

חלוקה הוגנת של

חפצים בדידים

Fair Indivisible Item  
Allocation

אראל סגל-הלוי

# חלוקה הוגנת בקירוב

מקרה פשוט:

- 99 חפצים זהים.

- 2 שחקנים עם זכויות שוות.

מה הן החלוקות שאפשר לקרוא להן "הוגנות בקירוב"?

- 50:49 או 49:50.

- בכל חלוקה אחרת, יש חוסר-הוגנות שאי-אפשר להצדיק בכך שהחפצים בדידים.

# חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

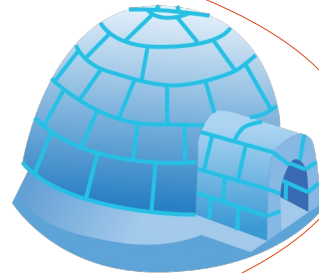
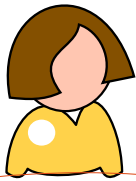
א. חפצים זהים – זכויות **שונות**.

ב. חפצים **שונים** – זכויות **שוות**.

ג. חפצים **שונים** – זכויות **שונות**.

# חלוקה הוגנת בקירוב

**הגדרה:** חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1"  
(Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני  
משתתפים א, ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד  
מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.



# חלוקה הוגנת בקירוב

**הגדרה:** חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1"  
(Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני  
משתתפים א, ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד  
מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.

*המשמעות: רמת-הקנאה ניתנת להצדקה  
בהתחשב בעובדה שהחפצים בדידים.*

**האם תמיד קיימת חלוקה  $EF1$ ?**

# אלגוריתם הסֶבֶב (round robin)

1. מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו.

2. כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.

3. אם נשארו חפצים – חוזרים לשלב 2.

**משפט.** אלגוריתם הסבב מחזיר חלוקה  $EF1$ .

**הוכחה.** נוכיח את תנאי  $EF1$  לכל שני שחקנים א, ב; נניח בה"כ ששחקן א מופיע בסבב לפני שחקן ב.

• א לא מקנא כלל: על כל חפץ ש-ב בחר, א בחר לפניו.

• עכשיו נניח שמורידים מהסל של א את החפץ הראשון שבחר. על כל חפץ שנשאר בסל של א, ב בחר לפניו.  
לכן החלוקה  $EF1$  גם עבור שחקן ב. \*\*\*

# חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

א. חפצים זהים – זכויות שונות.

ב. חפצים שונים – זכויות שוות.

ג. חפצים שונים – זכויות שונות.

דוגמה: חלוקת תיקים בממשלה בין מפלגות.

# חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: רמת הקנאה המוצדקת בין שני משתתפים  $i, j$  עם זכויות  $w_i, w_j$  היא:

$$V_i(X_j) / w_j - V_i(X_i) / w_i$$

חלוקה ללא קנאה מוצדקת (WEF) = רמת הקנאה המוצדקת היא 0 (לכל היותר).

דוגמה: לשחקן  $i$  זכות 1, לשחקן  $j$  זכות 2. שחקן  $i$  לא מקנא ב- $j$  אם הוא מקבל לפחות חצי ממנו, כלומר:

$$V_i(X_i) \geq V_i(X_j) / 2$$

- $V_i(X_j) / 2 - V_i(X_i) / 1 \leq 0$

- רמת הקנאה המוצדקת היא:

- $V_i(X_j) / 2 - V_i(X_i) / 1$



# חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: רמת הקנאה המוצדקת בין שני משתתפים  $i, j$  עם זכויות  $w_i, w_j$  היא:

$$V_i(X_j) / w_j - V_i(X_i) / w_i$$

- בחלוקה  $EF1$ , כשהמשקלים 1 – רמת הקנאה המוצדקת היא לכל היותר  $V_i(g)$ , כאשר  $g =$  החפץ עם הערך הגדול ביותר (עבור  $i$ ) אצל  $j$ .
- מה רמת הקנאה המותרת ב"חלוקה ללא קנאה מוצדקת עד-כדי חפץ אחד" (" $WEF1$ ")? <--

# חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: רמת הקנאה המוצדקת בין שני משתתפים  $j, i$  עם זכויות  $w_j, w_i$  היא:

$$V_i(X_j) / w_j - V_i(X_i) / w_i$$

- $g$  =: החפץ עם הערך הגדול ביותר בסל של  $j$ .
- מה רמת הקנאה המותרת ב"חלוקה ללא קנאה מוצדקת עד-כדי חפץ אחד" ("WEF1")?

–  $V_i(g) / w_j$  – הסרת חפץ מהסל של  $j$ ?

–  $V_i(g) / w_i$  – שיכפול חפץ לסל של  $i$ ?

– ממוצע של שני הביטויים הקודמים?

# אלגוריתם סֶבֶב משוקלל

- אתחול: כל שחקן מקבל 0
- כל עוד יש חפצים:
- מחשבים, לכל שחקן:  
הזכות שלו

-----  
(מספר החפצים נוכחי)  $f$   
• השחקן, שהמנה שלו גדולה  
ביותר, בוחר, מבין החפצים  
שנשארו, את החפץ שהוא  
הכי רוצה.

נבחר פונקציה  
כלשהי  $f$ ,  
המייחסת לכל  
מספר שלם  $s$ ,  
מספר ממשי  
כלשהו בתחום  
 $[s, s+1]$ .

# חפצים שונים – זכויות שונות

**משפט:** אלגוריתם הסבב המשוקלל עם פונקציית-מחלק  $f(s)=s+y$  מחזיר חלוקה שבה לכל שני משתתפים  $i, j$  עם זכויות  $w_i, w_j$ , רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר:

$$y * V_i(g) / w_i + (1-y) * V_i(g) / w_j$$

•  $f(s) = s$  ~ הסרת חפץ מהסל של  $j$ ;

•  $f(s) = s+1$  ~ שיכפול חפץ לסל של  $i$ ;

•  $f(s) = s+0.5$  ~ ממוצע שני הביטויים.

# חפצים שונים – זכויות שונות

**משפט:** אלגוריתם הסבב המשוקלל עם פונקציית-מחלק  $f(s)=s+y$  מחזיר חלוקה שבה לכל שני משתתפים  $i, j$  עם זכויות  $w_i, w_j$ , רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר:

$$y * V_i(g) / w_i + (1-y) * V_i(g) / w_j$$

• **דוגמה:** לשחקן  $i$  זכות 1, לשחקן  $j$  זכות 2. רמת הקנאה המוצדקת של שחקן  $i$  בשחקן  $j$  היא לכל היותר:

$$y * V_i(g) / 1 + (1-y) * V_i(g) / 2 = (y + (1-y) / 2) * V_i(g)$$

- פחות קנאה – טוב יותר לשחקן –  $y=0$ :  $V_i(g) / 2$
- יותר קנאה – טוב יותר לשחקן השני –  $y=1$ :  $V_i(g)$
- ממוצע –  $y=0.5$ :  $3 * V_i(g) / 4$