

# מטלה 9

## שאלה 4: תועלת מינימום

בהרצאה הנחנו, שהתועלת של כל תורם שווה לסכום התרומות לנושאים שהוא תומך בהם:

$$u_i(d) = \text{Sum}[j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0] d_j$$

לדוגמה, אם עמי תומך בנושאים א, ב, נושא א מקבל 4000 ו-ב 2000, אז התועלת של עמי היא 6000.

בשאלה זו, נניח שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לנושא כלשהו שהוא תומך בו:

$$u_i(d) = \text{Min}[j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0] d_j$$

בדוגמה למעלה, התועלת של עמי היא 2000.

נתונים 100 אזרחים ו-4 נושאים. 90 אזרחים תומכים בנושאים א,ב,ג; 10 אזרחים תומכים בנושאים ג,ד.

א. הראו שהתקציב האנארכי הוא פריק אבל לא יעיל-פארטו.

ב. הראו שהתקציב השווה (כל הנושאים מקבלים אותו סכום) יעיל-פארטו אבל לא פריק.

\* ג. מצאו תקציב שהוא גם יעיל פארטו וגם פריק.

נזכר תחילה בהגדרה של תקציב אנארכי:

## תקציב אנארכי

**הגדרה.** תקציב אנארכי נותן לכל אזרח את חלקו בתקציב  $C/n$ , ואומר לו לחלק את הכסף כרצונו בין כל הנושאים שהוא תומך בהם.

### פריקות

כדי למצוא תקציב הוגן שהוא גם יעיל, נשתמש בהגדרה הבאה (בהמשך נראה מה הקשר).

**הגדרה.** וקטור-תקציב  $d$  נקרא פריק (באנגלית: decomposable), אם ניתן לבצע אותו באופן הבא: נותנים  $C/n$  לכל אזרח, ואומרים לו כמה בדיוק להעביר לכל אחד מהנושאים שהוא תומך בהם, כך שסכום ההעברות שווה בדיוק לווקטור  $d$ . הגדרה שקולה: תקציב פריק הוא תקציב שניתן להציג ע"י מספרים  $d_{i,j}$  כך ש:

- For every  $j$  in  $1, \dots, m$ :  $\text{Sum}[i=1, \dots, n] d_{i,j} = d_j$  ;
- For every  $i$  in  $1, \dots, n$ :  $\text{Sum}[j=1, \dots, m] d_{i,j} = C/n$  ;
- For every  $i, j$ :  $d_{i,j} > 0$  only if  $u_{i,j} > 0$  .

א. על מנת להוכיח שהתקציב האנרכי פריק, נניח כי התקציב הנתון הוא \$10000 לנחיות, וכל אזרח מקבל \$100.

הקצאה: 90 אזרחים 20 דולר ל A ו-30 ל B, ו 50 דולר ל-C. 10 אזרחים מקצים 60 דולר ל-C ו-40 דולר ל-D. 1.הקצאה כוללת לכל נושא:

$$\sum_{i=1}^n d_{i,j} = d_j$$

•  $A = 90 \text{ citizens} * 20 = 1800$

•  $B = 90 \text{ citizens} * 30 = 2700$

•  $C = (90 \text{ citizens} * 50) + (10 \text{ citizens} * 60) = 5100$

•  $D = 10 \text{ citizens} * 40 = 400$

2.הקצאה כוללת לפי כל אזרח:

$$\sum_{j=1}^m d_{i,j} = \frac{C}{n}$$

אזרחים שתומכים ב A B C:

Allocation: \$20 (A) + \$30 (B) + \$50 (C) = \$100

אזרחים שתומכים ב C D:

Allocation: \$60 (C) + \$40 (D) = \$100

כאן, C הוא התקציב הכולל (\$10000) ו-n הוא מספר האזרחים (100), אז  $(C/n = 100)$ .

3. תרומות חיוביות עבור נושאים נתמכים:

$$0 < d_{i,j} \text{ only if } 0 < u_{i,j}$$

אזרחים שתומכים ב A B C מקצים ערך חיובי, ולא מקצים ערך כלל ל D. אזרחים שתומכים ב C D מקצים ערך חיובי, ולא מקצים ערך כלל ל A או B.

לכן התקציב שהגדרתי פריק.

נראה שהוא אינו יעיל פראטו על ידי דוגמא נגדית:

A, B, C: Utility = min(contribution to A, B, C) = min(1800, 2700, 5100) = 1800.

C, D: Utility = min(contribution to C, D) = min(5100, 400) = 400

אם נחלק מחדש תקציב מ-C ל-A מבלי לצמצם את התקציב של C מתחת ל-1800,

התועלת של אזרחים התומכים ב-A, B, C תגדל.

לדוגמה, הקצאה מחדש של 100 מ-C ל-A:

תרומה ל-A הופכת ל-1800 + 100 = 1900.

תרומה ל-C הופכת ל-5100 - 100 = 5000.  
 New utility A, B, C = min(1900, 2700, 5000) = 1900  
 utility C, D remains min(5000, 400) = 400  
 כלומר קיבלנו שיפור פראטו, ולכן זה לא יעיל פארטו.

ב. בסעיף זה נגדיר שהתקציב הוא \$1200, וכל נושא מקבל \$300.  
 כלומר התועלת עבור כל אזרח הינה \$300, לכן כל שינוי יגרום בהכרח להורדת  
 התועלת עבור אזרח שתומך בנושא מסוים, ממנו לקחנו חלק מהתקציב והוספנו לאחר,  
 לכן החלוקה הזאת, התקציב השווה יעילה פארטו, ולא ניתן לשפר אותה.  
 כעת אראה שהתקציב השווה אינו פריק.  
 התנאים על מנת להראות פריקות הינם:

$$\sum_{i=1}^n d_{i,j} = d_j \cdot 1$$

$$\sum_{j=1}^m d_{i,j} = \frac{c}{n} \cdot 2$$

$$0 < d_{i,j} \text{ only if } 0 < u_{i,j} \cdot 3$$

נניח בשלילה שאכן מתקיים תקציב פריק.  
 היות ו-90 אנשים תומכים בא' ב' ג', ורק 10 תומכים בנושא ד',  
 במידה והתומכים של נושא ד' נותנים את כל התקציב שלהם, נקבל שיש רק \$120,  
 ולא \$300, כפי שנתון בתקציב השווה.  
 לכן, ניתן להסיק שישנם אזרחים שלא תומכים בנושא ד', שעדיין נתנו חלק מהתקציב  
 שלהם לנושא ד', בסתירה לתנאי 3 של פריקות, סתירה להנחה בשלילה.  
 כלומר התקציב אינו פריק.

ג. נשתמש באותו תקציב בסעיף ב', ונגדיר את החלוקת תקציב הבאה:

נושא א' יקבל \$360  
 נושא ב' יקבל \$360  
 נושא ג' יקבל \$360  
 נושא ד' יקבל \$120  
 כאשר התומכים של א' ב' ג' יחלקו שווה בשווה לכל נושא.  
 התומכים של ג' ד' יתנו הכל לנושא ד'.

### פריקות:

קריטריונים לפירוק:  
 1. הקצאה כוללת לכל נושא:

$$\sum_{i=1}^n d_{i,j} = d_j$$

- $A = 90 \text{ citizens} * 4 = 360$
- $B = 90 \text{ citizens} * 4 = 360$
- $C = 90 \text{ citizens} * 4 = 360$
- $D = 10 \text{ citizens} * 12 = 120$

2. הקצאה כוללת לפי כל אזרח:

$$\sum_{j=1}^m d_{i,j} = \frac{C}{n}$$

אזרחים שתומכים ב א' ב' ג':

$$\text{Allocation: } \$4 (A) + \$4 (B) + \$4 (C) = \$12$$

אזרחים שתומכים ב C D:

$$\text{Allocation: } \$0 (C) + \$12 (D) = \$12$$

כאן, C הוא התקציב הכולל (\$1200) ו-n הוא מספר האזרחים (100),  
 אז  $(C/n = 12)$ .

3. תרומות חיוביות עבור נושאים נתמכים:

$$0 < d_{i,j} \text{ only if } 0 < u_{i,j}$$

אזרחים שתומכים ב A B C מקצים ערך חיובי, ולא מקצים ערך כלל ל D.  
 אזרחים שתומכים ב C D מקצים ערך חיובי, ולא מקצים ערך כלל ל A או B.

**לכן התקציב פריק.**

**יעילות פארטו**

נשקול הקצאה מחדש, ונראה שכל הקצאה מחדש רק תריע לתועלת כלשהי.  
נסמן את הנושאים ב A B C D, לנוחיות.

**הקצאה מחדש של \$10 מ-A ל-D:**

הקצאה חדשה:  $A = \$350$ ,  $D = \$130$ .  
השפעה על תומכי A, B, C: התועלת שלהם פוחתת מכיוון שהתרומה המינימלית שלהם ל-A כעת פוחתת.

השפעה על תומכי D: התועלת שלהם גדלה, אך היא באה במחיר של הפחתת התועלת עבור קבוצה אחרת.

**הקצאה מחדש של \$10 מ-B ל-C:**

הקצאה חדשה:  $B = \$350$ ,  $C = \$370$ .  
השפעה על תומכי A, B, C: התועלת שלהם פוחתת מכיוון שהתרומה המינימלית שלהם ל-B כעת פוחתת.

השפעה על תומכי D: אין שינוי בתועלת.

**הקצאה מחדש של \$10 מ-C ל-A:**

הקצאה חדשה:  $C = \$350$ ,  $A = \$370$ .  
השפעה על תומכי A, B, C: התועלת שלהם פוחתת מכיוון שהתרומה המינימלית שלהם ל-C כעת פוחתת.

השפעה על תומכי D: אין שינוי בתועלת.

**הקצאה מחדש של \$10 מ-D ל-A:**

הקצאה חדשה:  $D = \$110$ ,  $A = \$370$ .  
השפעה על תומכי A, B, C: אין שינוי בתועלת, שכן התרומה המינימלית עדיין \$360.  
השפעה על תומכי D: התועלת שלהם פוחתת מכיוון שתרומתם ל-D פוחתת.

**סיכום:**

בכל אחד מהתרחישים הללו, התועלת של אזרחים התומכים ב-A, B, C פוחתת, או שהתועלת של אזרחים התומכים ב-D פוחתת. אין תרחיש שבו התועלת של קבוצה אחת גדלה מבלי להקטין את התועלת של הקבוצה השנייה.  
לכן, ההקצאה המקורית היא יעילה פארטו תחת מודל התועלת המינימלית הנתונה. שום חלוקה מחדש לא יכולה לשפר את התועלת עבור קבוצת אזרחים כלשהי מבלי להפחית אותה עבור קבוצה אחרת.