Ex1 – Q.4

שאלה 4: חלוקה סופר-פרופורציונלית

חלוקת-עוגה נקראת סופר-פרופורציונלית אם כל שחקן מקבל פרוסה ששווה עבורו יותר מ 1 חלקי-n משווי העוגה כולה.

א. הראו דוגמה לחלוקה סופר-פרופורציונאלית בין שלושה אנשים.

ב. הראו דוגמה שבה לא קיימת חלוקה סופר-פרופורציונאלית לשלושה אנשים. הוכיחו את תשובתכם.

* ג. נתונה בעיית חלוקת עוגה לשלושה אנשים. נתון שיש שני אנשים כלשהם (נניח עמי ותמי), שמייחסים ערך שונה לפרוסת-עוגה כלשהי X. כתבו אלגוריתם המקבל כקלט את הפרוסה X, ומוצא חלוקה סופר-פרופורציונלית. רמז: אפשר להעזר באלגוריתם של שאלה 3 (גם אם לא פתרתם אותה).

א. תהי עוגה $C \coloneqq [0,1]$ ומשתתפים 1,2,3.

נגדיר: $X_1 \coloneqq [0,\ 1/3),\ X_2 \coloneqq [1/3\ ,\ 2/3), X_3 \coloneqq [2/3\ ,\ 1]$

$V_i\left(X_j\right) = 4$ כאשר $i = j$

$V_i\left(X_j\right) = 1$ כאשר $i \neq j$

זו אכן חלוקה כי איחוד זר של הX_iים שווה C

לכל $i \in [3]$ מתקיים: $4 = V_i(X_i) > \frac{V_i(C)}{3} = \frac{1+4+1}{3} = 2$

לכן זו חלוקה סופר-פרופורציונלית ע"פ הגדרה.

ב. נוכיח טענה כללית: אם כל המשתתפים מעריכים את העוגה באותה צורה – לא תוכל להיות חלוקה סופר-פרופורציונלית.

תהי עוגה C ומשתתפים 1,2,3. $V_i = V_j$ לכל *i,j*

כלומר במילים אחרות, כולם מעריכים את כל חתיכות העוגה באותה צורה בדיוק.

נוכיח שכל חלוקה כלשהי לא תהיה סופר פרופורציונלית.

תהי $X_1\ U\ X_2 U\ X_3 = 3$ חלוקה של *C* כך שהשחקן *i* מקבל את הפרוסה הX_i

נניח בשלילה שהחלוקה היא סופר-פרופורציונלית אזי

$V_i(X_i) > V_i(C)/3$ לכל *i*.

כעת, $V_i(C) = \sum_{j=1}^{3} V_i\left(X_j\right) = \sum_{j=1}^{3} V_j\left(X_j\right) > \frac{3V_i(C)}{3} = V_i(C)$

קיבלנו סתירה.