数学基础笔记（V1.01）

你不是一个人在战斗！

haiguang2000@qq.com

最后修改：2018-04-19

目录

机器学习的数学基础

高等数学

1. 导数定义：

导数和微分的概念

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

或者：$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ （2）

2. 左右导数导数的几何意义和物理意义

函数 $f(x)$在x_0处的左、右导数分别定义为：

左导数：$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},(x=x_0+\Delta x)$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3. 函数的可导性与连续性之间的关系

Th1: 函数 $f(x)$在x_0处可微$\Leftrightarrow f(x)$在x_0处可导。

Th2:若函数在点x_0处可导，则 $y=f(x)$在点x_0处连续，反之则不成立. 即函数连续不一定可导。

Th3:$f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

4. 平面曲线的切线和法线

切线方程 ： $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),f'(x_0)\neq 0$

5. 四则运算法则

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$在点 x 可导，则：

（1）$(u \pm v)^{'}=u^{'} \pm v^{'}$

（2）$(uv)'=uv'+vu'$　　　$d(uv)=udv+vdu$

（3）$(\frac{u}{v})'=\frac{vu'-uv'}{v^2}(v \neq 0)$　　　$d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$

6. 基本导数与微分表

（1）$y=c$（常数）　　则：　$y^{'}=0$　　$dy=0$

（2）$y=x^{\alpha}$（α为实数）　则：　$y'=\alpha x^{\alpha-1}$　　$dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$

（3）$y=a^x$　则：　$y'=a^x \ln a$　　$dy=a^x \ln a dx$　　特例：$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$　　$d(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x dx$

（4）$y=\log_a x$　则：

$y'=\frac{1}{x\ln a}$，$dy=\frac{1}{x\ln a}dx$　　特例:$y=\ln x$　　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$　　$d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

（5）$y=\sin x$　　则：$y'=\cos x$　　$d(\sin x)=\cos x dx$

（6）$y=\cos x$　　则：$y'=-\sin x$　　$d(\cos x)=-\sin x dx$

（7）$y=\tan x$　则：　$y^{'}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$　　$d(\tan x)=\sec^2 x dx$

（8）$y=\cot x$　则：$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$　　$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$

（9）$y=\sec x$　则：$y'=\sec x \tan x$　　$d(\sec x)=\sec x \tan x dx$

（10）$y=\csc x$　　则：$y'=-\csc x \cot x$　　$d(\csc x)=-\csc x \cot x dx$

（11）$y=\arcsin x$　则：$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

（12）$y=\arccos x$　　则：$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

（13）$y=\arctan x$　　则：$y'=\frac{1}{1+x^2}$　　$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$

（14）$y=\mathrm{arccot} x$　　则：$y'=-\frac{1}{1+x^2}$　　$d(\mathrm{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

（15）$y=shx$ 则：$y'=chx$　　$d(shx)=chxdx$

（16）$y=chx$ 则：$y'=shx$　　$d(chx)=shxdx$

7. 复合函数，反函数，隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法

(1) 反函数的运算法则：设 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(2) 复合函数的运算法则：若 $\mu=\varphi(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(\mu)$ 在对应点 μ（$\mu=\varphi(x)$）可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 可导，且 $y'=f'(\mu)\cdot\varphi'(x)$

(3) 隐函数导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法：

1)方程两边对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，则 y 的函数是 x 的复合函数. 例如 $\frac{1}{y}$，y^2，lny，e^y 等均是 x 的复合函数. 对 x 求导应按复合函数连锁法则做。

2)公式法. 由 $F(x,y)=0$ 知 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$，其中，$F'_x(x,y)$，$F'_y(x,y)$ 分别表示 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数。

3)利用微分形式不变性

8. 常用高阶导数公式

（1）$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\quad(a>0)$　　$(e^x)^{(n)}=e^x$

（2）$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

（3）$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

（4）$(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

（5）$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}$

（6）莱布尼兹公式：若 $u(x)$，$v(x)$ 均 n 阶可导，则：　$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}c_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$，其中 $u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$

9.微分中值定理，泰勒公式

Th1:(费马定理)

若函数 $f(x)$满足条件：

(1)函数 $f(x)$在x_0的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x) \leq f(x_0)$或$f(x) \geq f(x_0)$,

(2) $f(x)$在x_0处可导,则有 $f'(x_0) = 0$

Th2:(罗尔定理)

设函数 $f(x)$满足条件：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续； (2)在(a,b)内可导；(3)$f(\mathrm{a}) = f(b)$

则在(a,b)内∃一个ξ，使 $f'(\xi) = 0$

Th3:(拉格朗日中值定理)

设函数 $f(x)$满足条件：

(1)在$[a,b]$上连续；(2)在(a,b)内可导；

则在(a,b)内存在一个ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Th4:(柯西中值定理)

设函数 $f(x)$，$g(x)$满足条件：

(1) 在$[a,b]$上连续；(2) 在(a,b)内可导且 $f'(x)$，$g'(x)$均存在，且 $g'(x) \neq 0$

则在(a,b)内存在一个ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

10.洛必达法则

法则Ⅰ($\frac{0}{0}$型不定式极限)

设函数 $f(x)$,$g(x)$满足条件： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$; $f(x)$,$g(x)$在x_0的邻域内可导(在x_0处可除外)且 $g'(x) \neq 0$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或∞）。

则：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

法则 I'（$\frac{0}{0}$型不定式极限）

设函数 $f(x)$,$g(x)$满足条件：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$;存在一个 $X>0$, 当

$|x|>X$ 时, $f(x)$,$g(x)$可导, 且 $g'(x)\neq 0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或∞）。

则：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

法则 II（$\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限）

设函数 $f(x)$,$g(x)$满足条件：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；$f(x)$,$g(x)$在$x_0$ 的邻域内可 导

（在x_0处可除外）且 $g'(x)\neq 0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或∞）。

则：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

同理法则 II'（$\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限）仿法则 I'可写出

11. 泰勒公式

设函数 $f(x)$在点x_0处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于x_0的任意点 x，在x_0与 x 之间至少存在一个ξ，使得：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots\quad+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$称为 $f(x)$在点x_0处的 n 阶泰勒余项。

令$x_0=0$，则 n 阶泰勒公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)\cdots\cdots$$

（1）其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，ξ在 0 与 x 之间。(1)式称为麦克劳林公式

常用五种函数在$x_0=0$ 处的泰勒公式 ：

1）$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$

或 $=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

2）$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{n+1}{2}\pi\right)$

或 $=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$

3）$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)$

或 $=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$

4）$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$

或 $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

5）$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$

$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$

或 $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

12.函数单调性的判断

Th1：设函数 $f(x)$在(a,b)区间内可导，如果对$\forall x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$在(a,b)内是单调增加的（或单调减少）。

Th2：（取极值的必要条件）设函数 $f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取极值，则 $f'(x_0)=0.$

Th3：（取极值的第一充分条件）设函数 $f(x)$在x_0的某一邻域内可微，且 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$在x_0处连续，但 $f'(x_0)$不存在.）。

(1)若当 x 经过x_0时，$f'(x)$由“+”变“-”，则 $f(x_0)$为极大值；

(2)若当 x 经过x_0时，$f'(x)$由“-”变“+”，则 $f(x_0)$为极小值；

(3)若 $f'(x)$经过 $x=x_0$的两侧不变号，则 $f(x_0)$不是极值。

Th4:（取极值的第二充分条件）设 $f(x)$在点x_0处有 $f''(x)\neq 0$，且 $f'(x_0)=0$，则：

当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$为极大值； 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$为极小值．注：如果 $f''(x_0)0$，此方法失效。

13.渐近线的求法

(1)水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，则 $y=b$ 称为函数 $y=f(x)$的水平渐近线。

(2)铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 称为 $y=f(x)$的铅直渐近线。

(3)斜渐近线 若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，则 $y=ax+b$ 称为 $y=f(x)$的斜渐近线。

14.函数凹凸性的判断

Th1:（凹凸性的判别定理）若在 I 上 $f''(x)<0$（或 $f''(x)>0$）， 则 $f(x)$在 I 上是凸的（或凹的）。

Th2:（拐点的判别定理 1)若在x_0处 $f''(x)=0$，(或 $f''(x)$不存在)，当 x 变动经过x_0时，$f''(x)$变号，则$(x_0,f(x_0))$为拐点。

Th3:（拐点的判别定理 2)设 $f(x)$在x_0点的某邻域内有三阶导数，且 $f''(x)=0$，$f'''(x)\neq 0$，则$(x_0,f(x_0))$为拐点。

15.弧微分

$dS=\sqrt{1+y'^2}dx$

16.曲率

曲线 $y=f(x)$在点(x,y)处的曲率 $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$. 对于参数方程：

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}$

17. 曲率半径

曲线在点 M 处的曲率 $k(k \neq 0)$与曲线在点 M 处的曲率半径ρ有如下关系：$\rho = \frac{1}{k}$

线性代数

行列式

1. 行列式按行（列）展开定理

（1）设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，则：$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$

或$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$

即 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$,其中：$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}=(A_{ji})=(A_{ij})^{T}$

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_1&x_2&\dots&x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}==\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$$

（2）设 A,B 为 n 阶方阵,则$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$,但$|A\pm B|=|A|\pm|B|$不一定成立。

（3）$|kA|=k^{n}|A|$, A 为 n 阶方阵。

（4）设 A 为 n 阶方阵，$|A^{T}|=|A|;|A^{-1}|=|A|^{-1}$（若 A 可逆），$|A^{*}|=|A|^{n-1}$

$n\geq 2$

（5）$\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\C&B\end{vmatrix}=|A||B|$ ，A,B 为方阵，但$\begin{vmatrix}O&A_{m\times m}\\B_{n\times n}&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\ |A||B|$ 。

（6）范德蒙行列式$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_1&x_2&\dots&x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}==\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$

设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_i(i=1,2\cdots,n)$是 A 的 n 个特征值，则 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

矩阵

矩阵：$m \times n$ 个数a_{ij}排成 m 行 n 列的表格$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$称为矩阵，简记为 A，或者$\left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ 。若 $m = n$，则称 A 是 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$是两个 $m \times n$ 矩阵，则 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij}) = a_{ij} + b_{ij}$称为矩阵 A 与 B 的和，记为 $A + B = C$ 。

2. 矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})$是 $m \times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m \times n$ 矩阵(ka_{ij})称为数 k 与矩阵 A 的数乘，记为 kA。

3. 矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})$是 $m \times n$ 矩阵，$B = (b_{ij})$是 $n \times s$ 矩阵，那么 $m \times s$ 矩阵 $C = (c_{ij})$，其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$称为 AB 的乘积，记为 $C = AB$ 。

4. $\boldsymbol{A^T}$、$\boldsymbol{A^{-1}}$、$\boldsymbol{A^*}$三者之间的关系

(1) $(A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (kA)^T = kA^T, (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

(2) $(A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},$

但 $(A \pm B)^{-1} = A^{-1} \pm B^{-1}$不一定成立。

(3) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A \ (n \geq 3)$，$(AB)^* = B^*A^*$，$(kA)^* = k^{n-1}A^* \ (n \geq 2)$

但$(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$不一定成立。

(4) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, (A^{-1})^* = (AA^*)^{-1}, (A^*)^T = (A^T)^*$

5. 有关A^*的结论

（1） $AA^* = A^*A = |A|E$

（2） $|A^*| = |A|^{n-1}\ (n \geq 2)$，$(kA)^* = k^{n-1}A^*$，$(A^*)^* = |A|^{n-2}A(n \geq 3)$

（3） 若 A 可逆，则$A^* = |A|A^{-1}$,$(A^*)^* = \frac{1}{|A|}A$

（4） 若 A 为 n 阶方阵，则：

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

6. 有关A^{-1}的结论

A 可逆$\Leftrightarrow AB = E; \Leftrightarrow |A| \neq 0; \Leftrightarrow r(A) = n;$

$\Leftrightarrow A$ 可以表示为初等矩阵的乘积；$\Leftrightarrow A$ 无零特征值； $\Leftrightarrow \mathrm{Ax} = 0$ 只有零解。

7. 有关矩阵秩的结论

（1） 秩 $r(A)$=行秩=列秩；

（2） $r(A_{m\times n}) \leq \min(m,n);$

（3） $A \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1$；

（4） $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B);$

（5） 初等变换不改变矩阵的秩

（6） $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min(r(A),r(B))$,特别若 $AB = O$

则：$r(A) + r(B) \leq n$

（7） 若A^{-1}存在$\Rightarrow r(AB) = r(B)$；若B^{-1}存在 $\Rightarrow r(AB) = r(A)$;

若 $r(A_{m\times n}) = n \Rightarrow r(AB) = r(B)$；若 $r(A_{m\times s}) = n \Rightarrow r(AB) = r(A)$。

（8） $r(A_{m\times s}) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解

8. 分块求逆公式

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

这里 A，B 均为可逆方阵。

向量

1. 有关向量组的线性表示

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$至少有一个向量可以用其余向量线性表示。

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$线性相关$\Leftrightarrow \beta$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表示。

(3) β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$ 。

2. 有关向量组的线性相关性

(1)部分相关，整体相关；整体无关，部分无关.

(2) ① n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性无关$\Leftrightarrow |[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]| \neq 0$， n 个 n 维向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性相关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]| = 0$ 。

② $n+1$ 个 n 维向量线性相关。

③ 若$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_S$线性无关，则添加分量后仍线性无关；或一组向量线性相关，去掉某些分量后仍线性相关。

3. 有关向量组的线性表示

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$至少有一个向量可以用其余向量线性表示。

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$线性相关$\Leftrightarrow \beta$ 可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表示。

(3) β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$

4. 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系

设 $r(A_{m\times n})=r$，则 A 的秩 $r(A)$与 A 的行列向量组的线性相关性关系为：

（1）若 $r(A_{m\times n})=r=m$，则 A 的行向量组线性无关。

（2）若 $r(A_{m\times n})=r<m$，则 A 的行向量组线性相关。

（3）若 $r(A_{m\times n})=r=n$，则 A 的列向量组线性无关。

（4）若 $r(A_{m\times n})=r<n$，则 A 的列向量组线性相关。

5. $\boldsymbol{n}$ 维向量空间的基变换公式及过渡矩阵

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是向量空间 V 的两组基，则基变换公式为：

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$

其中 C 是可逆矩阵，称为由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵。

6. 坐标变换公式

若向量γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的坐标分别是 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，

$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 即： $\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n$，则向量坐标变换公式为 $X=CY$ 或 $Y=C^{-1}X$ ，其中 C 是从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵。

7. 向量的内积

$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$

8. Schmidt 正交化

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则可构造$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$使其两两正交，且$\beta_i$仅是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$的线性组合$(i=1,2,\cdots,n)$，再把$\beta_i$单位化，记$\gamma_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|}$, 则$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_i$是规范正交向量组。其中 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$ ， $\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$ ，

....

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

9. 正交基及规范正交基

向量空间一组基中的向量如果两两正交，就称为正交基；若正交基中每个向量都是单位向量，就称其为规范正交基。

线性方程组

1．克莱姆法则

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$，如果系数行列式 $D=|A|\neq 0$，则方程组有唯一解， $x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$，其中$D_j$是把 D 中第 j 列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式。

2. n 阶矩阵 A 可逆$\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解。$\Leftrightarrow \forall b,Ax=b$ 总有唯一解，一般地，$r(A_{m\times n})=n\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解。

3. 非奇次线性方程组有解的充分必要条件，线性方程组解的性质和解的结构

(1) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A_{m\times n})=m$，则对 $Ax=b$ 而言必有 $r(A)=r(A\vdots b)=m$，从而 $Ax=b$ 有解。

(2) 设$x_1,x_2,\cdots x_s$为 $Ax=b$ 的解，则$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s$当$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时仍为 $Ax=b$ 的解；但当$k_1+k_2+\cdots+k_s=0$ 时，则为 $Ax=0$ 的解。特别$\frac{x_1+x_2}{2}$为 $Ax=b$ 的解；$2x_3-(x_1+x_2)$为 $Ax=0$ 的解。

(3) 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 无解$\Leftrightarrow r(A)+1=r(\overline{A})\Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示。

4. 奇次线性方程组的基础解系和通解，解空间，非奇次线性方程组的通解

（1）齐次方程组 $Ax=0$ 恒有解(必有零解)。当有非零解时，由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量，因此 $Ax=0$ 的全体解向量构成一个向量空间，称为该方程组的解空间，解空间的维数是 $n-r(A)$，解空间的一组基称为齐次方程组的基础解系。

（2）$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是 $Ax=0$ 的基础解系，即：

1）$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是 $Ax=0$ 的解；

2）$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性无关；

3）$Ax=0$ 的任一解都可以由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表出．$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$是 $Ax=0$ 的通解，其中$k_1,k_2,\cdots,k_t$是任意常数。

矩阵的特征值和特征向量

1. 矩阵的特征值和特征向量的概念及性质

（1）设λ是 A 的一个特征值，则 $kA,aA+bE,A^2,A^m,f(A),A^T,A^{-1},A^*$有一个特征值分别为 $k\lambda,a\lambda+b,\lambda^2,\lambda^m,f(\lambda),\lambda,\lambda^{-1},\frac{|A|}{\lambda}$,且对应特征向量相同（$A^T$ 例外）。

（2）若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为 A 的 n 个特征值，则$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$ ，从而$|A|\neq 0\Leftrightarrow A$ 没有特征值。

（3）设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$为 A 的 s 个特征值，对应特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，

若：$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ ，

则：$A^n\alpha=k_1A^n\alpha_1+k_2A^n\alpha_2+\cdots+k_sA^n\alpha_s=k_1\lambda_1^n\alpha_1+k_2\lambda_2^n\alpha_2+\cdots k_s\lambda_s^n\alpha_s$ 。

2. 相似变换、相似矩阵的概念及性质

（1）若 $A\sim B$，则

1）$A^T\sim B^T,A^{-1}\sim B^{-1},,A^*\sim B^*$

2）$|A|=|B|,\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii},r(A)=r(B)$

3）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，对$\forall\lambda$成立

3. 矩阵可相似对角化的充分必要条件

(1) 设 A 为 n 阶方阵，则 A 可对角化$\Leftrightarrow$对每个k_i重根特征值λ_i，有 $n-r(\lambda_i E-A)=k_i$

(2) 设 A 可对角化，则由$P^{-1}AP=\Lambda$,有 $A=P\Lambda P^{-1}$，从而$A^n=P\Lambda^n P^{-1}$

(3) 重要结论

1) 若 $A\sim B$,$C\sim D$，则$\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$.

2) 若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B)$,$|f(A)|\sim|f(B)|$，其中 $f(A)$为关于 n 阶方阵 A 的多项式。

3) 若 A 为可对角化矩阵，则其非零特征值的个数(重根重复计算)＝秩(A)

4. 实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角阵

(1)相似矩阵：设 A,B 为两个 n 阶方阵，如果存在一个可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$ 成立，则称矩阵 A 与 B 相似，记为 $A\sim B$。

(2)相似矩阵的性质：如果 $A\sim B$ 则有：

1) $A^T\sim B^T$

2) $A^{-1}\sim B^{-1}$ （若 A，B 均可逆）

3) $A^k\sim B^k$ （k 为正整数）

4) $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，从而 A,B 有相同的特征值

5) $|A|=|B|$，从而 A,B 同时可逆或者不可逆

6) 秩(A) =秩(B),$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，$A$,$B$ 不一定相似

二次型

1. $\boldsymbol{n}$ 个变量$\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\cdots,\boldsymbol{x_n}$的二次齐次函数

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$，其中$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，称为 n 元二次型，简称二次型．若令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$,$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$,这二次型 f 可改写成矩阵向量形式 $f=x^TAx$。其中 A 称为二次型矩阵，因为$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，所以二次型矩阵均为对称矩阵，且二次型与对称矩阵一一对应，并把矩阵 A 的秩称为二次型的秩。

2.惯性定理，二次型的标准形和规范形

（1）惯性定理

对于任一二次型，不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准型，其正负惯性指数与所选变换无关，这就是所谓的惯性定理。

（2）标准形

二次型 $f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 经过合同变换 $x=Cy$ 化为 $f=x^TAx=y^TC^TAC$

$y=\sum_{i=1}^{r}d_iy_i^2$称为 $f(r\leq n)$的标准形。在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，与所作的合同变换有关，但系数不为零的平方项的个数由 $r(A$ 的秩$)$唯一确定。

（3）规范形

任一实二次型 f 都可经过合同变换化为规范形 $f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$，其中 r 为 A 的秩，p 为正惯性指数，$r-p$ 为负惯性指数，且规范型唯一。

3.用正交变换和配方法化二次型为标准形，二次型及其矩阵的正定性

设 A 正定$\Rightarrow kA(k>0),A^T,A^{-1},A^*$正定；$|A|>0$, A 可逆；$a_{ii}>0$，且$|A_{ii}|>0$

A，B 正定$\Rightarrow A+B$ 正定，但 AB，BA 不一定正定

A 正定$\Leftrightarrow f(x)=x^TAx>0,\forall x\neq 0$

$\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式全大于零

$\Leftrightarrow A$ 的所有特征值大于零

$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow$存在可逆阵 P 使 $A=P^TP$

$\Leftrightarrow$存在正交矩阵 Q，使$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,

其中$\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$.正定$\Rightarrow kA(k>0),A^T,A^{-1},A^*$正定； $|A|>0,A$ 可逆；$a_{ii}>0$，且 $|A_{ii}|>0$ 。

概率论和数理统计

随机事件和概率

1.事件的关系与运算

(1) 子事件：$A \subset B$，若 A 发生，则 B 发生。

(2) 相等事件：$A = B$，即 $A \subset B$，且 $B \subset A$ 。

(3) 和事件：$A \cup B$（或 $A + B$），A 与 B 中至少有一个发生。

(4) 差事件：$A - B$，A 发生但 B 不发生。

(5) 积事件：$A \cap B$（或 AB），A 与 B 同时发生。

(6) 互斥事件（互不相容）：$A \cap B$=∅。

(7) 互逆事件（对立事件）： $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \Omega, A = \overline{B}, B = \overline{A}$ 。

2.运算律

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$； $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

3.德.摩根律

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4.完全事件组

$A_1 A_2 \cdots A_n$两两互斥，且和事件为必然事件，即$A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{n} = \Omega$

5.概率的基本概念

(1) 概率：事件发生的可能性大小的度量，其严格定义如下：

概率 $P(g)$为定义在事件集合上的满足下面 3 个条件的函数：

1)对任何事件 A，$P(A) \geq 0$

2)对必然事件Ω，$P(\Omega) = 1$

3)对$A_1 A_2 \cdots A_n,\cdots$ ，若$A_i A_j = \varnothing (i \neq j)$，则：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A)$.

(2) 概率的基本性质

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

2) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$;

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 特别，当 $B \subset A$ 时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$且 $P(B) \leq P(A)$； $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$ 4) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互斥，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (P(A_i)$

(3) 古典型概率：实验的所有结果只有有限个， 且每个结果发生的可能性相同，其概率计算公式： $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$

(4) 几何型概率：样本空间Ω为欧氏空间中的一个区域， 且每个样本点的出现具有等可能性，其概率计算公式：$P(A) = \frac{A \text{ 的度量(长度、面积、体积)}}{\Omega \text{的度量(长度、面积、体积)}}$

6. 概率的基本公式

(1) 条件概率： $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$,表示 A 发生的条件下，B 发生的概率

(2) 全概率公式： $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) P(B_i), B_i B_j = \varnothing, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.

(3) Bayes 公式：

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) P(B_i)}, j = 1,2,\cdots,n$$

注：上述公式中事件B_i的个数可为可列个.

(4)乘法公式： $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P(A_2)P(A_1|A_2)$ $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

7. 事件的独立性

(1) A 与 B 相互独立⇔ $P(AB)=P(A)P(B)$

(2) A，B，C 两两独立 ⇔ $P(AB)=P(A)P(B)$;$P(BC)=P(B)P(C)$; $P(AC)=P(A)P(C)$;

(3) A，B，C 相互独立 ⇔ $P(AB)=P(A)P(B)$; $P(BC)=P(B)P(C)$; $P(AC)=P(A)P(C)$; $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

8. 独立重复试验

将某试验独立重复 n 次，若每次实验中事件 A 发生的概率为 p，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为： $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 。

9. 重要公式与结论

(1) $P(\overline{A})=1-P(A)$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

(3) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(4) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$,$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$, $P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

(5) 条件概率 $P(\quad|B)$满足概率的所有性质，

例如：. $P(\overline{A}_1|B)=1-P(A_1|B)$ $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$ $P(A_1A_2|B)=P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$

(6) 若A_1,A_2,⋯,A_n相互独立，则 $P(\bigcap_{i=1}^n A_i)=\prod_{i=1}^n P(A_i)$， $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\prod_{i=1}^n(1-P(A_i))$

(7) 互斥、互逆与独立性之间的关系： A 与 B 互逆⇒A 与 B 互斥，但反之不成立，A 与 B 互斥（或互逆）且均非零概率事件⇒A 与 B 不独立.

(8) 若$A_1,A_2,\cdots,A_m,B_1,B_2,\cdots,B_n$相互独立，则$f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$与 $g(B_1,B_2,\cdots,B_n)$也相互独立，其中$f(\ \ ),g(\ \ )$分别表示对相应事件做任意事件运算后所得的事件，另外，概率为1（或0）的事件与任何事件相互独立.

随机变量及其概率分布

1.随机变量及概率分布

取值带有随机性的变量，严格地说是定义在样本空间上，取值于实数的函数称为随机变量，概率分布通常指分布函数或分布律

2.分布函数的概念与性质

定义： $F(x)=P(X\leq x),-\infty<x<+\infty$

性质：(1)$0\leq F(x)\leq 1$ (2)$F(x)$单调不减

(3)右连续$F(x+0)=F(x)$ (4)$F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$

3.离散型随机变量的概率分布

$P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n,\cdots$ $p_i\geq 0,\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$

4.连续型随机变量的概率密度

概率密度$f(x)$;非负可积，且:(1)$f(x)\geq 0$, (2)$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ (3)x为$f(x)$的连续点，则:

$f(x)=F'(x)$分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

5.常见分布

(1) 0-1分布:$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$

(2) 二项分布:$B(n,p)$： $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$

(3) Poisson分布:$p(\lambda)$： $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0,k=0,1,2\cdots$

(4) 均匀分布$U(a,b)$：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a<x<b\\0,\end{cases}$

(5) 正态分布:$N(\mu,\sigma^2)$: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma>0,-\infty<x<+\infty$

(6)指数分布:$E(\lambda)$:$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0,\lambda>0\\0,\end{cases}$

(7)几何分布:$G(p)$:$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,0<p<1,k=1,2,\cdots.$

(8)超几何分布: $H(N,M,n)$:$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,\cdots,\min(n,M)$

6. 随机变量函数的概率分布

(1)离散型:$P(X=x_1)=p_i,Y=g(X)$

则: $P(Y=y_j)=\sum_{g(x_i)=y_i}P(X=x_i)$

(2)连续型:$X\tilde{}f_X(x),Y=g(x)$

则:$F_y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y}f_x(x)dx$, $f_Y(y)=F'_Y(y)$

7. 重要公式与结论

(1) $X\sim N(0,1)\Rightarrow\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\Phi(0)=\frac{1}{2}$, $\Phi(-a)=P(X\le-a)=1-\Phi(a)$

(2) $X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),P(X\le a)=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

(3) $X\sim E(\lambda)\Rightarrow P(X>s+t|X>s)=P(X>t)$

(4) $X\sim G(p)\Rightarrow P(X=m+k|X>m)=P(X=k)$

(5) 离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数;连续型随机变量的分布函数为连续函数,但不一定为处处可导函数。

(6) 存在既非离散也非连续型随机变量。

多维随机变量及其分布

1. 二维随机变量及其联合分布

由两个随机变量构成的随机向量(X,Y)， 联合分布为$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$

2.二维离散型随机变量的分布

（1）联合概率分布律 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij};i,j=1,2,\cdots$

（2）边缘分布律 $p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},i=1,2,\cdots$ $p_{\cdot j}=\sum_{i}^{\infty}p_{ij},j=1,2,\cdots$

（3）条件分布律 $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ $P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$

3. 二维连续性随机变量的密度

（1）联合概率密度$f(x,y)$:

1）$f(x,y)\ge 0$ 2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

（2）分布函数：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$

（3）边缘概率密度： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

（4）条件概率密度：$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

4.常见二维随机变量的联合分布

（1）二维均匀分布：$(x,y)\sim U(D)$ ，$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(D)},(x,y)\in D\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

（2）二维正态分布：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}.\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

5.随机变量的独立性和相关性

X和Y的相互独立:$\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$:

$\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$（离散型） $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$（连续型）

X和Y的相关性：

相关系数$\rho_{XY}=0$时，称 X 和 Y 不相关， 否则称 X 和 Y 相关

6. 两个随机变量简单函数的概率分布

离散型： $P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij},Z=g(X,Y)$ 则：

$$P(Z=z_k)=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum_{g(x_i,y_i)=z_k}P\left(X=x_i,Y=y_j\right)$$

连续型： $(X,Y)\sim f(x,y),Z=g(X,Y)$ 则：

$$F_z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy，f_z(z)=F'_z(z)$$

7. 重要公式与结论

(1) 边缘密度公式： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

(2) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$

(3) 若(X,Y)服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则有：

1) $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

2) X 与 Y 相互独立$\Leftrightarrow\rho=0$，即 X 与 Y 不相关。

3) $C_1X+C_2Y\sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2C_1C_2\sigma_1\sigma_2\rho)$

4) X 关于 Y=y 的条件分布为： $N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2))$

5) Y 关于 $X=x$ 的条件分布为： $N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2))$

(4) 若 X 与 Y 独立，且分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_1,\sigma_2^2)$, 则：

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$, $C_1X+C_2Y\tilde{}N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2)$.

(5) 若 X 与 Y 相互独立，$f(x)$和 $g(x)$为连续函数， 则 $f(X)$和 $g(Y)$也相互独立。

随机变量的数字特征

1. 数学期望

离散型：$P\{X=x_i\}=p_i$,$E(X)=\sum_i x_i p_i$；

连续型： $X\sim f(x)$,$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

性质：

（1） $E(C)=C$,$E[E(X)]=E(X)$

（2） $E(C_1X+C_2Y)=C_1E(X)+C_2E(Y)$

（3） 若 X 和 Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$ （4）$[E(XY)]^2\le E(X^2)E(Y^2)$

2. 方差：$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$

3. 标准差：$\sqrt{D(X)}$,

4. 离散型：$D(X)=\sum_i[x_i-E(X)]^2p_i$

5. 连续型：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$

性质：

（1）$D(C)=0$,$D[E(X)]=0$,$D[D(X)]=0$

（2）X 与 Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

（3）$D(C_1X+C_2)=C_1^2D(X)$

（4） 一般有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

（5）$D(X)<E(X-C)^2$,$C\ne E(X)$

（6）$D(X)=0\Leftrightarrow P\{X=C\}=1$

6. 随机变量函数的数学期望

(1) 对于函数 $Y = g(x)$

X 为离散型：$P\{X = x_i\} = p_i, E(Y) = \sum_i g(x_i) p_i$；

X 为连续型：$X \sim f(x), E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$

(2) $Z = g(X,Y)$；$(X,Y) \sim P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$；$E(Z) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$

$(X,Y) \sim f(x,y)$；$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dxdy$

7. 协方差　$Cov(X,Y) = E[(X - E(X)(Y - E(Y))]$

8. 相关系数　$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$, k 阶原点矩 $E(X^k)$；k 阶中心矩 $E\{[X - E(X)]^k\}$

性质：

(1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

(2) $Cov(aX,bY) = abCov(Y,X)$

(3) $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

(4) $|\rho(X,Y)| \leq 1$

(5) $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$ ，其中 $a > 0$

$\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$ ，其中 $a < 0$

9. 重要公式与结论

(1) $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

(2) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(3) $|\rho(X,Y)| \leq 1$,且　$\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$，其中 $a > 0$

$\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$，其中 $a < 0$

(4) 下面 5 个条件互为充要条件：

$\rho(X,Y)=0 \Leftrightarrow Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(X,Y)=E(X)E(Y) \Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y) \Leftrightarrow D(X-Y)=D(X)+D(Y)$

注：X 与 Y 独立为上述 5 个条件中任何一个成立的充分条件，但非必要条件。

数理统计的基本概念

1. 基本概念

总体：研究对象的全体，它是一个随机变量，用 X 表示。

个体：组成总体的每个基本元素。

简单随机样本：来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量$X_1,X_2\cdots,X_n$，称为容量为 n 的简单随机样本，简称样本。

统计量：设$X_1,X_2\cdots,X_n$,是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1,X_2\cdots,X_n)$)是样本的连续函数，且 $g(\ \ )$中不含任何未知参数，则称 $g(X_1,X_2\cdots,X_n)$为统计量

样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

样本矩：样本 k 阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\cdots$

样本 k 阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k,k=1,2,\cdots$

2. 分布

χ^2分布：$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$，其中$X_1,X_2\cdots,X_n$,相互独立，且同服从 $N(0,1)$

t 分布：$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$ ，其中 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$,且 X，Y 相互独立。

F 分布：$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$，其中 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$,且 X，Y 相互独立。

分位数：若 $P(X\le x_\alpha)=\alpha$,则称x_α为 X 的α分位数

3. 正态总体的常用样本分布

（1）设$X_1,X_2\cdots,X_n$为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则：

1）$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ 或者$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

2）$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

3）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

4）$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

4. 重要公式与结论

（1）对于$\chi^2\sim\chi^2(n)$，有 $E(\chi^2(n))=n,D(\chi^2(n))=2n$;

（2）对于 $T\sim t(n)$，有 $E(T)=0,D(T)=\frac{n}{n-2}(n>2)$；

（3）对于 $F\tilde{}F(m,n)$，有 $\frac{1}{F}\sim F(n,m),F_{a/2}(m,n)=\frac{1}{F_{1-a/2}(n,m)}$;

（4）对于任意总体 X，有 $E(\overline{X})=E(X),E(S^2)=D(X),D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}$