חלוקת חדרים ושכר-דירה

Fair Rent Division

אראל סגל-הלוי

https://blogs.ams.org/mathgradblog/2013/10/12/splitting-apartment-rent-case-fair-division/

חלוקת שכר דירה

נתונים:

- דירה עם n חדרים ודמי-שכירות נתונים R.
- קבוצה של n שותפים השוכרים את הדירה.

האתגר: להחליט מי יגור איפה, וכמה ישלם, כך שלא תהיה קנאה. הפלט הדרוש הוא:

- **השמה** =: לכל שחקן i מתאימים חדר אחד X_i.
- **תמחור** =: לכל חדר j מתאימים מחיר $p(j)$.
- **ללא קנאה**: אף שותף לא מעדיף את החבילה (חדר+מחיר) של שותף אחר.

קיום חלוקת-חדרים ללא קנאה

הנחה: קיים "מחיר גבוה מדי".

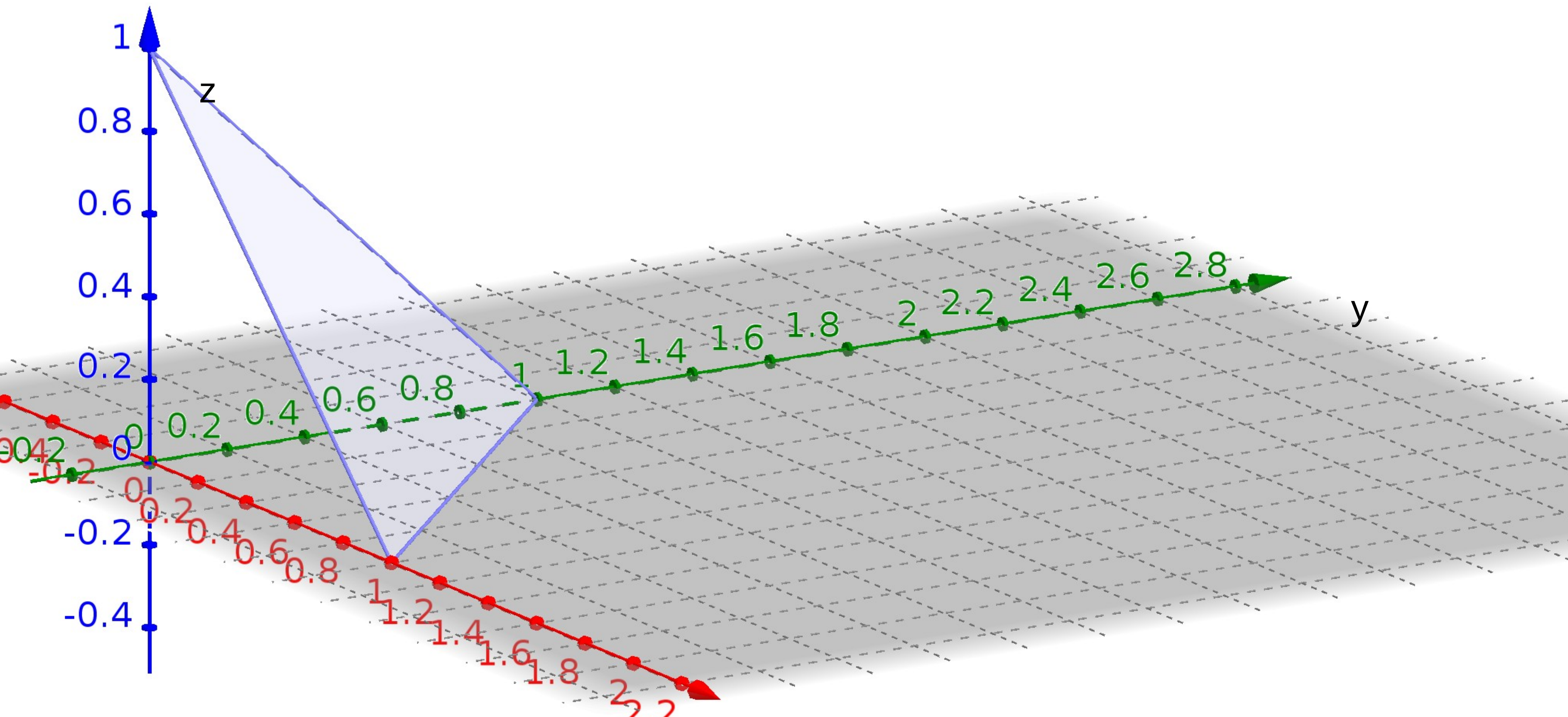
הגדרה: **מחיר גבוה מדי** הוא מחיר כלשהו T, כך שאם המחיר של חדר כלשהו ≤ T, והמחיר של חדר אחר כלשהו ≥ 0, אז אף שחקן לא בוחר בחדר עם מחיר ≤ T.

הערה: אם השחקנים קוואזיליניאריים, אז קיים מחיר גבוה מדי – למשל הערך הגבוה ביותר ששחקן כלשהו מייחס לחדר כלשהו.

משפט: אם קיים מחיר גבוה מדי, אז יש השמה+תימחור ללא קנאה. <===

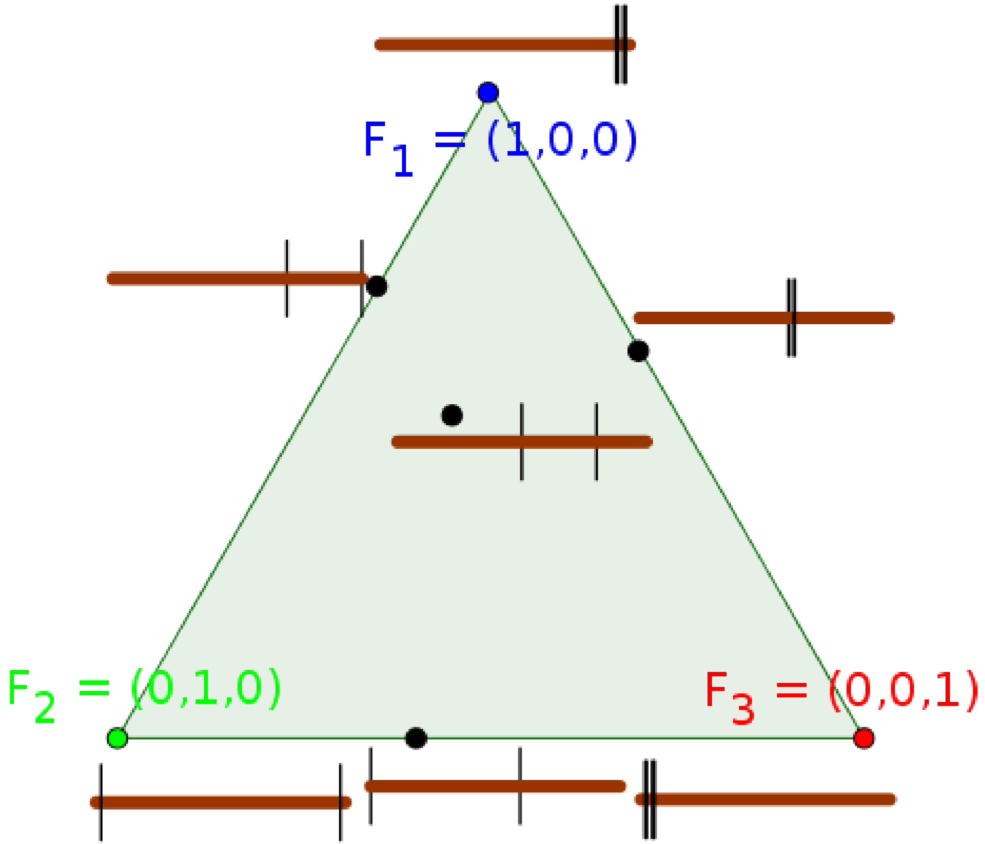
סימפלקס התימחורים

- **הגדרה**: סימפלקס = אוסף הנקודות במרחב, שסכום הקואורדינטות שלהן שווה 1.
- לדוגמה: סימפלקס במרחב 3-ממדי הוא משולש:



סימפלקס התימחורים

- **הגדרה**: סימפלקס = אוסף הנקודות במרחב, שסכום הקואורדינטות שלהן שווה 1.



- עבור n=2 – **קטע**.
- עבור n=3 – **משולש**.
- עבור n=4 – **טטראדר**.
- באופן כללי – **סימפלקס**.

קיום חלוקת-חדרים ללא קנאה

משפט: אם קיים מחיר גבוה מדי, אז יש השמה+תימחור ללא קנאה.

הוכחה: נבנה את **סימפלקס התימחורים**. כל נקודה בסימפלקס, עם קואורדינטות $(x_1,\ldots,x_n)$, מתאימה לתימחור עם:

$$p_j = T - (Tn-R)*x_j$$

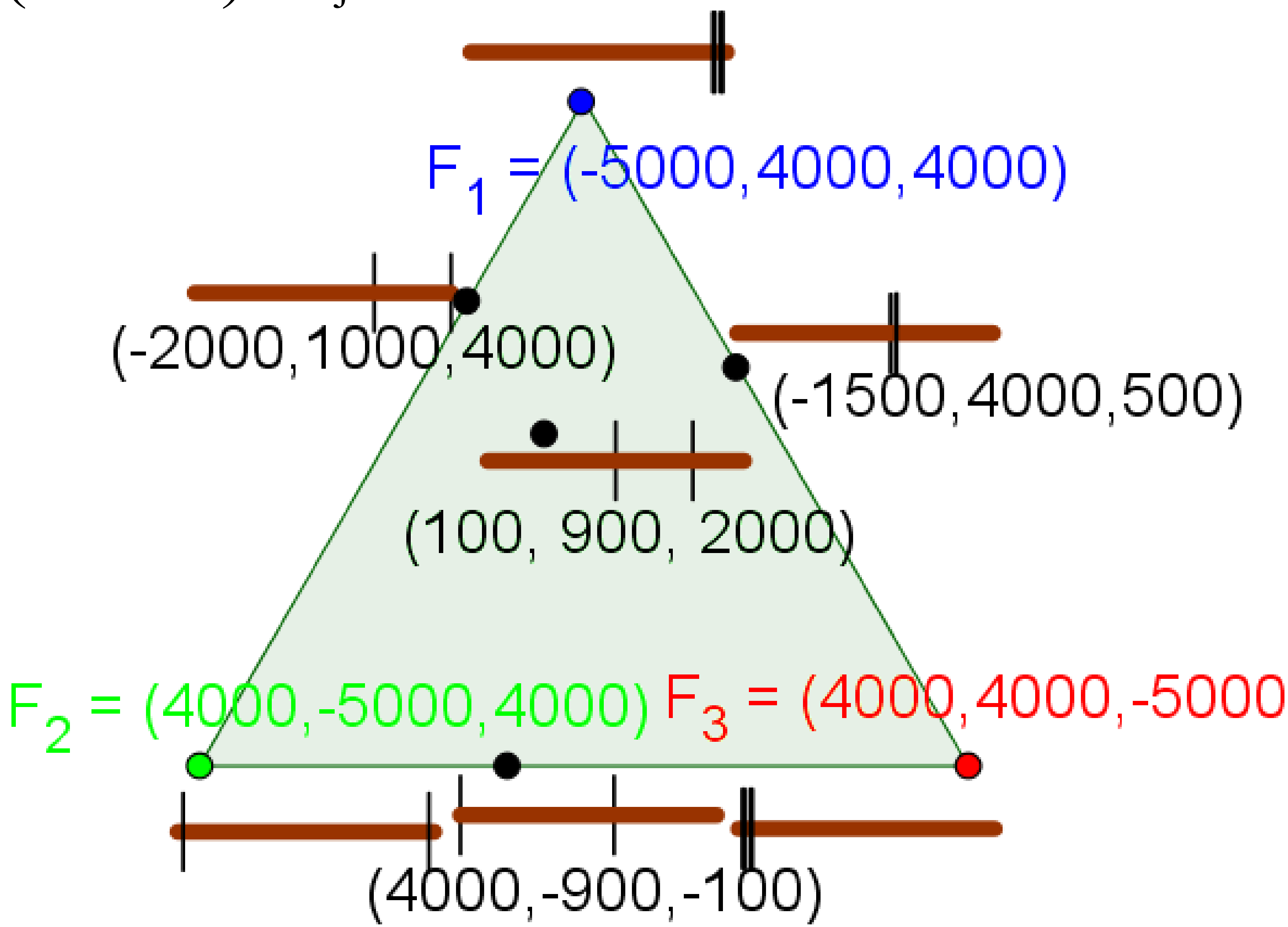
כאשר T הוא מחיר גבוה מדי.

הערה: בכל נקודה, סכום כל המחירים הוא בדיוק R.

סימפלקס התימחורים

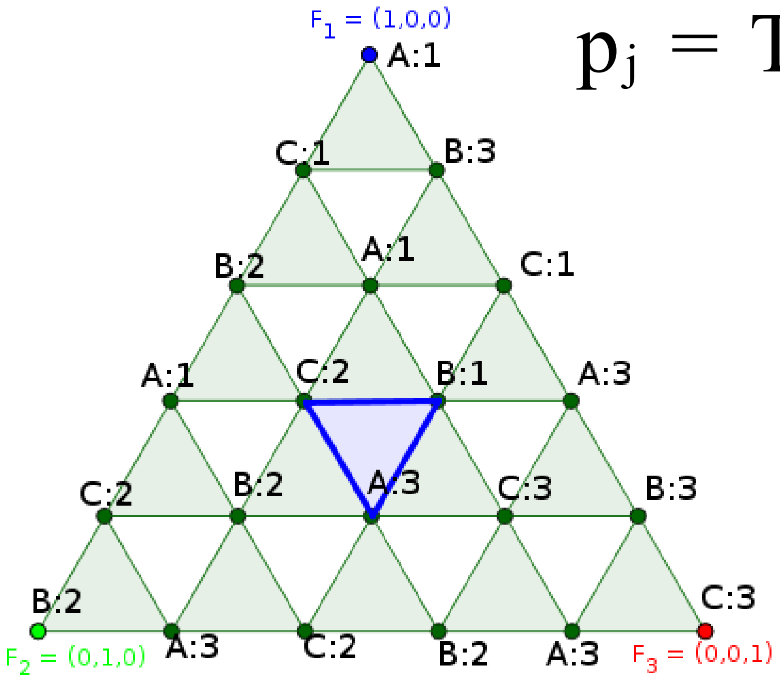
דוגמה עם n=3, R=3000, T=4000:

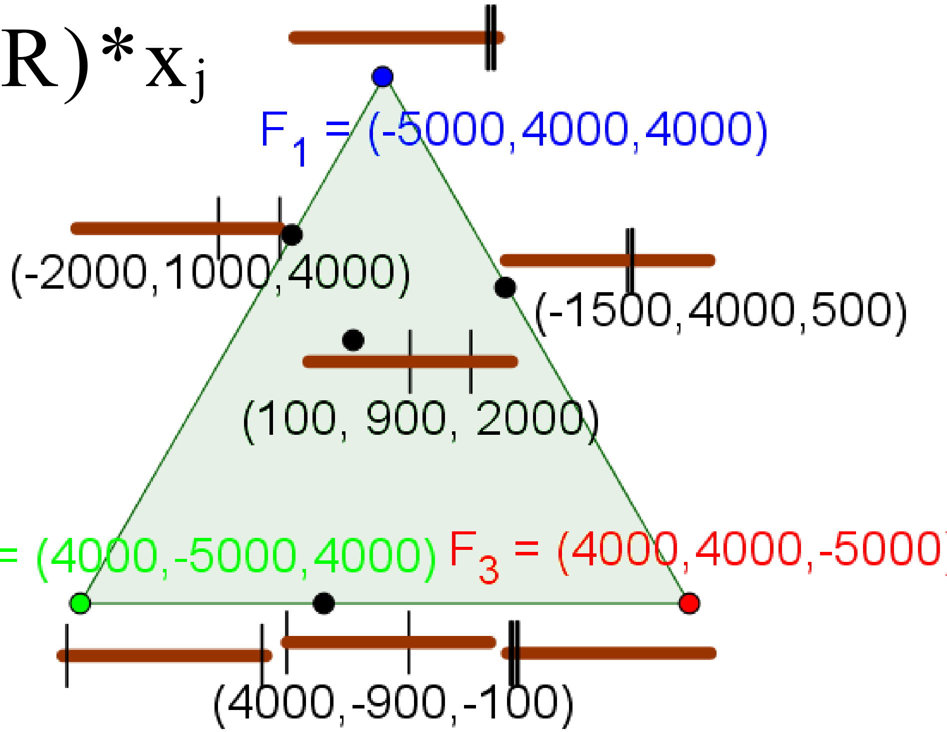
$p_j = T - (Tn-R)*x_j$



סימפלקס התימחורים

$$p_j = T - (Tn-R)*x_j$$

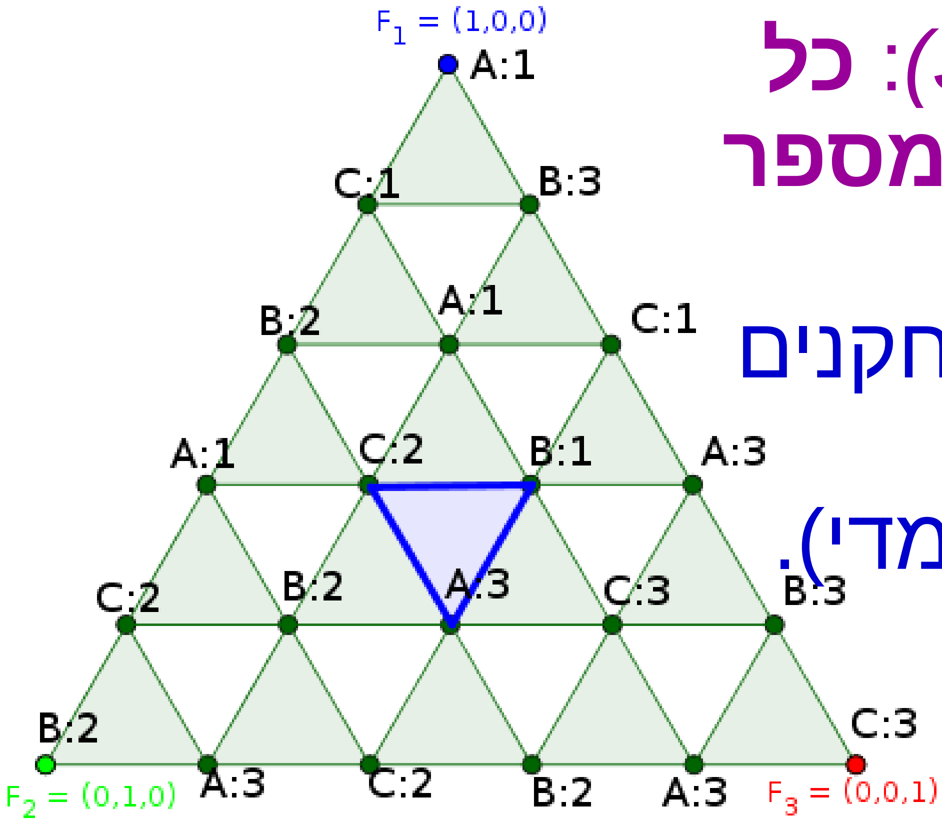




נחלק את סימפלקס התימחורים לסימפלקסונים;

ניתן כל קודקוד לשחקן; נשאל אותו איזה חדר הוא מעדיף בתימחור המתאים לקודקוד.

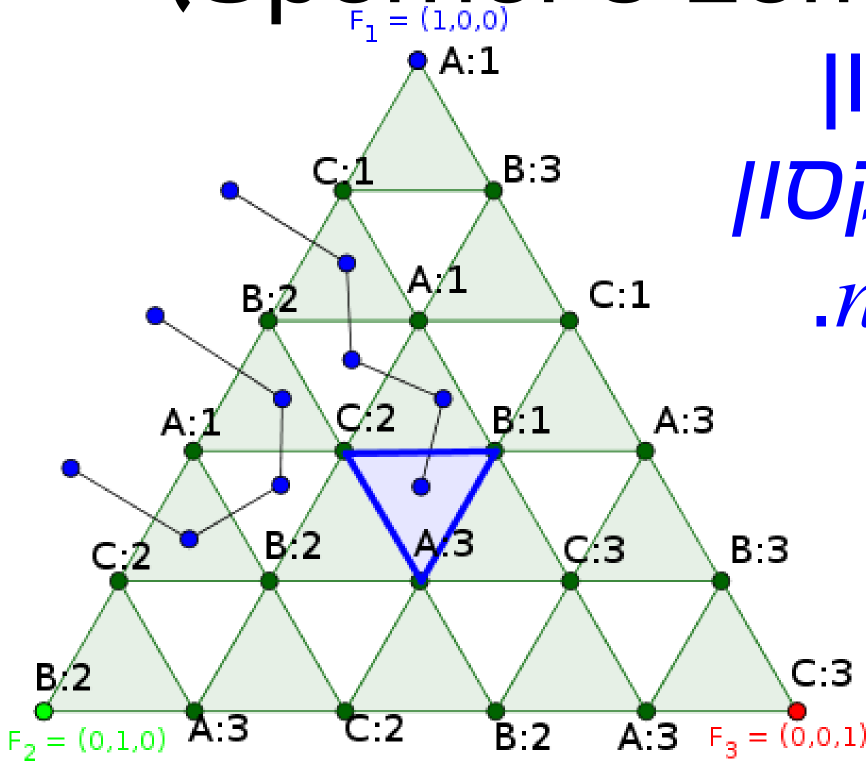
הלמה של ספרנר (Sperner’s Lemma)



- הגדרה: *תיווי ספרנר (Sperner)*: **כל מספר על צומת בשפה הוא מספר שנמצא על קצות השפה**.
- (התיווי הנוצר ע"י תשובות השחקנים הוא תיווי ספרנר, כי כל שחקן בוחר חדר עם מחיר לא גבוה מדי).
- **הלמה של ספרנר**: בכל תיווי ספרנר יש מספר איזוגי של סימפלקסונים מגוונים.
- הוכחה: באינדוקציה על n.

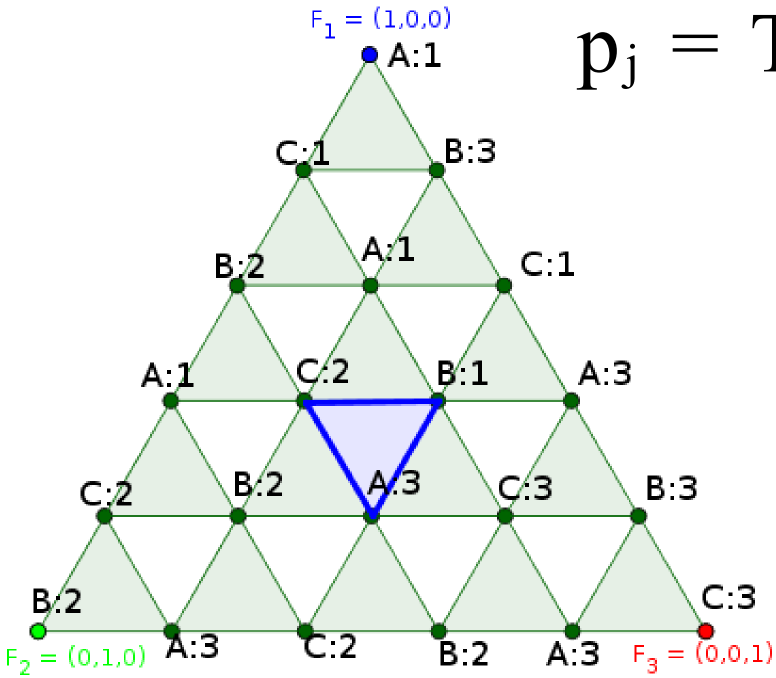
בסיס: $n=2$. נסתכל על הצלע בין F_1 ל-F_2. המספרים מתחילים ב-1 ומסתיימים ב-2, ולכן מספר המעברים הוא איזוגי.

הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)

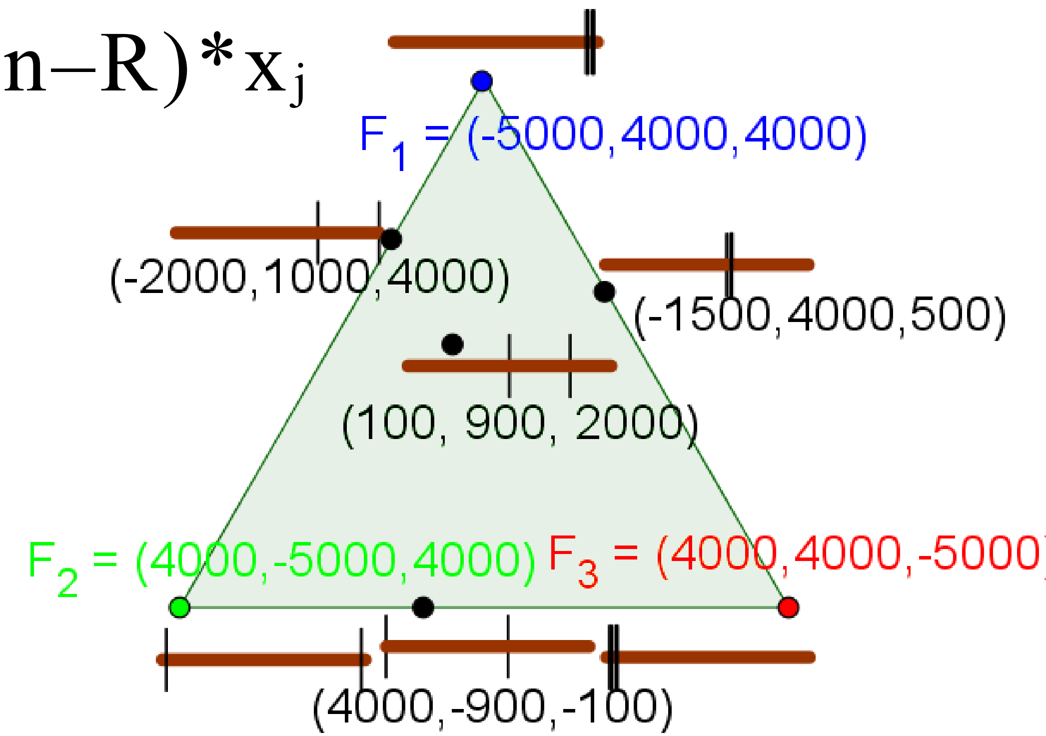


צעד: *נגדיר* "**חדר**" = סימפלקסון
עם n צמתים; "**דלת**" = *סימפלקסון*
עם n-1 צמתים, ותוויות 1, ..., n-1.
לפי הנחת האינדוקציה, מספר
הדלתות על השפה הוא איזוגי.
בכל חדר עם דלת, יש:
א. *דלת אחת* – אם התוית מול
הדלת היא n – ואז זה סימפלקסון מגוון; או -
ב. *שתי דלתות* – אם התוית מול הדלת אינה n.
מספר הדלתות החיצוניות [איזוגי] + מספר הדלתות
בחדרים מסוג ב [זוגי] + מספר הדלתות בחדרים
מסוג א = מספר הדלתות כפול 2 = מספר זוגי.
לכן מספר החדרים מסוג א איזוגי. ***

סימפלקס התימחורים



$$p_j = T - (Tn-R)*x_j$$



המספור המתקבל מקיים את התנאי של ספרנר!

לכן קיים סימפלקסון מגוון.

לכן קיים תימחור שבו (בקירוב) כל שותף רוצה חדר אחר --> תימחור ללא קנאה.

מימוש:

https://www.nytimes.com/interactive/2014/science/rent-division-calculator.html

חלוקת-חדרים ללא קנאה: חישוב

הנחה: כל הדיירים הם קוואזיליניאריים.

הקלט: מטריצה n x n המתארת את ערכי החדרים לכל אחד מהדיירים:

חדר←	3	2	1
דייר 1	v13	v12	v11
דייר 2	v23	v22	v21
דייר 3	v33	v32	v31

הפלט: השמה X, תימחור p.

אין קנאה: לכל שני שחקנים i, j:

$$V_i(X_i) - p(X_i) \ \geq \ V_i(X_j) - p(X_j)$$

קנאה וסכום-ערכים

משפט 1: *בכל* השמה ללא קנאה, *סכום הערכים* של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא *מקסימלי*.

הוכחה (Sung and Vlach, 2004): תהי X,P השמת-חדרים ללא קנאה. תהי Y השמה אחרת כלשהי. לפי הגדרת קנאה לדיירים קוואזיליניאריים, לכל i:

$$\boldsymbol{V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)}$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל-n:

$$\sum(V_i(X_i) - P(X_i)) \geq \sum(V_i(Y_i) - P(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum P(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum P(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה למחיר הדירה:

$$\sum V_i(X_i) \geq \sum V_i(Y_i)$$

קנאה וסכום-ערכים

משפט 2: כל תימחור ללא קנאה יישאר ללא-קנאה לכל השמה ממקסמת-סכום-ערכים.

הוכחה (Sung and Vlach, 2004): תהי X,P השמת-חדרים ללא קנאה. לפי המשפט הקודם, X ממקסמת סכום ערכים.
תהי Y השמה אחרת הממקסמת סכום ערכים:

$$\sum V_i(X_i) = \sum V_i(Y_i)$$

$$\sum [V_i(X_i)\text{-}P(X_i)] = \sum [V_i(Y_i)\text{-}P(Y_i)]$$

נתון ש-X ללא קנאה. לכן לפי הגדרת קנאה, לכל i:

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

לכן חייב להתקיים שיוויון בכל איבר --- לכל i :

$$V_i(X_i) - P(X_i) = V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

חלוקת-חדרים ללא קנאה: חישוב

מסקנה: האלגוריתם הבא מוצא חלוקת חדרים ללא קנאה:

- א. מצא חלוקה כלשהי X הממקסמת סכום-ערכים;
- ב. מצא תמחור p שאיתו החלוקה X ללא קנאה.

א. מיקסום סכום הערכים

מציאת השמה הממקסמת את סכום הערכים =

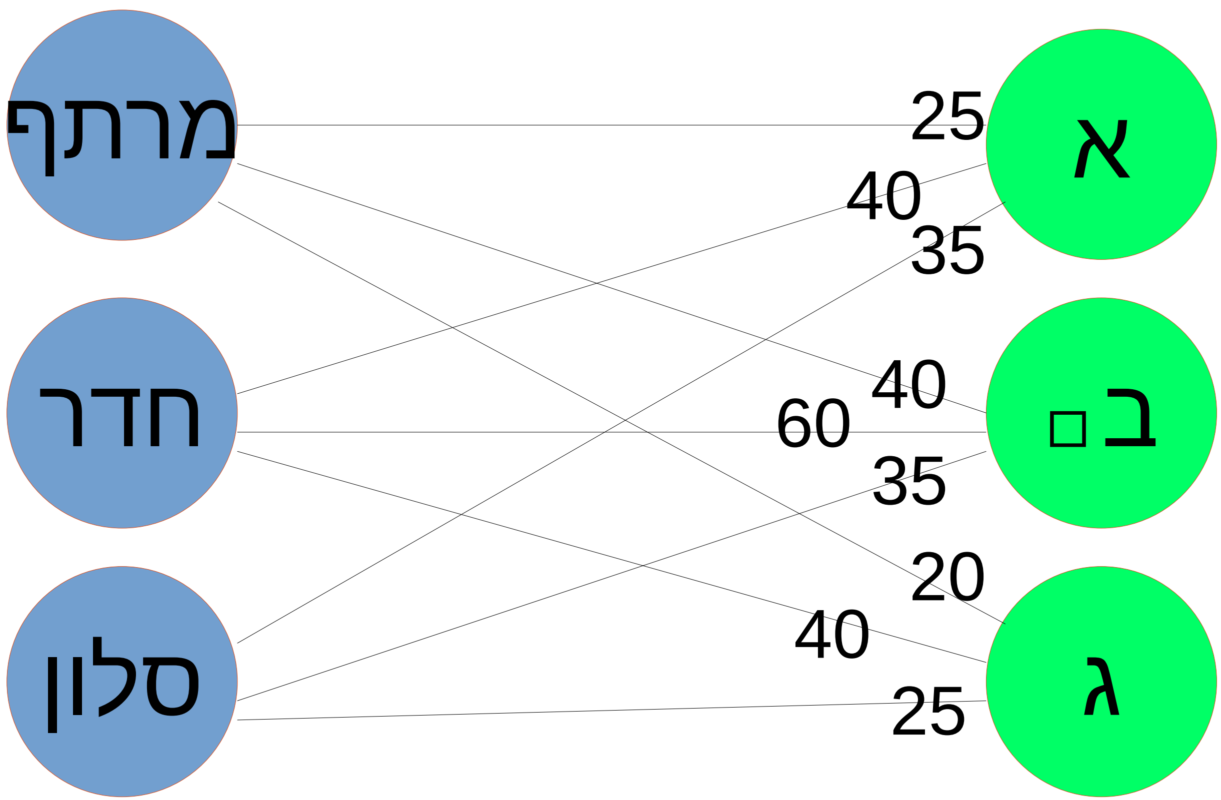
מציאת שידוך עם משקל מקסימום בגרף דו-צדדי.

דוגמה:

	מרתף	**חדר**	**סלון**
דייר א	25	40	**35**
דייר ב	40	**60**	35
דייר ג	**20**	40	25

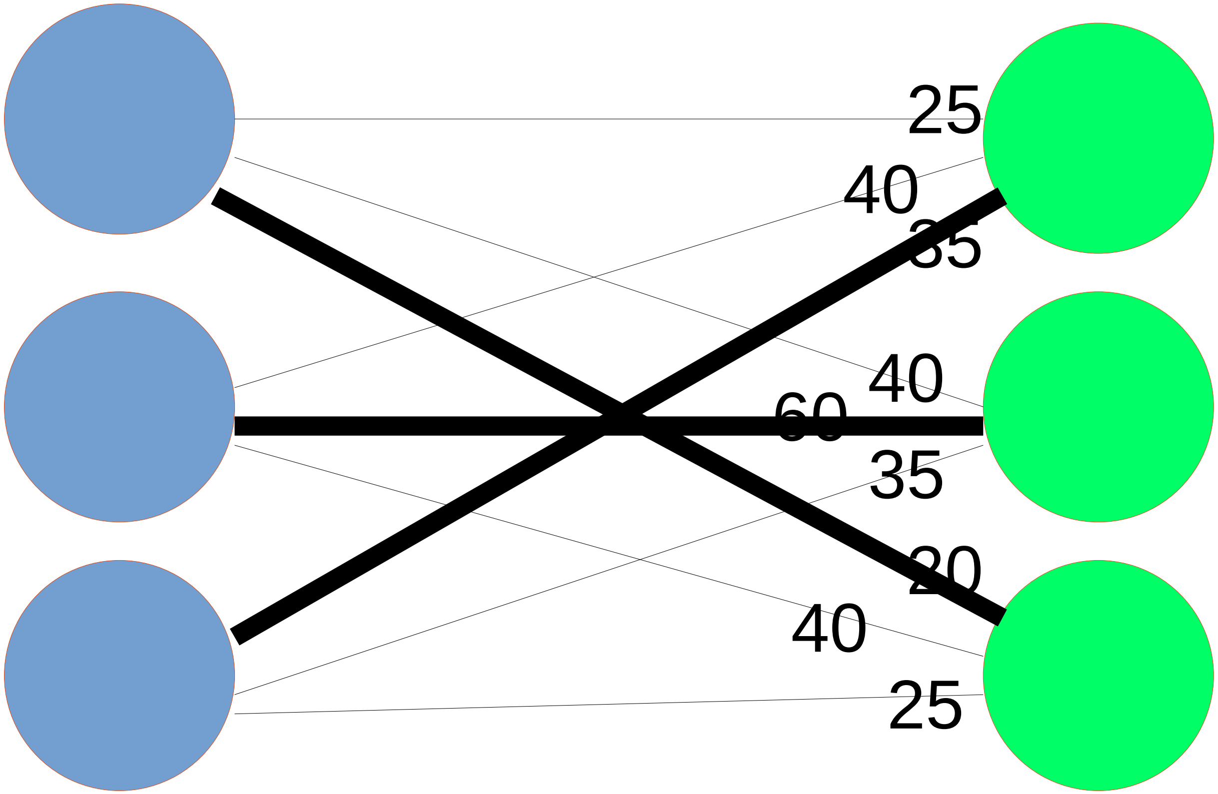
שידוך עם משקל מקסימום

• **הקלט**: גרף דו-צדדי עם משקלים על הקשתות:



שידוך עם משקל מקסימום

- **הפלט**: שידוך מושלם שמשקלו גדול ביותר:



- **אלגוריתמים**: למשל "האלגוריתם ההונגרי".
- יש מימוש בפייתון בספריה networkx.

ב. קביעת המחירים

- מצאנו השמה ממקסמת-ערכים. צריך לקבוע מחירים כך שההשמה תהיה ללא קנאה, וסכום המחירים יהיה שווה לשכר-הדירה. **איך?**
- בעיית **תיכנות ליניארי** – **linear programming**.

For all i, j:

w[d[i], i] - p[i] ≥ w[d[i], j] - p[j]

  – אפשר לפתור בעזרת cvxpy.

חלוקת חדרים – בעיית הטרמפיסט

	סלון	מרתף
דייר א	**150**	0
דייר ב	140	**10**

משפט: ייתכן ש**בכל** חלוקה ללא קנאה, אחד הדיירים ישלם מחיר שלילי (צריך *לשלם לו שיסכים לגור בדירה...*)

הוכחה: נניח שיש שני דיירים ושני חדרים, הדירה עולה 100 והערכים הם כמו בטבלה למעלה.

כל חלוקה ללא-קנאה ממקסמת סכום ערכים, לכן יש לתת את הסלון לדייר א ואת המרתף לדייר ב.

כדי ש-ב לא יקנא, המחיר של הסלון חייב להיות גבוה יותר ב-130 (לפחות). הסכום הוא 100 ולכן:

(price_martef + 130) + price_martef = 100

price_martef = -15

המחיר של המרתף חייב להיות שלילי! ***

חלוקת חדרים – בעיית הטרמפיסט

	חדר ד	חדר ג	חדר ב	חדר א
דייר א	0	30	34	**36**
דייר ב	0	33	**36**	31
דייר ג	0	**36**	30	34
דייר ד	**0**	35	33	32

אותו משפט נכון גם כשסכום הערכים של כל דייר שווה למחיר הכולל:

$p_c \geq 35$ [d envies]

$p_b \geq 33$ [d envies]

$p_a \geq 33$ [c envies]

$p_d \leq -1$ [sum=100]

חלוקת חדרים – משפט סו

- **הנחת הדיירים העניים**: כל דייר מעדיף חדר בחינם על-פני חדר בתשלום.
- **משפט סו**. אם מתקיימת הנחת הדיירים העניים, אז קיימת חלוקת חדרים ללא קנאה, שבה כל דייר משלם מחיר חיובי (אין "טרמפיסטים").
- **הוכחה**. הוכחנו שקיימת נקודה בסימפלקס המתאימה לתימחור ללא קנאה. אילו היה שם מחיר שלילי, אז כל דייר המשלם מחיר חיובי היה מקנא. ***

חלוקת שכר דירה – טרילמה

	עובד רק עם "דיירים עניים”	קנאה	דיירים שמקבלים כסף
אלגוריתם סו והמשולשים	כן	לא	לא
אלגוריתם סונג-ולאך	לא	לא	כן
אלגוריתם סונג-ולאך+ מחיר מינ. 0	לא	כן	לא