

מטלה - חלוקת חפצים בדידים

שאלה 0: חובה לכולם

יש להירשם לאתר חלוקת הקורסים: <https://faircourse.csariel.xyz>, ולמלא את ההעדפות שלכם לגבי קורסים. המידע ישמש לצורך הדגמה בשיעור הבא.

בנוסף, יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול. סעיפים המסומנים בכוכבית (*) הם סעיפי רשות, ומזכים את השאלה בניקוד כפול.

* שאלה 1: חלוקה אגליטרית: תיכנות

כתבו פונקציה בשפת פייתון, המוצאת חלוקה אגליטרית של משאבים רציפים. כותרת הפונקציה:

```
def egalitarian_allocation(  
    valuations: list[list[float]])
```

כאשר valuations היא מטריצת הערכים. דוגמה לקלט:

```
egalitarian_allocation(  
    valuations=[[11,11,22,33,44], [11,22,44,55,66], [11,33,22,11,66]])
```

הקלט מתאר בעיית חלוקה של חמישה חפצים בין שלושה שחקנים. השחקן הראשון מעריך את החפצים ב [11,11,22,33,44], השחקן השני מעריך אותם ב [11,22,44,55,66], וכו'.

הפונקציה צריכה לכתוב את תוצאת החלוקה:

```
player 0 receives 50% of resource 0 and 30% of resource 2  
player 1 receives 50% of resource 0 and 70% of resource 1
```

וכו'. יש להגיש קוד בגיטהאב + בדיקות.

* שאלה 2: אלגוריתם הסבב המשוקלל - תיכנות

כתבו פונקציה בשפת פייתון, המריצה את אלגוריתם הסבב המשוקלל. כותרת הפונקציה:

```
def weighted_round_robin(  
    rights: list[float],  
    valuations: list[list[float]],  
    y: float)
```

כאשר: rights היא רשימת הזכויות של כל שחקן, valuations היא מטריצת הערכים, ו-y הוא המספר הנמצא בפונקציה $f(s) = s + y$. דוגמה לקלט:

```
weighted_round_robin(  
    rights=[1,2,4],  
    valuations=[[11,11,22,33,44], [11,22,44,55,66], [11,33,22,11,66]],  
    y=0.5)
```

הקלט מתאר בעיית חלוקה של חמישה חפצים בין שלושה שחקנים. הזכויות של השחקנים הן: השחקן הראשון - 1, השני - 2, השלישי - 4. ערכי השחקנים הם: השחקן הראשון - [11,11,22,33,44], וכו'.

הפונקציה צריכה לכתוב את תהליך החלוקה, לדוגמה:

```
player 0 takes item 3 with value 33
```

player 1 takes item 0 with value 11

וכו'.

יש להגיש קוד בגיטהאב + בדיקות. בבדיקות, התייחסו גם למקרים הפרטיים של (א) חפצים זהים וזכויות שוות, (ב) חפצים שונים וזכויות שוות, (ג) חפצים זהים וזכויות שונות.

שאלה 3: הסכמי עודפים

הסכם עודפים הוא הסכם בין שתי מפלגות, המתבצע באופן הבא:

- לכל זוג של מפלגות שחתם על הסכם, מגדירים מפלגת-על הכוללת את הקולות של שתי המפלגות.
- מריצים את **אלגוריתם חלוקת המושבים** על המפלגות המתקבלות.
- לכל זוג של מפלגות שחתם על הסכם, בודקים כמה מושבים קיבלה מפלגת-העל שלהם, ומחלקים את המושבים בין המפלגות באופן-הוגן (מעגלים לשלם-הקרוב ביותר) **לפי אלגוריתם חלוקת המושבים המקורי**.

א. תארו דוגמה של בחירות עם 3 מפלגות (א, ב, ג), שבה חלוקת המושבים מתבצעת בשיטת ג'פרסון, והתוצאות בלי הסכם עודפים שונות מהתוצאות כאשר מפלגות א+ב עושות הסכם עודפים ביניהן.

ב. תארו דוגמה כנ"ל, כאשר חלוקת המושבים מתבצעת בשיטת וובסטר; הראו, שמפלגה החותמת על הסכם עודפים עלולה להפסיד מושב.

רמז: אם לא הצלחתם לפתור עם שיטת וובסטר, נסו לפתור עם שיטת אדמס.

* ג. הראו, שבשיטת ג'פרסון, מפלגה החותמת על הסכם עודפים לעולם לא מפסידה מושב.

שאלה 4: פרדוקס אלאבאמה

אלגוריתמים לחלוקת מושבים משמשים גם לחלוקת המושבים בקונגרס בין המדינות בארה"ב. חלוקת-המושבים נקבעת באופן יחסי לאוכלוסיה, ומתעדכנת לפי מפקד שנערך כל 10 שנים. אחרי המפקד של 1880, רצו להגדיל את מספר-המושבים בקונגרס. התברר, שאם מספר המושבים בקונגרס יהיה 299, אז מדינת אלאבאמה תקבל 8 מושבים; אבל אם מספר המושבים יהיה 300, אז אלאבאמה תקבל רק 7 מושבים. מצב זה נקרא פרדוקס אלאבאמה.

א. הראו דוגמה לפרדוקס אלאבאמה כאשר משתמשים בשיטת המילטון.

ב. הוכיחו שפרדוקס אלאבאמה לא קורה כאשר משתמשים בשיטת-מחלק כלשהי.

שאלה 5: חלוקה כמעט-ללא-קנאה עבור תורנויות

תורנויות הן חפצים עם ערך שלילי.

א. הגדירו גרסה של EF1 המתאימה לתורנויות; הסבירו מה שיניתם ומדוע.

ב. תארו אלגוריתם המחזיר חלוקה EF1 של תורנויות; הוכיחו את תשובתכם.

ברוך ה' חנוך הדעת

ג. הגדירו גירסה של EF1 המתאימה לשילוב של חפצים ותורנויות (- חפצים עם ערכים חיוביים או שליליים); הסבירו מה שיניתם ומדוע.

* ד. תארו אלגוריתם המחזיר חלוקה EF1 של שילוב של חפצים ותורנויות; הוכיחו את תשובתכם.