

## מטלה – מיזוג הצעות תקציב

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

### שאלה 1: הוגנות חזקה ליחידים

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. הוכחנו בהרצאה, שכאשר האזרחים מתחלקים לקבוצות "ממוקדות", כך שהאזרחים בכל קבוצה  $j$  נותנים 100% מהתקציב לנושא  $j$ , התקציב המתקבל מתחלק בין הנושאים ביחס ישר למספר התומכים של כל נושא: נושא שיש לו  $k$  תומכים יקבל לפחות  $C \cdot k/n$ . בפרט, נושא שיש לו תומך אחד יקבל לפחות  $C/n$ .

עכשיו נניח שיש רק אזרח אחד ממוקד, הנותן 100% מהתקציב לנושא  $j$ . שאר האזרחים יכולים לחלק את התקציב באופן כלשהו – לא דווקא באופן ממוקד. לדוגמה, נניח שיש שלושה אזרחים ושלושה נושאים והתקציב הכולל הוא 100. הצבעות האזרחים:

- אזרח א: 0, 100, 0
- אזרח ב: 0, 50, 50
- אזרח ג: 0, 50, 50

אזרח א ממוקד, אבל אזרחים ב, ג לא ממוקדים.

**הגדרה:** אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב נקרא **הוגן-חזק ליחידים** אם בכל מצב שבו קיים אזרח ממוקד התומך בנושא  $j$  בלבד, נושא  $j$  מקבל לפחות  $C/n$ .

א. הוכיחו, בעזרת הדוגמה למעלה, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות אינו הוגן-חזק ליחידים. פרטו את שלבי החישוב בעזרת חיפוש בינארי.

\* ב. הציעו אלגוריתם חציון מוכלל, עם פונקציות שונות מהפונקציות שהראינו בהרצאה, שהוא גם הוגן-חזק ליחידים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם, והדגימו אותו על הדוגמה למעלה.

### שאלה 2: אלגוריתם הממוצע

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע **אינו** יעיל פארטו כשיש שלושה נושאים.

ג. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא הוגן לקבוצות.

### שאלה 3: מניפולציה קבוצתית

נתון אלגוריתם כלשהו לחלוקת משאבים. נאמר שלתת-קבוצה כלשהי של שחקנים יש **מניפולציה קבוצתית מוצלחת** אם הם יכולים לשנות את הקלט שלהם (להגיד ערכים שונים מהערכים האמיתיים שלהם), כך שלפחות שחקן אחד מהקבוצה ירוויח, וכל השחקנים בקבוצה לא יפסידו.

אלגוריתם הוא **מגלה-אמת לקבוצות** (באנגלית group strategyproof) אם לאף תת-קבוצה של שחקנים אין מניפולציה קבוצתית מוצלחת. שימו לב: אלגוריתם הוא מגלה-אמת (לפי ההגדרה שראינו

באחד השיעורים הקודמים) אם לאף תת-קבוצה בגודל 1 אין מניפולציה קבוצתית מוצלחת. לכן, כל אלגוריתם מגלה-אמת-לקבוצות הוא גם מגלה-אמת.

א. הוכיחו, שמכרז ויקרי למכירת חפץ יחיד אינו מגלה-אמת-לקבוצות.

ב. הוכיחו, שאלגוריתם החציון הפשוט הוא מגלה-אמת-לקבוצות.

## שאלה 4: פונקציית תועלת שונה

בהרצאה הגדרנו את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן  $i$  כסכום המרחקים בין התקציב האידיאלי שלו לבין התקציב בפועל:

- $\text{Sum}_j |d_j - p_{i,j}|$
- נניח שמגדירים את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן כסכום ריבועי המרחקים:
- $\text{Sum}_j (d_j - p_{i,j})^2$

א. הוכיחו, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות ליניאריות אינו מגלה אמת. העזרו בדוגמה הבאה, עם שלושה נושאים ושני אזרחים:

- אזרח א: 20, 60, 20.
- אזרח ב: 0, 50, 50.

\* ב. הוכיחו, שעם פונקציות התועלת הריבועיות, אלגוריתם הממוצע הוא יעיל פארטו לכל מספר של נושאים.

## שאלה 5: תיכנות: חישוב תקציב

כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט את כמות הכסף בקופה והצבעות האזרחים, ומחשבת את התקציב בעזרת אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. כותרת הפונקציה:

```
def compute_budget(
    total_budget:float,
    citizen_votes:List[List]
) -> List[float]
```

הנה דוגמת קריאה לפונקציה עבור תקציב עם שלושה סעיפים, ושני אזרחים:

```
compute_budget(100, [ [100, 0, 0], [0, 0, 100] ])
```

הערך המוחזר הוא רשימה עם מספרים כמספר הסעיפים, למשל:

```
[50, 0, 50]
```

צרפו דוגמאות-הרצה.

# שאלה 1: הוגנות חזקה ליחידים

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. הוכחנו בהרצאה, שכאשר האזרחים מתחלקים לקבוצות "ממוקדות", כך שהאזרחים בכל קבוצה  $j$  נותנים 100% מהתקציב לנושא  $j$ , התקציב המתקבל מתחלק בין הנושאים ביחס ישר למספר התומכים של כל נושא: נושא שיש לו  $k$  תומכים יקבל לפחות  $C \cdot k/n$ . בפרט, נושא שיש לו תומך אחד יקבל לפחות  $C/n$ .

עכשיו נניח שיש רק אזרח אחד ממוקד, הנותן 100% מהתקציב לנושא  $j$ . שאר האזרחים יכולים לחלק את התקציב באופן כלשהו – לא דווקא באופן ממוקד. לדוגמה, נניח שיש שלושה אזרחים ושלושה נושאים והתקציב הכולל הוא 100. הצבעות האזרחים:

- אזרח א: 100, 0, 0.
- אזרח ב: 0, 50, 50.
- אזרח ג: 0, 50, 50.

אזרח א ממוקד, אבל אזרחים ב, ג לא ממוקדים.

**הגדרה:** אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב נקרא **הוגן-חזק ליחידים** אם בכל מצב שבו קיים אזרח ממוקד התומך בנושא  $j$  בלבד, נושא  $j$  מקבל לפחות  $C/n$ .

א. הוכיחו, בעזרת הדוגמה למעלה, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות אינו הוגן-חזק ליחידים. פרטו את שלבי החישוב בעזרת חיפוש בינארי.

$$C=100, n=3$$

נניח תמיד 2 הצבעות קבולות: 1:  $100 \cdot \min(1, t)$ , 2:  $100 \cdot \min(1, 2t)$

בהתחלה נבדוק את האינטרוויל של  $t=0, t=1$ .

$$t=0: 100 \cdot 0 = 0, 100 \cdot 0 = 0 \quad \text{1: } 2, \quad \text{2: } 0$$

$$t=1: 100 \cdot 1 = 100, 100 \cdot 1 = 100 \quad \text{1: } 1, \quad \text{2: } 2$$

$$t=0: 0, 0, 100$$

$$t=0.5: 0, 50, 50$$

$$t=1: 0, 50, 50$$

כאשר  $t=0$  מוסים את ההצבעות 0, 0.

$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ t \end{array} \right]$	$\left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right]$	$t=0: 0, 0, 100$	$t=0.5: 0, 50, 50$	$t=1: 0, 50, 50$
		$t=0: 0, 0, 100$	$t=0.5: 0, 50, 50$	$t=1: 0, 50, 50$
		$t=0: 0, 0, 100$	$t=0.5: 0, 50, 50$	$t=1: 0, 50, 50$

קבלנו שהחלוקה מנצלת את כל הקולות (סכום המאנים = 0)

כאשר  $t=1$  מוסים את ההצבעות 50, 50.

$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ t \end{array} \right]$	$\left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right]$	$t=0: 0, 0, 100, 100, 100$	$t=0.5: 0, 50, 50, 100, 100$	$t=1: 0, 50, 50, 100, 100$
		$t=0: 0, 0, 100, 100, 100$	$t=0.5: 0, 50, 50, 100, 100$	$t=1: 0, 50, 50, 100, 100$
		$t=0: 0, 0, 100, 100, 100$	$t=0.5: 0, 50, 50, 100, 100$	$t=1: 0, 50, 50, 100, 100$

קבלנו שהחלוקה מנצלת את כל הקולות (סכום המאנים = 0)

נראה שיש החלוקה הדינאמית (מחצית ונקב)  $t=0.5$ .

$$50 = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.5) \quad t=0.5$$

$$100 = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.5)$$

0,	0.5 ↘ t	1]	0, 0, 50, 100, 100	נאכל $\bar{c}$ :
			0, 0, 50, 100, 100	נאכל $\bar{c}$ :
			0, 0, 50, 100, 100	נאכל $\bar{c}$ :

קיבלנו שהחלוקה מנצ'ר 150 פלים (סגס המלנים) יולם מהתקלם.

$$25 = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.25) \quad t=0.25$$

$$50 = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.25)$$

0,	0.25 ↘ t	0.5	1]	0 0 25 50 100	נאכל $\bar{c}$ :
				0 25 50 50 50	נאכל $\bar{c}$ :
				0 25 50 50 50	נאכל $\bar{c}$ :

קיבלנו שהחלוקה מנצ'ר 125 פלים (סגס המלנים) יולם מהתקלם.

$$12.5 = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.125) \quad t=0.125$$

$$25 = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.125)$$

0,	0.125 ↘ t	0.25	0.5	1]	0 0 12.5 25 100	נאכל $\bar{c}$ :
					0 12.5 25 50 50	נאכל $\bar{c}$ :
					0 12.5 25 50 50	נאכל $\bar{c}$ :

קיבלנו שהחלוקה מנצ'ר 62.5 פלים (סגס המלנים) יולם מהתקלם.

$$18.75 = 1 \text{ חוסה} = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.1875) \quad t = 0.1875$$

$$37.5 = 2 \text{ חוסה} = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.1875)$$

אנקדס:  $\bar{c}$   $0, 18.75, 37.5, 100$  :  $\bar{c}$   $0, 18.75, 37.5, 50, 50$  :  $\bar{c}$   $0, 18.75, 37.5, 50, 50$  :  $\bar{c}$

גבולו של חלוקה מרצה 93.75 פלים (סגס המלגס) של מהתקב.

$$t = (0.1875 + 0.25) / 2 =$$

$$t = 0.21875$$

$$21.875 = 1 \text{ חוסה} = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.21875)$$

$$43.75 = 2 \text{ חוסה} = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.21875)$$

אנקדס:  $\bar{c}$   $0, 21.875, 43.75, 100$  :  $\bar{c}$   $0, 21.875, 43.75, 50, 50$  :  $\bar{c}$   $0, 21.875, 43.75, 50, 50$  :  $\bar{c}$

גבולו של חלוקה מרצה 104.375 פלים (סגס המלגס) של מהתקב.

$$t = 0.21875 + 0.1875 / 2$$

$$t = 0.203125$$

$$20.315 = 1 \text{ חוסה} = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.20315)$$

$$40.625 = 2 \text{ חוסה} = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.203125)$$

אנקדס:  $\bar{c}$   $0, 20.315, 40.625, 100$  :  $\bar{c}$   $0, 20.315, 40.625, 50, 50$  :  $\bar{c}$   $0, 20.315, 40.625, 50, 50$  :  $\bar{c}$

גבולו של חלוקה מרצה 101.565 פלים (סגס המלגס) של מהתקב.

$$t = (0.203125 + 0.1953125) / 2$$

$$t = 0.19921875$$

$$19.53125 = 1 \text{ הוספה} = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.1953125)$$

$$39.0625 = 2 \text{ הוספה} = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.1953125)$$

אנקודות:  $\bar{t}$  : 0, 0, 19.53125, 39.0625, 100

$\bar{s}$  : 0, 19.53125, 39.0625, 50, 50

$\bar{e}$  : 0, 19.53125, 39.0625, 50, 50

הבולו שהחזיקה מנצח 97.6525 פלים (סגס המלנים) - לא נסגל.

$$t = (0.1953125 + 0.203125) / 2 =$$

$$t = 0.19921875$$

$$19.921875 = 1 \text{ הוספה} = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.19921875)$$

$$39.84375 = 2 \text{ הוספה} = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.19921875)$$

אנקודות:  $\bar{t}$  : 0, 0, 19.921875, 39.84375, 100

$\bar{s}$  : 0, 19.921875, 39.84375, 50, 50

$\bar{e}$  : 0, 19.921875, 39.84375, 50, 50

הבולו שהחזיקה מנצח 99.609 פלים (סגס המלנים) - לא נסגל.

$$t = (0.19921875 + 0.203125) / 2 =$$

$$t = 0.201171875$$

$$20.1171875 = 1 \text{ הוספה} = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.201171875)$$

$$40.234375 = 2 \text{ הוספה} = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.201171875)$$

אנקודות:  $\bar{t}$  : 0, 0, 20.1171875, 40.234375, 100

$\bar{s}$  : 0, 20.1171875, 40.234375, 50, 50

$\bar{e}$  : 0, 20.1171875, 40.234375, 50, 50

הבולו שהחזיקה מנצח 100.58 פלים (סגס המלנים) - לא נסגל.

$$t = (0.19921815 + 0.20111115) / 2 =$$

$$t = 0.2001953125$$

$$20.01953125 = \text{הוספה } 1 = 100 \cdot \min(1, 1 \cdot 0.2001953125)$$

$$40.0390625 = \text{הוספה } 2 = 100 \cdot \min(1, 2 \cdot 0.2001953125)$$

ארבעה:  $\bar{a}$  : 0, 20.01953125, 40.0390625, 100  
 נאלי:  $\bar{b}$  : 0, 20.01953125, 40.0390625, 50, 50  
 נאלי:  $\bar{c}$  : 0, 20.01953125, 40.0390625, 50, 50

קיבלנו שהחלוקה מוצגת 100.0915 שלבים (סגסג הממונים) - בלשן הקלד. - נאליסיה

נאליסיה יניק פאלור מ  $100/3 = 33.33$  מאחר והוא יניק - 20.0195.

מאחר שכל הממונים אינן היומן חתך ל' חתכים.