



UCDB

UNIVERSIDADE CATÓLICA DOM BOSCO

ELETRÔNICA I

Computação, Elétrica,
Controle & Automação e Mecânica
Profº Me. Alessandro M. Carneiro

Corrente Alternada
“Números Complexos”



DEFINIÇÃO

- Conceito
 - Numero complexo ou números imaginários
 - ➔ Representa a raiz quadrada de números negativos
 - ➔ Estes números não fazem parte do conjunto dos números reais

Exemplos:

$$\sqrt{-4}; \sqrt{-9}; \sqrt{-10};$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{j^2 4} = j\sqrt{4} = j2$$

Unidade imaginária = j

$$j = \sqrt{-1} \text{ ou } j^2 = -1$$



DEFINIÇÃO

- É possível representar a raiz quadrada de um número negativo pelo imaginário da seguinte forma:

$$-\sqrt{-x} = \sqrt{j^2 x} = j\sqrt{x}$$

- Exemplos

$$a. \sqrt{-4} = \sqrt{j^2 4} = j\sqrt{4} = j2$$

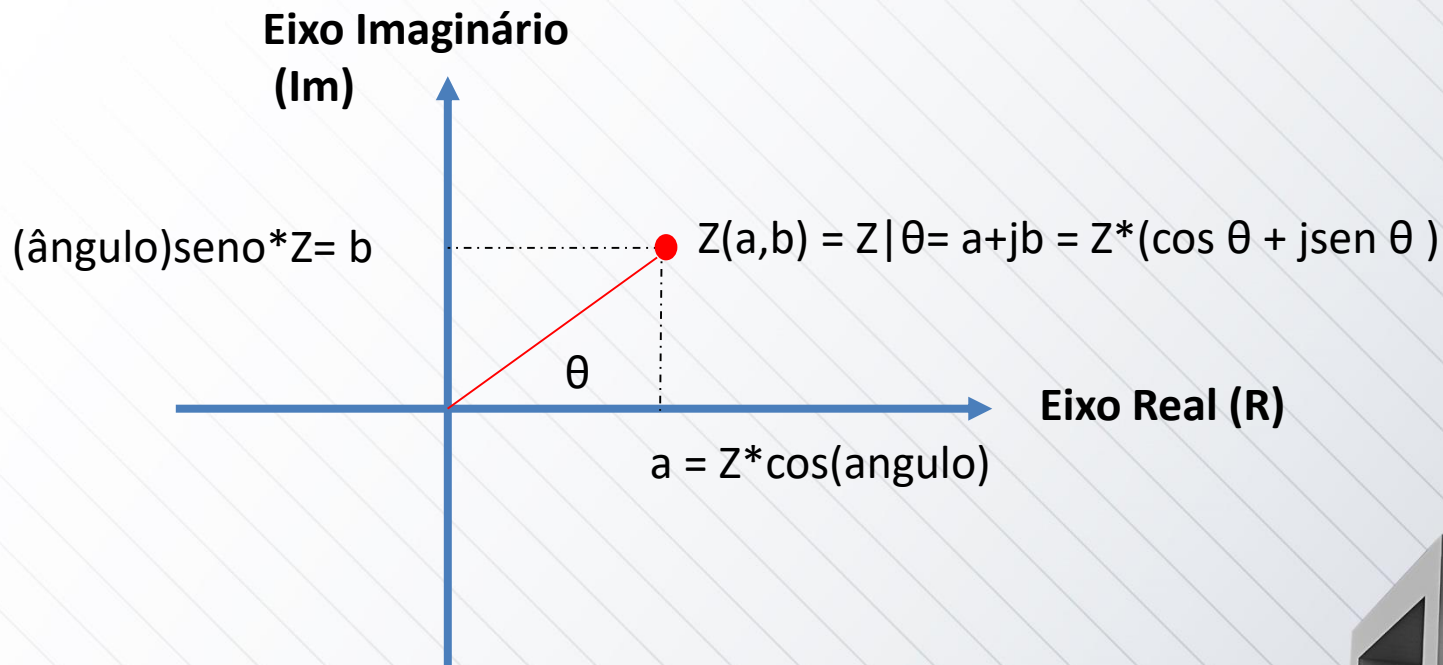
$$b. \sqrt{-9} = \sqrt{j^2 9} = j\sqrt{9} = j3$$

$$c. \sqrt{-10} = \sqrt{j^2 10} = j\sqrt{10} = j3.16227$$



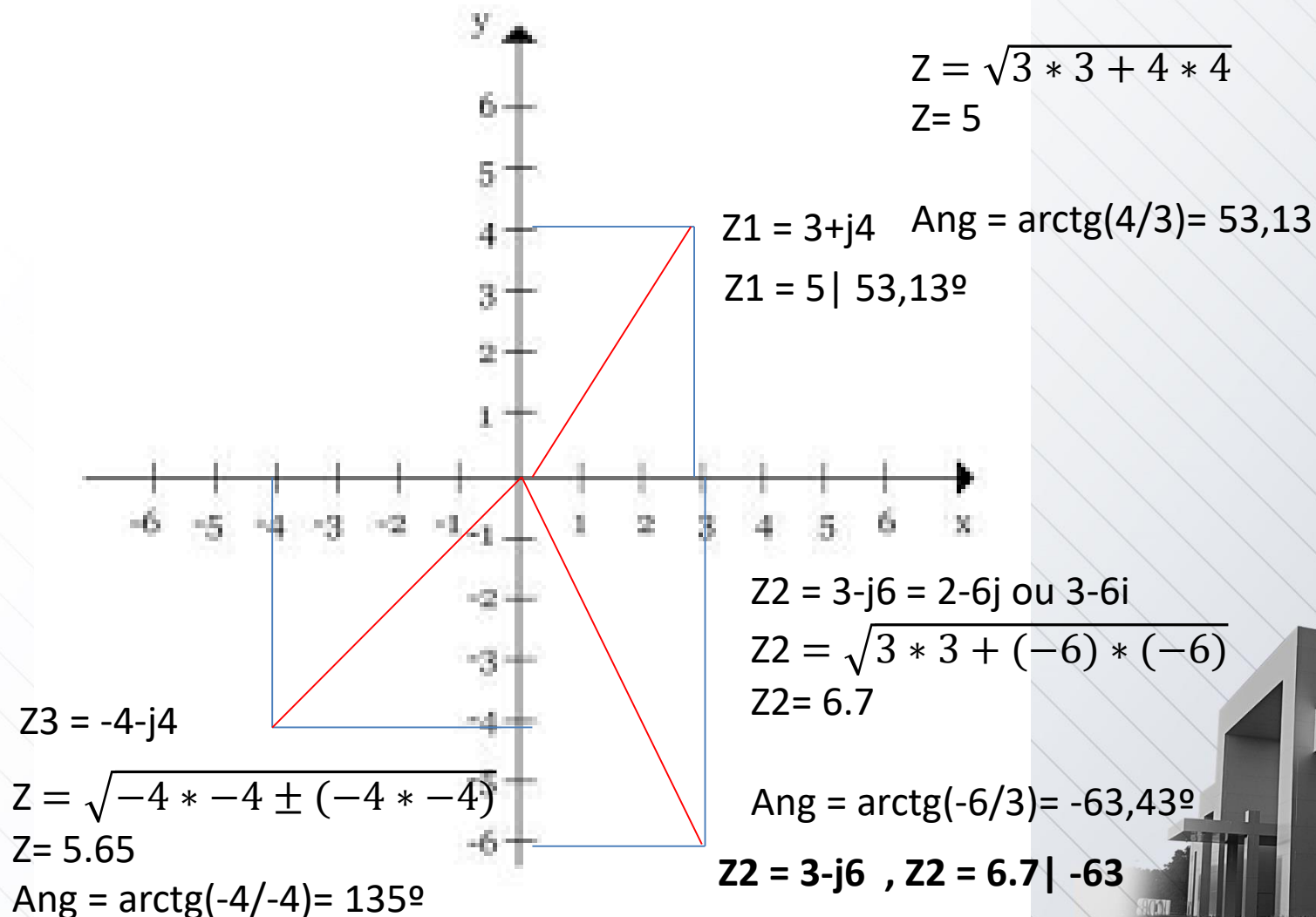
REPRESENTAÇÃO

- Plano Cartesiano



REPRESENTAÇÃO

- Forma cartesiana



NOTAÇÕES

- Polar
 - $Z \mid \text{ângulo } ^\circ$
 - Exemplos
 - $10 \mid 45^\circ$
 - $110 \mid 180^\circ$
 - $4 \mid -70^\circ$
- Retangular
 - $A+jB$
 - Exemplos: $3+j5$, $-7-j9$, $-8,-j10$



NOTAÇÕES NÚMEROS COMPLEXO



Polar \rightarrow Cartesiana

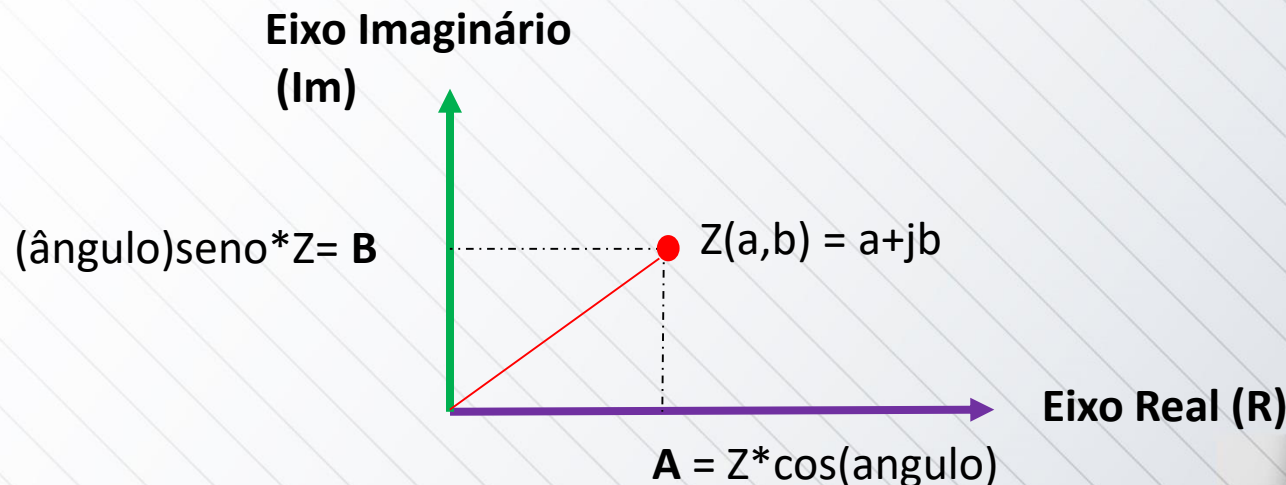
- $Z|\theta \rightarrow Z = A + jB$

- A: parte real (abscissa)

- $A = Z \cdot \cos(\theta)$

- B: parte complexa (ordenada)

- $B = Z \cdot \sin(\theta)$



Exemplos

- Converter de retangular → polar

$$z1=4+j4$$

$$Z = \sqrt{4^2 + 4^2}$$

$$Z = 5.65$$

$$F_i = \arctg(4/4) = 45^\circ$$

$$z2=7 = 7+0j$$

$$Z = 7 | 0^\circ$$

0

$$Z = \sqrt{0^2 + 3^2}$$

$$Z = 3$$

$$z3=j3 = 0+3j = 3 | 90^\circ$$

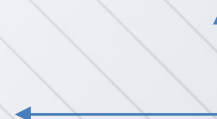
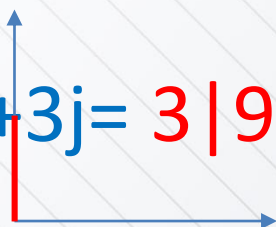
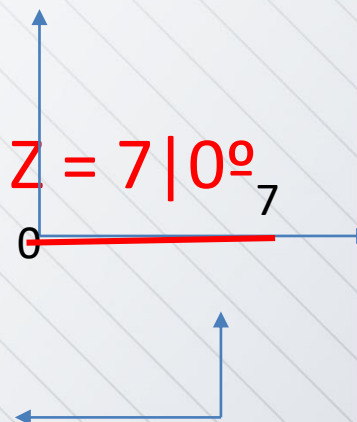
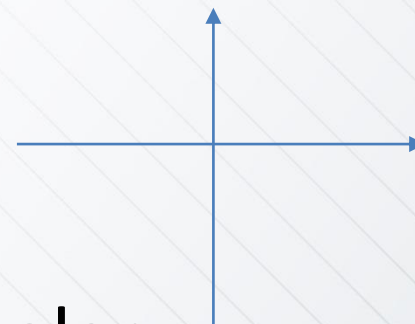
$$Z = 3 | 90^\circ$$

$$Z = \sqrt{-3^2 + 2^2} = 3.60$$

$$F_i = \arctg(2/-3) = -33.69^\circ$$

$$z4=-3+j2$$

$$Z = 3.6 | -33.69^\circ$$



CALCULADORA

Retangular → Polar

Pressionar **tecla** pool(A,B)

=

Vai aparecer o valor de Z

RCL+TAN

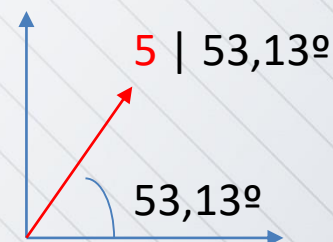
Vai aparecer o ângulo fi

Ex: $3+j4 \rightarrow Z | \text{ângulo} = 5 | 53,13^\circ$

$\text{pool}(3,4) =$

5 : z

Rcl+tan $\rightarrow 53,13^\circ$



$R \rightarrow P$

- Ex: $Z = -4 + j2$

1) $\text{POOL}(-4, 2) =$

2) 4,47

3) Tecla rcl e depois tangente

4) $F = 153,43^\circ$

5) $Z | \text{teta} \rightarrow 4,47 | 153,43^\circ$



CALCULADORA

Polar \rightarrow Retangular

- Ex 5 | $53,13^\circ \rightarrow A+jB$
- AGORA $REC(Z,\theta)$ geralmente acima do pool

– $REC(5,52.13) =$

• $3.000000007146 \rightarrow 3 = A$

– $RCL+TANG = 3.999999994641 = B$

– $A+Bj = 3+4j$



$$P \rightarrow R$$

- Calculadora ($4 \mid 75^\circ$)

1. Shift pool

1. $\text{REC}(4, 75^\circ) =$

2. $1.035 \rightarrow A$

3. RCL a Tangente

1. $F = 3.86 \rightarrow B$

RESPOSTA = $1.035 + j 3.86$



Cartesiana → Polar

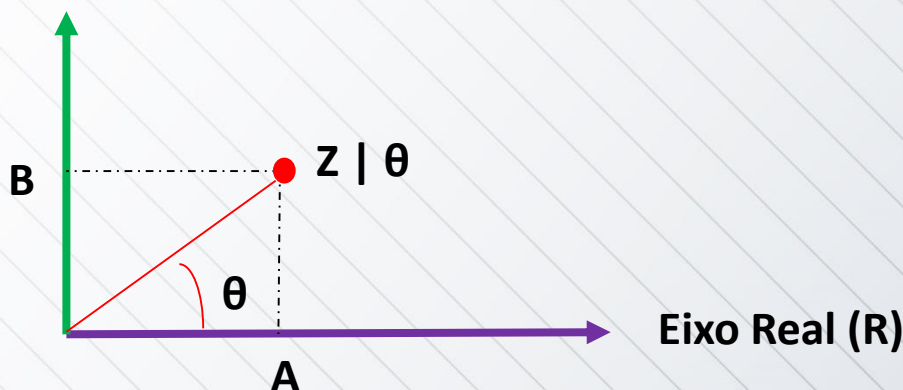
- $Z = A + jB \rightarrow Z | \theta$

- Z : módulo (magnitude)

- θ (fi) : ângulo ou fase de z

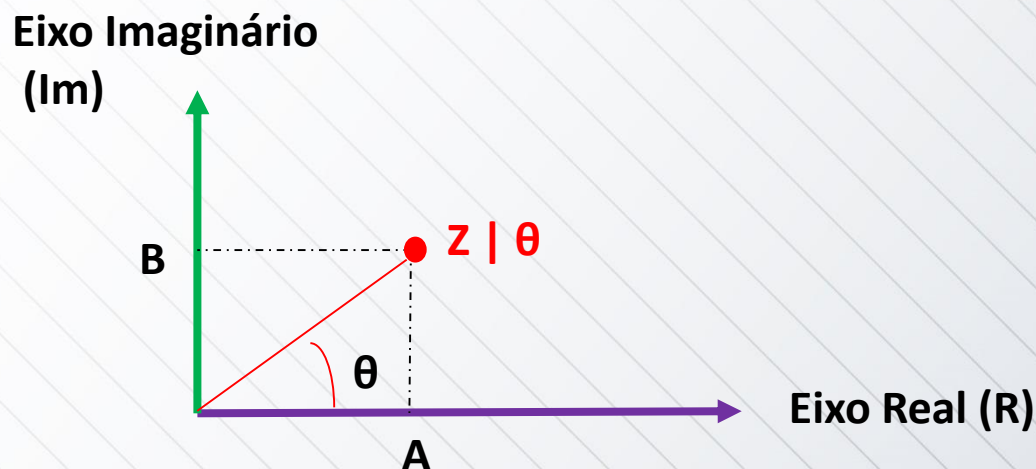
- $Z = \sqrt{a^2 + b^2}; \text{ e } \theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

Eixo Imaginário
(Im)



Polar \rightarrow Retangular

- $Z = Z \mid \Theta \rightarrow A + Bj$
 - A: Parte real $\rightarrow A = Z^* \cos(\Theta)$
 - B: parte Imaginária $\rightarrow B = Z^* \sin(\Theta)$



Exemplos

- Converter de Polar → Retangular

$$z1 = 10 \angle 60^\circ$$

$$\text{— Rec}(10, 60) =$$

$$5$$

$$\text{— Rcl+tang}$$

$$\bullet 8,66$$

$$Z1 = 5 + j8.66$$

$$\text{— } z3 = 100 \angle 180^\circ$$

$$z2 = 50 \angle -30^\circ : 43.3 - j25$$

$$A = 50 * \cos(-30^\circ) = 43.3$$

$$B = 50 * \text{seno}(-30^\circ) = -25$$

$$Z2 = 43.3 - 25j$$

$$\text{rec}(50, -30) =$$

$$\underline{43.3}$$

$$\text{rcl+tan } \underline{-25}$$

$$z4 = 6 \angle -90^\circ$$

Usando
Calculadora



REGRAS

- Fique atento
 - z minúsculo é o $z=a+jb$
 - Z maiúsculo é o módulo de Z | θ
- Conversão graus ($^\circ$) e Radianos (rd)
 - $\pi \rightarrow 180^\circ$
 - $45^\circ = \pi/4$ (rd) , $270^\circ = 3\pi/2$ (rd), $30^\circ = \pi/6$ (rd)
- Forma cartesiano
 - $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$; e $\theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$



EXECÍCIOS 01

1. Transformar de cartesiana para polar. Plotar no plano cartesiano

$Z1 = 4+j4$	$Z2 = 7 +j0$
$Z3 = j3$	$Z4 = -3+j2$

2. Transformar de Polar em Cartesiano. Plotar no plano cartesiano.

$Z1 = 20 \mid 120^\circ$	$Z2 = 50 \mid - 30^\circ$
$Z3 = 100 \mid 180^\circ$	$Z4 = 6 \mid -90^\circ$
$Z5 = 20 \mid 240^\circ$	



Exercícios 01

- $Z_4 = -3 + j2$

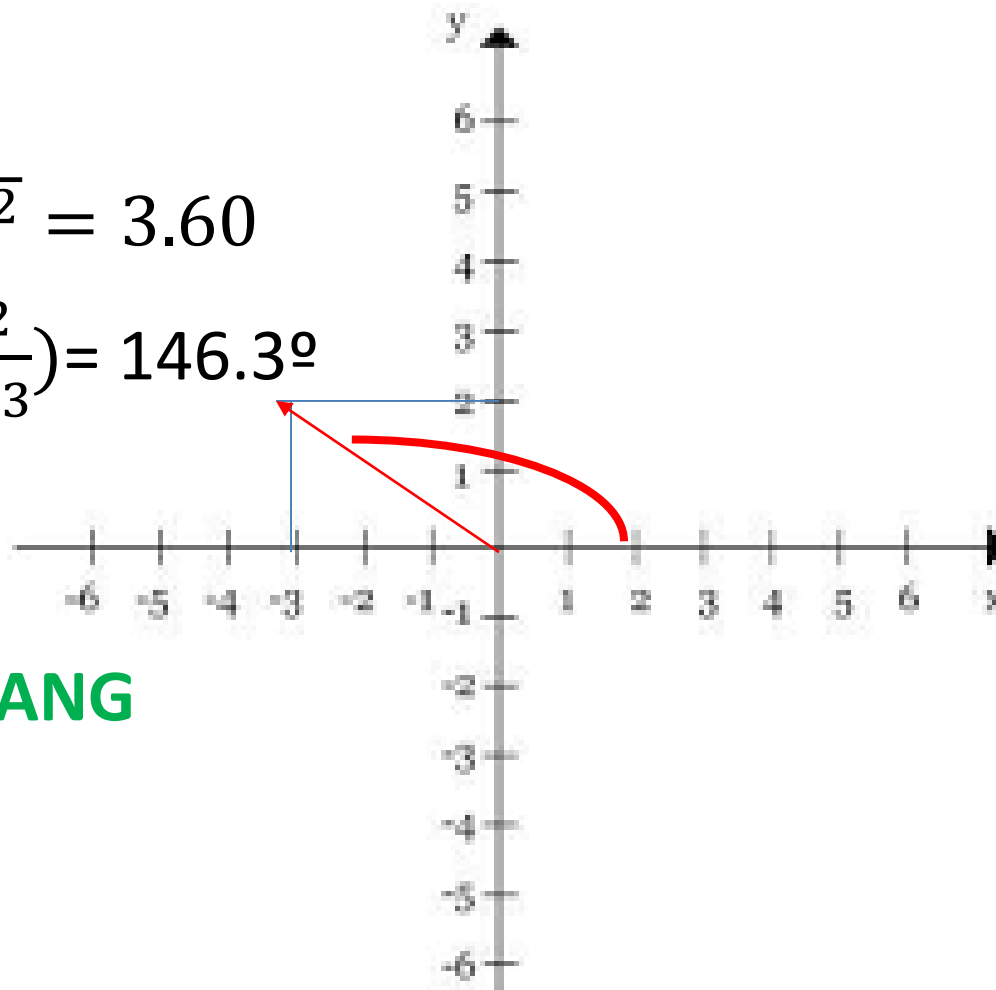
- $Z = \sqrt{-3^2 + 2^2} = 3.60$

- $\theta = \arctg\left(\frac{2}{-3}\right) = 146.3^\circ$

- $\text{Pool}(-3, 2) =$

- $3.6055 \text{ RCL} + \text{TANG}$

- $F = 146.309^\circ$



Exercícios 01

- $Z_3 = j3 = 0 + j3$

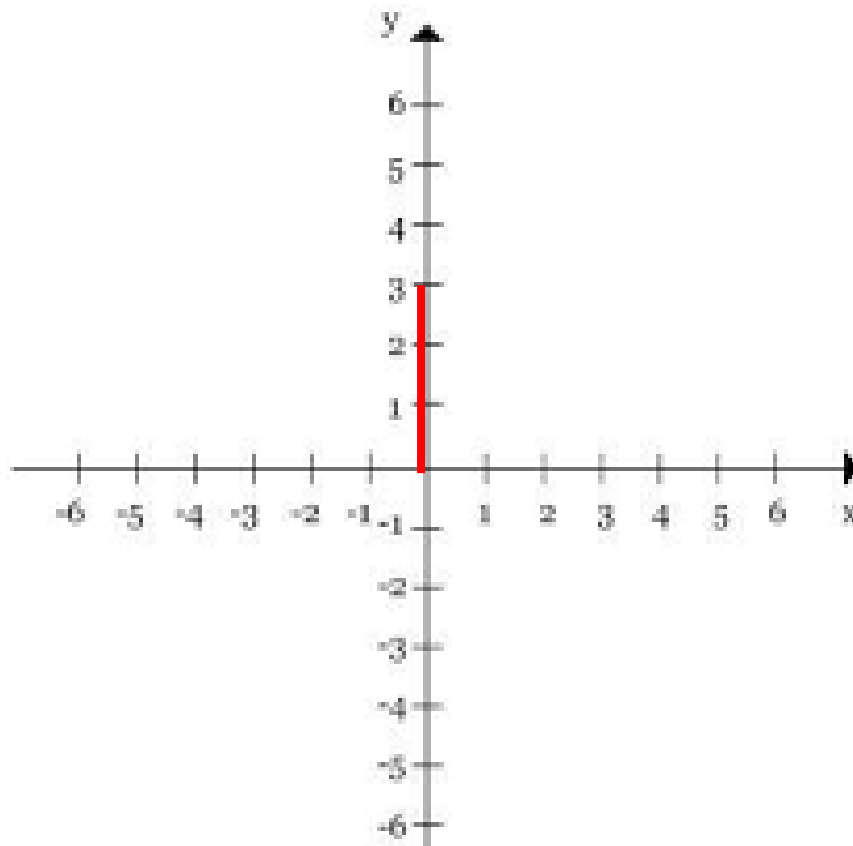
- $Z_3 = 3 \angle +90^\circ$

- $Z = \sqrt{0^2 + 3^2}$

- $Z = 3$

- $\theta = \arctg\left(\frac{3}{0}\right)$

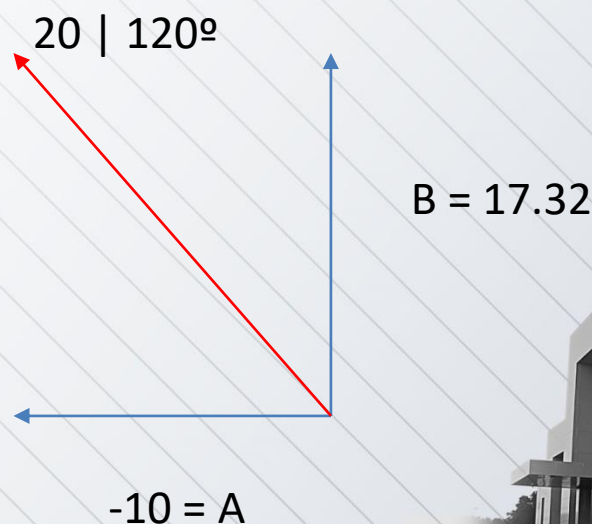
- $\theta = 90^\circ$



Exercícios 02

- $Z1 = 20 \mid 120^\circ$
 - $A = 20 * \cos(120^\circ) = -10$
 - $B = 20 * \sin(120^\circ) = 17.32$

$$- Z = -10 + j17.32$$



Exercícios 02

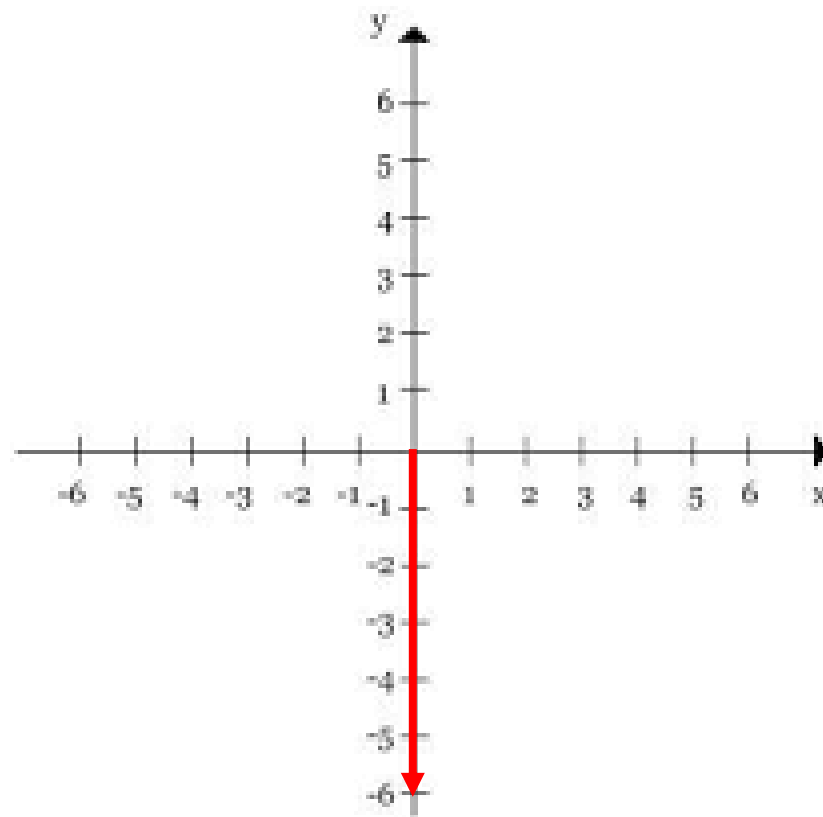
- $Z_4 = 6 \mid -90^\circ$

- $A = 6 * \cos(-90^\circ) = 0$

- $B = 6 * \sin(-90^\circ) = -6$

- $Z = 0 - j6$

- $Z = -j6$



Operações com NC

- Operações matemáticas

1. Soma e Subtração

- **Forma cartesiana** (retangular)
- Some ou subtraia parte real com parte real e a parte imaginária com a imaginária
- EX: $z1 = 10+j10$ | $Z2=4+j4$

$$\begin{array}{r} 10 + j10 \\ + \quad 4 + j4 \\ \hline 14 + j14 = 19.7 | 45^\circ \end{array}$$



Exemplos

- MAIS EXEMPLOS

$$Z_1=10+j10 \mid z_2 = 5+j4 \mid z_3 = -5+j15 \mid z_4= -10-j20$$

a) Z_1+z_2

b) Z_3+z_4

c) Z_2+z_3

$$\begin{array}{r} -5 + 15j \\ - \\ -10 - 20j \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} (-5)-(-10) &= -5+10 \mid 15j- (-20j) = 15j +20j \\ 5 + 35j \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 10 + 10j \\ + \\ 5 + 4j \\ \hline 15 + 14j \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5 + 15j \\ + \\ -10 - 20j \\ \hline -15-5j \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 + 4j \\ + \\ -5 + 15j \\ \hline 19j \end{array}$$



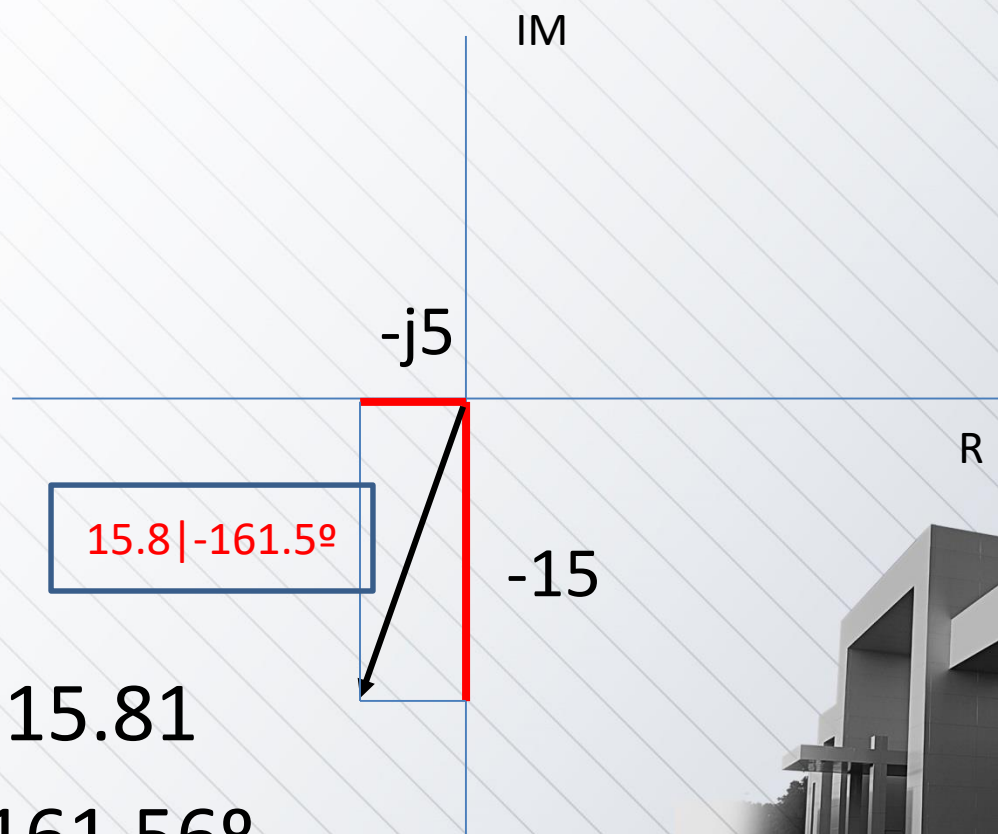
Resolução

$$- Z1=10+j10 \mid z2 = 5+j4 \mid z3 = -5+j15 \mid z4= -10-j20$$

a) $Z3+Z4$

$$\begin{array}{r} -5 + j15 \\ + \quad -10 - j20 \\ \hline -15 - j5 \end{array}$$

$15.8 \mid -161.5^\circ$



$$\text{Pool}(-15, -5) = 15.81$$

$$\text{ECL} + \text{TANG} = -161.56^\circ$$



Resolução

$$- Z1=10+j10 \mid z2 = 5+j4 \mid z3 = -5+j15 \mid z4= -10-j20$$

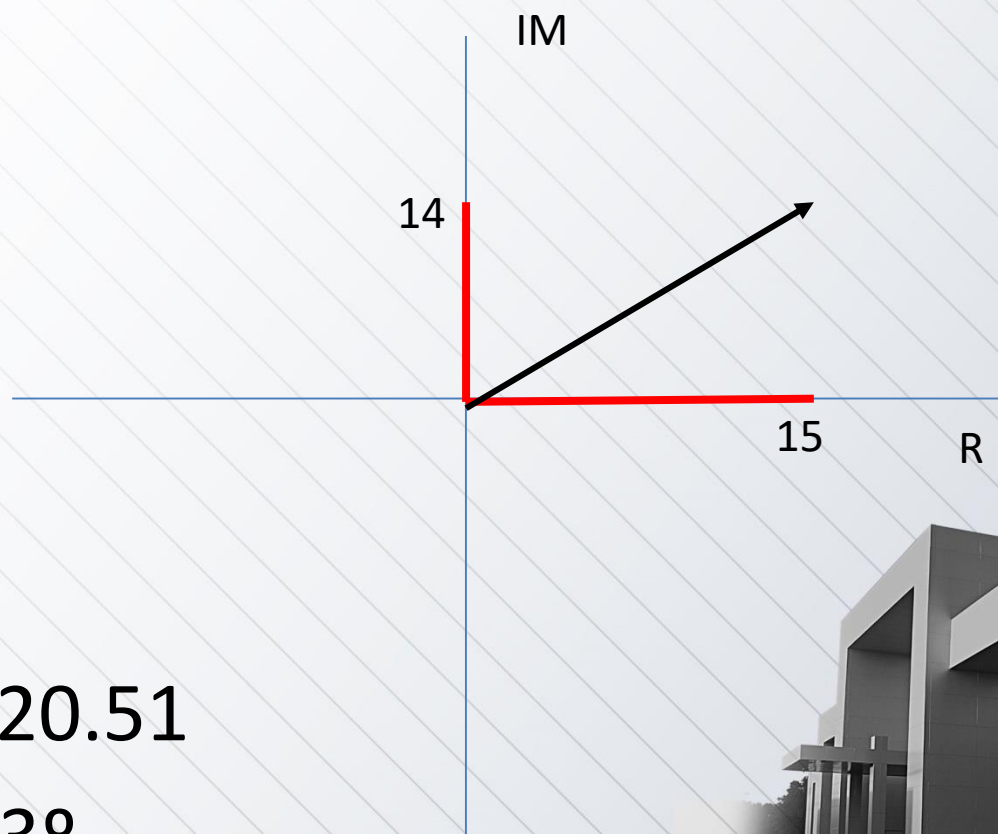
a) $Z1+Z2$

$$\begin{array}{r} 10 + j10 \\ + \quad 5 + j4 \\ \hline 15 + j14 \end{array}$$

$$20.51 \mid 43^\circ$$

$$\text{Pool}(15,14) = 20.51$$

$$\text{ECL}+\text{TANG} = 43^\circ$$



Resolução

$$- Z1=10+j10 \mid z2 = 5+j4 \mid z3 = -5+j15 \mid z4= -10-j20$$

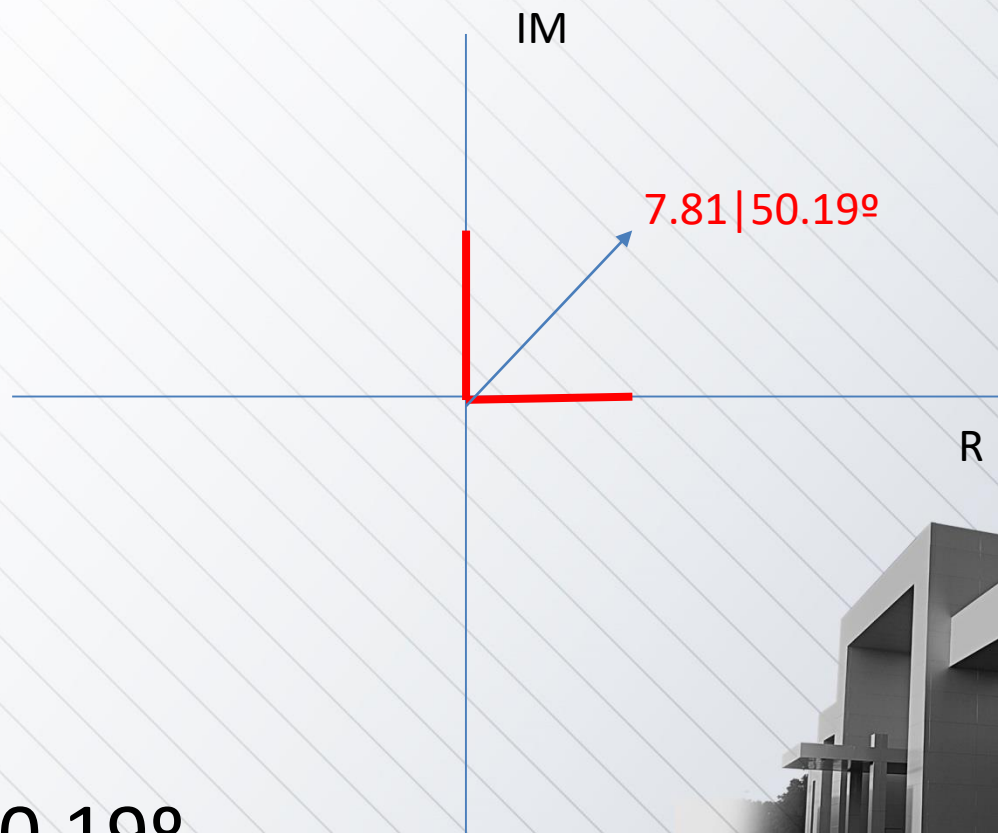
a) $Z1-Z2$

$$\begin{array}{r} 10 + j10 \\ - \quad 5 + j4 \\ \hline 5 + j6 \end{array}$$

$$7.81 \mid 50.19^\circ$$

$$\text{Pool}() = 7.81$$

$$\text{ECL+TANG} = 50.19^\circ$$



Operações com NC

- Operações matemáticas

2. Multiplicação e Divisão

- Forma Polar
 - Multiplique ou divida Z com Z
 - Já os ângulos faça:
 - I. Se multiplicação soma os ângulos
 - II. Se divisão subtraia os ângulos
- EX: $z1 = 10+j10 \mid Z2=4+j4$
 - ✓ $z1 \mid \theta1 \ \& \ Z2 \mid \theta2$
 - ✓ $z1/z2 = (z1)/(Z2) \mid \theta1 - \theta2$
 - ✓ $z1*z2 = (z1)*(Z2) \mid \theta1 + \theta2$



Exemplos

- EX: $z1 = 10+j10$ | $Z2=4+j4$

✓ $Z1*Z2$

- $Z1: 10+j10 \rightarrow \underline{14.14|45^\circ}$

- $Z2: 4+j4 \rightarrow \underline{5.65|45^\circ}$

- MULTIPLICAR**

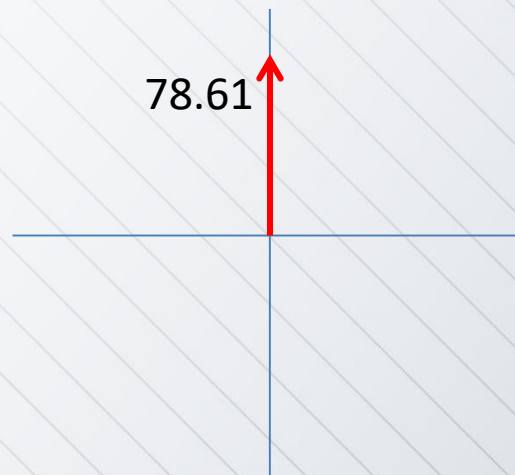
- $Z1 * Z2$ | $\text{ang1} + \text{ang2}$

- $14.14*5.56$ | $45 + 45$

- 78.61 | $90^\circ \rightarrow 0+j78.61$

- $\text{Rec}(78,61,50) = 0$

- $\text{Rcl} + \text{tang} = 78.61$



Exemplos

- EX: $z1 = 10+j10$ | $Z2=4+j4$

✓ $Z1/Z2$

- $Z1: 10+j10 \rightarrow 14.14 | 45^\circ$

- $Z2: 4+j4 \rightarrow 5.65 | 45^\circ$

- DIVIDIR**

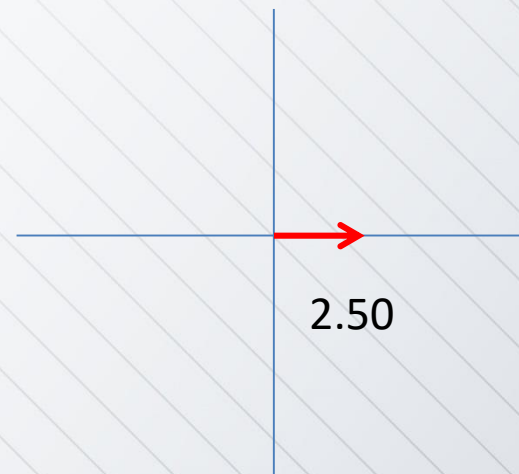
- $Z1 / Z2$ | $\text{ang1} - \text{ang2}$

- $14.14/5.56$ | $45 - 45$

- $2.50 | 0^\circ \rightarrow 0+j19.79 = 19.79j$

- $\text{Rec}(2.5,0) = 2.5$

- $\text{Rcl} + \text{tang} = 0$



Exercícios Casa

- Dados os números $Z1$ e $Z2$ calcule:
 - $Z1 = 4+j7 \rightarrow z1 \mid \text{ângulo } 1$
 - $Z2 = -2 -j10 \rightarrow z2 \mid \text{ângulo } 2$
- a) $Z1 * Z2$
- b) $Z1 - Z2$
- c) $Z1 * (Z1 + Z2)$
- d) $(Z1 / Z2) * z2$



Exercícios Casa

- Dados os números $Z1$ e $Z2$ calcule:

– $Z1 = 4+j7 \rightarrow z1 \mid \text{ângulo } 1$

– $Z2 = -2 -j10 \rightarrow z2 \mid \text{angulo } 2$

c) $Z1*(Z1+Z2)$

1ª parte : $z1+z2$

$$4 + 7j$$

$$-2 - 10j$$

$$2 - 3j$$



$\text{Pool}(2, -3) = 3.60$
 $\text{RCL} + \text{TAN}$
 $F = -56.30^\circ$

$3.60 \mid -56.30^\circ$

2ª parte : $z1 * 3.6 \mid -56,3^\circ$

$4 + 7j \rightarrow 8.06 \mid 60.25^\circ$

$8.06 * 3.60 \mid 60.25 + (-56.13)$

$29.01 \mid 4.12^\circ$

