

# שאלה 1: הוגנות חזקה ליחידים

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. הוכחנו בהרצאה, שכאשר האזרחים מתחלקים לקבוצות "ממוקדות", כך שהאזרחים בכל קבוצה  $j$  נותנים 100% מהתקציב לנושא  $j$ , התקציב המתקבל מתחלק בין הנושאים ביחס ישר למספר התומכים של כל נושא: נושא שיש לו  $k$  תומכים יקבל לפחות  $C \cdot k/n$ . בפרט, נושא שיש לו תומך אחד יקבל לפחות  $C/n$ .

עכשיו נניח שיש רק אזרח אחד ממוקד, הנותן 100% מהתקציב לנושא  $j$ . שאר האזרחים יכולים לחלק את התקציב באופן כלשהו - לא דווקא באופן ממוקד. לדוגמה, נניח שיש שלושה אזרחים ושלושה נושאים והתקציב הכולל הוא 100. הצבעות האזרחים:

- אזרח א: 100, 0, 0
- אזרח ב: 50, 50, 0
- אזרח ג: 50, 50, 0

אזרח א ממוקד, אבל אזרחים ב, ג לא ממוקדים.

**הגדרה:** אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב נקרא **הוגן-חזק ליחידים** אם בכל מצב שבו קיים אזרח ממוקד התומך בנושא  $j$  בלבד, נושא  $j$  מקבל לפחות  $C/n$ .

א. הוכיחו, בעזרת הדוגמה למעלה, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות אינו הוגן-חזק ליחידים. פרטו את שלבי החישוב בעזרת חיפוש בינארי.

\* ב. הציעו אלגוריתם חציון מוכלל, עם פונקציות שונות מהפונקציות שהראינו בהרצאה, שהוא גם הוגן-חזק ליחידים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם, והדגימו אותו על הדוגמה למעלה.

$$C=100, n=3$$

נכתוב את הפונקציות המסופות:

$$f_1(t) = 100 \cdot \min(1, t)$$

$$f_2(t) = 100 \cdot \min(1, 2t)$$

אזרח נשא  $C$ : החציון  $= 0$ .

$$f_1(0) = 100 \cdot 0 = 0, f_2(0) = 100 \cdot 0 = 0$$

$$f_1(1) = 100 \cdot 1 = 100, f_2(1) = 100 \cdot 1 = 100$$

$t=0$ , חציון קטנות 0, 0, מתקן:

נשא א':	0, 0, 100	חציון: 0
נשא ב':	0, 0, 50, 50	חציון: 0
נשא ג':	0, 0, 50, 50	חציון: 0

מסמ החציונים: 0

$t=1$ , חציון קטנות 100, 100, מתקן:

נשא א':	0, 100, 100, 100	חציון: 100
נשא ב':	0, 50, 50, 100, 100	חציון: 50
נשא ג':	0, 50, 50, 100, 100	חציון: 50

מסמ החציונים: 200

והקטור החציונים: 50, 50, 100

$$f_1(\frac{1}{2}) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50, f_2(\frac{1}{2}) = 100 \cdot 1 = 100$$

$t=\frac{1}{2}$ , חציון קטנות 50, 100, מתקן:

נשא א':	0, 0, 50, 100, 100	חציון: 50
נשא ב':	0, 50, 50, 50, 100	חציון: 50
נשא ג':	0, 50, 50, 50, 100	חציון: 50

מסמ החציונים: 150

$$f_1(\frac{1}{4}) = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25, f_2(\frac{1}{4}) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$t=\frac{1}{4}$ , חציון קטנות 50, 25, מתקן:

נשא א':	0, 0, 25, 50, 100	חציון: 25
נשא ב':	0, 25, 50, 50, 50	חציון: 50
נשא ג':	0, 25, 50, 50, 50	חציון: 50

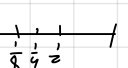
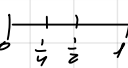
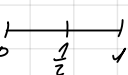
מסמ החציונים: 125

$$f_1(\frac{1}{8}) = 100 \cdot \frac{1}{8} = 12.5, f_2(\frac{1}{8}) = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25$$

$t=\frac{1}{8}$ , חציון קטנות 12.5, 25, מתקן:

נשא א':	0, 0, 12.5, 25, 100	חציון: 12.5
נשא ב':	0, 12.5, 25, 50, 50	חציון: 25
נשא ג':	0, 12.5, 25, 50, 50	חציון: 25

מסמ החציונים: 62.5



$f_1(\frac{3}{16}) = 100 \cdot \frac{3}{16} = 18.75$      $f_2(\frac{3}{16}) = 100 \cdot 2 \cdot \frac{3}{16} = 37.5$     :הקטן, 18.75, 37.5    התחנות,  $t = \frac{3}{16}$

93.75 : פגיונות מרוב	{	18.75 : ילד	0, 0, 18.75, 37.5, 100 : כ' רע
		37.5 : ילד	0, 18.75, 37.5, 50, 50 : ז' רע
		37.5 : ילד	0, 18.75, 37.5, 50, 50 : ז' רע

$f_1(\frac{7}{32}) = 100 \cdot \frac{7}{32} = 21.875$      $f_2(\frac{7}{32}) = 100 \cdot 2 \cdot \frac{7}{32} = 43.75$     :הקטן, 21.875, 43.75    התחנות,  $t = \frac{7}{32}$

109.375 : פגיונות מרוב	{	21.875 : ילד	0, 0, 21.875, 43.75, 100 : כ' רע
		43.75 : ילד	0, 21.875, 43.75, 50, 50 : ז' רע
		43.75 : ילד	0, 21.875, 43.75, 50, 50 : ז' רע

$f_1(\frac{13}{64}) = 100 \cdot \frac{13}{64} = 20.3125$      $f_2(\frac{13}{64}) = 40.625$     :הקטן, 20.3125, 40.625    התחנות,  $t = \frac{13}{64}$

101.5625 : פגיונות מרוב	{	20.3125 : ילד	0, 0, 20.3125, 40.625, 100 : כ' רע
		40.625 : ילד	0, 20.3125, 40.625, 50, 50 : ז' רע
		40.625 : ילד	0, 20.3125, 40.625, 50, 50 : ז' רע

$f_1(\frac{25}{128}) = 100 \cdot \frac{25}{128} = \frac{625}{32}$      $f_2(\frac{25}{128}) = \frac{625}{16}$     :הקטן,  $\frac{625}{32}$ ,  $\frac{625}{16}$     התחנות,  $t = \frac{25}{128}$

$\frac{3125}{32} : \text{פגיונות מרוב} = 97.656$

{	$\frac{625}{32} : \text{ילד}$	0, 0, $\frac{625}{32}$ , $\frac{625}{16}$ , 100 : כ' רע
	$\frac{625}{16} : \text{ילד}$	0, $\frac{625}{32}$ , $\frac{625}{16}$ , 50, 50 : ז' רע
	$\frac{625}{16} : \text{ילד}$	0, $\frac{625}{32}$ , $\frac{625}{16}$ , 50, 50 : ז' רע

$f_1(\frac{51}{256}) = 100 \cdot \frac{51}{256} = \frac{1275}{64}$      $f_2(\frac{51}{256}) = \frac{1275}{32}$     :הקטן,  $\frac{1275}{64}$ ,  $\frac{1275}{32}$     התחנות,  $t = \frac{51}{256}$

$\frac{6375}{64} : \text{פגיונות מרוב} = 99.6$

{	$\frac{1275}{64} : \text{ילד}$	0, 0, $\frac{1275}{64}$ , $\frac{1275}{32}$ , 100 : כ' רע
	$\frac{1275}{32} : \text{ילד}$	0, $\frac{1275}{64}$ , $\frac{1275}{32}$ , 50, 50 : ז' רע
	$\frac{1275}{32} : \text{ילד}$	0, $\frac{1275}{64}$ , $\frac{1275}{32}$ , 50, 50 : ז' רע

$f_1(\frac{103}{512}) = \frac{2575}{128}$      $f_2(\frac{103}{512}) = \frac{2575}{64}$     :הקטן,  $\frac{2575}{128}$ ,  $\frac{2575}{64}$     התחנות,  $t = \frac{103}{512}$

$\frac{12875}{128} = 100.58 : \text{פגיונות מרוב}$

{	$\frac{2575}{128} : \text{ילד}$	0, 0, $\frac{2575}{128}$ , $\frac{2575}{64}$ , 100 : כ' רע
	$\frac{2575}{64} : \text{ילד}$	0, $\frac{2575}{128}$ , $\frac{2575}{64}$ , 50, 50 : ז' רע
	$\frac{2575}{64} : \text{ילד}$	0, $\frac{2575}{128}$ , $\frac{2575}{64}$ , 50, 50 : ז' רע

$f_1(\frac{205}{1024}) = \frac{5125}{256}$      $f_2(\frac{205}{1024}) = \frac{5125}{128}$     :הקטן,  $\frac{5125}{256}$ ,  $\frac{5125}{128}$     התחנות,  $t = \frac{205}{1024}$

$100.09 : \text{פגיונות מרוב}$

{	$\frac{5125}{256} : \text{ילד}$	0, 0, $\frac{5125}{256}$ , $\frac{5125}{128}$ , 100 : כ' רע
	$\frac{5125}{128} : \text{ילד}$	0, $\frac{5125}{256}$ , $\frac{5125}{128}$ , 50, 50 : ז' רע
	$\frac{5125}{128} : \text{ילד}$	0, $\frac{5125}{256}$ , $\frac{5125}{128}$ , 50, 50 : ז' רע

$\frac{100}{3} \approx 33.33$  מיקום מספר הקטן 75 רע 100 פגיונות מרוב

\* ב. הציעו אלגוריתם חציון מוכלל, עם פונקציות שונות מהפונקציות שהראינו בהרצאה, שהוא גם הוגן-חזק ליחידים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם, והדגימו אותו על הדוגמה למעלה.

ה.

$$f_i(t) = c \cdot t$$

$$c=100, n=3$$

נשא  
נשא  
נשא

הפצת האלגוריתם על הדוגמה למעלה:  
אזרח א: 0, 0, 100  
אזרח ב: 50, 50, 0  
אזרח ג: 50, 50, 0

$t=0$ , הפצת קדמות 0, 0, מתקף:

נשא א: 0, 0, 100, 0 חציון: 0  
נשא ב: 0, 0, 50, 50 חציון: 0  
נשא ג: 0, 0, 50, 50 חציון: 0  
סכום החציונים: 0

$t=1$ , הפצת קדמות 100, 100, מתקף:

נשא א: 0, 100, 100, 100 חציון: 100  
נשא ב: 0, 50, 50, 100 חציון: 50  
נשא ג: 0, 50, 50, 100 חציון: 50  
סכום החציונים: 200

נבחין כי הפצת הקדמות צהרתי וכן נשע לסכום החציונים 100 כאשר  $t = \frac{1}{n}$ .

$t = \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$ , הפצת קדמות  $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$ , מתקף:

נשא א: 0,  $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, 100$  חציון:  $\frac{100}{3}$   
נשא ב: 0,  $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, 50$  חציון:  $\frac{100}{3}$   
נשא ג: 0,  $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, 50$  חציון:  $\frac{100}{3}$   
סכום החציונים: 100

מספר (נשא) < מספר אנשים  
אזרח א: 0, 0, 100  
אזרח ב: 50, 50, 0

$t=0$ , הפצת קדמות 0, מתקף:

נשא א: 0, 0, 100 חציון: 0  
נשא ב: 0, 0, 50 חציון: 0  
נשא ג: 0, 0, 50 חציון: 0  
סכום החציונים: 0

$t = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ , הפצת קדמות 50, מתקף:

נשא א: 0, 50, 100 חציון: 50  
נשא ב: 0, 50, 50 חציון: 50  
נשא ג: 0, 50, 50 חציון: 50  
סכום החציונים: 150

$$f_i(t) = ct$$

מספר שלמים  $>$  מספר אנשים  
 אזרח א: 0, 100  
 אזרח ב: 50, 50  
 אזרח ג: 50, 50

$t=0$ , חצרות קדומות 0, 0, מתקף:  
 של א': 0, 0, 100 חציון: 0  
 של ב': 0, 50, 50 חציון: 25  
 של ג': 0, 50, 50 חציון: 25  
 מספר החציונים: 50

$t=1$ , חצרות קדומות 100, 100, מתקף:  
 של א': 0, 100, 100 חציון: 100  
 של ב': 50, 50, 100 חציון: 75  
 של ג': 50, 50, 100 חציון: 75  
 מספר החציונים: 250

$t=\frac{1}{3}$ , חצרות קדומות  $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$ , מתקף:  
 של א':  $0, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$  חציון:  $\frac{100}{3}$   
 של ב':  $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, 50$  חציון:  $\frac{125}{3}$   
 של ג':  $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, 50$  חציון:  $\frac{125}{3}$   
 מספר החציונים:  $110.66$

נרצה להוכיח: אם שחקן א "ממוקד" בנושא ב  
 (כלומר נותן לו 100% מהתקציב), אז כאשר  $t=1/n$   
 ה, התקציב לנושא ב הוא לפחות 1 חלקי n,  
 והתקציב לכל שאר הנושאים הוא לכל היותר 1  
 חלקי n.

נסמן : מספר האנשים  $n$

נסתכל על נושא ב:

אנחנו יודעים ששחקן א נותן לו  $c$ , ולפי הגדרת הפונקציה, יש  $n-1$  הצבעות קבועות של  $c/n$

$$C \leftarrow (n-1) \frac{c}{n}$$

שאר  $n-1$  ההצבעות יכולות להיות איפה שמסומן באדום.

סה"כ יש  $2n-1$  הצבעות, החציון נמצא במספר  $n$ .

כלומר- אם כל ההצבעות של שאר האנשים קטנים מההצבעה הקבועה, מתקיים שהמספר  $n$ , כלומר החציון, הוא ההצבעה הקבועה שהוא  $c/n$

ואם ההצבעות של שאר השחקנים גדולים מההצבעה הקבועה, החציון יהיה המספר  $n$  שיהיה גדול מ- $c/n$

$\Rightarrow$  התקציב לנושא ב הוא לפחות  $c/n$

בלי הגבלת הכלליות נסתכל על נושא א שהוא נושא לא ממוקד:

אנחנו יודעים ששחקן אנותן לו 0,

ההצבעות של שאר  $n-1$  השחקנים יכולים להיות איפה שמסומן באדום, אם כל ההצבעות של שאר השחקנים גדולות מההצבעה הקבועה, ההצבעה הח היא  $c/n$  וזה החציון,

אחרת אם כל ההצבעות של שאר השחקנים קטנים מההצבעה הקבועה או חלק גדול וחלק קטן, החציון יהיה קטן מ  $c/n$  או  $c/n$  ממש.  $\leq$  התקציב לכל שאר הנושאים הוא לכל היותר  $c/n$

כלומר עבור  $t=1/n$  סכום החציונים הוא לכל היותר  $c$ ,

אם סכום החציונים הוא בדיוק  $c$  אז הנושא מקבל  $c/n$  כנדרש

אם סכום החציונים קטן מ  $c$  אז נצטרך להסתכל על  $t$  גדול יותר, כלומר ההצבעות הקבועות יהיו גדולות יותר והנושא יקבל יותר מ  $c/n$  כנדרש.

ומכאן שהאלגוריתם הוא הוגן חזק ליחידים.

