

- 2. Introdução
- 2.1 Fasor
  - 2.1.1 Representação Fasorial de uma Onda Senoidal e Co-senoidal
  - 2.1.2 Diagramas Fasoriais
- 2.2 Sistema de Números Complexos
  - 2.2.1 Plano Complexo
  - 2.2.2 Operador  $j$
- 2.3 Forma Retangular e Polar
  - 2.3.1 Forma Retangular
  - 2.3.2 Forma Polar
  - 2.3.3 Identidade de Euler
- 2.4 Operação Matemática com Grandezas Complexas
  - 2.4.1 Soma
  - 2.4.2 Subtração
  - 2.4.3 Produto
  - 2.4.4 Divisão
  - 2.4.5 Potenciação
  - 2.4.6 Raiz N-ésima
  - 2.4.7 Logaritmo

## 2. Introdução

Os fasores e os números complexos são duas importantes ferramentas para a análise de circuitos ca. As tensões e correntes senoidais podem ser matematicamente e graficamente representadas por fasores em termos de suas magnitudes e ângulos de fase. O sistema de números complexos é um meio de expressar os fasores e de operá-los matematicamente.

### 2.1. Fasor

Um fasor é uma representação gráfica semelhante a um vetor, mas em geral refere-se a grandezas que variam no tempo como as ondas senoidais.

O comprimento de um fasor representa sua magnitude, e o ângulo  $\theta$  representa sua posição angular relativa ao eixo horizontal tomado como referência. Os ângulos positivos são medidos no sentido anti-horário a partir da referência ( $0^\circ$ ) e os ângulos negativos são medidos no sentido horário a partir da referência.

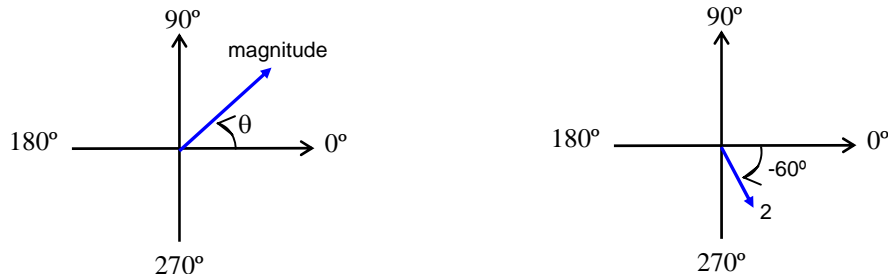


Figura 2.1: Exemplo de fasores: magnitude e direção.

A Figura 2.2 mostra um fasor de magnitude  $|A|$  que gira com velocidade angular  $\omega$ .

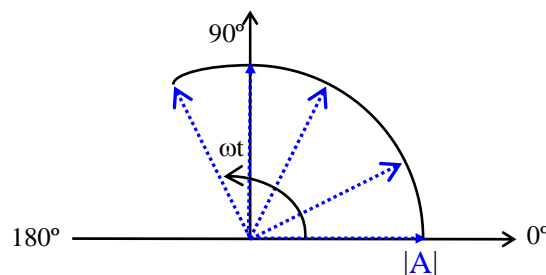


Figura 2.2: Fasor girante.

### 2.1.1 Representação Fasorial de uma Onda Senoidal e Co-senoidal

Um ciclo completo de uma senóide pode ser representado pela rotação de um fasor que gira  $360^\circ$ . O valor instantâneo da onda senoidal em qualquer ponto da senóide é igual à distância vertical da extremidade do fasor ao eixo horizontal, isto é, a projeção do fasor no eixo vertical.

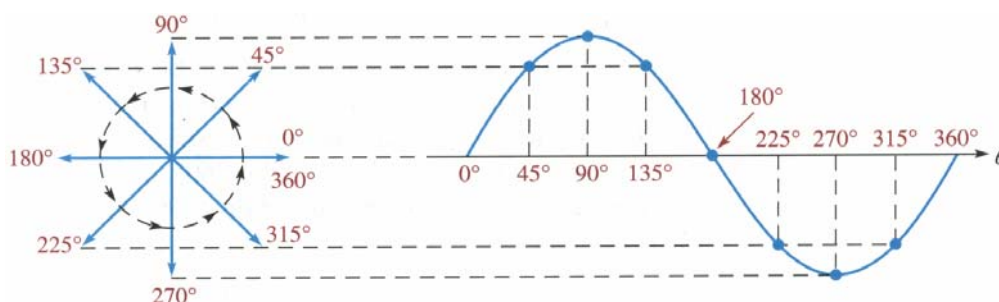


Figura 2.3 Onda senoidal representada por fasor em movimento.

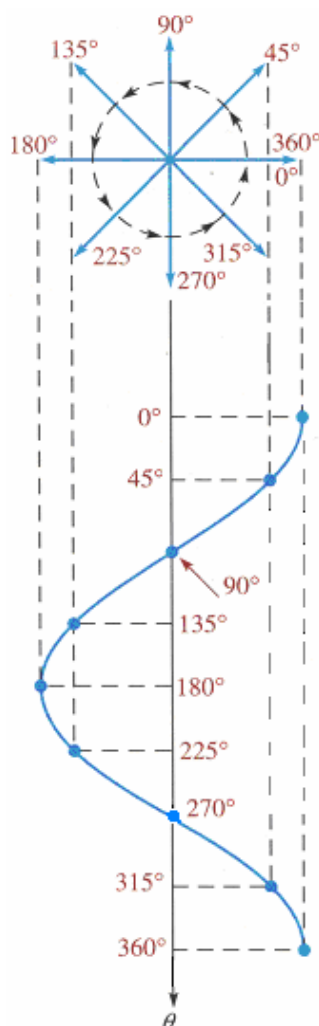


Figura 2.4 Onda co-senoidal representada por fasor em movimento.

A Figura 2.4 apresenta a representação de uma onda co-senoidal por um fasor girante. O valor instantâneo da co-senoide em qualquer ponto da onda é igual à distância horizontal da extremidade do fasor ao eixo vertical, ou seja, igual à projeção do fasor sobre o eixo horizontal.

Note que a amplitude do fasor é igual ao valor de pico da onda senoidal na Figura 2.3 (pontos  $90^\circ$  e  $270^\circ$ ) e da onda co-senoidal na Figura 2.4 (pontos  $0^\circ$  e  $180^\circ$ ).

A Figura 2.5 mostra um fasor de tensão em uma posição angular específica de  $45^\circ$  e o correspondente ponto na onda senoidal. O valor instantâneo da onda senoidal neste ponto está relacionado à posição ( $\theta$ ) e à amplitude do fasor ( $V_p$ ). Note que quando uma linha vertical é traçada da extremidade do fasor até o eixo horizontal é formado um triângulo retângulo. O comprimento do fasor é a hipotenusa do triângulo, e a projeção vertical, o seu cateto oposto. Assim, o cateto oposto do triângulo reto é igual à hipotenusa vezes o seno do ângulo  $\theta$  e representa o valor instantâneo da senóide.

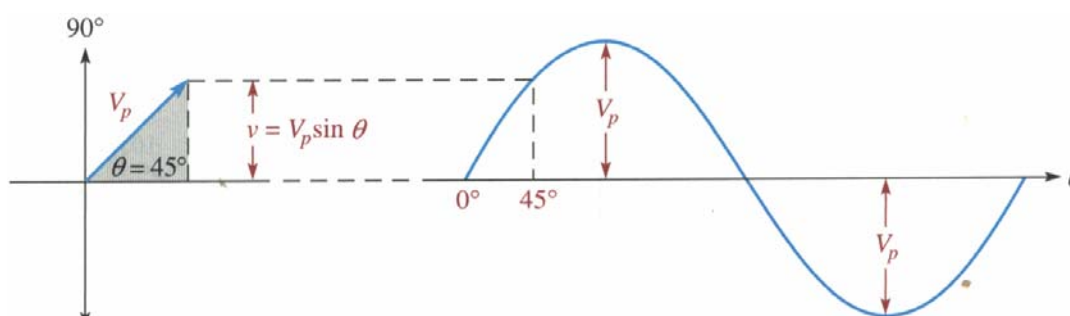


Figura 2.5: Relação matemática entre a senóide e o fasor.

O período e a frequência da onda senoidal estão relacionados à velocidade de rotação do fasor. A velocidade de rotação do fasor é denominada de velocidade angular,  $\omega$ . Quando um fasor gira a uma velocidade  $\omega$ , então  $\omega t$  representa o ângulo instantâneo do fasor que pode ser expresso como:

$$\theta = \omega t \quad (2.1)$$

### 2.1.2 Diagramas Fasoriais

Como visto anteriormente, uma onda senoidal periódica de frequência e amplitude constantes pode ser representada por um fasor girante. Como amplitude e frequência são constantes, tem-se que uma vez

conhecida o valor instantâneo de uma senóide em  $t=0$ , em qualquer tempo o valor da senóide pode ser determinado.

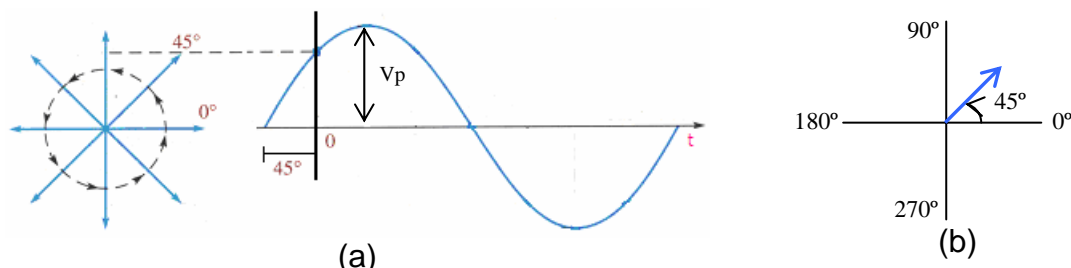


Figura 2.6: Definição de uma onda senoidal.

A onda senoidal mostrada na Figura 2.6 é definida matematicamente como:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t + 45^\circ) \quad (2.2)$$

Assim, o fasor da Figura 2.6 (b) tem amplitude igual a  $V_p$ , gira a uma velocidade angular  $\omega$ , e tem um ângulo de fase igual a  $45^\circ$ .

Um fasor em uma posição fixa é usado para representar uma onda senoidal completa porque uma vez estabelecido o ângulo de fase entre a onda senoidal e uma referência, o ângulo de fase permanece constante ao longo dos demais ciclos.

Um diagrama fasorial pode ser usado para mostrar a posição relativa de duas ou mais ondas senoidais de mesma frequência, pois uma vez que o ângulo de fase entre duas ou mais ondas de mesma frequência é estabelecido, o ângulo de fase permanece constante ao longo dos ciclos.

Na Figura 2.7 três ondas senoidais são representadas por um diagrama fasorial. A senóide A está adiantada das senóides B e C, a senóide B está adiantada em relação à senóide C, porém atrasada em relação à senóide A, e a senóide C está atrasada em relação às senóides A e B, como indicado no diagrama fasorial.

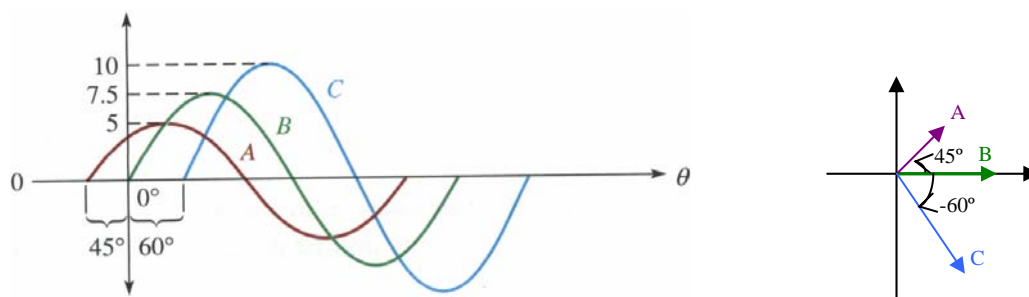


Figura 2.7: Exemplo de diagrama fasorial.

## 2.2. Sistema de Números Complexos

Os números complexos permitem operações matemáticas com fasores e são úteis na análise de circuitos ca.

A álgebra de números complexos é uma extensão da álgebra de números reais. Os números reais constituem um sub-conjunto dos números complexos.

Os números complexos são formados pelos números reais e pelos números imaginários.

$$\{\text{Conjunto dos Complexos}\} = \{\text{Reais}\} + \{\text{Imaginários}\} \quad (2.3)$$

Os números imaginários são distinguidos dos números reais pelo uso do operador  $j$  ou  $i$ .

A representação de um número complexo é dada pela soma algébrica da componente real,  $\pm a$ , e da componente imaginária,  $\pm jb$ .

$$y = \pm a \pm jb \quad (2.4)$$

Se a parte real de um número complexo é zero, o número complexo torna-se puramente imaginário:  $y = \pm jb$ . Se a parte imaginária do número complexo é nula, o número torna-se puramente real:  $y = \pm a$ .

Na matemática o operador  $i$  é usado invés do  $j$ , mas em circuitos elétricos o  $i$  pode ser confundido com o valor instantâneo da corrente, por isso o  $j$  tem preferência.

### 2.2.1 Plano Complexo

Um número complexo pode ser representado por um ponto no plano complexo. No plano complexo o eixo horizontal é denominado de eixo real, e o eixo vertical, de eixo imaginário.

A Figura 2.8 mostra um conjunto de pontos no plano cartesiano complexo. O número  $+2$  é um número complexo cuja parte imaginária é nula; o número  $-j2$  é um número complexo negativo com parte real nula, e representado sobre o eixo imaginário. Quando um ponto não está situado sobre nenhum eixo, mas está localizado em um dos quatro quadrantes, o número é definido por suas coordenadas, a

exemplo do ponto  $4+j2$ . Note que o número  $4+j2$  tem como conjugado  $4-j2$ , pois diferem apenas no sinal da parte imaginária. O conjugado de um número complexo é representado pelo expoente  $()^*$ .

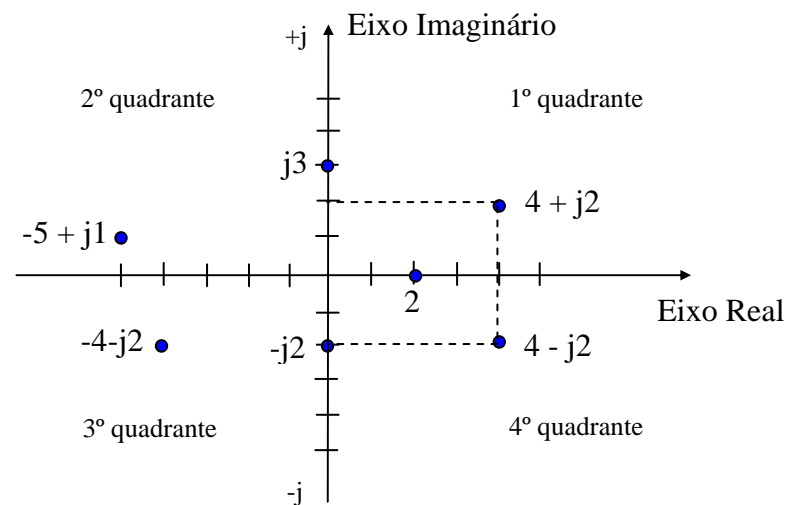


Figura 2.8: Plano cartesiano complexo.

Uma posição angular pode ser representada em um plano complexo como mostra a Figura 2.9.

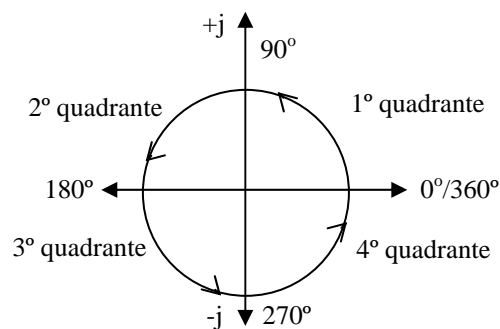


Figura 2.9: Ângulos no plano complexo.

### 2.2.2 Operador $j$

O operador  $j$  é denominado operador complexo e é definido como:

$$j = \sqrt{-1} \quad (2.5)$$

O operador  $+j$  ao multiplicar uma grandeza real move no sentido anti-horário a grandeza localizada no eixo real para o eixo imaginário, rotacionando-a de  $+90^\circ$ . De modo semelhante, multiplicando a grandeza real por  $-j$ , a grandeza gira de  $-90^\circ$ , sentido horário. Assim,  $j$  é considerado um operador rotacional.

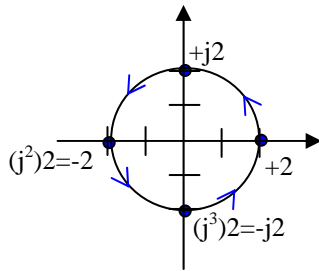


Figura 2.10: Efeito do operador j

Seja uma grandeza real positiva +2 representada sobre o eixo real. Ao ser aplicado o operador j tem-se:

$$j^2 2 = (\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) \cdot (2) = (-1) \cdot (2) = -2$$

$$j^3 2 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1}) \cdot (2) = (-1) \cdot (j) \cdot (2) = -j2 \quad (2.6)$$

$$j^4 2 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 \cdot (2) = (-1) \cdot (-1) \cdot (2) = 2$$

Observe que o operador  $j^2$  gira de  $+180^\circ$  a grandeza sobre qual opera convertendo-a a um número real negativo,  $j^3$  gira de  $270^\circ$ , e quando multiplicado por  $j^4$  retorna ao lugar de origem.

### 2.3. Forma Retangular e Polar

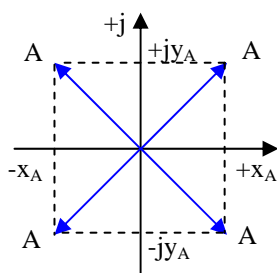
A forma polar e retangular são duas formas de representação de números complexos, usadas para representar grandezas fasoriais. Cada uma apresenta vantagens quando usadas na análise de circuitos, dependendo da aplicação.

Como visto na seção 2.1, um fasor apresenta magnitude e fase. Em geral, a magnitude de um fasor é representada por uma letra itálica ou pela representação de módulo  $| \cdot |$ .

Um fasor é representado graficamente por uma seta desde a origem até o ponto no plano complexo.

#### 2.3.1 Forma Retangular

Um fasor, em qualquer quadrante de um plano complexo, pode ser completamente especificado numa forma de notação cartesiana ou retangular como:



$$A = \pm x_A \pm jy_A. \quad (2.7)$$

$\pm x_A$  representa a projeção de A no eixo real;  
 $\pm jy_A$  representa a projeção de A sobre o eixo imaginário.

Figura 2.11: Fasor em diferentes quadrantes.



Portanto, um fasor é uma grandeza complexa. Qualquer que seja o quadrante em que esteja situado o fasor A, seu módulo é dado por:

$$|A| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \quad (2.8)$$

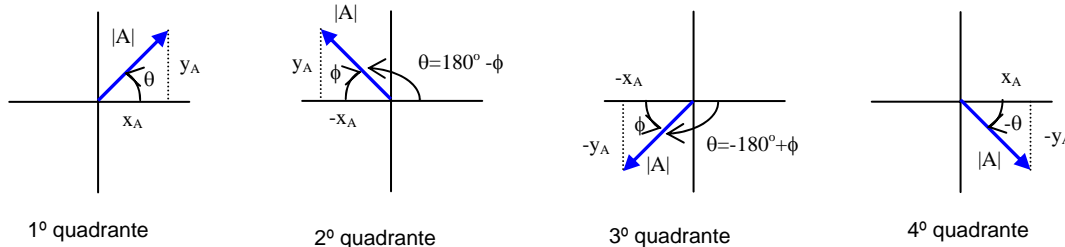


Figura 2.12: Abertura angular do fasor no plano complexo.

A projeção do fasor  $|A|$  no eixo horizontal é igual a  $x_A = |A|\cos\theta$  e a projeção sobre o eixo vertical é  $y_A = |A|\sin\theta$ . O valor de  $\theta$  depende do quadrante em que está o fasor.

A abertura angular, no 1º e 4º quadrante, que o fasor faz com o eixo real positivo de referência é dada respectivamente por:

$$\theta = \arctg\left(\frac{\pm y_A}{x_A}\right) \quad (2.9)$$

O ângulo  $\theta$  no 2º e 3º quadrantes é definido respectivamente como:

$$\theta = \pm 180^\circ \mp \phi$$

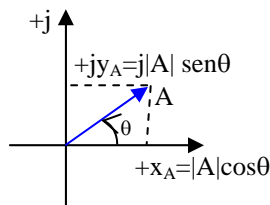
$$\theta = \pm 180^\circ \mp \arctg\left(\frac{y_A}{x_A}\right) \quad (2.10)$$

### 2.3.2 Forma Polar

O fasor A quando representado na forma polar consiste da magnitude  $|A|$  e da posição angular relativa ao eixo real, expresso como:

$$|A|\angle\pm\theta \quad (2.11)$$

Um fasor na forma retangular pode ser convertido para a forma polar e vice-versa. Na conversão retangular  $\rightarrow$  polar tem-se:



$$A = \pm x_A \pm jy_A = |A|(\cos \theta \pm j \sin \theta)$$

$$\equiv \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \angle \tan^{-1} \left( \frac{\pm y_A}{\pm x_A} \right) = |A| \angle \pm \theta \quad (2.12)$$

Figura 2.13: Coordenadas cartesianas de um fasor.

A conversão polar  $\rightarrow$  retangular tem-se:

$$|A| \angle \pm \theta \equiv |A| \cdot (\cos \theta \pm j \sin \theta) = \pm x_A \pm jy_A \quad (2.13)$$

### 2.3.3 Identidade de Euler

Seja o fasor  $A$  representado em sua forma retangular trigonométrica:

$$A = |A| \cdot (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (2.14)$$

As funções  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  expandidas em série:

$$A = |A| \left[ \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) + j \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) \right] \quad (2.15)$$

O fasor  $A$  pode ser re-escrito como:

$$A = |A| \left( 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \dots \right) \quad (2.16)$$

Reconhecendo que:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \dots \quad (2.17)$$

tem-se:

$$A = |A| \cdot e^{j\theta} = |A| \cdot (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (2.18)$$

com

$$e^{j\theta} = (\cos\theta + j\sin\theta) \quad (2.19)$$

que representa a identidade de Euler.

De modo análogo tem-se que:

$$e^{-j\theta} = (\cos\theta - j\sin\theta) \quad (2.20)$$

O fasor  $A$  quando representado como  $A = |A|.e^{\pm j\theta}$  diz-se estar na forma exponencial.

A forma polar é a representação concisa da forma exponencial.

$$A = |A|.e^{\pm j\theta} \equiv |A| \angle \pm\theta \quad (2.21)$$

A Equação 2.22 apresenta as diferentes formas de representar uma onda senoidal variante no tempo por um fasor com magnitude definida pela amplitude da onda senoidal, que gira a uma velocidade angular  $\omega$ , e cuja representação gráfica indica a condição no instante  $t=0$ , para um ângulo de fase que se mantém constante no tempo.

$$A = \pm x_A \pm j y_A = |A|.e^{\pm j\theta} \equiv |A| \angle \pm\theta \quad (2.22)$$

Assim, ondas senoidais e co-senoidais, de amplitude e frequência definidas, encontram representação através de fasores.

$$\begin{aligned} |A|. \cos(\omega t \pm \varphi) &= \text{Re}[|A|.e^{j(\omega t \pm \varphi)}] = |A| \angle \pm\varphi \\ |A|. \sin(\omega t \pm \varphi) &= \text{Im}[|A|.e^{j(\omega t \pm \varphi)}] = |A| \angle \pm\varphi \end{aligned} \quad (2.23)$$

Uma outra maneira de apresentar a identidade de Euler consiste na definição do fasor como:

$$A = (\cos\theta + j\sin\theta) \quad (2.24)$$

A derivada de  $A$  em relação a  $\theta$  é dada por:

$$\frac{dA}{d\theta} = -\sin\theta + j\cos\theta = j(\cos\theta + j\sin\theta) = jA \quad (2.25)$$

Re-escrevendo a Equação 2.25, tem-se:

$$\frac{dA}{A} = j d\theta \quad (2.26)$$

Integrando ambos os lados da Equação 2.26:

$$\ln A = j\theta + C \quad (2.27)$$

A constante complexa de integração  $C$  é obtida fazendo-se  $\theta=0$  na Equação (2.27) onde obtém-se  $C=\ln A$ . O valor de  $A$  para  $\theta=0$  é obtido da Equação 2.24; assim, para  $A = 1 + j0$  implica em  $C=0$ . Portanto:

$$\ln A = j\theta \quad (2.28)$$

ou

$$A = e^{j\theta} \quad (2.29)$$

O ângulo  $\theta$  pode ser expresso em função do tempo:  $\theta = \omega t + \varphi$ .

## 2.4. Operação Matemática com Grandezas Complexas

Os fasores, representados por números complexos, podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos, além das operações de potenciação, raiz, e logaritmo.

### 2.4.1 Soma

Seja os fasores  $A$  e  $B$  definidos como:

$$A = a + jb \quad (2.30)$$

$$B = c + jd \quad (2.31)$$

A soma de  $A$  e  $B$  é dada por:

$$C = A + B = (a + c) + j(b + d) \quad (2.32)$$

A representação gráfica da soma de fasores é mostrada na Figura 2.13.

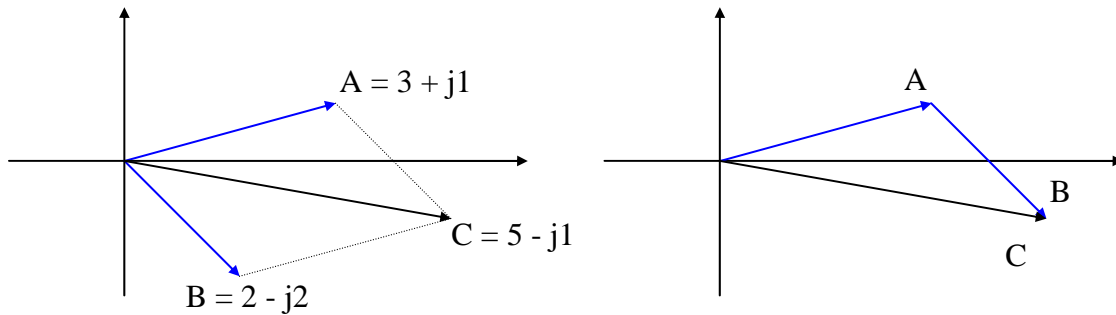


Figura 2.13: Soma de fasores.

### 2.4.2 Subtração

A subtração dos fasores A e B é dada por:

$$C = A - B = (a - c) + j(b - d) \quad (2.33)$$

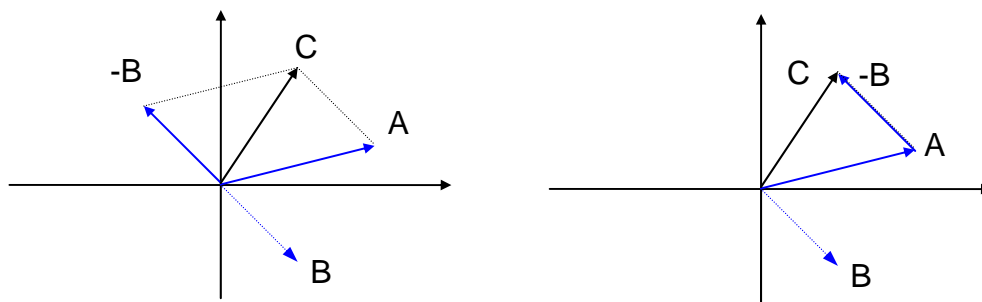


Figura 2.14: Subtração de fasores.

### 2.4.3 Produto

O produto de A e B é dado por:

$$\begin{aligned} A.B &= (a + jb).(c + jd) \\ &= (a.c - b.d) + j(a.d + b.c) \end{aligned} \quad (2.34)$$

ou

$$\begin{aligned} A.B &= |A|.e^{j\theta_1}|B|.e^{j\theta_2} \\ &= |A|.|B|.e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= |A|.|B| \angle (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

A Equação 2.35 mostra que se sobre um fasor  $A = |A|.e^{j\theta_1}$  aplicarmos um fasor B de magnitude |B| e ângulo  $\theta_2$ , i.é.  $B = |B|.e^{j\theta_2} = (\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$ , o fasor resultante:

$$D = |A| \cdot |B| \cdot e^{j\theta_1} \cdot e^{j\theta_2} = |A| \cdot |B| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (2.36)$$

O fasor D tem módulo  $|A| \cdot |B|$ , e está avançado de  $\theta_2$  desde a posição de A formando um ângulo com o eixo de referência igual a  $(\theta_1 + \theta_2)$ .

Portanto, o operador  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$  operando sobre um fasor A faz este fasor girar de um ângulo  $+\theta$  desde sua posição inicial. O operador  $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$  operando sobre um vetor A faz este vetor girar de um ângulo  $(-\theta)$ .

A multiplicação é mais fácil de ser operada quando as grandezas envolvidas estão na forma polar.

#### 2.4.4 Divisão

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ou

$$\frac{A}{B} = \frac{|A|e^{j\theta_1}}{|B|e^{j\theta_2}} = \frac{|A|}{|B|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{|A|}{|B|} \angle (\theta_1 - \theta_2) \quad (2.38)$$

Como na multiplicação, a divisão é mais fácil quando as grandezas estão na forma polar.

#### 2.4.5 Potenciação

Seja

$$\begin{aligned} A^n &= (|A| \cdot e^{j\theta})^n = |A|^n \cdot e^{jn\theta} \\ A^n &= |A|^n \angle n\theta \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.4.6 Raiz N-ésima

$$\sqrt[n]{A} = A^{1/n} = (|A|.e^{j\theta})^{1/n} = |A|^{1/n} \cdot e^{j\theta/n} = |A|^{1/n} \angle \theta/n \quad (2.40)$$

As outras (n-1) raízes são obtidas somando-se  $2\pi q$  rad a  $\theta$  antes que se efetue a divisão por n, para  $q = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ .

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{A} &= \sqrt[n]{|A|} \angle (\theta + 2\pi q)/n, \quad q = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \\ &= \sqrt[n]{|A|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2\pi q}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2\pi q}{n}\right) \right] \quad (2.41) \end{aligned}$$

Cada raiz multiplicada por si mesma n vezes resulta no fasor A.

### 2.4.7 Logaritmo

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln(|A|.e^{j\theta}) = \ln|A| + \ln e^{j\theta} \\ &= \ln|A| + j\theta \cdot \ln e = \ln|A| + j\theta \quad (2.42) \end{aligned}$$

### Referências

- [1] Floyd, T.L. *Principles of Electric Circuits*, 6<sup>th</sup> Ed. Prentice Hall, 2000. ISBN 0-13-095997-9. 927p.
- [2] Nilsson, James W., Reidel, Susan A., *Circuitos Elétricos*, LTC, 6<sup>a</sup> Edição, 2003.
- [3] Kerchner, R.M., Corcoran, G.F., *Circuitos de Corrente Alternada*, Porto Alegre, Globo, 1973.