

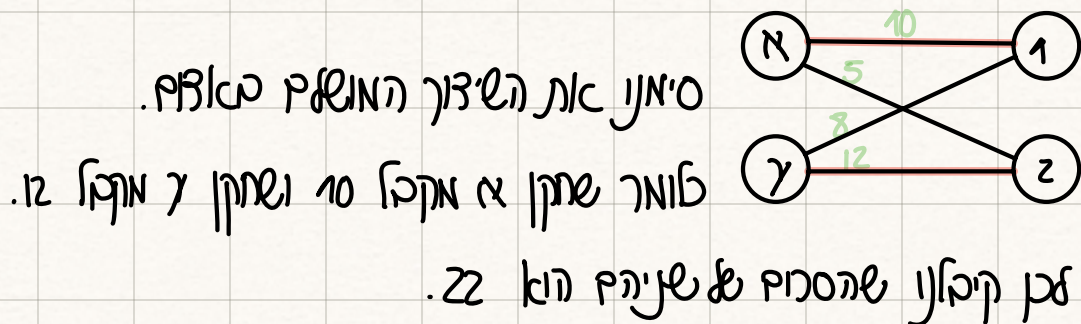
שאלה 1

נעתיים ח דיירים וח חדרים, צריך עותת חדר 1 בדיוק לכל צייר כך שסכום החדרים הוא המצויץ ביותר.
האמצעותם צייר עהיות מצעה אמת.

א. נציים את בעלת VC על בעיית העוקה וחדרים ע פ שני דיירים:

חדר 2	חדר 1	
5	10	צייר א
12	8	צייר ג

עבי במעלה 6 השתמשו באמצעותם עשיצור מושלם ע א עמצא את העוקה האובה ביותר:



$$22 - 10 = 12 \quad \text{סכום בלי א:}$$

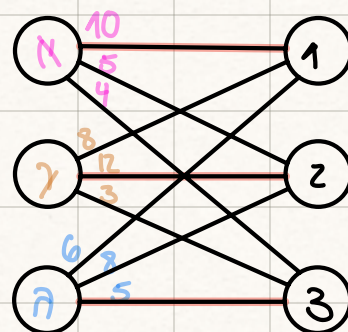
$$22 - 12 = 10 \quad \text{סכום בלי ג:}$$

עכ התשלום של שחקן א הוא: 0 ועבור שחקן ג: 0.

7. נציג את VCG עם שלושה ציירים ושלושה חזרים:

חזר 3	חזר 2	חזר 1	
4	5	10	צייר א
3	12	8	צייר ג
5	8	6	צייר ה

(כאן שקיים שינוי מושלם שמכוס העצים הוא 27.



סכום בלי א:

• שחקן ג מקבל את חזר 2

• שחקן ה מקבל את חזר 1

$$12 + 6 = 18 \quad \text{זכנ הסכום הוא}$$

סכום בלי ג:

• שחקן א מקבל את חזר 1.

• שחקן ה מקבל את חזר 2.

$$10 + 8 = 18 \quad \text{זכנ הסכום הוא}$$

סכום בלי ה:

• שחקן א מקבל את חזר 1.

° שחקן ג מקבל את חצר 2.

כך הסתם חטל $10 + 12 = 22$

נחשב את התשלום:

° שחקן א: $18 - 27 + 10 = 1$

° שחקן ג: $18 - 27 + 12 = 3$

° שחקן ה: $22 - 27 + 5 = 0$

7. נוכח שהאגזורת תמיד נותן חזקה על הקנה:

בשביע אינטואיציה נכוח שבמקרה ההרטי אלף שחקן לא מקנה כאחד:

	חזר 1	חזר 2	חזר 3
דיר א	10	5	4
דיר ג	8	12	3
דיר ה	6	8	5

• שחקן א לא יקנה באלף אחד כיוון שקיבל את החזר שרצה,

הצד שלו 10 וכיוון שמספר 1 התעצם של שחקן א הוא 9 - יותר מהצרכים של שאר
החזרים עבורו - עכן לא מקנה.

• שחקן ג קיבל את חזר $2\#$ עם ערך 12 ותעצם 9 - כיוון שמספר 3.

הוא כמוכן לא יקנה באלף שחקן כ התעצם הבאת הכי עבורה עבורו.

• שחקן ה מקבל את חזר 3. שזה חזר שרצה בחזות וזה.

נשים על שחקן ה לא מספיק עבור חזר נאילו היה מקבל את חזר 1 (שהתעצם עבורו

הוא 1, התעצם עבור ה היתה 5) נאות מדבר עבור חזר 2.

עכן, כיוון שהתעצם של שחקן ה עבור ה חזר 5. הוא לא מקנה בשום שחקן אחר.

יהי $room-i$, החדר ששחקן i קיבל.

יהי $price-i$, המחיר ששחקן i שילם.

יהי $val-i(room-x)$ - הערך ששחקן i נותן לחדר x (כאשר $room-i$ החדר שהוא קיבל).

יהי $val-i$ - התועלת של שחקן i בחדר $val-i(room-i) - price-i$

אנחנו רוצים להראות שעבור כל שחקן j מתקיים:

$$val-j = val-j(room-j) - price-j \geq val-j(room-i) - price-i$$

עבור $i \neq j$.

נניח בשלילה שקיימת חלוקה ששחקן j מקבל כשחקן k זכאי:

$$val-j = val-j(room-j) - price-j < val-j(room-k) - price-k$$

$$\Rightarrow price-k - price-j < val-j(room-k) - val-j(room-j)$$

בואו להסתכל בין המחירים של חדרי j ו- k קטן יותר מההפרש של הערכים של החדרים k ו- j עבור שחקן j .

כמובן לשאת סתירה כיוון שבאמצעותה נבחר נקבע באופן ודאי:

$$price-x = \sum_{i=1, i \neq x}^n val-i(room-i) - \sum_{i=1}^n val-i(room-i) + val-x(room-x)$$

$$\Rightarrow price-k - price-j =$$

$$\sum_{i=1, i \neq k}^n val-i(room-i) - \sum_{i=1}^n val-i(room-i) + val-k(room-k) -$$

$$(\sum_{i=1, i \neq j}^n val-i(room-i) - \sum_{i=1}^n val-i(room-i) + val-j(room-j))$$

$$\sum_{i=1, i \neq k}^n \text{val}_i(\text{room}_i) + \text{val}_k(\text{room}_k) - (\sum_{i=1, i \neq j}^n \text{val}_i(\text{room}_i) + \text{val}_j(\text{room}_j))$$

↓
כיוון שג' מקנה כא הוא יחדר קר
אות חדר א.

↓
א יחדר את חדר א כ אם לא היה מעגל
לא היה עוקר ולא היתה קנאה.

יהי x_1 סכום הערכים כאשר א לא משתתף. אנחנו יודעים שג' מעדיף את חדר א על יחדר אולם וכן
נציא אותו מהסכום של הערכים x_1 .

יהי x_2 סכום הערכים כאשר שחקן ג לא משתתף. נציא את הערך ששחקן א נותן לחדר א
מתוך סכום x_2 .

נשים לב ש $x_1 = x_2$ וזה כיוון שכיוון שג' עוקר לשחקן א את החדר ולכן כל שחקן
שרוצה עקרו את חדר ג יבחר וזה מקרה צדד עמה שקורה ב x_2 .

$$x_1 + \text{val}_j(\text{room}_k) + \text{val}_k(\text{room}_k) - x_2 - \text{val}_k(\text{room}_k) + \text{val}_j(\text{room}_j) \\ = \text{val}_j(\text{room}_k) - \text{val}_j(\text{room}_j)$$

עכשיו נחשב המחירים בין חדרים הוא ההפרש בין הערכים ששחקן שקיבל את החדר
נתן לו ושחקן שהיה מקבל את חדר אילו השחקן שקיבל את החדר לא היה משתתף
נתן לחדר החדר כי שהכאן.

עכשיו קיבלנו ש

$$\text{Price}_k - \text{Price}_j > \text{val}_j(\text{room}_k) - \text{val}_j(\text{room}_j)$$

ולכן

$$\text{val}_j = \text{val}_j(\text{room}_j) - \text{Price}_j = \text{val}_j(\text{room}_k) - \text{Price}_k$$

ומכאן קיבלנו שזאת קיימת קנאה בכל חלוקה שניתנת ע' אלגוריתם VCG.