

מטלה – חלוקה מיטבית של חפצים בדידים

- שאלה 0 (רשות – תוספת 2 נקודות): אלגוריתם חלוקה הוגנת של קורסים היכנסו לחשבון שלכם באתר חלוקת הקורסים, שנרשמתם אליו בשבוע שעבר. אתם אמורים לראות בלשונית "תוצאות" את תוצאות אלגוריתם החלוקה.
- א. נסו לשער, מתוך ההסברים, מה האלגוריתם שהופעל? (זה לא אחד מהאלגוריתמים שנלמדו בשיעור, אבל הוא דומה).
- ב. הוכיחו שהאלגוריתם מחזיר חלוקה EF1.
- ג. ענו על השאלות בלשונית "משוב".

בנוסף, יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: חלוקה אגליטרית מדויקת – תיכנות ליניארי בשלמים

- א. כתבו פונקציה למציאת חלוקה אגליטרית מדויקת של חפצים בדידים ע"י תיכנות ליניארי בשלמים. כותרת הפונקציה כמו במטלה הקודמת:

```
def egalitarian_allocation(  
    valuations: list[list[float]])
```

כאשר valuations היא מטריצת הערכים. דוגמה לקלט:

```
egalitarian_allocation(  
    valuations=[[11,11,22,33,44], [11,22,44,55,66], [11,33,22,11,66]])
```

מותר להשתמש בקוד מפתרון המטלה הקודמת. שימו לב שהפעם החפצים בדידים, ולכן הפלט יהיה שונה מבמטלה הקודמת. דוגמה לפלט:

Player 0 gets items 0, 4 with value 55

Player 1 gets items 3 with value 55

Player 2 gets items 1, 2 with value 55

- ב. ציירו גרף של זמן הריצה של הפונקציה שלכם כפונקציה של מספר החפצים, כאשר החפצים בדידים; וגרף נוסף כאשר החפצים רציפים (כמו במטלה הקודמת).

שאלה 2: חלוקה אגליטרית מדויקת – חיפוש במרחב המצבים

א. כתבו תוכנית בפייתון, המבצעת חיפוש במרחב המצבים לבעיית חלוקת חפצים אגליטרית בין שני שחקנים. כותרת הפונקציה כמו בשאלה 1, רק שהפעם ניתן להניח שיש רק שני שחקנים. לדוגמה:

```
>>> egalitarian_allocation([4, 5, 6, 7, 8], [8, 7, 6, 5, 4])
```

```
Player 0 gets items 3, 4 with value 15
```

```
Player 1 gets items 0, 1, 2 with value 21
```

ב. ציירו גרפים של זמן הריצה של הפונקציה שלכם כפונקציה של מספר החפצים, כאשר משתמשים בשני כללי-הגיזום שלמדנו בהרצאה, או רק בכלל א, או רק בכלל ב, או באף אחד מהכללים.

* ג. כתבו פונקציה כנ"ל למציאת חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים (רמז: רוב הקוד יהיה דומה לסעיף א).

שאלה 3: אלגוריתם הרשימה – יחס קירוב מדויק יותר

הוכיחו: יחס הקירוב של אלגוריתם הרשימה בחלוקת מטלות ל- n שחקנים הוא לכל היותר:

$$2 - 1/n$$

שאלה 4: האלגוריתם החמדני – יחס קירוב הדוק

בסיכום הוכחנו, שלכל n , ולכל בעיית חלוקת מטלות עם n שחקנים, יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני הוא לכל היותר $(4n-1)$ חלקי $(3n)$.

הראו, שלכל n , קיימת בעיית חלוקת מטלות עם n שחקנים, שבה יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני הוא בדיוק $(4n-1)$ חלקי $(3n)$.

רמז: הדוגמה בהרצאה מתאימה ל- $n=4$; נסו להכליל את הדוגמה לכל n .

שאלה 5: סיבוכיות מיקסום המכפלה

הוכיחו, שהבעיה של מציאת חלוקת-חפצים הממקסמת את מכפלת הערכים היא NP-קשה.

רמז: רדוקציה מבעיית חלוקת המספרים (Partition).

הוכיחו: יחס הקירוב של אלגוריתם הרשימה בחלוקת מטלות ל- n שחקנים הוא לכל היותר:

נסמן $\rho_T = \rho_{\text{האנרגיה}}$

א' אחד החוקה, סמם הסליות של כל שמן בחוקה האגלית ≥ 1 .
 סמ הסליות של ס מלח ≥ 1 , וסמם הסליות של ס הסליות $\geq n$.

נניח בפעולה שקימור חלוקה, שאחידה $\frac{1}{n} - 2 > \max$ (מחקר לפעולה שלו עבודה / עמה מט 2 פעור $\frac{1}{n}$)
נסמן את אולל שמקור ב X .

הוכחה: $V(j) = \text{הערך המקסימלי של } V \text{ על } S_j$ $\min V(j) > 2 - \frac{1}{n}$:נניח

$$\min > 1 - \frac{1}{n}$$

• t פרק הזמן $V(t)$ הפרק שבו נעונו $K \approx 1$ נ"ש

$$\geq \sum_{t=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 - \frac{1}{n} = (n-1) \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 - \frac{1}{n} = (n-1) \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

באותו קיבולת: $\sum_{i=1}^k V(i) > n$ בסתירה (כחול - איננה התאמת)