موضوع الدرس ...... ASS 1, 2 اليوم ...... التاريخ / / ١٤هـ

CS 21-304 أبوبكر أحمد خضر حسن

2*) ادرس منحنيات الارتفاع للسطح

$z = \ln(x^2+y^2)$

$D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $R = \mathbb{R}$

معادلات منحنيات الارتفاع تكون في صورة

$\ln(x^2+y^2) = k$

برفع الطرفين كقوى للأساس e

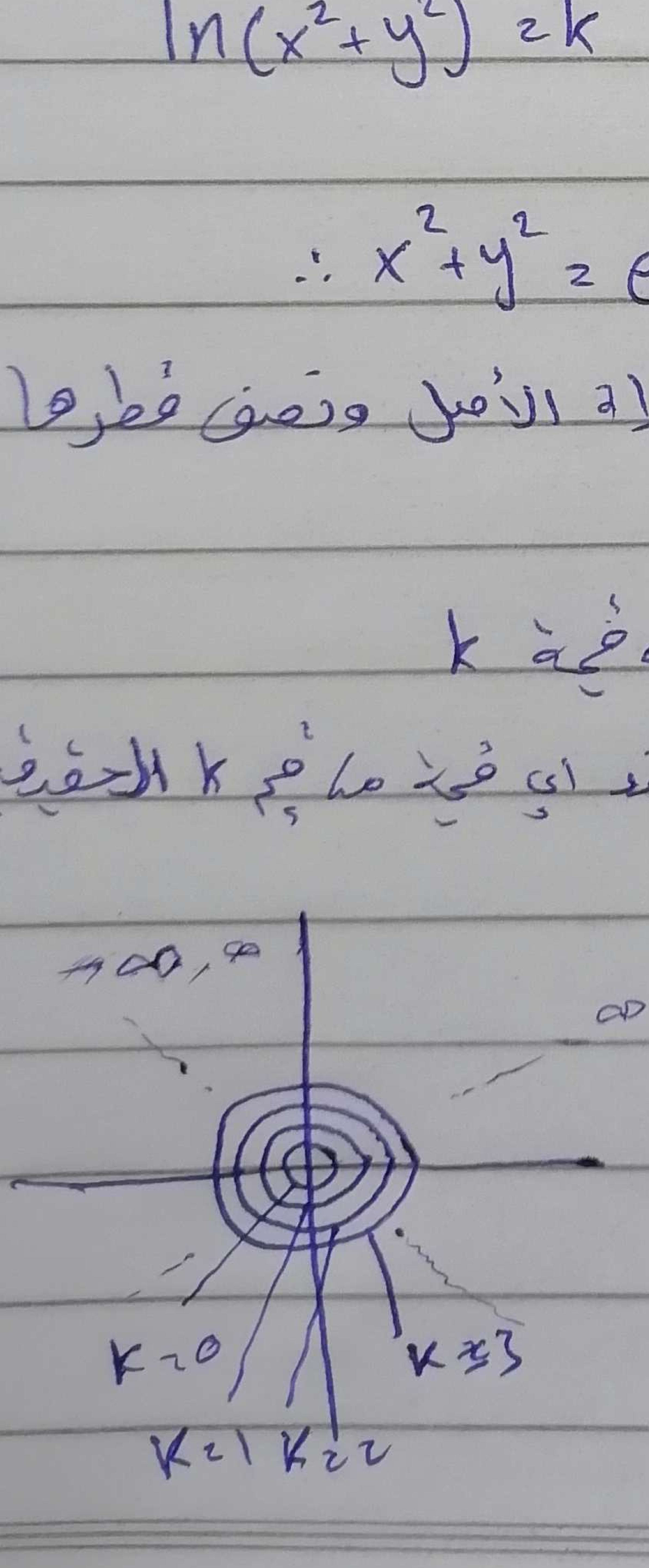
$\therefore x^2+y^2 = e^k$; $k \in R$ ← من المدى

∴ هي عبارة عن دوائر مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{e^k}$

- نلاحظ أن نصف القطر يزيد كلما زادت قيمة k
- أيضا أن نصف القطر $\neq 0$ عند اي قيمة ما من قيم k الحقيقية

بالرسم الذ

∴ الرسم التقريبي لمنحنيات الارتفاع هو :



CS 21-304 أبوبكر أحمد خضر حسن

[1] $\phi = (x+y)^2$, $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \frac{t}{1+t^2}$, $\frac{d^2\phi}{dt^2} = ?$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \phi_{xx}(\dot{x})^2 + \phi_{yy}(\dot{y})^2 + \phi_x(\ddot{x}) + \phi_y(\ddot{y}) + 2\phi_{xy}(\dot{x})(\dot{y})$$

$$\phi_x = 2(x+y) = 2\left[\frac{1}{1+t} + \frac{t}{1+t^2}\right] = \frac{2(2t^2+t+1)}{(1+t)(1+t^2)}$$

$$\phi_{xx} = 2$$

$$\phi_y = 2(x+y) = \phi_x = \frac{2(2t^2+t+1)}{(1+t)(1+t^2)}$$

$$\phi_{yy} = 2$$

$$\phi_{xy} = \phi_{yx} = 2$$

$$x = (1+t)^{-1}$$

$$\dot{x} = -(1+t)^{-2} = \frac{-1}{(1+t)^2} = -x^2$$

$$\ddot{x} = 2(1+t)^{-3} = \frac{2}{(1+t)^3} = 2x^3$$

$$y = t(1+t^2)^{-1}$$

$$\dot{y} = t\left[-(1+t^2)^{-2}(2t)\right] + (1+t^2)^{-1} = \frac{-2t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)}$$

$$\therefore \dot{y} = \frac{-2t^2+1+t^2}{(1+t^2)^2} = \underline{\underline{\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}}} \quad \text{or} \quad (1-t^2)(1+t^2)^{-2}$$

$$\ddot{y} = (1-t^2)\left[-2(1+t^2)^{-3}(2t)\right] + (1+t^2)^{-2}(-2t)$$

$$= \frac{-4t+4t^3}{(1+t^2)^3} + \frac{(-2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t+4t^3-2t-2t^3}{(1+t^2)^3}$$

$$\therefore \ddot{y} = \frac{2t^3-6t}{(1+t^2)^3} \quad \text{or} \quad (2t^3-6t)(1+t^2)^{-3}$$

$$\therefore \frac{d^2\emptyset}{dt^2} = (2)\left[\frac{-1}{(1+t)^2}\right]^2 + (2)\left[\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right]^2 + \left[\frac{2(2t^2+t+1)}{(1+t)(1+t^2)}\right]\left(\frac{2}{(1+t)^3}\right)$$

$$+ \left[\frac{2(2t^2+t+1)}{(1+t)(1+t^2)}\right]\left[\frac{2t^3-6t}{(1+t^2)^3}\right] + 2(2)\left(\frac{-1}{(1+t)^2}\right)\left(\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{(1+t)^4} + \frac{2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{4(2t^2+t+1)}{(1+t)^4(1+t^2)}$$

$$+ \frac{2(2t^2+t+1)(2t^3-6t)}{(1+t)(1+t^2)^4} + \frac{(-4)(1-t^2)}{(1+t)^2(1+t^2)^2}$$

- نوحد المقام بـ $(1+t)^4(1+t^2)^4$ ونرمز له بـ s

$$= \frac{1}{s}\Big[2(1+t^2)^4 + 2(1-t^2)^2(1+t)^4 + 4(2t^2+t+1)(1+t^2)^3$$

$$+ 2(2t^2+t+1)(2t^3-6t)(1+t)^3 + (-4)(1-t^2)(1+t)^2(1+t^2)^2\Big]$$

- نفك الأقواس :

$(1-t^2)^2 = t^4 - 2t^2 + 1$

$(1+t)^2 = t^2 + 2t + 1$, $(1+t^2)^2 = t^4 + 2t^2 + 1$

$(1+t)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$, $(1+t^2)^3 = t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1$

$(1+t)^4 = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$ $\Rightarrow$ ~~let it a~~

$(1+t^2)^4 = t^8 + 4t^6 + 6t^4 + 4t^2 + 1$ $\Rightarrow$ ~~let it b~~

موضوع الدرس .... اليوم .... التاريخ / / ١٤هـ

$$\therefore \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{1}{S}\Big[(2t^8+8t^6+12t^4+8t^2+2)+\big((2t^4+8t^3+12t^2+8t+2)(t^4-2t^2+1)\big)$$

$$+\big((8t^2+4t+4)(t^6+3t^4+3t^2+1)\big)+\big((4t^2+2t+2)(2t^3-6t)*$$

$$*(t^3+3t^2+3t+1)\big)+(-4)(t^4-2t^2+1)(t^2+2t+1)(t^4+2t^2+1)\Big]$$

نفك الأقواس :-

$$\therefore \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{1}{S}\Big[\ 2t^8+8t^6+12t^4+8t^2+2$$

$$+2t^8+8t^7+8t^6-8t^5-20t^4-8t^3+8t^2+8t+2$$

$$+8t^8+4t^7+28t^6+12t^5+36t^4+12t^3+20t^2+4t+4$$

$$+8t^8+28t^7+16t^6-52t^5-104t^4-92t^3-57t^2-12t$$

$$-4t^{10}-8t^9-4t^8+16t^5+8t^4-4t^2-8t-4\ \Big]$$

$$= \frac{1}{S}\Big[-4t^{10}-8t^9+16t^8+48t^7+60t^6-32t^5-68t^4-88t^3-25t^2-8t+4\Big]$$

نعوض S

$$S = (1+t)^4(1+t^2)^4$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{-4t^{10}-8t^9+16t^8+48t^7+60t^6-32t^5-68t^4-88t^3-25t^2-8t+4}{(1+t)^4(1+t^2)^4}$$

2) $f(x,y,z) = \sqrt{xy}\,\sin(z)$ $\quad \vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

$P = (\overset{4}{\cancel{8}}, \overset{9}{\cancel{3}}, \overset{\frac{\pi}{4}}{\cancel{2}})$

$D_{\vec{u}} f = a\, f_x(x,y,z) + b\, f_y(x,y,z) + c\, f_z(x,y,z)$

$f_x = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}(y)^{\frac{1}{2}}\sin(z) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\sin(z)$

$f_y = \frac{1}{2}(y)^{-\frac{1}{2}}(x)^{\frac{1}{2}}\sin(z) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\sin(z)$

$f_z = \sqrt{xy}\,\cos(z)$

$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{2i + 3j - 2k}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{17}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{17}}\hat{k}$

$\therefore a = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad b = \frac{3}{\sqrt{17}}, \quad c = \frac{-2}{\sqrt{17}}$

$\therefore D_{\vec{u}} f = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{17x}}\sin(z) + \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{17y}}\sin(z) - \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{17}}\cos(z)$

$P = (4, 9, \frac{\pi}{4})$ $\quad \cancel{P = (0, 3, 2)}$ [illegible] $\cancel{P(\ldots)}$

$D_{\vec{u}} f \Big|_{(4,9,\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2\sqrt{17}}\left[\frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}) - 12\cos(\frac{\pi}{4})\right] = \frac{7\sqrt{2} - 24}{4\sqrt{17}}$

3] $\emptyset = -x^2 - y^2 - z^2 + 6z$

$G = x^2 + 4y + z^2$

نوجد معادلة المماس لكل من السطحين $\emptyset$ و G عند النقطة

$P(\underset{x_0}{0}, \underset{y_0}{-1}, \underset{z_0}{2})$

$\emptyset_x\Big|_p (x - x_0) + \emptyset_y (y - y_0) + \emptyset_z (z - z_0) = 0$

$\emptyset_x = -2x \quad , \quad \emptyset_y = -2y \quad , \quad \emptyset_z = -2z + 6$

$\emptyset_x\Big|_p = 0 \qquad \emptyset_y\Big|_p = 2 \qquad \emptyset_z\Big|_p = 2$

∴ معادلة المستوى المماس لـ $\emptyset$ عند P هي : $\therefore 2y + 2z = 2$

$G_x = 2x \qquad G_y = 4 \qquad G_z = 2z$

$G_x\Big|_p = 0 \qquad G_y\Big|_p = 4 \qquad G_z\Big|_p = 4$

∴ معادلة المستوى المماس لـ G عند P هي : $\therefore 4y + 4z = 4$

بالقسمة على 2 $\quad 2y + 2z = 2$

∴ المستوى $2y+2z=2$, يمثل مستوى تماس مشترك لـ $\emptyset$ و G عند P *

4) $S: x^3 + z^3 - 2xy + 7y + 6 = 0 \quad , \quad P(1, 4, -3)$

ϕ

نوجد ϕ $\phi(x, y, z)$

$\phi(x, y, z) = -x^3 - z^3 + 2xy - 7y$

① ايجاد معادلة المستوى المماس لسطح S عند النقطة P

$\phi_x\big|_p (x - x_0) + \phi_y\big|_p (y - y_0) + \phi_z\big|_p (z - z_0) = 0$

$\boxed{x_0 = 1} \quad \boxed{y_0 = 4} \quad \boxed{z_0 = -3}$

$\phi_x = 3x^2 + 2y \Rightarrow \phi_x\big|_p = {}^{11}\cancel{-5}$

$\phi_y = \cancel{+}2x - 7 \Rightarrow \phi_y\big|_p = -5$

$\phi_z = -3z^2 \Rightarrow \phi_z\big|_p = -27$

∴ معادلة المستوى المماس للسطح S عند النقطة P هي

$(\overset{11}{\cancel{-5}})(x - 1) + (-5)(y - 4) + (-27)(z + 3) = 0$

$\therefore \overset{11}{\cancel{-5}}x - 5y - 27z - \overset{72}{\cancel{56}} = 0 \Rightarrow \boxed{11x - 5y - 27z = 72}$

$\cancel{5x + 5y + 27z + 56 = 0}$

② إيجاد معادلة الخط العمودي على السطح S عند النقطة p

$$\frac{x - x_0}{\phi_x|_p} = \frac{y - y_0}{\phi_y|_p} = \frac{z - z_0}{\phi_z|_p}$$

أو $x = x_0 + \phi_x|_p t \; , \; y = y_0 + \phi_y|_p t \; , \; z = z_0 + \phi_z|_p t$

ثم ايجاد قيم x_0, y_0, z_0 و $\phi_x|_p , \phi_y|_p , \phi_z|_p$ في الخطوة السابقة

وعليه:

بالتعويض

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+3}{-27}$$

$$x = 1+5t \quad , \quad y = 4-5t \quad , \quad z = 3-27t$$

وهي معادلات الخط العمودي على السطح S عند النقطة p *