بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الخرطوم

كلية العلوم الرياضية والمعلوماتية

المعادلات التفاضلية (A2023)

Class Test

اسم الطالب: أبوبكر أحمد خضر حسن

رقم الجلوس:

القسم: علوم حاسوب

Q 1)

1 - (c) $\frac{dy}{dx} = x + y.$

2 - (b) $y = Ce^{x} + 1 + x$
#Note: This isn't homogeneous equation like what the question did say,
It is a non homogeneous linear 1st order constant coefficients OED.

3 - (a) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{n}.$

4 - (a) Linear.

5 - (a) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$

6 - (a) $\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^{2} = R(x).$

7 - (d) Population Dynamics.

8 - (b) $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{env}).$

9 - (b) Logistic Growth.

10 - (e) $y = \frac{x^{3}}{2} + \frac{3x}{2}.$

Q2)

$$\mathbf{2.1)}\qquad (\boldsymbol{x^2+1})\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{y^2+1}$$

نلاحظ أنها معادلة قابلة للفصل ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات.

$$\frac{1}{(y^2+1)}dy = \frac{1}{(x^2+1)}dx$$

$$\frac{d}{dy}(tan^{-1}(y))dy = \frac{d}{dx}(tan^{-1}(x))dx$$

بتكامل الطرفين:

$$\int d(tan^{-1}(y)) = \int d(tan^{-1}(x))$$
$$tan^{-1}(y) = tan^{-1}(x) + c;\ \ c \in \mathbb{R}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = tan(tan^{-1}(x)+c)\,;\quad c\ is\ an\ arbitrary\ constant} \in \mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

لإيجاد الحل الخاص نعوض $y(0) = 1$

$$1 = tan(tan^{-1}(0)+c) = \tan(c) \quad\ then\ \ c = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

بتعويض قيمة الثابت في الحل العام:

$$\therefore\ \boldsymbol{y = tan(tan^{-1}(x) + \frac{\pi}{4})}$$

$$\mathbf{2.2)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

نجري اختبار التجانس بتعويض $x = k, \qquad y = ky$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(kx)^2 + (ky)^2}{(kx)(ky)} = \frac{k^2(x^2 + y^2)}{k^2xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

إذا المعادلة متجانسة ويمكن حلها بطريقة المعادلات التفاضلية المتجانسة من الدرجة الأولى.

نفرض $y = vx \;\; then \;\; \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + (xv)^2}{x(xv)} = \frac{x^2(1 + v^2)}{x^2v} = \frac{1 + v^2}{v}$$

نلاحظ أنها أصبحت معادلة تفاضلية قابلة للفصل.

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{v} - v = \frac{1 + v^2 - v^2}{v} = \frac{1}{v}$$

بضرب المعادلة في $\frac{v\,dx}{x}$

$$v\,dv = \frac{1}{x}dx$$

بتكامل طرفي المعادلة:

$$\int v\,dv = \int \frac{1}{x}dx \quad then \quad \frac{1}{2}v^2 = ln|x| + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$v^2 = 2(ln|x| + c) \;\; then \quad v = \sqrt{2\,ln|x| + A}; \quad A = 2c \geq -2\ln|x| \qquad but\ v = \frac{y}{x}\ :$$

$$\therefore \boldsymbol{y = x\sqrt{2\,ln|x| + A}}; \quad \boldsymbol{A\ is\ an\ arbitrary\ constant} \in [-\mathbf{2ln}|\boldsymbol{x}|, \infty)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

لإيجاد الحل الخاص نعوض $y(1) = 2$

$$2 = (1)\sqrt{2\,ln|1| + A} = \sqrt{A} \qquad \therefore A = 4$$

إذا الحل الخاص عند $y(1) = 2$ هو:

$$\boldsymbol{y = x\sqrt{2\,\mathbf{ln}|x| + 4}}$$

$$\mathbf{2.3)} \qquad \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y}}$$

نختبر التجانس بتعويض $x = kx, \quad y = ky$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(kx)+(ky)}{(kx)+2(ky)} = \frac{k(2x+y)}{k(x+2y)} = \frac{2x+y}{x+2y}$$

إذا هي معادلة تفاضلية متجانسة يمكن حلها بطريقة المعادلات التفاضلية المتجانسة من الدرجة الأولى.

نفرض $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ $\quad y = vx \quad then$

نعوض:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x+(xv)}{x+2(xv)} = \frac{x(2+v)}{x(1+2v)} = \frac{2+v}{1+2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2+v}{1+2v} - v = \frac{2+v-v-2v^2}{1+2v} = \frac{2-2v^2}{1+2v}$$

وهي معادلة قابلة للفصل:

$$\frac{1+2v}{2-2v^2}dv = \frac{1}{x}\,dx$$

بأخذ التكامل لطرفي المعادلة:

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{2-2v^2}dv + \int \frac{2v}{2-2v^2}dv = \int \frac{1}{x}dx}$$

$$1)\ \int \boldsymbol{\frac{1}{2-2v^2}dv} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-v^2)}dv = \frac{1}{2}\int \left(\frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v}\right)dv$$

$$\frac{1}{1-v^2} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v} = \frac{A(1+v)+B(1-v)}{(1-v)(1+v)}$$

$$A(1+v) + B(1-v) = 1$$

نفرض $v = 1$ بالتالي: $A(2) + B(0) = 1$ بالتالي $A = 0.5$

نفرض $v = -1$ بالتالي: $A(0) + B(2) = 1$ بالتالي: $B = 0.5$

نعوض A, B في المعادلة:

$$\therefore 1) = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2(1-v)} + \frac{1}{2(1+v)}\right)dv = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v}\right)dv$$
$$= \frac{1}{4}(-\ln|1-v| + \ln|1+v|) + c1 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{|1+v|}{|1-v|}\right) + c1};$$

2) $\int \frac{\boldsymbol{2v}}{\boldsymbol{2-2v^2}}\boldsymbol{dv} = \frac{-1}{2}\int \frac{-2v}{1-v^2}dv = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{2}}\ \mathbf{ln}|\boldsymbol{1-v^2}| + \boldsymbol{c2}$;

3) $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} = \mathbf{ln}|\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{c3}$;

بحيث *c1,c2,c3* هي ثوابت اختيارية تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

نعوض *1),2),3)*

$$\therefore \frac{1}{4}\ln\left(\frac{|1+v|}{|1-v|}\right) + c1 - \frac{1}{2}\ln(1-v^2) + c2 = \ln|x| + c3$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{|1+v|}{|1-v|}\right)^{\frac{1}{2}} - ln(1-v^2)\right) = \ln|x| + A; \qquad A = c3 - c1 - c2$$

$$ln\left(\frac{\sqrt{|1+v|}}{|1-v^2|\sqrt{|1-v|}}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln|x| + A$$

برفع الطرفين كأس للعدد الطبيعي:

$$\left(\frac{\sqrt{|1+v|}}{|1-v^2|\sqrt{|1-v|}}\right)^{\frac{1}{2}} = xB; \quad B = e^A$$

برفع الطرفين للأس 4:

$$\frac{|1+v|}{(1-v^2)^2|1-v|} = (xB)^4; \qquad but\ v = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{\left|\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}\right|}{\left(\mathbf{1}-\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}\left|\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}\right|} = (\boldsymbol{xB})^{\mathbf{4}}; \quad \boldsymbol{B\ is\ an\ arbitrary\ constant}\ \in \mathbb{R}$$

وهو الحل العالم للمعادلة التفاضلية.

$$\mathbf{2.4)} \qquad (2xy+y^2)dx+(x^2+2xy)dy=0$$

$$M=2xy+y^2; \qquad N=x^2+2xy$$

نجري اختبار المعادلات التفاضلية التامة: $\frac{\partial M}{\partial y}==\frac{\partial N}{\partial x}?$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x+2y; \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2x+2y$$

إذا المعادلة التفاضلية تامة وحلها يمكن أن يكون في صورة:

$$f(x,y)=\int M\,dx+h(y)$$

$$=\int(2xy+y^2)\,dx+h(y)=x^2y+y^2x+h(y)$$

لإيجاد $h(y)$ نفاضل المعادلة السابقة جزئيا بالنسبة لـy

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+y^2x)+h'(x) \quad then \quad N=x^2+2yx+h'(x)$$

$$\therefore h'(x)=N-x^2-2yx=x^2+2xy-x^2-2yx=0 \quad then \quad h(y)=\int 0\,dy$$

$$\therefore h(y)=c; \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\therefore \boldsymbol{f(x,y)=x^2y+y^2x+c}; \quad \boldsymbol{c\ is\ an\ arbitrary\ constant}\ \in\mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

#ملاحظة: هذه المعادلة يمكن حلها أيضا بطريقة حل المعادلات المتجانسة من الدرجة الأولى.

$$\mathbf{2.5)} \qquad \boldsymbol{\frac{dy}{dx} + 3y = 6x}$$

نلاحظ أنها معادلة خطية من الدرجة الأولى

نحسب معامل التكامل IF

$$IF = \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = \exp\left(\int 3\,dx\right) = e^{3x}$$

نضرب معامل التكامل في كل أطراف المعادلة

$$e^{3x}\frac{dy}{dx} + e^{3x}3y = 6xe^{3x} \quad then \quad \frac{d}{dx}(e^{3x}y) = 6xe^{3x}$$

بتكامل الطرفين بالنسبة لx:

$$e^{3x}y = \int 6xe^{3x}\,dx$$

نفرض $dv = e^{3x}$ $then$ $v = \frac{1}{3}e^{3x}$ and $u = x$ $then$ $du = dx$

$$\therefore \int 6xe^{3x}\,dx = 6\left(uv - \int v\,du\right) = 6\left(x\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx\right) = 2\left(xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + c\right);$$

$c \in \mathbb{R}$

$$\therefore e^{3x}y = 2xe^{3x} - \frac{2}{3}e^{3x} + A; \quad A = 6c$$

$$\therefore \boldsymbol{y = \frac{1}{3}(6x - 2 + Ae^{-3x})}; \qquad \boldsymbol{A\ is\ an\ arbitrary\ constant} \in \mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

لإيجاد الحل الخاص نعوض الشرط الابتدائي: $y(0) = 2$

$$2 = \frac{1}{3}\left(6(0) - 2 + \frac{A}{e^{3(0)}}\right) \quad then \quad A = (2)(3) + 2 = 8$$

$$\therefore \boldsymbol{y = \frac{1}{3}(6x - 2 + 8e^{-3x})}$$

وهو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية.

2.6) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + y = xy^2}$

بقسمة المعادلة على ^{2} نحصل على:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = x$$

نفرض: $z = y^{-1} \quad then \quad \frac{dz}{dx} = (-1)y^{-2}\frac{dy}{dx}$

نضرب المعادلة في *1-*

$$(-1)y^{-2}\frac{dy}{dx} + (-1)y^{-1} = -x$$

نعوض الفرض:

$$\frac{dz}{dx} + (-1)z = -x$$

وهي معادلة خطية من الدرجة الأولى في المتغير التابع z

نحسب معامل التكامل IF :

$$IF = \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = \exp\left(\int (-1)\,dx\right) = e^{-x}$$

نضرب معامل التكامل في المعادلة الخطية:

$$e^{-x}\frac{dz}{dx} + e^{-x}(-1)z = -xe^{-x} \quad then \quad \frac{d}{dx}(e^{-x}z) = -xe^{-x}$$

بتكامل الطرفين بالنسبة لx

$$e^{-x}z = \int (-xe^{-x})\,dx$$

نفرض $u = -x \;\; then \;\; du = (-1)dx \quad and \quad dv = e^{-x} \;\; then \;\; v = -e^{-x}$

$$\int (-xe^{-x})\,dx = uv - \int v\,du = -x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\,(-1)dx = xe^{-x} + e^{-x} + c; \;\; c \in \mathbb{R}$$

$$\therefore e^{-x}z = xe^{-x} + e^{-x} + c \quad then \quad z = e^{x}(xe^{-x} + e^{-x} + c) = x + 1 + ce^{x}$$

ولكن $z = y^{-1}$

$$\boldsymbol{\therefore y = \frac{1}{x + 1 + ce^{x}}} \;; \qquad \boldsymbol{c \text{ is an arbitrary constant}} \in \mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$\mathbf{2.7)}\qquad \boldsymbol{\frac{dP}{dt} = 0.05P\left(1-\frac{Pr}{1000}\right)}$$

1. $P(t)=?$

I will use $r = 0.05,\quad k = 1000.$

$$\frac{dP}{dt} = rP - \frac{P^2 r}{k} = \frac{krP - P^2 r}{k} = \frac{rP(k-P)}{\mathrm{k}}$$

باستخدام فصل المتغيرات.

$$\frac{1}{rP(k-P)}dP = \frac{1}{k}dt$$

بتكامل الطرفين:

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{rP(k-P)}dP = \int \frac{1}{k}dt}$$

$$\mathbf{1)}\int \boldsymbol{\frac{1}{rP(k-P)}dP} = \int \frac{A}{rP}dP + \int \frac{B}{k-P}dP$$

$$\frac{1}{rP(k-P)} = \frac{A(k-P)+BrP}{rP(k-P)}$$

$$\therefore A(k-P)+BrP = 1$$

عوض $P = 0$ $\qquad A(k-0)+Br(0) = 1 \quad then \;\; Ak = 1 \quad then \quad A = \frac{1}{k}$

عوض $P = k$ $\qquad A(0)+Brk = 1 \quad then \quad B = \frac{1}{rk}$

بتعوض A, B في التكامل:

$$1)\int \frac{1}{rP(k-P)}dP = \int \frac{1}{krP}dP + \int \frac{1}{rk(k-P)}dP = \frac{1}{rk}\left(\int \frac{1}{P}dP + \int \frac{1}{k-P}dP\right)$$

$$= \frac{1}{rk}(\ln|P| - \ln|k-P|) + c1 = \boldsymbol{\frac{1}{rk}\left(\ln\left(\frac{|P|}{|k-P|}\right)\right) + c1} \;; \qquad c1 \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{2)}\int \boldsymbol{\frac{1}{k}dt = \frac{1}{\mathrm{k}}t + c2}; \quad c2 \in \mathbb{R}$$

c1,c2 ثوابت اختيارية

نعوض *1),2)*

$$\frac{1}{rk}\left(\ln\left(\frac{|P|}{|k-P|}\right)\right) + c1 = \frac{1}{\mathrm{k}}t + c2$$

$$\ln\left(\frac{|P|}{|k-P|}\right) = rt + m; \qquad m = rk(c2 - c1)$$

برفع الطرفين كقوة للعدد الطبيعي:

$$\left|\frac{P}{k-P}\right| = e^{rt}A;\ \ A = e^{m} \quad then \quad P = (k-P)e^{rt}A \quad then \ \ P + Pe^{rt}A = ke^{rt}A; \quad A \in \mathbb{R}$$

$$P = \frac{ke^{rt}A}{1+e^{rt}}$$

نعوض $k = 1000,\ \ r = 0.05$

$$\boldsymbol{P = \frac{(1000)e^{0.05\,t}A}{1+e^{0.05\,t}A}}; \qquad \boldsymbol{A\ is\ an\ arbitrary\ constant}\ \in \mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

2. $P(0) = 50 \qquad A = ?$

$$\therefore 50 = \frac{(1000)e^{0.05\,(0)}A}{1+e^{0.05\,(0)}A} \quad then \quad 50(1+A) = (1000)A \ \ then\ \ 1 + A = 20A$$

$$\therefore A = \frac{1}{19}$$

$$\therefore P = \frac{(1000)e^{0.05\,t}(1)}{\left(1 + e^{0.05\,t}\left(\frac{1}{19}\right)\right)19}$$

$$\therefore \boldsymbol{P(t) = \frac{(1000)\ \ e^{0.05\,t}}{19 + e^{0.05\,t}}}$$

وهو الحل الخاص للمعادلة عند $P(0) = 50$

3. $P(t) = 500; \quad t = ?$

$$500 = \frac{(1000)\ \ e^{0.05\,t}}{19 + e^{0.05\,t}}$$

$$500(19 + e^{0.05\,t}) = 1000e^{0.05\,t} \ \ then\ \ 19 + e^{0.05\,t} = 2e^{0.05\,t} \quad then\ \ e^{0.05\,t} = 19$$

$$0.05\,t = \ln(19) \quad then \ \ t = 100 * \frac{\ln(19)}{5} = 20\ln(19)$$

$$\therefore \boldsymbol{t \approx 58.8888\ years}$$

$$\mathbf{2.8)} \qquad \boldsymbol{\frac{dT}{dt} = 0.1(20 - T)}$$

1. $T(t) = ?$

يمكن حلها بفصل المتغيرات

$$\frac{1}{20 - T} dT = 0.1 dt$$

بتكامل الطرفين:

$$\int \frac{1}{20 - T} dT = \int 0.1\, dt \quad then \quad -\ln|20 - T| = 0.1t + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$20 - T = e^{-0.1t} A; \quad A = e^{-c}$$

$$\boldsymbol{T = 20 - e^{-0.1t} A}; \quad \boldsymbol{A\ is\ an\ arbitrary\ constant} \in \mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة.

2. $T(0) = 90 \quad A = ?$

$$90 = 20 - e^{-0.1(0)} A \quad \text{then} \quad A = 20 - 90 = -70$$

$$\therefore \boldsymbol{T(t) = 20 + 70e^{-0.1t}}$$

وهو الحل الخاص للمعادلة عند $(0) = 90$.

3. $T(30) = ?$

$$T(30) = 20 + 70e^{-0.1(30)} = 20 + \frac{70}{e^3}$$

$$\therefore \boldsymbol{T(30) \approx 23.4851}℃$$

$$\mathbf{2.9)}\qquad \boldsymbol{\frac{dx}{dt}=-kx^2}$$

هي قابلة للفصل

$$\frac{1}{x^2}dx=-kdt$$

بتكامل الطرفين:

$$1)\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}\,dx=\frac{x^{-1}}{-1}=\frac{-1}{x}+c1;\;\;c1\in\mathbb{R}$$

$$2)\int -k\,dt=-kt+c2;\quad c2\in\mathbb{R}$$

$$\therefore\frac{-1}{x}+c1=-kt+c2\quad then\quad \frac{1}{x}=(kt+A);\quad A=c1-c2$$

$$\therefore x=\frac{1}{kt+A}$$

لإيجاد قيمة k نحل المعادلتين: $x(0)=10\;\;,\;\;x(2)=5$

$$10=\frac{1}{k(0)+A}=\frac{1}{A}\quad then\quad A=\frac{1}{10}=0.1$$

$$5=\frac{1}{k(2)+\frac{1}{10}}=\frac{10}{20k+1}\quad then\quad 5(20k+1)=10\quad then\;\;20k=1\;\;then\;\;k=\frac{1}{20}=0.05$$

نعوض قيمة k في لنحصل على الحل العام:

$$\therefore x=\frac{1}{\frac{1}{20}t+A}$$

$$\boldsymbol{\therefore x=\frac{20}{t+20A}\quad or\quad \therefore x=\frac{1}{(0.05)t+A};\qquad A\;is\;an\;arbitrary\;constant}\;\in\mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

2. $x(0) = 10$

$$10 = \frac{1}{(0.05)(0) + A} = \frac{1}{A} \qquad then \quad A = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{(0.05)t + 0.1}} \qquad \boldsymbol{or} \qquad \boldsymbol{x = \frac{20}{t+2}}$$

وهو الحل الخاص للمعادلة.

3. $x(t) = x(0) - \frac{90x(0)}{100} = 10 - \frac{90*10}{100} = 1; \quad x(t) = 1 \quad t = ?$

$$1 = \frac{20}{t+2} \qquad then \quad t + 2 = 20$$

$$\therefore \boldsymbol{t = 18 \ \ hours}$$

$$\mathbf{2.10)} \qquad \boldsymbol{\frac{dQ}{dt} = 6 - \frac{3Q}{100}}$$

1. $Q(t) = ?$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{3}{100}(200 - Q)$$

إذا هي قابلة للفصل

$$\frac{1}{200 - Q} dQ = \frac{3}{100} dt$$

بتكامل الطرفين:

$$-\ln|200 - Q| = 0.03t + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$200 - Q = e^{-0.03t}A; \quad A = e^{-c}$$

$$\therefore \boldsymbol{Q(t) = 200 - e^{-0.03t}A}; \quad \boldsymbol{A \text{ is an arbitrary constant}} \in \mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

#ملاحظة: هذه المعادلة خطية ويمكن حلها أيضا بطريقة حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى بوضعها في الصورة $\frac{dQ}{dt} + \frac{3}{100}Q = 6$

2. $Q(0) = 0 \qquad A = ?$

$$0 = 200 - Ae^{-0.03(0)} \quad then \quad A = 200$$

$$\therefore \boldsymbol{Q(t) = 200(1 - e^{-0.03t})}$$

وهو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية عند $Q(0) = 0$

3. $Q(20) = ?$

$$Q(20) = 200(1 - e^{-0.03*20}) = 200 - \frac{200}{e^{0.6}}$$

$$\therefore \boldsymbol{Q(20) \approx 90.2376 \; Grams}$$

$\mathbf{2.11)} \quad \boldsymbol{\frac{dA}{dt} = -kA}$

1. $A(t) = ?$

يمكن حلها بفصل المتغيرات:

$$\frac{1}{A} dA = -kdt$$

بتكامل الطرفين:

$$\ln|A| = -kt + c; \quad c \text{ is an arbitrary constan } \in \mathbb{R}$$

$$A = e^{-kt}B; \quad B = e^{c}$$

لإيجاد قيمة k نعوض $A(0) = 50 \quad and \quad A(4) = 25$

$$A(0) = 50 = e^{-k(0)}B \ \ then \ \ B = 50$$

$$A(4) = 25 = e^{-k4}50 \quad then \quad \frac{2}{e^{4k}} = 1 \quad then \quad e^{4k} = 2$$

$$4k = \ln(2) \quad then \quad k = \frac{\ln(2)}{4} \approx \mathbf{0.1733}$$

إذا الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\boldsymbol{A = e^{-0.1733*t}B; \quad B \text{ is an arbitrary constant}} \in \mathbb{R}$$

2. $A(t) = ? \quad wher \ \ A(0) = 50$

$$50 = e^{-0.1733*(0)}B \quad then \quad B = 50$$

$$\boldsymbol{A = 50\, e^{-0.1733*t}}$$

وهو الحل الخاص عند $A(0) = 50$

3. $A(t) = \frac{A(0)}{2} \quad t = ?$

$$A(t) = \frac{A(0)}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$From\ the\ question\ A(4) = 25 \ \ then \ \ \boldsymbol{t = 4\ hours}$$

ويمكننا التأكد بحل المعادلة:

$$A(t) = 25 = 50\ e^{-0.1733*t}$$

$$1 = 2e^{-0.1733*t} \quad or \quad \frac{2}{e^{0.1733*t}} = 1 \quad then \quad e^{0.1733*t} = 2$$

$$0.1733 * t = \ln(2) \quad then \quad t = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{\frac{\ln(2)}{4}} = 4$$

half-life of the substance from A(0) = 50 is 4 hours.