CS 21-304 أبوبكر أحمد خضر حسن

1) Show $\nabla\cdot\left(r\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) = \frac{3}{r^4}$

$$\nabla\cdot\left(r\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) = \nabla r\cdot\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) + r\nabla^2\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{r}(\underline{r})\cdot\left(\frac{-3r^{-4}}{r}\cdot(\underline{r})\right) + r\nabla\left(\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{r^2}}(\cancel{\underline{r}\cdot\underline{r}})(-3r^{-4}) + r\nabla\left(-3r^{-5}\cdot\underline{r}\right)$$

$$= \frac{-3}{r^4} + r\left[\nabla(-3r^{-5})\cdot\underline{r} + (-3r^{-5})\cdot\nabla\underline{r}\right]$$

$$= \frac{-3}{r^4} + r\left[\frac{(-3)(-5)r^{-6}}{r}(\underline{r})\cdot\underline{r} - 3r^{-5}\cdot 3\right]$$

$$= \frac{-3}{r^4} + r\left[\frac{15}{r^{\cancel{7}5}}(\cancel{\underline{r}\cdot\underline{r}}) - \frac{9}{r^5}\right]$$

$$= \frac{-3}{r^4} + r\left[\frac{15}{r^{\cancel{8}4}} - \frac{9}{r^{\cancel{8}4}}\right] = \cancel{-3}.$$

$$= \frac{-3}{r^4} + \frac{15}{r^4} - \frac{9}{r^4} = \frac{3}{r^4} \quad *$$

② $A = ?\ ,\ r = 1 + 2\cos\theta\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

من استخدامات مبرهنة فرين في ايجاد المساحات :

$$A = \frac{1}{2} \oint_C r^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 4\cos\theta + 4\cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta + 4\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta + 4 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \right]$$

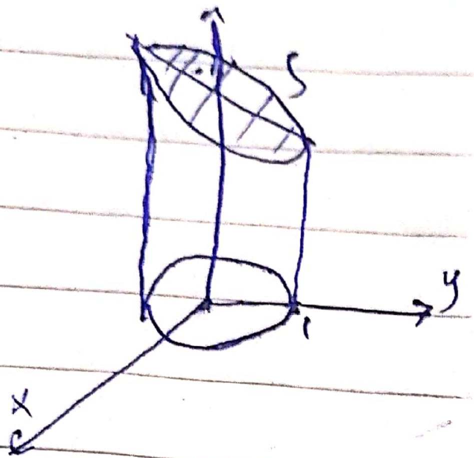
$$= \frac{1}{2} \left[[\theta]_0^{2\pi} + 4\, \cancel{[\sin\theta]_0^{2\pi}} + 4 \left[\frac{\theta}{2} + \cancel{\frac{\sin(2\theta)}{4}} \right]_0^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[2\pi + 4(0) + 4 \left[\frac{2\pi}{2} + (0) \right] \right]$$

$$= \pi + \overset{2}{\cancel{4}}\pi = \cancel{5}\pi \quad \underline{\underline{3\pi}}$$

السؤال الثالث سيكون في آخر الحل

4) $\iint_S yz\,dS$, $S: z = y+3$ inside $x^2+y^2=1$



$\therefore R_{xy}: x^2+y^2=1$

$$|\underline{r}_x \times \underline{r}_y| = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}$$

$$= \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$0 \leq x \leq 1 \qquad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

$$\therefore \iint_S yz\,dS = \iint_{R_{xy}} y(y+3)\,|\underline{r}_x \times \underline{r}_y|\,dx\,dy$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (y^2+3y)\,dy\,dx$$

Scanned with CamScanner

باستخدام الاحداثيات القطبية $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$

$$= \sqrt{2} \iint_{R_{xy}} (y^2 + 3y)\, dy\, dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[(r\sin\theta)^2 + 3 r\sin\theta\right] r\, dr\, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[r^3 \sin^2\theta + 3r^2 \sin\theta\right] dr\, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \sin^2\theta + \frac{3}{3} r^3 \sin\theta\right]_0^1 d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2\theta}{4} + \sin\theta\right] d\theta = \sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} + \left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\left[\frac{2\pi}{2} - (0)\right] + \left[-1 + (1)\right]\right]$$

$$= \sqrt{2}\, \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

③ أثبت أن :-

$$\oint_C \underline{F} \times d\underline{r} = \frac{1}{2}\pi^2 c^2 \underline{j} + 2bc\underline{k}$$ 3

حيث :- $\underline{F} = z\underline{i}$

حيث و C ~~المسار~~ الحلزون الدائري ،

$$r(t) = b\cos t\, \underline{i} + b\sin t\, \underline{j} + ct\, \underline{k}$$

من النقطة $(-b, 0, \pi c)$ إلى $(b, 0, \pi c)$

$$\oint_C \underline{F} \times d\underline{r} = \oint_C \underline{F} \times \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt$$

$\because \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

$\underline{r}(t) = b\cos t\ \underline{i} + b\sin t\ \underline{j} + ct\ \underline{k}$

$\because z = ct \Rightarrow \underline{F} = ct\ \underline{i}$

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = -b\sin t\ \underline{i} + b\cos t\ \underline{j} + c\underline{k}$$

$$\underline{F} \times \frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ ct & 0 & 0 \\ -b\sin t & b\cos t & c \end{vmatrix}$$

$$= -c^2 t\ \underline{j} + cbt\cos t\ \underline{k}$$

لإيجاد حدود التكامل نعوض النقطتين .

$r(-b,0,\pi c)$: $b\cos t = -b \Rightarrow \cos t = -1$ —①

$b\sin t = 0 \Rightarrow b = 0$ or $\sin t = 0$ —②

$ct = \pi c \Rightarrow t = \pi$ or $c = 0$ —③

نلاحظ أن $t = \pi$ تحقق الثلاث معادلات السابقة .

$r(b,0,\pi c)$: $b\cos t = b \Rightarrow \cos t = 1$ —④

$b\sin t = 0 \Rightarrow b = 0$ or $\sin t = 0$ —⑤

4

$ct = \pi c \Rightarrow t = \pi$ or $c = 0$ —⑥

من ④ و ⑥ نلاحظ أن القيمة $t=\pi$ مستبعدة لأن $\cos \pi \neq 1$
عليه هذا يستوجب أن $\underline{\underline{c = 0}}$.

و 6 عند c=0

4

4

ويمكن أخذ $t =$ [redacted] π التي تحقق ④ و ⑤ [redacted] وهذا
يعني أن b ليست بالضرورة تساوي صفر .

∴ التكامل من π إلى [redacted] π .

4

ولكن :-

مما سبق علمنا أن $c=0$ وهذا يعني أن :

1) $\underline{r}(t) = b\cos t\,\underline{i} + b\sin t\,\underline{j}$

2) $\underline{F} = \underline{0}$

3) $\cancel{\oint_C \underline{F} \times d\underline{r}} = \underline{F} \times \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{0} \times \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{0}$

4) $\oint_C \underline{F} \times d\underline{r} = \int_{\pi}^{4\pi} \underline{0} \times \frac{d\underline{r}}{dt}\,dt = \underline{0}$

5) $\frac{1}{2}\pi^2 c^2 \underline{j} + 2bc\,\underline{k} = \underline{0}$

ومن 4 و 5 نكون قد أثبتنا أن

$$\oint_C \underline{F} \times d\underline{r} = \frac{1}{2}\pi^2 c^2 \underline{j} + 2bc\,\underline{k} = \underline{0}$$

هندسياً:-

المسار المعطى هو حلزون يقع على سطح الأسطوانة $(x^2+y^2=b^2)$.

نلاحظ أن الحلزون له ثلاث حالات بناءً على قيمة c:-

أي

1) $c>0$: عندها يكون اتجاه المسار صاعداً ~~صعد~~

2) $c<0$: عندها يكون اتجاه المسار لأسفل

* في الحالتين السابقتين يزيد بعد الحلزون عن مستوى xy

كلما زادت t وعندها ~~يكون~~ يقطع الحلزون كل ~~محور~~ مستوى

في z مرة واحدة فقط.

3) $c=0$ وعندها يكون الحلزون هو المسار المغلق الذي يـ

لكل t

تمثله الدائرة $(x^2+y^2=b^2)$ ويكون ارتفاع z ثابتاً وهو 0

$\therefore z=ct=0 \Rightarrow c=0$

وهذا ما يمكن ملاحظته من احداثيات z في النقطتين.

بطريقة أخرى:

الرسم في c يعطينا انطباعاً بأن المسار C مختلف

وهذا لا يمكن إذا تغير الارتفاع مع تغير الزاوية

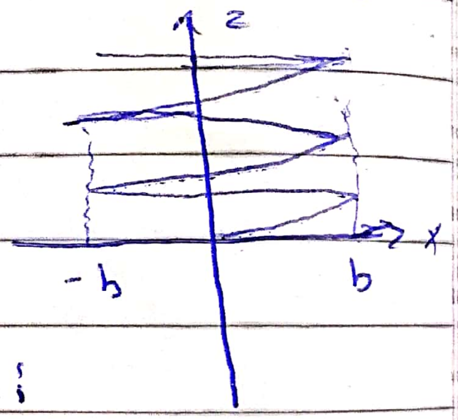
في كل مرة، مما يقودنا إلى أن الارتفاع ثابت لا يتغير

وهذا يعني أن:

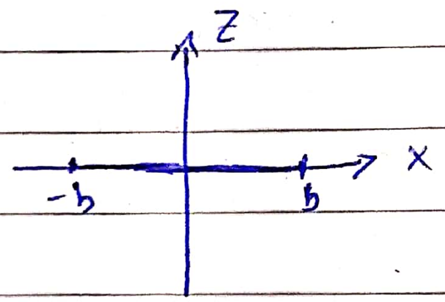
$$Z = ct = 0 \quad \forall t \Rightarrow c = 0$$

كاملة

أثر الحلزون على XZ



أثر المسار المعطى على XZ



أثر المسار المعطى على XY