נעמה ששני

318607314

שאלה 1: אלגוריתם המכרז עם מס

נתונה בעיית חלוקה עם כסף, של m חפצים בין n אנשים. כל אדם המקבל סכום כסף חיובי כלשהו x צריך לשלם t*x מס הכנסה, כאשר t הוא מספר קבוע כלשהו בין 0 ל-1 (נניח t=0.3 זה 30% מס).

א. הראו שאלגוריתם "המכרז השווה" לא תמיד מחזיר חלוקה ללא קנאה.

- שימו לב: מס הכנסה מתייחס לתשלום **נטו**, לדוגמה, אם שחקן שילם 100 וקיבל 150, הוא ישלם מס רק על 50; אם הוא שילם 100 וקיבל 50, הוא לא ישלם מס בכלל.

* ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה, או הוכיחו שלא קיים כזה.

סעיף א

נביא דוגמא ונראה קינאה -

ניקח את הדוגמא של השיעור

	ספר	פנתר	שטיח	סה"כ
א	60	50	30	140
ב	50	40	40	130
ג	50	20	0	70
מקסימום	60	50	40	150

מחלקים 50 לכל אחד וטבלת עם מס 90% -

נטו		ברוטו	נקי מס	קיבל במס 90%	אחרי מ"ס 90%
-60	א	50	50	0	50
10	ב	50	40	$10 \cdot 0.1 = 1$	41
45	ג	50	0	$50 \cdot 0.1 = 5$	5

z_i = ערך מס שלקחו לשחקן i

נבצע את החישוב של קינאה כך -

$$V_i(X_j) - V_j(X_j) + S/n - z_j \le S/n - z_i$$

כי עכשיו בערך של שחקן הכסף לפי המס שלקחו ולו נבדוק אם שחקן ג מקנא בשחקן א

$$V_i(X_j) - V_j(X_j) + S/n - z_j$$

$$70 - 110 + 50 - 0 = 10 \cancel{\le} S/n - z_i = 50 - 45 = 5$$

שחקן ג מייחס לשחקן א ערך של 10 ולעצמו ערך של 5 לכן הוא מקנא בשחקן א.

סעיף ב -

אלגוריתם חלוקת תפקיד -

1. כל שחקן מדרג את המוצרים
2. מוצר x נותנים לשחקן שדירג אותו הכי גבוה
3. כל שחקן מביא כסף לפי ערך הסל שלו בעינו $V_i(X_i)$ (v_i פונקציה ערך של לשחקן i ; x_i סל של i)
4. מעבירים לאלגוריתם חלוקת הכסף

אלגוריתם חלוקת הכסף (S של הכסף שנאסף)

1. מחלקים את S שווה בשווה
2. לוקחים מס מכל השחקנים שיש להם רווח כספי
3. עבור שחקן i לוקחים את הכסף שלו שנקי ממס (כלומר שלא נלקח ממנו מס) לוקחים מס t ממנו ומכניסים את הסכום הזה ל-S
4. אם $n_1=0$ / $n_2=0$ / $S=0$ נחלק שוב בשווה את S.
5. פותרים משוואה $Y(1-t)/n_2 = (S-Y)/n_1$
   למצוא את Y

Y = נעלם	S = סכום לחלוקה
n_1 = מספר האנשים שאין להם מס לשלם	t = מ"ס
n_2 = האנשים שיש להם מס לשלם	

6. אם מחלקים את Y/n_2 לכל השחקנים מ-n_2 הם עדין לא חייבים כנס
   6.1 מחלקים את Y/n_2 ל-n_2 השחקנים ו-$(S-Y)/n_1$ ל-n_1 השחקנים וסיימנו
7. else
   7.1 חוזרים לשלב 1 באלגוריתם עם ה-S החדש

דוגמא - נקח את הדוגמא למעלה - (תזכורת $t=0.9$)

נפעיל את אלגוריתם חלוקת הכסף כי אלגוריתם חלוקת המוצרים אמרנו כבר

שלב 1+2 -

שחקן	רווח נקי ממס	רווח עם מס	סה"כ
א	50	0	50
ב	40	$10 \cdot 0.1 = 1$	41
ג	0	$50 \cdot 0.1 = 5$	5

נטו

$-110+50=-60$

$-40+50=10$

$0+50=50$

שלב 3 - ניקח מס t משחקן א וב על הרווח הנקי $40 \cdot 0.9 + 50 \cdot 0.9 = 81$

לכן $S=81$

ועכשיו לכל שחקן יש רווח של 5

שלב 4 - A קורה

שלב 5 - n_1 - 1 (אלו שיש להם 0 בעמודה "רווח עם מס")

n_2 - 2 של השאר

$$\boxed{Y(1-t)/n_2 = (S-Y)/n_1}$$

$$\frac{Y \cdot 0.1}{2} = 81 - Y \rightarrow 1.05Y = 81 \rightarrow Y = 77.142$$

שלב 6 - קורה

אם נוסיף לשחקן א $(S-Y)/n_1 = (81 - 77.142) = 3.858$

הוא כבר עדיין ב n_2 ולא חייב במס

שלב 6.1 -

שחקן	רווח קודם	רווח נקי ממס	רווח עם מס	סה"כ
א	5	$\frac{81-77.14}{1} = 3.857$	0	8.857
ב	5	0	$\frac{77.142}{2} = 38.57 \cdot 0.1 = 3.857$	8.857
ג	5	0	$\frac{77.142}{2} = 38.57 \cdot 0.1 = 3.857$	8.857

$-60+3.857= -$

$10+38.57= +$

$50+38.57= +$

סיימנו הערך של כל שחקן 8.857 יעיל פארטו וללא קינאה

דוגמא 2 -

כאשר מס 90% כלומר $t=0.9$

אלגוריתם חלוקת מוזריים -

שלב 1+2 -

	ספה	פסנתר	שטיח	סה"כ
א	7	7	1	15
ב	2	3	7	12
ג	4	2	0	7
מקסימום	7	7	7	21

שלב 3 - כל שחקן מביא את ערך הסל שלו בכסף: שחקן א - 14

$S=21$

שחקן ב - 7

שחקן ג - 0

שלב 4 - נעבור לאלגוריתם חלוקת הכסף

אלגוריתם חלוקת הכסף -

שלב 1+2 - נחלק את S שוה בשווה $21/3=7$

שחקן	רווח נקי ממס	רווח עם מס	סה"כ
א	7	0	7
ב	7	0	7
ג	0	$7\cdot0.1=0.7$	0.7

נטו

$-13+7=-6$ רווח נקי

$-7+7=0$ רווח נקי

$0+7=7$ אין רווח נקי

שלב 3 - ניקח מס t משחקן א וב על הרווח הנקי $7\cdot0.9+7\cdot0.9=12.6$

ולכן $S=12.6$

ועכשיו לכל שחקן יש רווח של 0.7

שלב 4 - קורה A

שלב 5 - n_1 - 2 (אלו שיש להם 0 במשבצת "רווח עם מס")

n_2 - 1 כל השאר

$$\boxed{Y(1-t)/n_2=(S-Y)/n_1}$$

$$Y\cdot0.1=\frac{12.6-Y}{2} \rightarrow 1.1Y=6.3 \rightarrow Y=5.727$$

שלב 6 - A קורה

שלב 7 - אם נוסיף לשחקן ב $(S-Y)/n_1=(12.6-5.727)/2=3.436$

הוא כבר A ב n_2 ויהיה חייב אלף בעס לכן נגיע ל- 1

שלב 2+1 - נניח שורה ראשונה את S $12.6/3=4.2$

שחקן	רווח נקי ממס	רווח פס מס	סה"כ
א	4.2	0	$0.7+4.2=4.9$
ב	0	$4.2\cdot0.1=0.42$	$0.7+0.42=1.12$
ג	0	$4.2\cdot0.1=0.42$	$0.7+0.42=1.12$

נכון

רווח נקי $-6+4.2=-1.8$

אין רווח נקי $0+4.2=4.2$

יש רווח נקי $7+4.2=11.2$

שלב 3 - ניקח מס t משחקן א על הרווח הנקי $4.2\cdot0.9=3.78$

לכן $S=3.78$

ועכשיו לכל שחקן יש רווח של 1.12

שלב 4 - A קורה

$$\boxed{Y(1-t)/n_2=(S-Y)/n_1}$$

שלב 5 - $1-n_1$ (אלו שיש להם 0 בעמודה "רווח פס מס")

$2-n_2$ לכל השאר

$$\frac{Y\cdot0.1}{2}=3.78-Y \rightarrow 1.05Y=3.78 \rightarrow Y=3.6$$

שלב 6 - קורה

אם נוסיף לשחקן א $(S-Y)/n_1=(3.78-3.6)=0.18$

הוא כבר עכשיו ב n_2 ולא חייב במס

שלב 6.1 -

שחקן	רווח קודם	רווח נקי ממס	רווח פס מס	סה"כ	
א	1.12	0.18	0	1.3	-
ב	1.12	0	$\frac{3.6}{2}=1.8\cdot0.1=0.18$	1.3	+
ג	1.12	0	$\frac{3.6}{2}=1.8\cdot0.1=0.18$	1.3	+

סיימנו הערך של כל שחקן 1.3 יעיל פארטו וללא קנאה

הוכחה שהאלגוריתם יעיל פארטו -

יעילות פארטו נובעת מכך שכל חפץ נמסר לשחקן המייחס ערך גבוה ביותר
ופרופורציונליות נובעת מכך שכל שחקן מקבל את הערך אחרי מס שווה לכל ערך של שחקן אחר
בדומה להוכחת פרופורציונליות של התשלום השווה

הוכחה שהאלגוריתם ללא קנאה -

נסמן את הערך של שחקן i בפונקציה V_i ואת הסל שקיבל X_i כיוון שכל חפץ נמסר
לשחקן המייחס לו את הערך הגבוה ביותר מתקיים : $V_i(X_j) \le V_j(X_j)$ (1)

הערך ששחקן נותן לעצמו - S_i^* הערך הסופי שכל שחקן מקבל בכסף והוא שווה כי האלגוריתם מחלק
אותו שווה בשווה גם עם מיסים

הערך של שחקן נותן לשחקן האחר $V_i(X_j) - V_j(X_j) + S_i^*$

בגלל (1) הערך ששחקן נותן לסל של שחקן אחר קטן ממה שהוא קיבל $V_i(X_j) - V_j(X_j) + S_i^* \le S_i^*$

לכן החלוקה ללא קנאה.