بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الخرطوم

كلية العلوم الرياضية والمعلوماتية

المعادلات التفاضلية (A2023)

تسليم رقم 1

اسم الطالب: أبوبكر أحمد خضر حسن

رقم الجلوس:

القسم: علوم حاسوب

Q 1-1)

$$y = 2xe^{2x} y'' - 4y' + 4y = 0;$$

بما أن المعادلة من الدرجة الثانية

إذا نفاضل y مرتين ومن ثم نعوض للتحقق من الحل:

$y' = 2x\,(2e^{2x}) + e^{2x}(2) = 4xe^{2x} + 2e^{2x}$

$y'' = 4x\,(2e^{2x}) + e^{2x}(4) + 2(2e^{2x}) = 8xe^{2x} + 8e^{2x}$

نعوض في المعادلة:

$(8xe^{2x} + 8e^{2x}) - 4(4xe^{2x} + 2e^{2x}) + 4(2xe^{2x}) = 0$

$8xe^{2x} + 8e^{2x} - 16xe^{2x} - 8e^{2x} + 8xe^{2x} = 0$

إذا y تمثل حل للمعادلة التفاضلية

Q 1-2)

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = 0;\ u(t) = e^{-t}\sin(t)$$

بما أن المعادلة من الدرجة الثانية

نفاضل y مرتين ومن ثم نعوض لإيجاد الحل:

$u'(t) = e^{-t}(\cos(t)) + \sin(t)\,(-e^{-t}) = e^{-t}\,cos(t) - e^{-t}\,sin(t)$

$u''(t) = e^{-t}(-sin(t)) + cos(t)\,(-e^{-t}) - [e^{-t}(cos(t)) + sin(t)\,(-e^{-t})]$

$= -e^{-t}\,sin(t) - e^{-t}\,cos(t) - e^{-t}\,cos(t) + e^{-t}\,sin(t) = -2e^{-t}cos(t)$

نعوض في المعادلة:

$-2e^{-t}\,cos(t) + 2(e^{-t}\,cos(t) - e^{-t}\,sin(t)) + 2(e^{-t}\,\sin(t)) =$

$-2e^{-t}\,cos(t) + 2e^{-t}\,cos(t) - 2e^{-t}\,sin(t) + 2e^{-t}\,sin(t) = 0$

إذا u تمثل حل للمعادلة التفاضلية

Q 2-1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 9x = 0$$

هذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية في المتغير التابع x ولم يتم دراسة طريقة حلها بعد.

Q 2-2)

$$\dot{x} - 4x = 12$$

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى في المتغير التابع x ونفرض أن $x=x(t)$

إذا يمكن حلها باستخدام طريقة حل المعادلات الخطية من الدرجة الأولى.

نحسب معامل التكامل IF

$$IF = \exp\left(\int P(t)dt\right) = \exp\left(\int (-4)dt\right) = \exp(-4t) = e^{-4t}$$

نضرب معامل التكامل في كل أطراف المعادلة:

$$e^{-4t}(\dot{x}) + (-4e^{-4t})(x) = 12e^{-4t}$$

$$d(e^{-4t}x) = \ 12e^{-46}$$

بتكامل الطرفين:

$$e^{-4t}x = \int 12e^{-4t}\,dt$$

c is an arbitrary constant and $c \in \mathbb{R}e^{-4t}x = \frac{12}{-4}e^{-4t} + c$;

$\therefore \boldsymbol{x = c * e^{4t} - 3}$;

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية

Q 2-3)

$$\boldsymbol{y\frac{dy}{dx} = \cos(4x)}$$

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ويمكن كتابتها في الصورة: $\frac{\mathrm{dy}}{dx} = (\frac{1}{\mathrm{y}})(\cos(4\mathrm{x}))$

إذا يمكن حلها بفصل المتغيرات.

$y\,dy = \cos(4x)\,dx$

بأخذ التكامل للطرفين

$$\int y\,dy = \int \cos(4x)\,dx$$

c is an arbitrary constants and $c \in \mathbb{R}\frac{1}{2}\mathrm{y}^2 = \frac{1}{4}\sin(4\mathrm{x}) + \mathrm{c};$

$$\boldsymbol{A = 2c \geq -\frac{1}{2}\sin(4x) \therefore y = \sqrt{\frac{1}{2}\sin(4x) + A}\,;}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية

Q 2-4)

$$\boldsymbol{(2+x)\frac{dy}{dx} - y = 0}$$

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ويمكن كتابتها في الصورة: $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2+x}\right)(y)$

إذا يمكن حلها بفصل المتغيرات:

$$\frac{1}{y}\mathrm{dy} = \frac{1}{2+\mathrm{x}}\mathrm{dx}$$

بأخذ التكامل للطرفين:

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{dy} = \int \frac{1}{2+\mathrm{x}}\mathrm{dx}$$

; *c is an arbitrary constants and* $c \in \mathbb{R}\ln|y| = \ln|2+x| + c$

$$\boldsymbol{A = e^{c} \therefore y = (2+x)A;}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

ملاحظة: هذه المعادلة خطية ويمكن حلها أيضا باستخدام طريقة حل المعادلات الخطية من الدرجة الأولى بقسمة كل الأطراف على $(2+x)$.

Q3-1)

$$\boldsymbol{y(0) = 2y' + 3y = 6,}$$

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى

إذا يمكن حلها باستخدام طريقة حل المعادلات الخطية من الدرجة الأولى.

نحسب معامل التكامل IF

$$IF = \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = \exp\left(\int 3\,dx\right) = e^{3x}$$

بضرب معامل التكامل في كل أطراف المعادلة:

$$e^{3x}(\mathrm{y}') + 3(e^{3x})y = 6e^{3x}$$

$$d(e^{3x}y) = 6e^{3x}$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لـx:

$$\int d(e^{3x}y) = \int 6e^{3x}\,dx$$

c is an arbitrary constant and $c \in \mathbb{R} e^{3x}y = \frac{6}{3}e^{3x} + \mathrm{c} = 2e^{3x} + c;$

$\boldsymbol{y = 2 + c * e^{-3x}}$ ***إذا الحل العام هو:***

لإيجاد الحل الخاص نعوض *y(0)=2*

$$2 = 2 + c * e^{-3(0)} = 2 * c(1)$$

$$\therefore c = 0$$

بالتعويض في الحل العام

----------→ $\boldsymbol{y = 2}y = 2 + (0)e^{-3x}$

وهو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

Q 3-2)

$$\boldsymbol{x(1) = 0\frac{dx}{dt} + 2tx = t,}$$

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى

إذا يمكن حلها باستخدام طريقة حل المعادلات الخطية من الدرجة الأولى.

نحسب معامل التكامل IF

$$IF = \exp\left(\int P(t)\,dt\right) = \exp\left(\int 2t\,dt\right) = e^{t^2}$$

بضرب معامل التكامل في كل أطراف المعادلة نحصل على:

$$e^{t^2}\frac{dx}{dt} + 2te^{t^2}x = te^{t^2}$$

$$d\left(e^{t^2}x\right) = te^{t^2}$$

بتكامل الطرفين بالنسبة لـt:

$$\int d(e^{t^2}x) = \int te^{t^2}\,dt$$

$$e^{t^2}x = \int te^{t^2}\,dt$$

نفرض $u = t^2$ <-- $\frac{du}{dt} = 2t$ <-- $dt = \frac{du}{2}$ نعوض في المعادلة في الخطوة السابقة

c is an arbitrary constant and $c \in \mathbb{R}$ $e^{t^2}x = \int te^{u}\frac{du}{2t} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + c;$

ولكن $u = t^2$

---→ $\boldsymbol{\therefore x = \frac{1}{2} + c * e^{-t^2}}$ $e^{t^2}x = \frac{1}{2}e^{t^2} + c$

و هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

لإيجاد الحل العام نعوض $x(1) = 0$

$$0 = \frac{1}{2} + c * e^{-(1^2)} = \frac{1}{2} + \frac{c}{e} \quad \rightarrow \quad \therefore c = \frac{-e}{2}$$

بتعويض قيمة c في الحل العام نتحصل على الحل الخاص وهو:

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2} + \left(\frac{-e}{2e^{t^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{1-t^2}\right)}$$

#ملاحظة: هذه المعادلة يمكن حلها أيضا بفصل المتغيرات عن طريق وضعها في الصورة. $\frac{dx}{dt} = t(1-2x)$

Q 3-3)

$$y' - 2xy = x^2, \qquad y(0) = 1$$

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى

إذا يمكن حلها باستخدام طريقة حل المعادلات الخطية من الدرجة الأولى.

نحسب معامل التكامل IF

$$IF = \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = \exp\left(\int -2x\,dx\right) = e^{-x^2}$$

بضرب معامل التكامل في كل أطراف المعادلة:

$$e^{-x^2} y' - 2xe^{-x^2} y = e^{-x^2} x^2$$

$$d\left(e^{-x^2} y\right) = e^{-x^2} x^2$$

بتكامل الطرفين بالنسبة لx:

$$\int d\left(e^{-x^2} y\right) = \int e^{-x^2} x^2$$

$$e^{-x^2} y = \int e^{-x^2} x^2 \ dx$$

نفرض $A = \int e^{-x^2} x^2 \ dx$

$$\therefore \boldsymbol{y = e^{x^2} A}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية

لايجاد الحل الخاص نعوض الشرط الابتدائي: $y(0) = 1$

$$1 = e^{0^2} A \quad \rightarrow \quad \int e^{-x^2} x^2 \ dx = 1$$

ومن هذه المعادلة نتحصل على قيمة ثابت التكامل ونعوض قيمته في الحل العام لنحصل على الحل الخاص.

#ملاحظة: هذه معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى غير متجانسة (لأن تعويض $f(kx, ky) \neq kf(x, y)$) ولا يمكن اختزالها لمتجانسة

كما أنها غير تامة لأن $\left[\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = -2x\right] \neq \left[\frac{\partial}{\partial x} = 2x\right]$

ووفق كل الطرق التي تمت دراستها لم أجد طريقة لحلها إلا بطريقة حل المعادلات الخطية من الدرجة الأولى كما سبق.

Q 5-1)

$$(2x+y)dx+(x+3y)dy=0$$

$$N=x+3yM=2x+y$$

لنتحقق من كون المعادلة تامة أم لا نفاضل *M* جزئيا بالنسبة ل*y* ونفاضل *N* جزئيا بالنسبة ل*x*

إذا تساوى التفاضلان الجزئيان في الخطوة السابقة تكون المعادلة معادلة تفاضلية تامة

$$\frac{\partial N}{\partial x}=1+0=1\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}=0+1=1$$

إذا المعادلة التفاضلية تامة والحل في صورة:

$$f(x,y)=\int M\,dx+\Phi(y)$$

$$f(x,y)=\int 2x+y\,dx+\Phi(y)$$
$$=\ x^2+yx+\Phi(y)$$

لإيجاد $\Phi(\mathrm{y})$ نفاضل المعادلة السابقة جزئيا بالنسبة ل*y*

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x}^2+\mathrm{yx})+\Phi'(y)$$

$$N=x+\Phi'(y)\quad\rightarrow\quad\Phi'(y)=N-x=x+3y-x=3y\quad\rightarrow\quad\Phi(y)=\int 3y\,dy$$

$$\therefore\ \Phi(y)=\frac{3}{2}y^2+c;\qquad c\ is\ an\ arbitrary\ constant\ \ and\ c\in\mathbb{R}$$

بتعويضها في معادلة الحل نتحصل على الحل العام وهو:

$$\boldsymbol{f(x,y)=yx+x^2+\frac{3}{2}y^2+c}$$

Q 5-2)

$$(\boldsymbol{y} + \mathbf{sin}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{dx} + (\boldsymbol{x} + \mathbf{cos}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{dy} = \mathbf{0}$$

$$M = y + \sin(x) \qquad\qquad N = x + \cos(y)$$

لنتحقق من كون المعادلة تامة أم لا نفاضل M جزئيا بالنسبة لـy ونفاضل N جزئيا بالنسبة لـx

إذا تساوى التفاضلان الجزئيان في الخطوة السابقة تكون المعادلة معادلة تفاضلية تامة

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 0 = 1 \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = 1 + 0 = 1$$

إذا المعادلة التفاضلية تامة والحل يمكن أن يكون في صورة:

$$f(x, y) = \int N\, dy + \Phi(x)$$

$$f(x, y) = \int x + \cos(y)\, dy + \Phi(x)$$

$$= \; xy + \sin(y) + \Phi(x)$$

لإيجاد $\Phi(\mathrm{x})$ نفاضل المعادلة السابقة جزئيا بالنسبة لـx

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(xy + \sin(y)) + \Phi'(x)$$

$$M = y + \Phi'(x) \;\; \rightarrow \;\; \Phi'(x) = M - y = y + \sin(x) - y = \sin(x) \;\; \rightarrow \;\; \Phi(x) = \int \sin(x)\, dx$$

$$\therefore \Phi(x) = (-\cos(x)) + c; \qquad c \; is \; an \; arbitrary \; constant \;\; and \; c \in$$

بتعويضها في معادلة الحل نتحصل على الحل العام وهو:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{xy} + \mathbf{sin}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}$$