CS

أبوبكر أحمد خضر حسن

1-1) $Z = \sqrt{x - y + 2}$

Domain: $x - y + 2 \geq 0$ (دالة جذرية)

$\therefore x \geq y - 2$

$\therefore D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y - 2\}$

Range:

نلاحظ أن ~~أكبر~~ أقل قيمة ممكنة لـ (Z) هي 0

كما نلاحظ أنها تزيد بلا حدود

$\therefore R = [0, \infty)$

1-2) $w = \ln(x_1 + x_2 + x_3)$

Domain: $x_1 + x_2 + x_3 > 0$ (دالة لوغريثمية)

$\therefore D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 > 0\}$

Range:

$R = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ (دالة لوغريثمية)

2.1)

2.1) $z = \ln(x^2 + z^2)$

$D = \{(x,z) \in R^2 \setminus \{(0,0)\}\}$ $(x^2+z^2>0)$ $(x,z) \neq (0,0)$

نلاحظ أن الدالة z يمكن أن تأخذ أي قيمة لذا
$R = \mathbb{R}$

• نلاحظ أن الشكل عبارة عن تكرار ~~الدالة~~ المنحنى الدالة على طول محور y في الفضاء الثلاثي.

∴ بغض النظر عن شكل منحنى الدالة في المستوى (x,z) ستكون منحنيات الارتفاع في شكل خطوط موازية لمحور y وكل منها في صورة $x=c$ حيث c ثابت.

نفرض أن $z=k \Rightarrow k = \ln(x^2+k^2)$

يمكن إيجاد معادلات هذه الخطوط بوضع x موضع القانون وتعويض قيمة k لكل منها.

$e^k = x^2 + k^2 \Rightarrow x^2 = e^k + k^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{e^k + k^2}$

عند $k=0$ $\quad x=\pm\sqrt{e^{0}+(0)^2} \Rightarrow x=\pm 1$

عند $k=1$ $\quad x=\pm\sqrt{e^{1}+(1)^2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{e+1}$

عند $k=2$ $\quad x=\pm\sqrt{e^{2}+(2)^2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{e^2+4}$

عند $k=-1$ $\quad x=\pm\sqrt{e^{-1}+(-1)^2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{e}+1}$

عند $k=-2$ $\quad x=\pm\sqrt{e^{-2}+(-2)^2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{e^2}+4}$

عند $k=\frac{1}{2}$ $\quad x=\pm\sqrt{e^{\frac{1}{2}}+(\frac{1}{2})^2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\sqrt{e}+\frac{1}{4}}$

عند $k=-\frac{1}{2}$ $\quad x=\pm\sqrt{e^{-\frac{1}{2}}+(-\frac{1}{2})^2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{4}}$

∴ نلاحظ أن لكل قيمة لـ K هناك خطان متوازيان يبعدان عن y نفس المسافة أحدهما في الاتجاه الموجب من x والآخر في الاتجاه السالب.

كما نلاحظ أنه كلما زادت القيمة المطلقة لـ K زاد بعد المنحنيين من محور y وتزيد بلا حدود "تزيد المسافة"

كما نلاحظ أن قيمة x لا يمكن أن تساوي 0 أي أن الدالة غير معرفة عندها

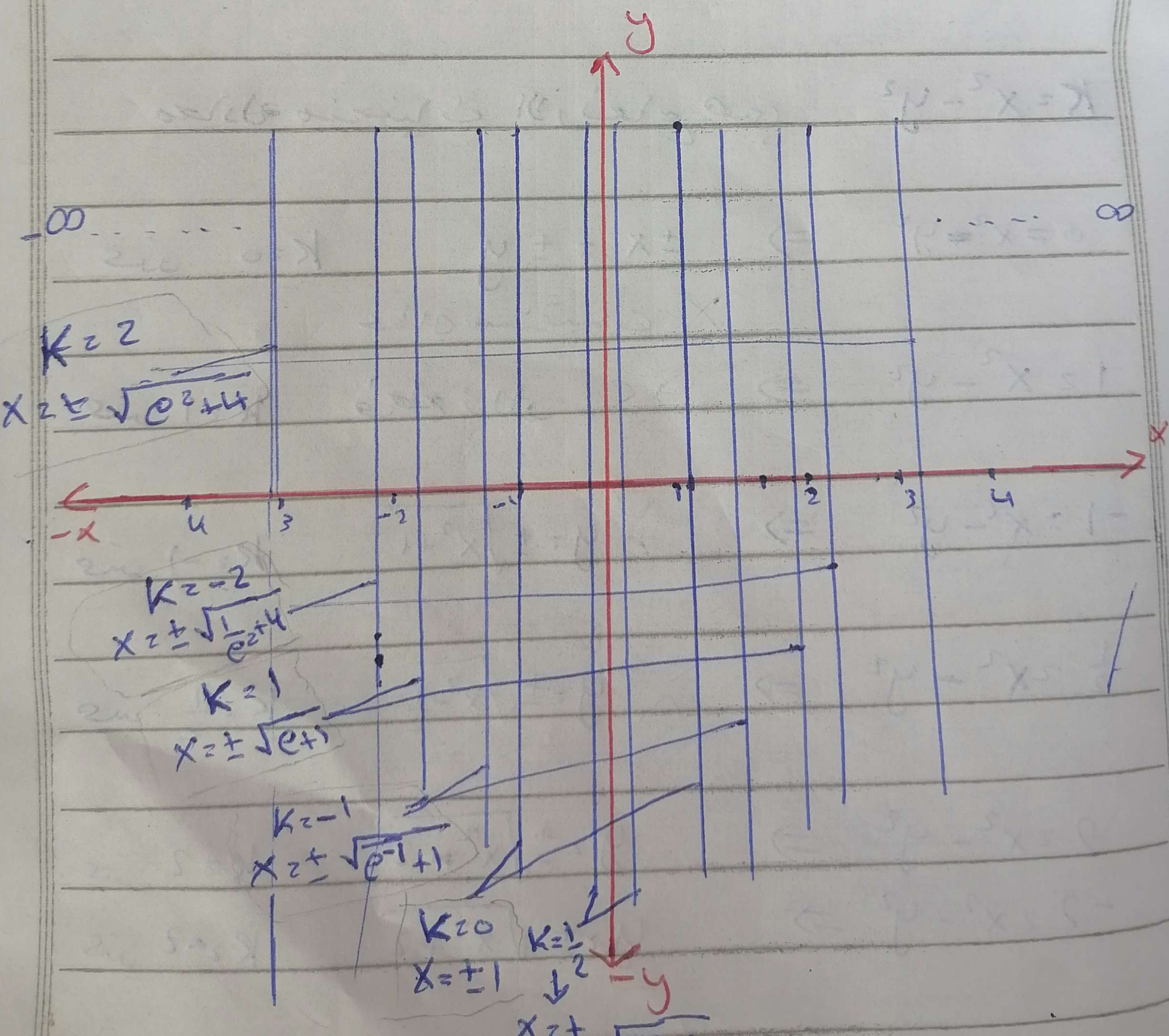
موضوع الدرس .... اليوم .... التاريخ / / ١٤هـ

(x, z)

وهو ما لاحظناه في مجال الدالة: $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

وبعد

∴ الرسم التقريبي لمنحنيات الارتفاع هو :-



2.2) $Z = x^2 - y^2$

$D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

نلاحظ أن Z يمكن أن تأخذ أي قيمة لذا $R = \mathbb{R}$

~~نلاحظ أن~~

معادلة منحنيات الارتفاع هي $K = x^2 - y^2$

عند $K = 0$ $\quad 0 = x^2 - y^2 \Rightarrow \pm x = \pm y$

خطان مستقيمان

عند $K = 1$ $\quad 1 = x^2 - y^2 \Rightarrow$ قطع زائد

عند $K = -1$ $\quad -1 = x^2 - y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$

عند $K = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} = x^2 - y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}$

عند $K = 2$ $\quad 2 = x^2 - y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2}$

عند $K = -2$ $\quad -2 = x^2 - y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 2}$

موضوع الدرس .... اليوم .... التاريخ / / ١٤هـ

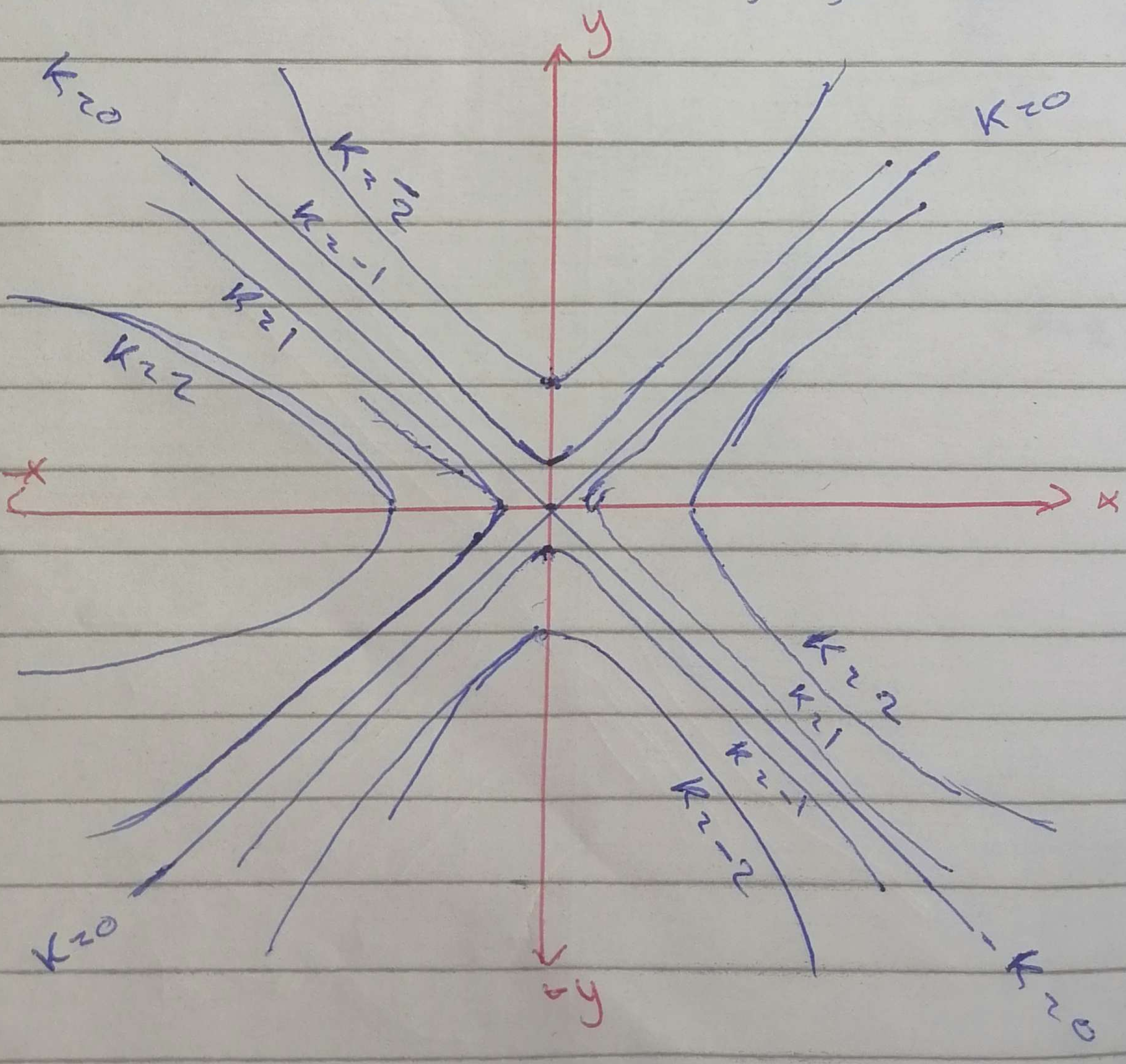
نلاحظ أنها معادلة قطع زائد

عند قيم K الموجبة يتماثل القطع حول محور y

〃 〃 〃 السالبة 〃 〃 〃 〃 x

عند $K=0$ يكون القطع عبارة عن المستقيمين $\pm x = \pm y$

الشكل التقريبي لمنحنيات الارتفاع هو :-



3) $Z = 4 - x^2$

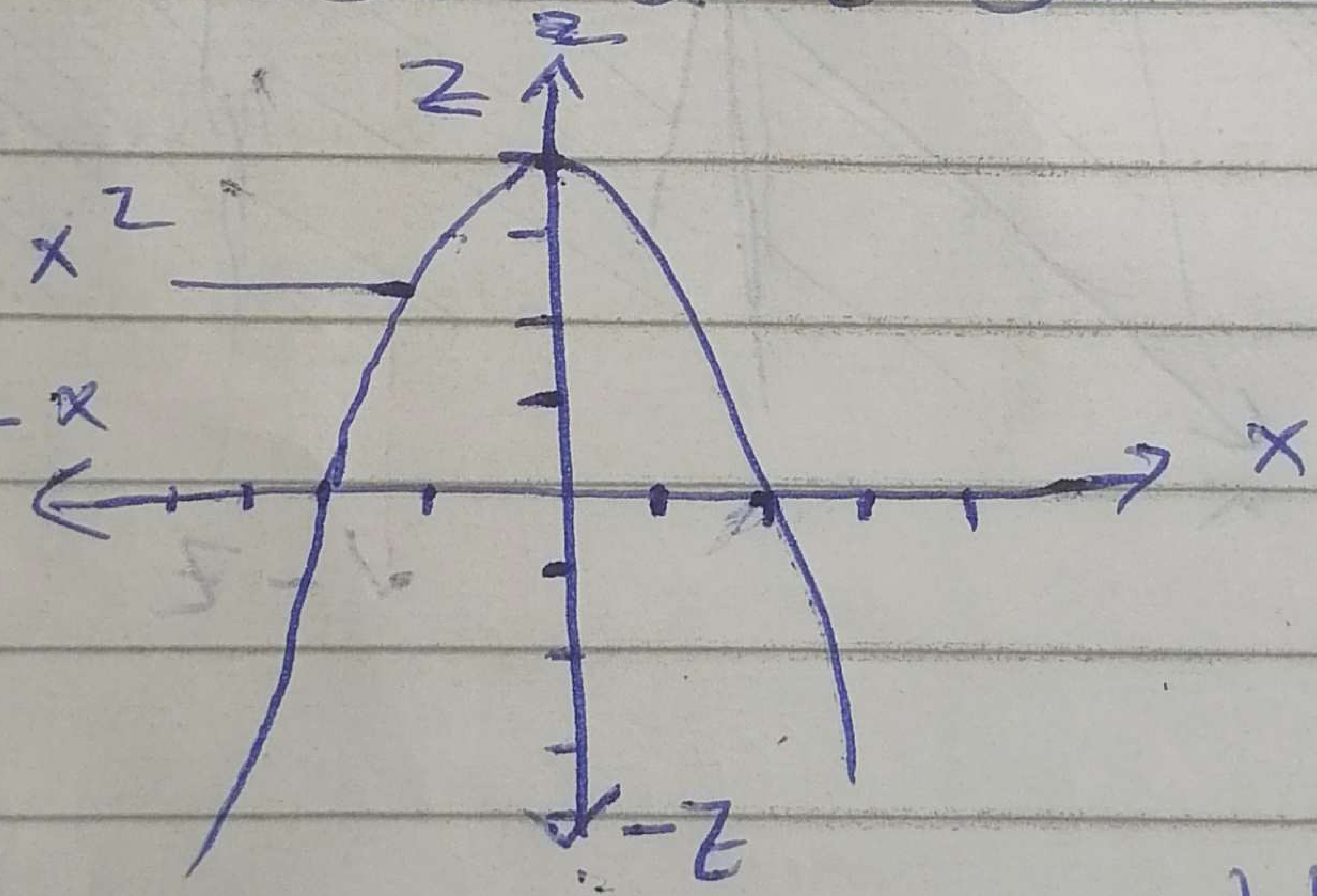
نلاحظ أنها معادلة منحنى في R^2
كما نلاحظ أن أكبر قيمة لـ Z هي 4
عند $x = 0$.

$x = 0 \Rightarrow Z = 4$

$x = 1 \Rightarrow Z = 3$, $x = -1 \Rightarrow Z = 3$

$x = 2 = Z = 0$, $x = -2 \Rightarrow Z = 0$

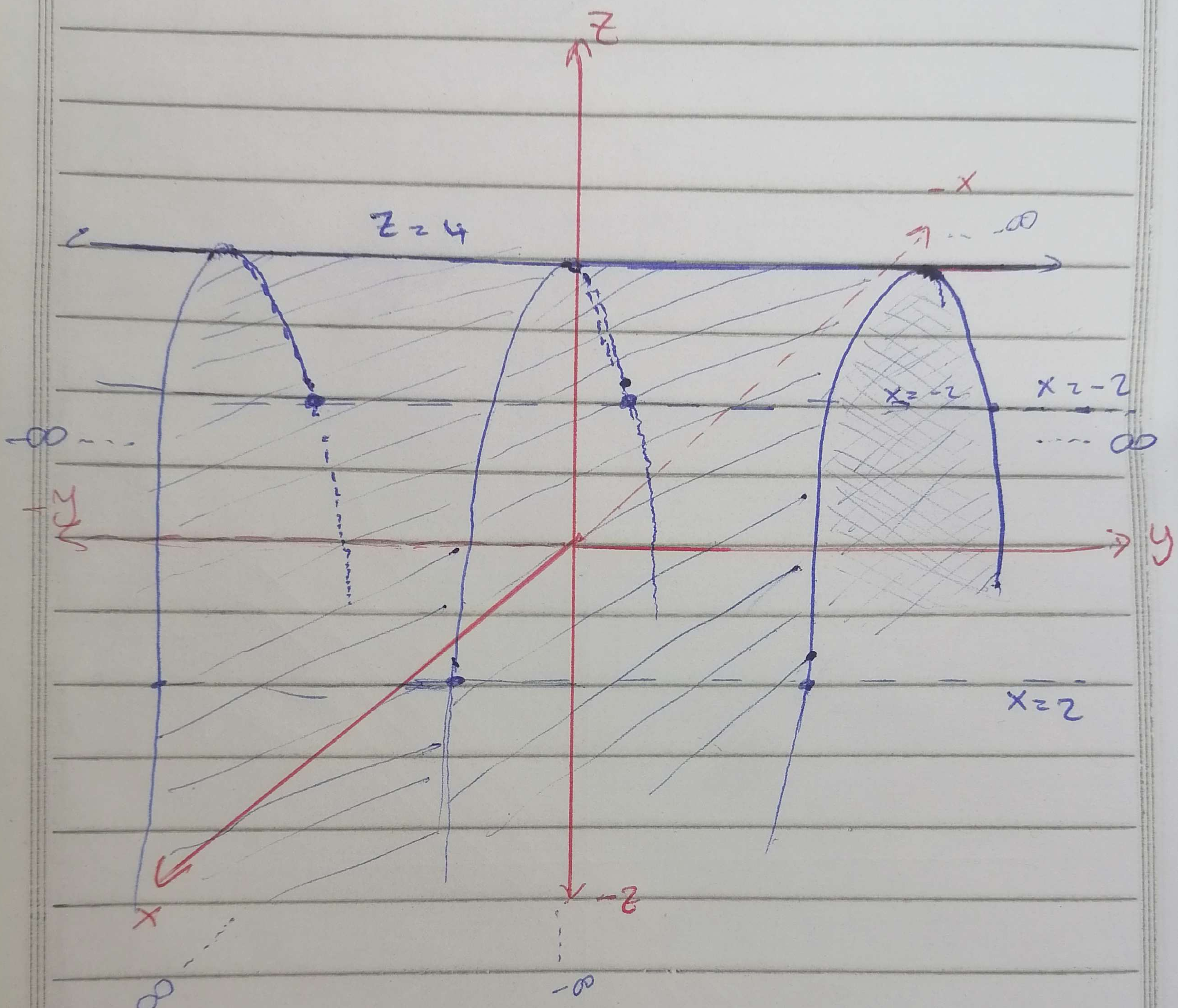
وتناقص Z بلا حدود.



المخطط

: الأشكال عبارة عن تكرار للمنحنى $Z = 4 - x^2$
على طول محور y.

$Z = 4 - x^2$ هو قطع مخروطي، رأسه عند $Z = 4$ ~~ومفتوح~~
ومفتوح لأسفل.


Z
Z = 4
-x
∞
x = -2
x = -2
-∞
∞
-y
y
x = 2
-Z
X
∞
-∞

موضوع الدرس .... اليوم .... التاريخ / / ١٤هـ

4-1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}{x-y}$

بضرب المقام والبسط في $(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})$

نلاحظ أن المقام يتحول ~~لمص~~ لفرق بين مربعين البسط

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+1)-(y+1)}{(x-y)(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{x-y}}{\cancel{(x-y)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+\sqrt{0+1}}$$

~~بالتعويض~~ بالتعويض

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

* ملاحظة التعويض المباشر في بداية المسألة يؤدي لقيمة غير معرفة.

موضوع الدرس .... اليوم .... التاريخ / / ١٤هـ

4-2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2+x^2+y^2}$

بالتعويض المباشر

$= \frac{(0)^2+(0)^2}{2+(0)^2+(0)^2} = \frac{0}{2} = 0$

5-1) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 5$

$x^2 + y^2 \geq xy$

$D = \mathbb{R}^2 \quad , \quad R = [5, \infty)$

نفرض اتصال الدالة عند $x=0 , y=0$ $(0,0)$

1] $f(0,0) = (0)^2 + (0)^2 + (0)(0) + 5 = 5$

∴ ~~موجود~~ معرفة وتساوي 5

2] $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 + xy + 5 = (0)^2 + (0)^2 + (0)(0) + 5 = 5$

∴ النهاية موجودة عند $(0,0)$ وتساوي 5

3] $\because f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 + xy + 5 = 5$

∴ الدالة متصلة عند $(0,0)$
"المستمرة"

∵ الدالة كثيرة حدود في متغيرين

∴ " مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

5-2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

~~D=~~

$D = \mathbb{R}^2$

~~الحل~~

1) الدالة $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ معرفة على $R^2 - \{(0,0)\}$

ولكن من تعريف الدالة $f(0,0) = 0$

∴ الدالة معرفة على كل النقاط في $\mathbb{R}^2$

2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$

$(x,y) \to (0,0) \Rightarrow (r,\theta) \to (0,\theta)$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} \frac{r^{\cancel{2}}\cos^2(\theta)}{\cancel{r}} = \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} r\cos^2(\theta)$$

$= (0)\cos^2(\theta) = \underset{5}{0}$

$$3) \therefore f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

∴ الدالة f متصلة عند $(0,0)$

∴ الدالة متصلة على كل النقاط في $D = \mathbb{R}^2$

"مستمرة"