eBook

A simplified summary of Differentiation and Integration (with basic rules and examples)

Prepared by:Mahmoud Ayman

Faculty of Artificial Intelligence – Robotics and Artificial Intelligence Major

Kafr El-Sheikh University

mahmoud-abo-elnaga

mahmoudabelnagall@gmail.com

CONTENTS

﴿وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا﴾

DATE : / / SUBJECT :

"linear Algebra For machine learning"

→ Linear Equation المعادلة الخطية

$a = (2,3)$ $b = (-3, -2)$

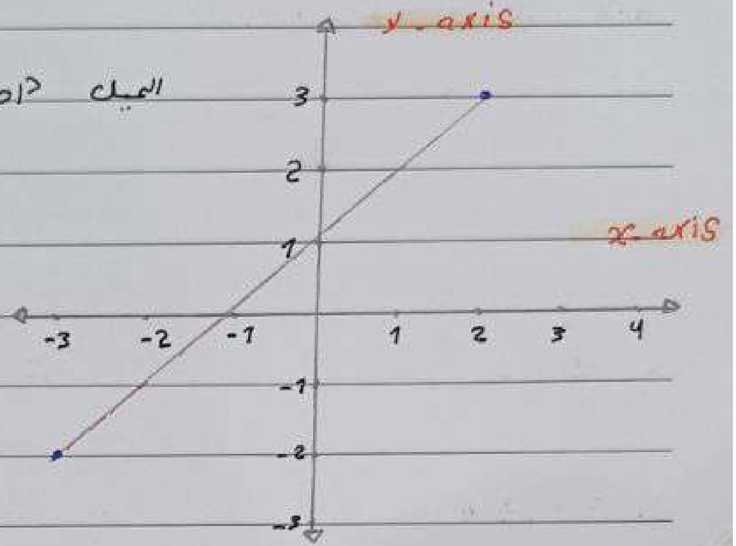
$\therefore \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ → slop الميل

$\therefore \dfrac{y - 3}{x - 2} = \dfrac{-2 - 3}{-3 - 2} = \dfrac{-5}{-5} = 1$

$\therefore y - 3 = x - 2$

$\therefore y = x - 2 + 3$

$\therefore y = x + 1$



← الميل هو معامل x = 1 يعنى أنه زاوية التقاطع مع محور x = 45°

← نقطة التقاطع مع محور "y-axis" = 1

Example: $a(2,3)$ $b(2,-2)$ $\therefore$ linear equation

Solution: $x = 2$ ← الميل الزاوية الذى يقطعة السهم مع محور x موجب

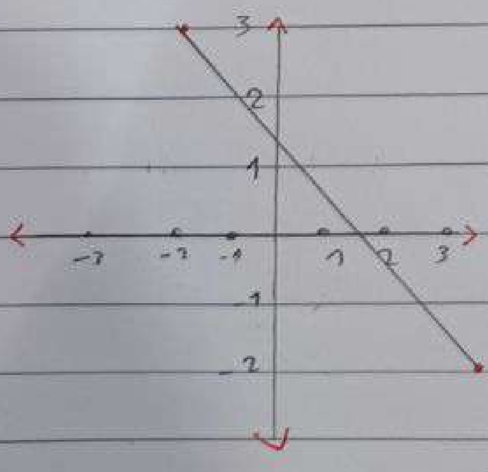
الميل = 90° اى يعنى الميل ص $\therefore$ الميل يوازى محور الصادات اى y-axis

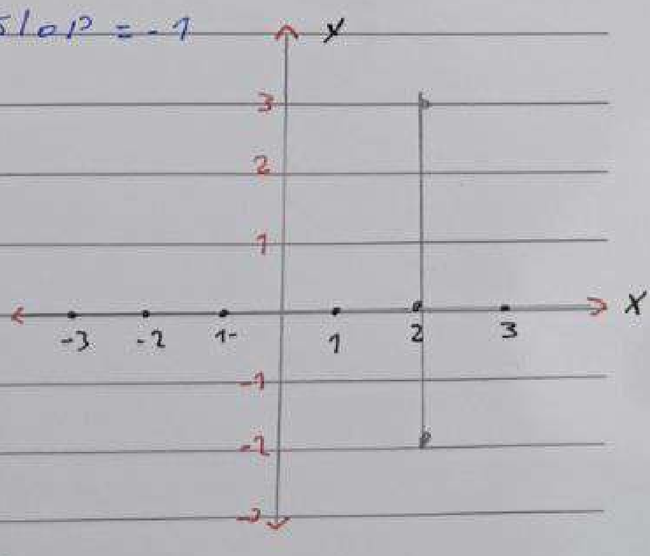
Example: $a(2,3)$ $b(-3,-3)$

solution: $y = 3$ ← الميل يساوى صفر يعنى يوازى محور x-axis

E.x: $a(-2,3)$; $b(3,-2)$

solution: $y = -x + 1$ $\therefore$ slop $= -1$





DATE : / / SUBJECT :

→ vectors : المتجهات

كمية القياسية : لها مقدار فقط (كتلة ، حجم)

كمية المتجهة : لها مقدار واتجاهها (السرعة ، الإزاحة)

vector = نقطة النهاية - نقطة البداية

E.x : (9, 8) , (2, 3) $\therefore \vec{v} = (9,8) - (2,3) = (7,5)$

$\therefore \vec{v} = (7,5)$ $\therefore (i, j)$ unit vectors

cartesiam Form $\vec{v} = 7i + 5j$

operations on vectors : 1- Additions :

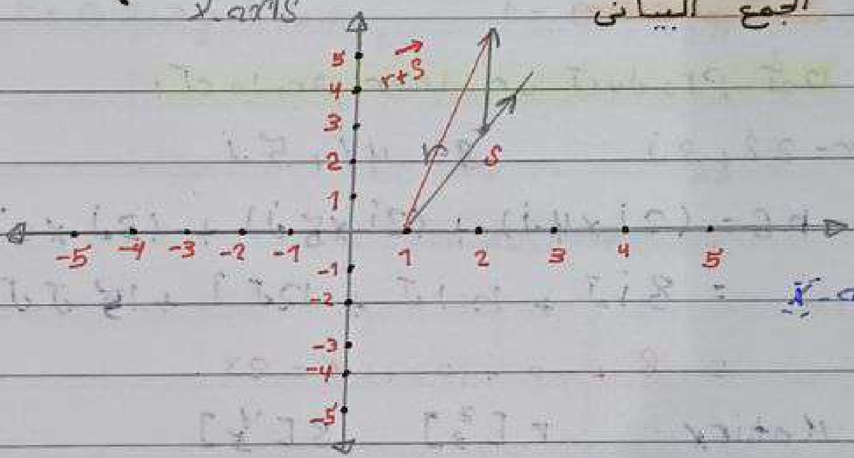
$r = 2i + 3j$ $\therefore r + s = 7i + 10j$ الجمع الجبرى

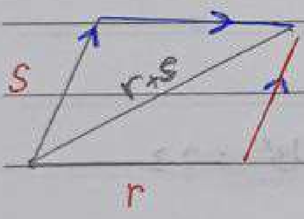
$s = 5i + 7j$ الجمع البيانى

$r = 2i + 3j$

$s = 0i + 3j$

$\therefore r + s = 2i + 6j$





← لو الاثنين بدأوا من نفس النقطة هنرسم متجهين

كل منهما يوازى الآخر

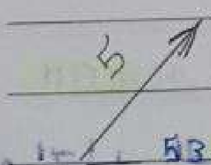
2- Magnitude or Modulus Angle or Direction

$r = 3i + 4j$ Polar form $\angle r = \tan^{-1} y/x$

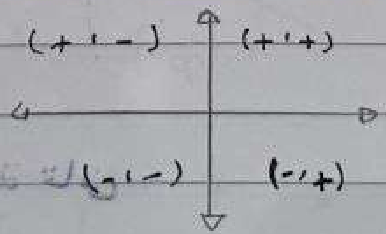
$\therefore \|r\| = \sqrt{3^2 + 4^2}$ المقدار والاتجاه $\therefore \angle r = \tan^{-1} 4/3$

$\therefore \|r\| = 5$ $\therefore \angle r = 53.13$

$\therefore$ Polar Form $r = 5 \angle 53.13$ $\therefore$ cartesion → Polar

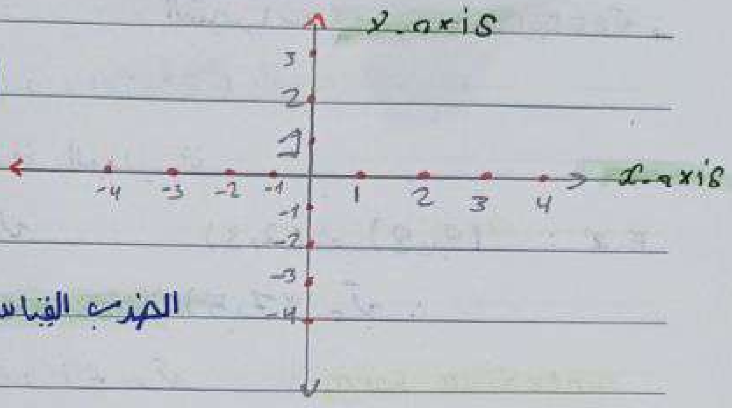


$\therefore 5\cos(53.13)i + 5\sin(53.13)j$



Column vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

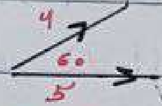
$\therefore s = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$



Dot product

$|r| \; |s| \; \theta$

$\therefore r.s = 4.5.\cos 60 = 10$



الضرب القياسي

$\therefore r.s = |r||s| \cos\theta$

"Scaler product" الضرب القياسي بيطلع رقم بس علشان كدا بنسميها

(i,J) $(J.J) = (y.y) = 0$ $(i.i) = (x.x) = 0$ $(i.J) = (y.x) = 90$

$\therefore 1.1 = \cos 0 = 1$ $\therefore j.j = \cos 0 = 1$ $\therefore i.j = \cos 90 = 0$

Dot product or Iner product:

$r = 2i + 3j$ $s = 4i + 5j$ $(x_1.x_2) + (y_1.y_2)$

$\therefore r.s = (2i \times 4j) + (2i \times 5j) + (3j \times 4i) + (3j \times 5j)$

$= 8iJ + 10iJ + 12Ji + 15JJ$

$= 8 + 0 + 0 + 15 = 23$

Matirx: $r \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $s \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

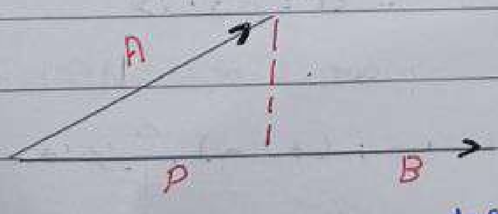
$\therefore r.s = r^T s = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 2.4 + 3.5 = 8 + 15 = 23$

Applications of Dot product:

1) Determining the angle between two intersecting vectors

$A.B = A_x B_x + A_y B_y = ||A|| \, ||B|| \cos\theta$

2) Determing the scalar projection for one vector on another.



$$P = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{||B||}$$

$||B||$ المعيار إلى أنا هسقط عليها العمود

• إيجاد المسقط العمودي من متجه على متجه تاني

DATE :   /   /   SUBJECT :

Matrices & Matrix :

• Square Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

• Rectangular Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

• column vector

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

• Row vector

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

$(m . n)$

$m \rightarrow$ عدد الصفوف

$n \rightarrow$ عدد الاعمدة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

• zero Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Identify matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Diagonal matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

• Tridiagonal Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

• upper Triangular matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

• lower " "

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Transpose Matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix} \quad \therefore A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

DATE : / / SUBJECT :

$\rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$

$\rightarrow (AB)^T = B^T A^T$

• symmetric matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$A^T = A$

متماثلة

• skew-symmetric matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^T = -A$

القطر دائما اصفار / شبة متماثلة

Addition and Multiplication :.

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} g & h \\ y & N \\ b & o \end{vmatrix}$$

$$\therefore A + B = \begin{vmatrix} a+g & b+h \\ c+y & d+N \\ e+b & f+o \end{vmatrix}$$

$$K \cdot A = \begin{vmatrix} ka & ba \\ ca & da \\ ea & fa \end{vmatrix}$$

ضرب عنصر او رقم فى المصفوفة

• The Determinant المحددة

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad |A| = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ e & h & y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

• يمكن فك المحدد عن طريق اى صف او عمود

$$a \begin{vmatrix} f & g \\ h & y \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & g \\ e & y \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & f \\ e & h \end{vmatrix}$$

$$\therefore a(f \cdot y - hg) - b(dy - ge) + c(d \cdot h - fe) =$$ قيمة المحدد

→ Matrix

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \text{Row 1} \\ \rightarrow \text{Row 2} \\ \rightarrow \text{Row 3} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \end{array}$$

$\therefore A_{3.4}$

$\therefore A_{m.n}$

m صفوف

n أعمدة

عند جمع وطرح مصفوفات لابد أن تكون على نفس النظم وأنه مصفوفة الناتجة أيضا تكون على نفس النظم

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} g & h \\ y & m \end{bmatrix}$

find $A+B = \begin{bmatrix} a+g & b+h \\ c+y & d+m \end{bmatrix}_{2.2}$

find $2A = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$

* عناصر القطر الرئيس في المصفوفة $A = [a,d]$

* ضرب المصفوفات

الشرط لابد أن عدد الأعمدة في الصف الأول تساوي عدد الصفوف في الثانية

$A_{m.n} \quad , \quad B_{g.h} \qquad \therefore n = g \qquad \therefore m.h$

$\therefore A_{3.2} \, , \, B_{2.3} \qquad \therefore 2=2 \qquad \therefore 3.3$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

∴ عدد الصفوف = عدد الأعمدة

∴ الضرب جائز

find $A \cdot B$? $\begin{bmatrix} (1.2)+(2.2) & (1.1)+(2.4) \\ (2.2)+(3.2) & (2.1)+(3.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{3.3} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{3.2}$

∴ find $(A.B)$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} (1+4+0) & (1+6+0) \\ (3+(-8)+5) & 3-12+10 \\ 0-2+2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

DATE : / / SUBJECT :

$A + 0 = A$ $3 + 0 = 3$ المعامل الحامي : 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Zero Matrix

$A.1 = A$ $3.1 = 3$ المعامل الضربي هو 1

مصفوفة الوحدة : دائمًا مربعة I

(unity matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore AI = A$

$A \cdot A^{-1} = A$

Matrix TransPort مدور المصفوفة

$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ $A^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $A^T = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$\therefore A_{m.n} = A$

$\therefore A^T = A_{n.m}$

Inders of Matrix : معكوس المصفوفة

* $A/B = A \cdot 1/B = A \cdot B^{-1}$

Dadjoint matrix $\therefore A^{-1} = 1/|A| \cdot adj(A)$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $\therefore$ find A^{-1}

$\therefore A^{-1} = 1/|A| \cdot adJ(A)$

$\therefore |A| = 0 + 4(6-3) - 5(0-2) = 0 + 12 + 10 = 22$

$\therefore |A| = 22$

المحدد لكل عنصر

$\bar{A} = \begin{vmatrix} 24 & +5 & -4 \\ -12 & 3 & +2 \\ -2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (\bar{A})^T$

httPS://matrixcalc.org/en/

DATE : / / SUBJECT :

$$(\bar{A})^{T} \begin{bmatrix} -24 & -12 & 2 \\ 5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = 1/|A| \cdot adj(A)$

$\boxed{A \cdot A^{-1} = I}$

$$\therefore 1/22 \cdot \begin{bmatrix} -24 & -12 & 2 \\ 5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \cdot 3}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = 5$ find A^{-1}

$\bar{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

نبدل عناصر القطر الرئيسي

ونغير اشارة القطر الثاني $\bar{A}$

$\therefore A^{-1} = 1/|A| \cdot \bar{A}$ $\therefore |A| = 4 - 6 = -2$

$\therefore A^{-1} = 1/-2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

System of equation :

$2x - 3y = 8 \rightarrow 1$ $A \rightarrow$ مجموعة المعاملات

$4x + 5y = 1 \rightarrow 2$ $x \rightarrow$ مجموعة المتغيرات

$Ax = B \rightarrow$ قانون $B \rightarrow$ مجموعة النواتج

$\therefore A^{-1} A x = A^{-1} B$ الضرب ليس ابدالي

$\therefore I x = A^{-1} B$ $\therefore x = A^{-1} B$ $\rightarrow CA \neq A \cdot C$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = (10 + 12) = 22$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ -30 \end{bmatrix} \quad 1/22 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1/22 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

DATE : / /

SUBJECT :

خواص المصفوفات :

- ممكن نضرب الصف كل في رقم او نقسم على رقم .
- ممكن أبدل اى صفين مع بعض .
- لو جمعت اى صفين على بعض وحطيتهم في أحد الصفين دول تظل المصفوفة سليمة .
- تبديل عمود مكانه عمود لا يؤثر على المصفوفة .

$A \cdot A^{-1} = I$

$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 14$$
$$x + 4y + 9z = 36$$

Solve The system

$x, y, z = ??$

Gauss elemination :

لازم تكون المثلث الصفري $[A \mid B]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{array}\right]$$

$-R_1 + R_2 \to R_2$

$-R_1 + R_3 \to R_3$

$-3R_2 + R_3 \to R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$\therefore 2z = 6$ $\quad \therefore z = 6/2 = 3$

$\therefore y + 2z = 8$

$\therefore y + 6 = 8$ $\quad \therefore y = 3$

$\therefore x + y + z = 6$

$x + 3 + 3 = 6$

$\therefore x + 6 = 6$ $\quad \therefore x = 6 - 6 = 0$

$x = 0$

Example : $2x - y + 3z = -3$

$-3x + 2y - 6z = 7$

$5x - 3y + 8z = -9$

find x, y, z

$[A \mid B]$

Agmented matrix

1, 2, -1

DATE : / / SUBJECT :

Gauss Jordon method:

$AX = B$, $(A|B) \rightarrow$ Augmented Matrix

To Solve it $\rightarrow (I|v)$ $I_{3 \cdot 3}$

example:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -6 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Solve This System

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -6 & 7 \\ 5 & -3 & 8 & -9 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 + R_2 \rightarrow R_1 \\ 3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ 5R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & -6 & 7 \\ 5 & -3 & 8 & -9 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 - R_1 \rightarrow R_1 \\ 2R_2 - R_3 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 + R_2 \rightarrow R_1 \\ -3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ 5R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$x = 1$

$y = 2$

$z = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 37 & 21 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 + R_2 \rightarrow R_1 \\ 2R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \\ 3R_3 + R_1 \rightarrow R_2 \end{array}$$

$\therefore Av = \lambda v$

$\therefore Av - \lambda v = 0$

$\therefore v(A - \lambda) = 0$

$\therefore (A - \lambda I)v = 0$

$\therefore |A - \lambda I| = 0$

$A \rightarrow$ matrix

$v \rightarrow$ eigen vector

$\lambda \rightarrow$ eigen value

$I \rightarrow$ identify matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$\therefore (A - \lambda I)v = 0$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore |A - \lambda I| = (1-\lambda \cdot 2-\lambda) - 0 = 0$

$\therefore 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 = 0$ $\therefore \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ $\therefore \lambda = 1$ or $\lambda = 2$

$\therefore (A - \lambda I)v = 0$

① $$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \therefore \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore 0x + 0y = 0$

$\therefore 0x + y = 0$

$$v \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

(مهم)

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[A]{x^B} = x^{\frac{B}{A}}$ (عام)