.4 Restrições

sujeito a:

$$f_{jp} - f_{ip} - \Delta \cdot r_i \leq c_{ij}, \forall (i, j) \in A, \forall p \in V \quad (24)$$

$$f_{ii} = 0, \forall i \in V \quad (25)$$

$$k \cdot l_{ij} - f_{ij} \leq 0, \forall i, j \in V \quad (26)$$

$$\sum_{i \in V} r_i \leq b, \forall i \in V \quad (27)$$

$$f_{ij} \geq 0, \forall i, j \in V \quad (28)$$

$$f_{ij} \in \mathbb{R}, l_{ij} \in \{0, 1\}, r_i \in \{0, 1\}, \forall i, j \in V \quad (29)$$

Dado que, minimizar a área ardida é equivalente a maximizar a área não ardida, na função objetivo em (23) é maximizado o valor esperado da área não ardida. A restrição (24) mantém-se semelhante à (17), no entanto é generalizada para ser aplicada independentemente do vértice de ignição. A restrição (25) faz com que todos os vértices de ignição, correspondentes a cada uma das árvores de caminhos mais curtos, tenham como tempo de chegada do fogo o instante 0.

A restrição em (26) assegura que se f_{ij} é superior a k então l_{ij} toma o valor de 1, o que significa que como o tempo de chegada do fogo ao vértice i , considerando a ignição em j , excede o tempo que o incêndio durou logo a região correspondente não arde. Na eventualidade de f_{ij} ser inferior a k , l_{ij} toma o valor de 0 pois o fogo, considerando a ignição em j , chega à região i antes de o incêndio extinguir.

Por fim, tal como em (19), a restrição (27) assegura que o número de recursos usados não excede os disponíveis.

3.b Alínea b

Para a instância em anexo, obtenha uma solução através do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio com probabilidade de ignição na célula (i, j) dada por $(14 - i - j)/500$ e intervalo de 12 unidades de tempo. Represente a solução de forma adequada e interprete-a.

Para a resolução da questão 3 no IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, os dados a serem fornecidos serão, para além dos tempos de propagação entre células adjacentes, b , o número máximo de recursos disponíveis, Δ , tempo de retardamento e k , o intervalo de tempo.

Após todos os dados estarem prontos a serem extraídos pelo programa, traduzimos todas as restrições e variáveis de decisão para a linguagem do software. No que diz respeito às restrições, dividimos o problema em 4 grupos, norte, sul, este e oeste.

Correndo o programa, obtivemos os valores das variáveis de decisão l_{ij} , f_{ij} e r_i . Porém, a variável de decisão que reflete efetivamente a resposta à questão é a r_i , que nos indica onde colocar os recursos, de modo a minimizar o valor total da área ardida. Os valores obtidos encontram-se na Figura 16.

r	0	0	0	1	0	0	0
	0	1	1	0	0	1	0
	1	0	0	1	0	0	0
	0	1	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Figura 16: Solução ótima da Questão 3.

Tendo em consideração os valores das probabilidades de ignição em cada célula, apresentados na Figura 17, percebemos que na solução ótima os recursos foram atribuídos pois as probabilidades são mais nos vértices mais próximos de (1,1).

0,024	0,022	0,02	0,018	0,016	0,014	0,012
0,022	0,02	0,018	0,016	0,014	0,012	0,01
0,02	0,018	0,016	0,014	0,012	0,01	0,008
0,018	0,016	0,014	0,012	0,01	0,008	0,006
0,016	0,014	0,012	0,01	0,008	0,006	0,004
0,014	0,012	0,01	0,008	0,006	0,004	0,002
0,012	0,01	0,008	0,006	0,004	0,002	0

Figura 17: Probabilidade de ignição em cada célula.

A representação visual do resultado é a que se encontra na figura seguinte, com os nodos onde serão colocados os recursos assinalados a vermelho.

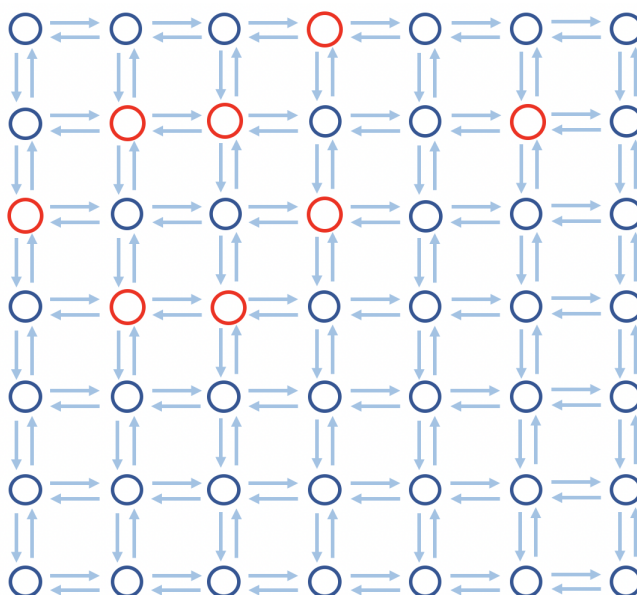


Figura 18: Rede de Nodos Solução Ótima da Questão 3.

A função objetivo dá 26 (arredondado), tal como se pode ver na Figura 19, que indica o valor total de área não ardida.

FO	26,248
----	--------

Figura 19: Valor da Função Objetivo da Questão 3.

Em anexo, na pasta **ex3**, encontra-se todo código utilizado para a resolução deste problema, assim como o ficheiro excel onde os dados foram extraídos e, posteriormente, adicionados.

3.b.1 Interpretação e Comentários

Ao observar a colocação dos recursos observamos que a alocação dos recursos ocorre principalmente no canto superior esquerdo. Isto acontece provavelmente porque estes são os nodos com uma maior probabilidade de ignição e por causa disto têm um maior peso na função objetivo.

Os recursos também se encontram mais concentrados verticalmente quando comparado horizontalmente, isto acontece porque, os tempos de propagação para sul são, em maior parte, menores que os tempos de propagação nas outras direções, isto combinado com o facto de que os nodos a norte no grafo tenham mais nodos a sul faz com que uma ignição num dos nodos superiores tendam a causar uma maior área ardida.

Também podemos observar que foram selecionados mais nodos interiores, isto provavelmente acontece não só porque estes nós tendem a pertencer a mais caminhos quando temos em consideração todas as ignições mas também porque uma ignição nestes nodos espalha-se nas 4 direções enquanto que uma ignição num nodo nos extremos se espalha em menos direções.

3.c Alínea c

Represente graficamente o valor esperado da área ardida em função do intervalo de tempo considerado. Interprete e comente.

Os valores da área ardida foram calculados num ficheiro Excel à parte o qual também inclui o gráfico o qual seguirá em anexo. Uma vez que a função objetivo do modelo definido em 3a) diz respeito à área que não ardeu.

Sendo R_i um determinado valor de Recursos e A a Área ardida correspondente, então:

$$Variacao = (A_i - A_{i-1}) / (R_i - R_{i-1}) * 10, \forall i \in [2, 11] \quad (30)$$

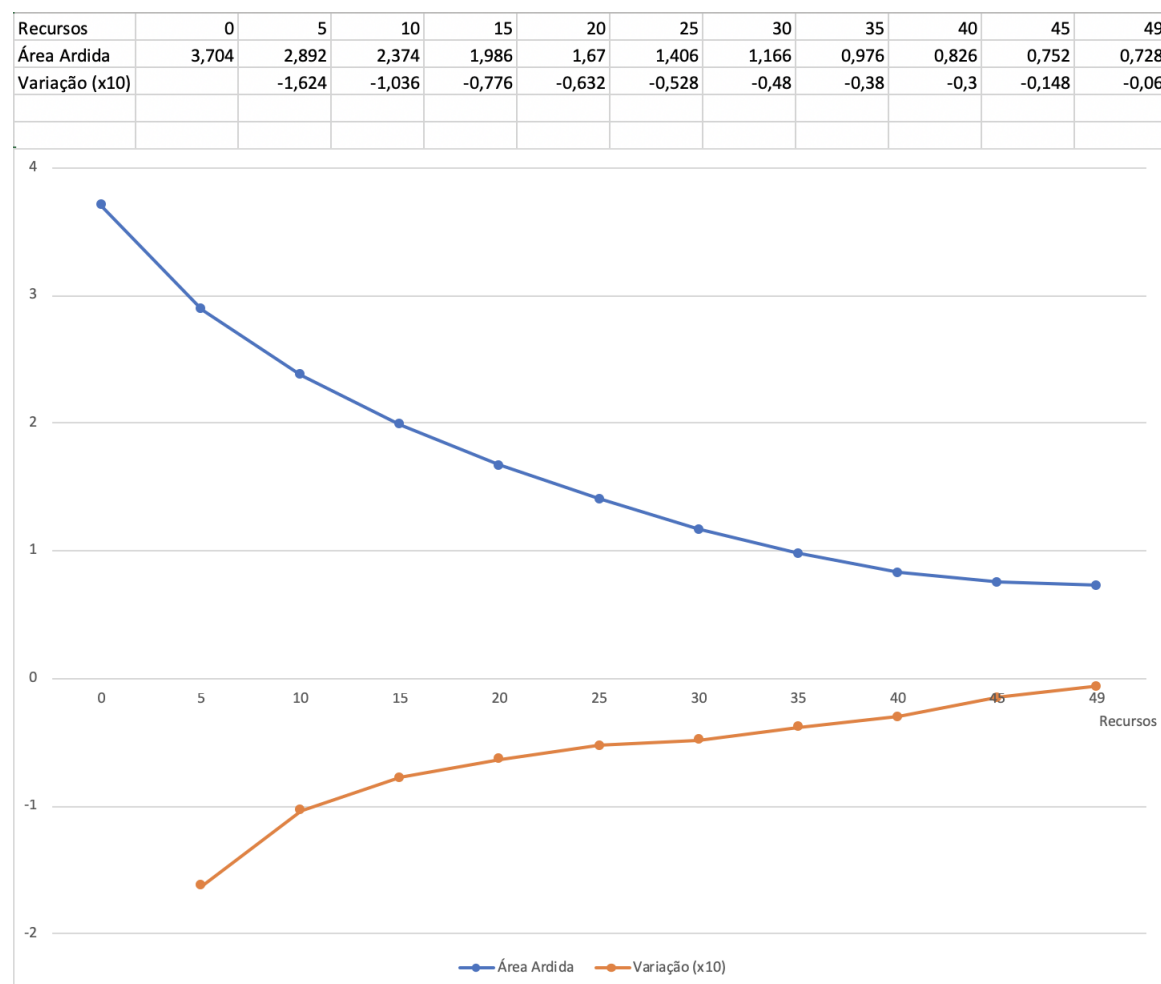


Figura 20: Área ardida em função ao número de recursos utilizados

Através da análise do gráfico podemos verificar que quando o número de recursos aumenta a área ardida diminui.

Verificamos que, tal como na questão 2c), esta diminuição não é linear observando-se maiores decréscimos na área ardida com introduções dos primeiros recursos e uma diminuição dos decréscimos à medida que vamos introduzindo mais recursos. Isto provavelmente acontece porque os primeiros recursos estão a ser alocados para bloquear a propagação do fogo para os nós mais prioritários, o que resulta em maiores decréscimos na área ardida, e os recursos seguintes estão a ser alocados nos nós restantes, os quais "bloqueiam" as frentes de fogo que têm menor probabilidade de ignição o que resulta em menores decréscimos na área ardida.