

מטלה – חלוקת חפצים עם כסף

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בניקוד כפול.
יש להוכיח את נכונות התשובות. אפשר לכתוב אלגוריתם בפסאודו-קוד, אבל הוא צריך להיות מדויק ומפורט ברמה של שפת תכנות.

שאלה 1: אלגוריתם המכרז עם מס

נתונה בעיית חלוקה עם כסף, של m חפצים בין n אנשים. כל אדם המקבל סכום כסף חיובי כלשהו x צריך לשלם $t \cdot x$ מס הכנסה, כאשר t הוא מספר קבוע כלשהו בין 0 ל-1 (נניח $t=0.3$ זה 30% מס).

א. הראו שאלגוריתם "המכרז השווה" לא תמיד מחזיר חלוקה ללא קנאה.
• שימו לב: מס הכנסה מתייחס לתשלום **נטו**, לדוגמה, אם שחקן שילם 100 וקיבל 150, הוא ישלם מס רק על 50; אם הוא שילם 100 וקיבל 50, הוא לא ישלם מס בכלל.

* ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה, או הוכיחו שלא קיים כזה.

שאלה 2: אלגוריתם המכרז: אסטרטגיה

n שחקנים מחלקים ביניהם חפץ אחד בעזרת אלגוריתם "המכרז השווה". שחקן 1 הצליח לגלות את הערכים של כל השחקנים 2, ..., n לאותו חפץ. שחקן 1 רוצה להשתמש במידע הזה כדי למסור לאלגוריתם ערך שונה מהערך האמיתי שלו, כך שהתועלת שלו תהיה גדולה ביותר. תארו אלגוריתם שיעזור לשחקן 1 להחליט, איזה ערך למסור לאלגוריתם כדי להשיג את התועלת הגבוהה ביותר האפשרית.

הדרכה: לפני שתנסו לפתח אלגוריתם כללי, נסו לבדוק מקרים פרטיים ולהבין מה קורה. לדוגמה, שני שחקנים עם ערכים 10, 20 או 20, 10.

שאלה 3: חלוקת חפצים עם אילוץ כמות

רוצים לחלק 500 חפצים שונים בין 100 אנשים עם הערכות שונות, כך שכל אחד יקבל חמישה חפצים בדיוק.

א. כתבו אלגוריתם לחלוקה ללא כסף, המוצא חלוקה הממקסמת את סכום הערכים (רמז: רדוקציה לשידוך).

* ב. כתבו אלגוריתם לחלוקה עם כסף, המוצא חלוקה ללא-קנאה ויעילה פארטו (רמז: רדוקציה לבעיית חלוקת חדרים).

שאלה 4: האם קיימת חלוקה בלי טרמפיסטים?

נתונה בעיית חלוקת חדרים ושכר-דירה.

א. כתבו פונקציה בפיתון, הבודקת האם קיימת חלוקה ללא-קנאה של חדרים ושכר-דירה, שבה כל הדיירים משלמים מחיר גדול או שווה אפס. אם כן, הפונקציה מדפיסה חלוקה אחת כזאת. בדקו והדגימו את תשובתכם. הקלט לפונקציה הוא מטריצת ערכים, וגובה שכר-הדירה. למשל:
`find_rent_with_nonnegative_prices([[20, 30, 40], [40, 30, 20], [30, 30, 30]], 90)`

* ב. כתבו קוד בפייתון, הבודק האם קיימת חלוקה ללא-קנאה, שבה כל הדיירים משלמים מחיר גדול ממש מאפס. אם כן, הקוד מדפיס חלוקה אחת כזאת. הסבירו, בדקו והדגימו את תשובתכם.

שאלה 5: השמת חפצים אגליטרית

נתונים n שחקנים ו- m חדרים. צריך לתת חדר אחד בדיוק לכל שחקן, ללא כספים. תארו אלגוריתמים יעילים (- זמן ריצה פולינומיאלי ב- n) למציאת השמות המקיימות את התנאים הבאים:

א. השמה הממקסמת את מכפלת הערכים.

ב. השמה אגליטרית (השמה הממקסמת את הערך הקטן ביותר).

* ג. השמה לקסימין-אגליטרית.

הדגימו והוכיחו את נכונות האלגוריתמים שלכם.