CS أبوبكر أحمد خضر حسن

17

i) $w = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

$$w = \frac{1}{e^{(x^2+y^2+z^2)}}$$

$e^{(x^2+y^2+z^2)} \neq 0$ ~~كلما زاد المقام~~

ولكن هذا ~~المقام~~ المقدار لا يمكن أن يساوي صفر

$\therefore D = \mathbb{R}^3$

R:

~~نلاحظ~~ كلما زاد المقام قل مقدار الدالة

نلاحظ أن أكبر قيمة ممكنة للدالة هي 1

و الدالة موجبة ولا يمكن أن تساوي صفر

$\therefore R = (0, 1]$

ii) $w = 2\sin\left(\frac{x-y}{y-z}\right)$

$D:$ $\quad y - z \neq 0 \Rightarrow y \neq z$

$\therefore D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq z\}$

$R:$

$-1 \le \sin(\theta) \le 1$ من مبرهنة الشطيرة

$\therefore -2 \le \sin\left(\frac{\cancel{y}x-y}{y-z}\right) \le 2$

$\therefore R = [-2, 2]$

iii) $z = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2-y^2}}$

$D: 1-2x^2-y^2 > 0$

$1 > 2x^2+y^2$

$\therefore D = \{(x,y) \in R^2 : 2x^2+y^2 < 1\}$

$R:$

~~نلاحظ~~ أنّ من مجال الدالة $2x^2+y^2<1$

~~وهو~~ والمقدار $2x^2+y^2$ دائماً موجب

$\therefore$ أكبر مقدار للمقام هو $\sqrt{1}$ ومنه

أقل قيمة للدالة وهي $z = \frac{1}{1}$

ويقل مقدار المقام إلى ما قبل الصفر

ويزيد معه مقدار الدالة بلا حدود

$\therefore R = [1, \infty)$

موضوع الدرس .... اليوم .... التاريخ / / ١٤هـ

ارسم منحنيات الارتفاع لـ $z = \ln(x^2+y^2)$ (2

تكون منحنيات الارتفاع له في صورة $\ln(x^2+y^2)=k$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = e^k$$

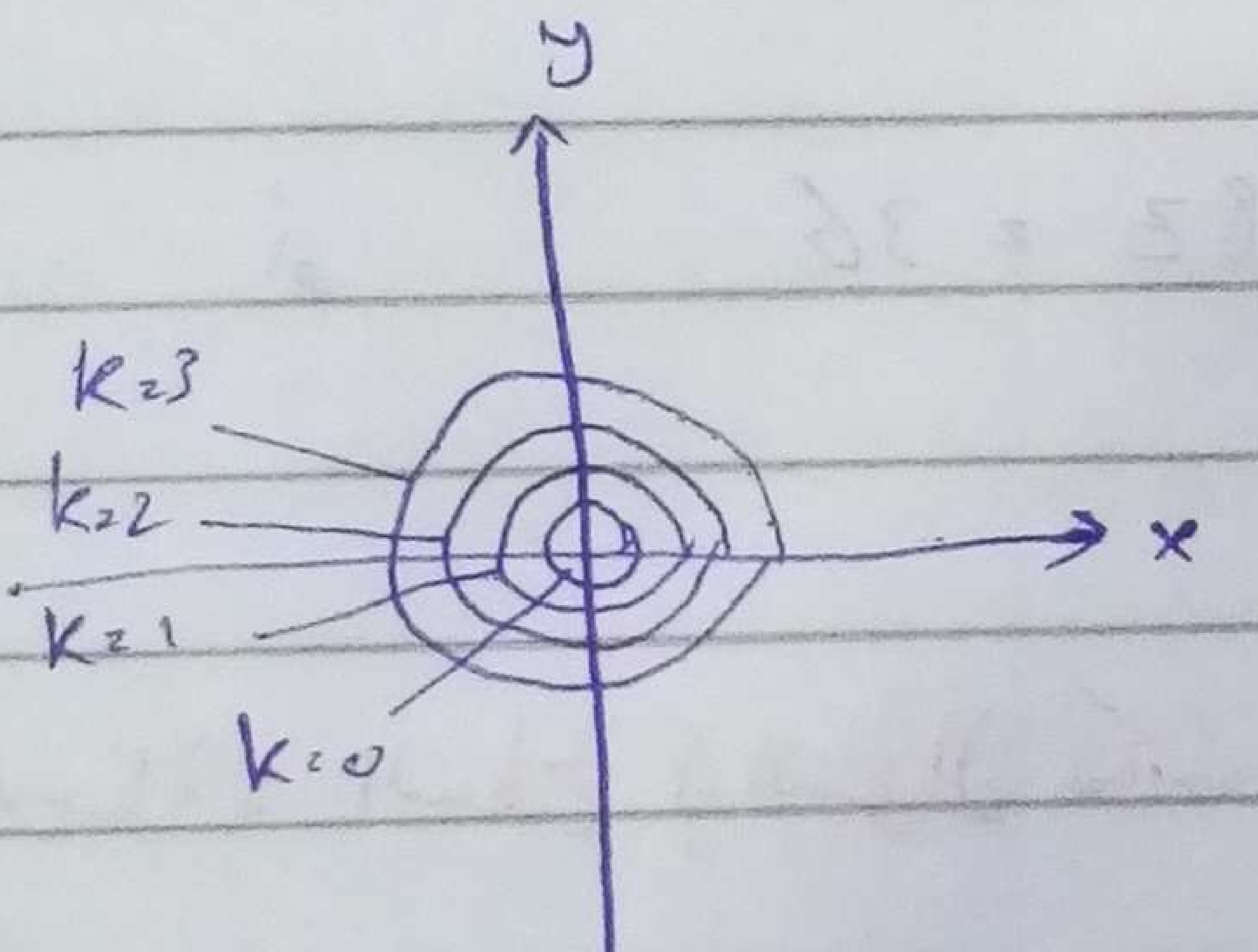
∴ هي عبارة عن دوائر مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{e^k}$.

$$D = R-\{(0,0)\} \quad , \quad R = \mathbb{R}$$

∴ يمكن أن نأخذ k أي قيمة في R

نلاحظ أن نصف القطر لا يمكن أن يساوي الصفر ويزيد بلا حدود.

∴ الرسم التقريبي لمنحنيات الارتفاع هو :



ارسم مخطط السطح : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ [3]

أولاً : نرسم منحنيات الارتفاع

تكون منحنيات الارتفاع له في صورة $\sqrt{x^2+y^2} = k$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = k^2$$

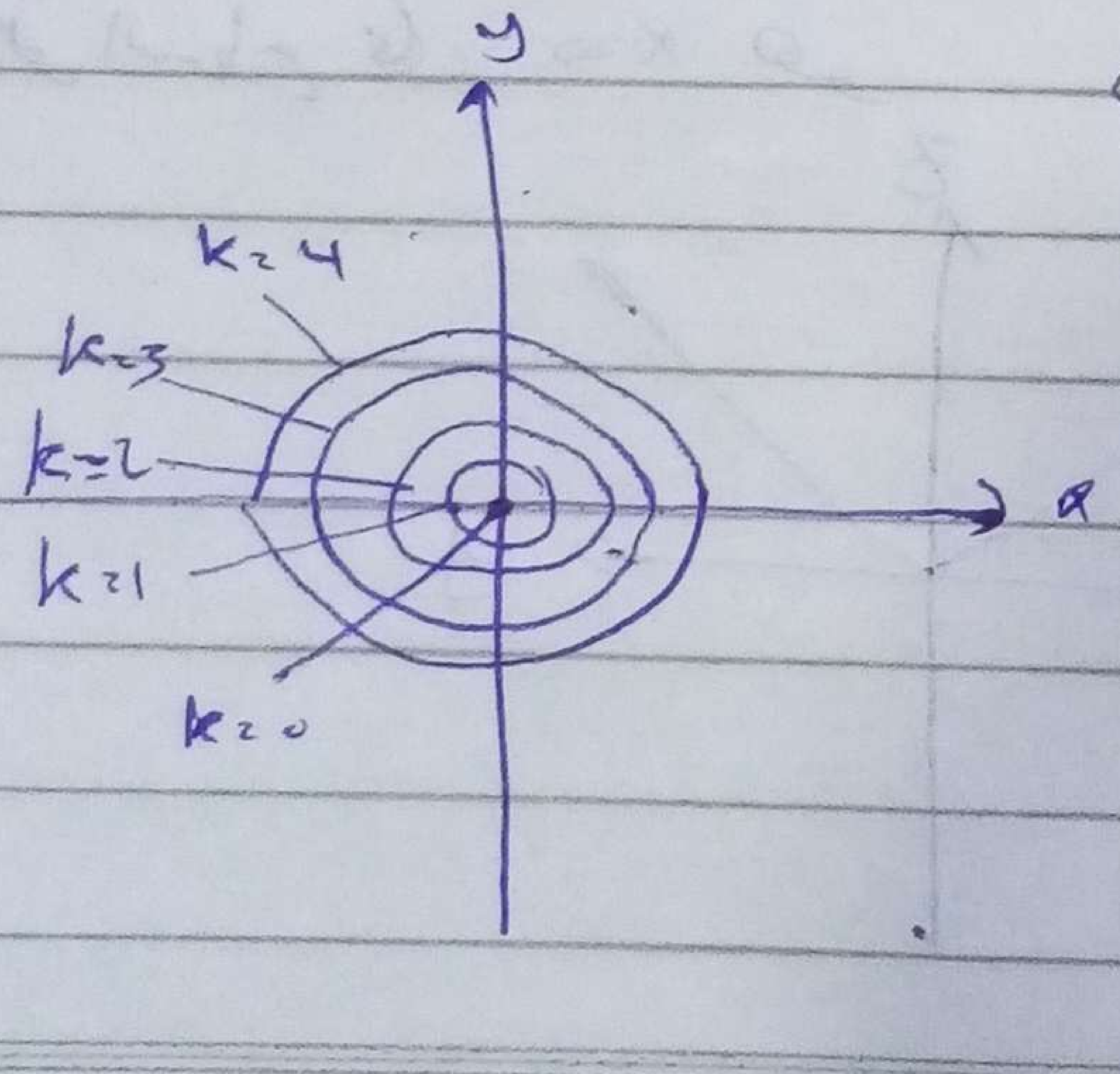
: هي عبارة عن دوائر مركزها نقطة الأصل ونصف

قطرها $\sqrt{k^2} = k$ (لأن نصف القطر لا يمكن أن يكون سالباً)

$$D = R^2 \quad , \quad R = [0, \infty)$$

: أقل قيمة لنصف القطر هي $k = 0$ وتزيد بلا حدود

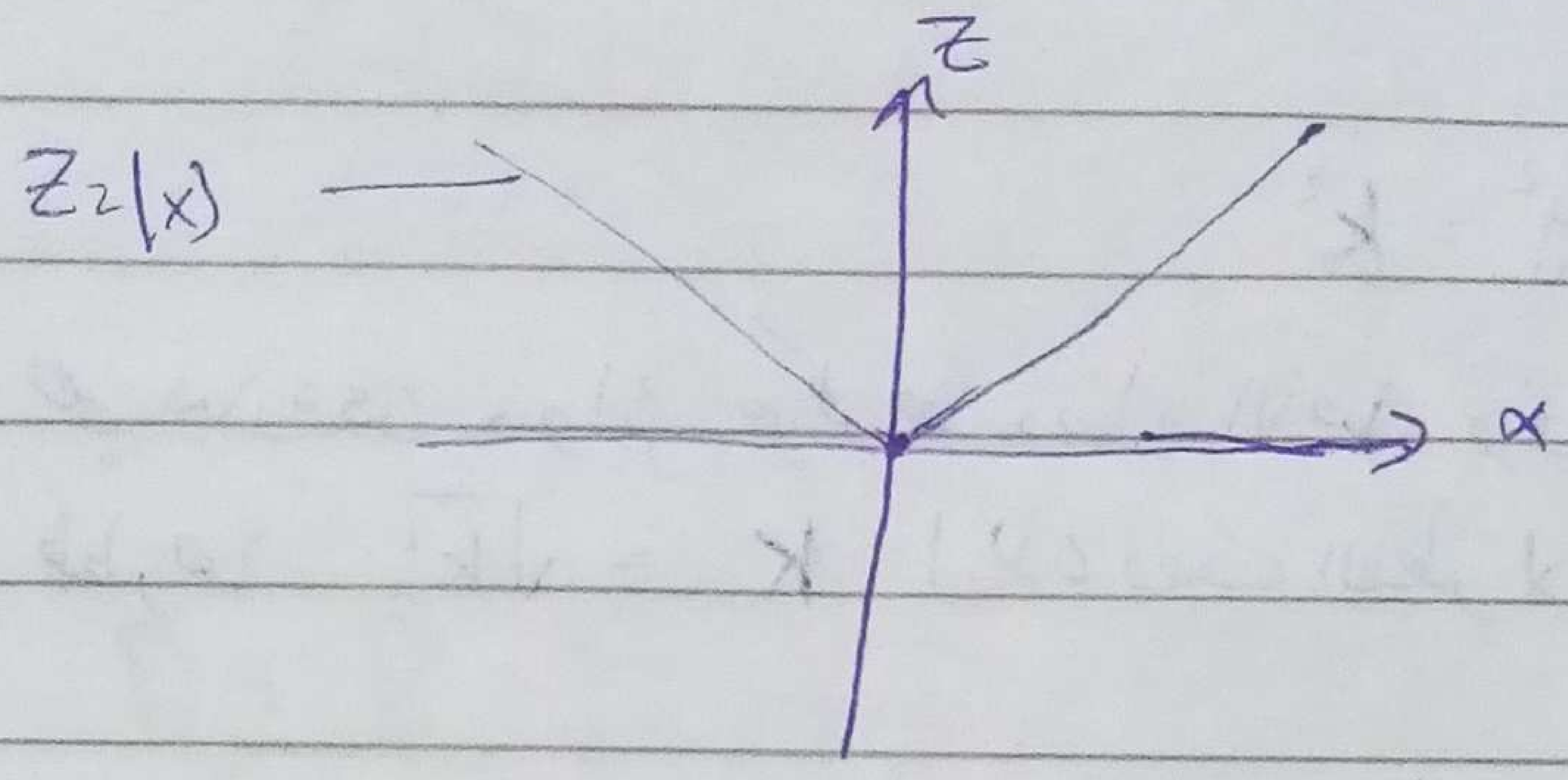
: الشكل التقريبي لمنحنيات الارتفاع للسطح هو :



ثانيا: نرسم اثر السطح على المستوى $y=0$

$\therefore Z = \sqrt{x^2} \Rightarrow Z = |x|$

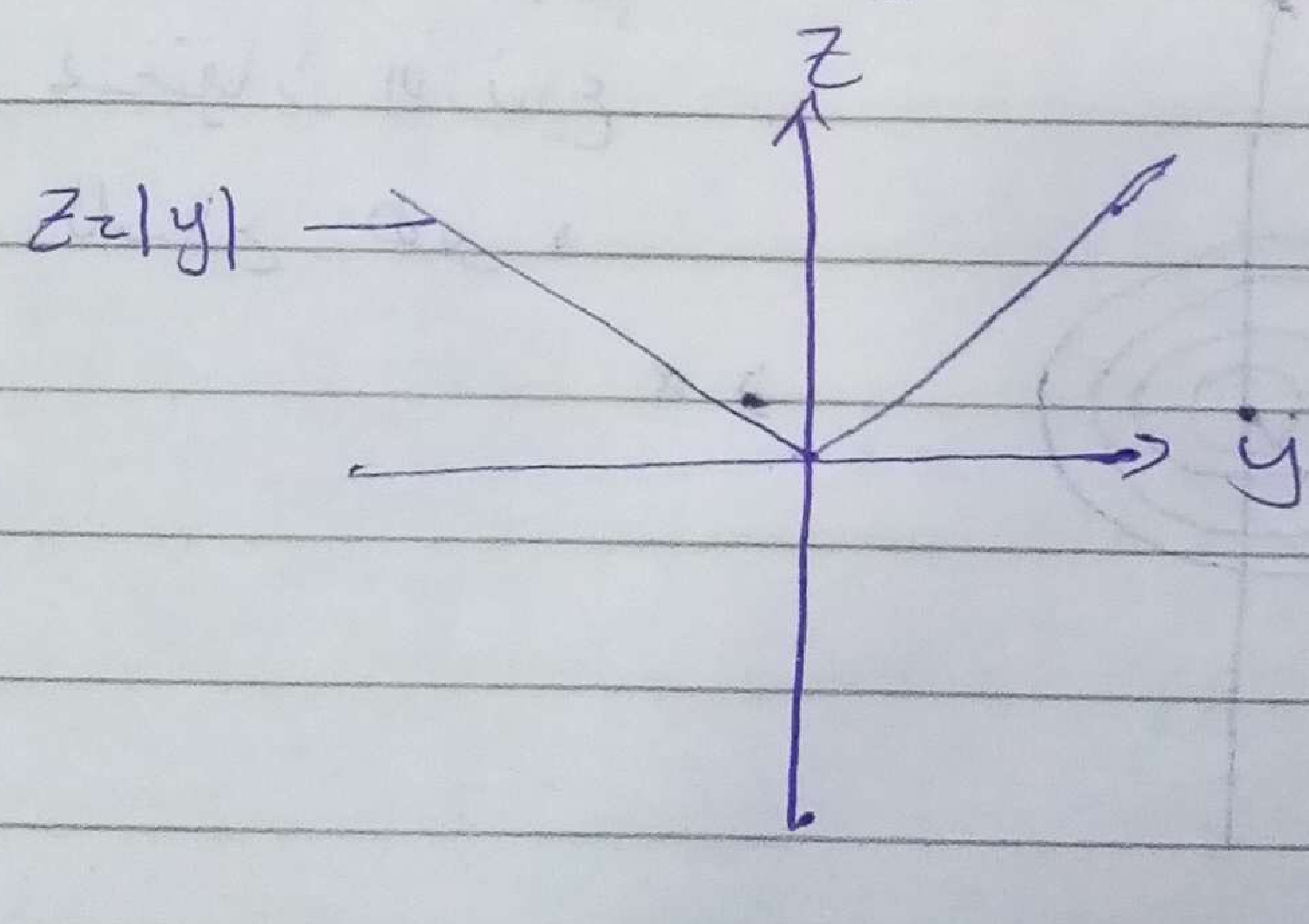
$\therefore$ اثر السطح على $y=0$ هو:-



ثالثا: نرسم اثر السطح على المستوى $x=0$

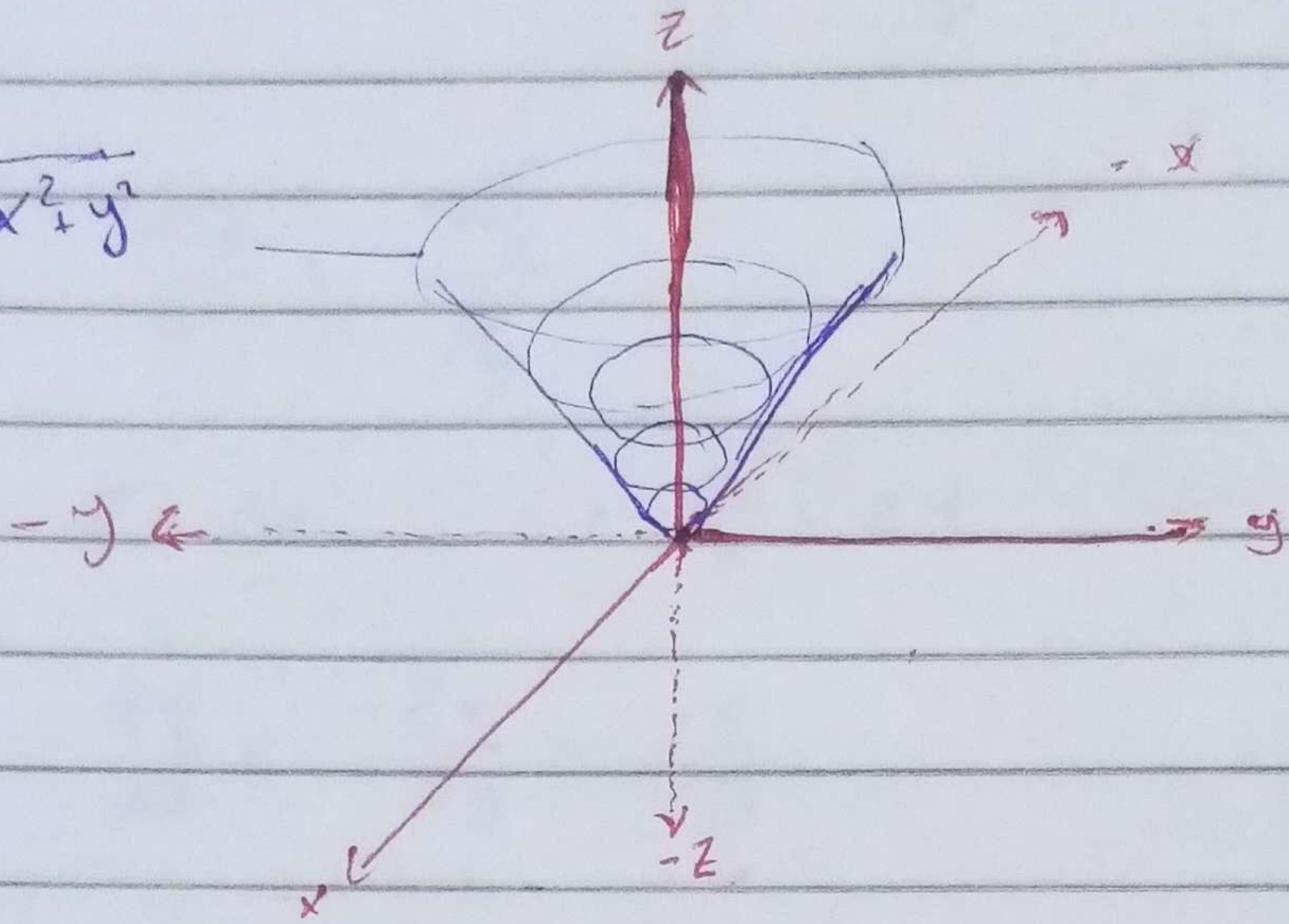
$\Rightarrow Z = \sqrt{y^2} \Rightarrow Z = |y|$

$\therefore$ اثر السطح على $x=0$ هو



: الشكل عبارة عن مخروط ~~[illegible]~~ رأسه لأعلى ومفتوح إلى ما لا نهاية

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}{x-y}$

بالضرب في $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}$ لإكمال الفرق بين المربعين

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+1)^2-(y+1)^2}{(x-y)(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2x+\cancel{1}-y^2-2y-\cancel{1}}{(x-y)(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})} = \frac{x^2-y^2}{(x-y)(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})} + \frac{2(x-y)}{(x-y)(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{(x-y)}(x+1)}{\cancel{(x-y)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}$$

$$A = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} = \frac{2}{\sqrt{0+1}+\sqrt{0+1}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$B = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}{x-y} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$$

5) $w = \dfrac{x-1}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $w_x = ?$, $w_y = ?$, $w_z = ?$

$w = (x-1)\,(y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$w_x = (y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$

$w_y = (x-1)\left(\frac{-1}{2}\right)(y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2y) = \dfrac{-2y(x-1)}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}$

$w_z = (x-1)\left(\frac{-1}{2}\right)(y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2z) = \dfrac{-2z(x-1)}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}$

6) $f(x,y,z) = yz^3 - 2x^2$, $\overrightarrow{\nabla f}\Big|_p = ?$, $P(2,3,-1)$

$\overrightarrow{\nabla f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}$.

$f_x = -4x$, $f_y = z^3$, $f_z = 3yz^2$

$f_x\Big|_p = -8$, $f_y\Big|_p = -1$, $f_z\Big|_p = 9$

$\therefore \overrightarrow{\nabla f} = -4x\hat{i} + z^3\hat{j} + 3yz^2\hat{k}$

$\overrightarrow{\nabla f}\Big|_p = -8\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$

7) $x^2 + -4y^2 + z^2 = 16$ معادلة المماس للسطح ، عند النقطة $P(2,1,4)$

$\phi = x^2 - 4y^2 + z^2 - 16 = 0 , \quad x_0 = 2 , \; y_0 = 1 , \; z_0 = 4$

معادلة المماس هي :-

$$\phi_x\Big|_p (x - x_0) + \phi_y\Big|_p (y - y_0) + \phi_z\Big|_p (z - z_0) = 0$$

$\phi_x = 2x , \quad \phi_y = -8y , \quad \phi_z = 2z$

$\phi_x\big|_p = 4 \qquad \phi_y\big|_p = -8 , \quad \phi_z\big|_p = 8$

$\therefore$ معادلة المماس عند النقطة P هي :-

$$4(x-2) + (-8)(y-1) + 8(z-4) = 0$$

$$\therefore 4x - 8y + 8z - 36 = 0$$

أو

$$4x - 8y + 8z = 36$$

* ملاحظة : السطح في السؤال مكتوب في صورة $x^2 - 4y^2 + z^2 - 16$

8) $f(x,y) = 6x^2 + 6y^2 + 6xy + 36x$

لإيجاد القيم العظمى والصغرى ،

أولاً، نوجد النقاط الحرجة القصوى وإيجاد قيم الدالة عندها

$f_x = 12x + 6y + 36 \Rightarrow f_x = 0 \Rightarrow 12x + 6y + 36 = 0$ —①

$f_y = 12y + 6x \Rightarrow f_y = 0 \Rightarrow 12y + 6x = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-x}{2}}$ —②

نعوض ② في ①

$12x - 3x + 36 = 0 \Rightarrow 8x = -36 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{9}{2}}$

$\therefore y = \frac{-\left(\frac{-9}{2}\right)}{2} = \frac{9}{4}$

∴ النقطة $A\left(\frac{-9}{2}, \frac{9}{4}\right)$ هي نقطة حرجة

ونجري اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوعها

$D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 \quad , \quad f_{xx} = 12 \, , \, f_{yy} = 12 \, , \, f_{xy} = f_{yx} = 6$

$D = (12)(12) - 36 = 108 > 0$

∴ A هي نقطة نهاية صغرى وقيمتها :

$f\left(\frac{-9}{2}, \frac{9}{4}\right) = 6\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 6\left(\frac{-9}{2}\right)\left(\frac{9}{4}\right) + 36\left(\frac{-9}{2}\right) =$

$= 6\left(\frac{81}{4} + \frac{81}{16} - \frac{81}{8} - \frac{36(9)}{2}\right)$

$= 6\left(\frac{4(81)}{16} + \frac{81}{16} - \frac{2(81)}{16} - \frac{36(72)}{16}\right)$

$= \frac{3}{8}\left(3(81) - 36(72)\right) = \underline{-880,875}$

$\boxed{9}$

$$x^2+y^2=a^2$$

اثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\phi_x}{\phi_y}$$

$$\phi_x = 2x \quad , \quad \phi_y = 2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\phi_{xx}(\phi_y)^2 + \phi_{yy}(\phi_x)^2 + \phi_{xy}(\phi_x)(\phi_y)\right]$$

$$\phi_{xx} = 2 \quad , \quad \phi_{yy} = 2 \quad , \quad \phi_{xy} = \phi_{yx} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left[(2)(2y)^2 + (2)(2x)^2 + 0(\dots)\right]}{(2y)^3}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\cancel{8}(x^2+y^2)}{\cancel{8}y^3} = \frac{x^2+y^2}{y^3} = \frac{-a^2}{y^3} \quad \#$$