אלגוריתמים לחלוקה הוגנת ויעילה

נלמד אלגוריתמים לחלוקה הוגנת ויעילה של:
1 *משאבים רציפים* (קרקעות, סחורות, משאבי מיחשוב)
2 *חפצים בדידים* (מקומות בקורסים, חדרים, תיקים בממשלה)
3 *תקציב* (של מדינות, עיריות, תרומות לארגונים)

הגדרות:

אלגוריתמים כלכליים – אלגוריתמים ***שהקלט*** שלהם הוא משאבים והעדפות של בני-אדם, ***והפלט*** הוא חלוקה של משאבים בהתאם להעדפות.
תכונות רצויות של החלוקה: ***הוגנות***, ***יעילות.***

פרופורציונלי - $For\ all\ i,\ j:\ Vi\ (Xi\ ) \geq Vi\ (C)\ /\ n$

קנאה- (זכויות שוות) כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל חתיכה טובה לפחות כמו שתי האחרות.
$For\ all\ i,\ j:\ Vi\ (Xi\ ) \geq Vi\ (Xj)$

קנאה- (זכויות שונות)- רמת הקנאה המוצדקת בין שני משתתפים i, j עם זכויות w_i, w_j היא: $V_i(X_j)\backslash w_j - V_i(X_i)\backslash w_i$

WEF- חלוקה ללא קנאה מוצדקת = רמת הקנאה המוצדקת היא 0 (לכל היותר).
v

הוגנות- ללא קנאה

שיפור פארטו - נקרא שיפור, אם הוא טוב יותר לחלק מהמשתתפים, וטוב לפחות באותה מידה לכל השאר.

יעילות פארטו - אין שיפור פארטו, תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כלכלית.

שופיר פארטו בחלוקה עם כסף - חלוקה א היא שיפור פארטו של חלוקה ב אם: ● התועלת של כל השחקנים בחלוקה א גדולה לפחות כמו בחלוקה ב; ●סכום הכסף שמשלמים השחקנים בחלוקה א גדול לפחות כמו בחלוקה ב (- המנהל לא הפסיד) ●התועלת של חלק מהשחקנים בחלוקה א גדולה יותר מבחלוקה ב (- מישהו הרויח).
יעילות פארטו עם כסף = יעילות אוטיליטרית

יעילה-אוטיליטרית-חלוקה הממקסמת את סכום הערכים של השחקנים $\max_x \sum_{j=1}^{n} V_j(X_j)$

אגליטרית - חלוקה הממקסמת את הערך הקטן ביותר $\max_x\ \min_i \sum_{j=1}^{n} V_j(X_j)$

עקביות- אלגוריתם לחלוקת-מושבים נקרא עקבי אם עבור כל תת-קבוצה X של מפלגות, שקיבלו ביחד n מושבים בחלוקה הכללית – אם נשתמש באותו אלגוריתם כדי לחלק את n המושבים בין המפלגות בקבוצה X בלבד, נקבל אותה חלוקה בדיוק כמו בחלוקה הכללית.

EF1 - חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" אם לכל שני משתתפים א,ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.

אלגוריתם מדוייק- איכות הפתרון **תמיד מיטבי** זמן ריצה **גרוע.**

אלגוריתם קרוב - איכות הפתרון **לא מיטבי** זמן ריצה **פולינומיאלי.**

חלוקה מסודרת - יחסי-הערכים של החפצים בסל של שחקן ב קטנים או שווים ליחסי-הערכים של החפצים בסל של שחקן א.

שיפור פארטו חלש- חלוקה ב היא שיפור פארטו חלש של חלוקה א, אם הערך שמקבל כל שחקן בחלוקה ב גדול לפחות כמו הערך שהוא מקבל בחלוקה א.

ערך- מספר המתאר עד כמה השחקן רוצה סל מסויים של חפצים.

תועלת -מספר המתאר עד כמה השחקן רוצה סל מסויים הכולל חפצים וכסף.

פונקציית תועלת קוואזיליניארית- התועלת של סל כלשהו, הכולל קבוצה X של חפצים וסכום-כסף p היא: v(X) p + כאשר v היא פונקציית ערך כלשהי. תועלת = ערך + כסף = ערך - תשלום

מחיר גבוה מדי- מחיר גבוה מדי הוא מחיר כלשהו T, כך שאם המחיר של חדר כלשהו ≤T, והמחיר של חדר אחר כלשהו ≥0, אז אף שחקן לא בוחר בחדר עם מחיר ≤T

מגלה-אמת- האסטרטגיה הטובה ביותר של כל משתתף היא להגיד את הערך האמיתי שלו, לא משנה מה עושים האחרים.

מגלה-אמת תקצוב באלגו' השתתפותי נקרא - אם לכל אזרח i, כאשר הבחירות של שאר האזרחים קבועות, התועלת של i גדולה ביותר כאשר ה-Ui,j אמיתיים.

הוגנות לקבוצות- לכל קבוצה בגודל k, הסכום הכולל המועבר לנושאים שאחד מחברי-הקבוצה תומך בהם לפחות הוא k*C/n

תקציב פריק - תקציב - (d1 ,...,dm) נקרא פריק אם קיימים סכומים d i,j לכל אזרח i ולכל נושא j כך ש: לכל נושא $\sum_{i=1}^{m} d_{i,j} = d_j$, לכל אזרח $\sum_{j=1}^{m} d_{i,j} = C\backslash n$ וגם $d_{i,j} > 0\ only\ if\ U_{ij} > 0$.

תקציב הוגן לקבוצות-כאשר האזרחים מחולקים לקבוצות וכל קבוצה j נותנת 100% מהתקציב לסעיף j, האלגוריתם מחלק את התקציב בין הסעיפים ביחס ישר לגדלי הקבוצות.

משאבים רציף:

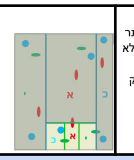
הבעיית: חלוקת קרקעות לאנשים / חלוקת עוגה ל-n אנשים - העדפות שונות, זכויות שוות.

חתוך ובחר: אלגו': אם אחד חתוך לחצי בעיניו והאם השני החליט מה הוא מעדיף
תכונות: פרופורציונלי , ללא קנאה. חסרון: רק ל2 אנשים, לא יעילה פראטו

המפחית האחרון: אלגו': ● עמי מסמן n/1 בעיניו. ● אם תמי חושבת שזה יותר מדי - היא מפחיתה ל1/n-. וכן רמי וכו'. ● האחרון שהפחית מקבל את החלק שסימן. ● ממשיכים ברקורסיה. תכונות: פרופורציונלי (באינדוקציה).
חסרון: לא יעיל $O(n^2)$

אלגוריתם אבן-פז : אלגו': • כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי 1/2 בעיניו. •חותכים את העוגה בחציון של הקוים. • שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו. •מחלקים כל חצי ברקורסיה. (אם יש n זוגי, חותכים את העוגה כך שבצד אחד יהיו $(n+1)\backslash 2$ קוים ובצד שני $(n-1)\backslash 2$ קוים.
תכונות:פרופורציונלי (באינדוקציה), יעיל $O(n\log(n))$ (הכי יעיל שאפשר). חסרון: קנאה.

Selfridge Conway: אלגו':• כ חותך 3 חתיכות שוות בעיניו. • אם א, י מעדיפים חתיכות שונות – סיימנו. אחרת - • י מקצץ את החתיכה הטובה ביותר ומשווה לשניה בעיניו. א, י, כ בוחרים חתיכה. י חייב לבחור את זו שקיצץ, אם לא נבחרה קודם. • קיבלנו חלוקה ללא קנאה, אבל עם שארית.• [א או י בחרו את החתיכה המקוצצת; במקרה זה א.] •י שלא בחר את החתיכה המקוצצת, מחלק את השארית לשלוש חתיכות שוות בעיניו. א כ י בוחרים חתיכה.
תכונות: ללא קנאה (שידוך מושלם), חסרון: רק ל3 אנשים.



משאבים רציף

חלוקת משאבים הומוגניים, לדוגמא ברזל נפט וכו'
מדובר בבעיה יותר קלה אבל פה נתמקד חלוקה יעילה פראטו

דיקטטורה - אדם אחד לוקח הכל תכונות: יעיל פראטו חסרון: קנאה

חלוקה אוטיליטרית- אלגו': הגדר משתנה z המייצג את הערך הגדול ביותר. פתור את בעיית האופטימיזציה הבאה:maximize z;
תכונות: יעיל פראטו חסרון: קנאה
משפט: כל חלוקה יעילה-אוטיליטרית (ממקסמת סכום ערכים) היא יעילה פארטו.
הוכחה: נתונה חלוקה א הממקסמת סכום ערכים. נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו. ● אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה. ● בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו ● בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר. לכן בחלוקה ב סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה ● לכך שחלוקה א ממקסמת את סכום הערכים.
***

code אוטיליטרי-

```
print("80 19 1")
print("79 1 20")
xw, xo, xs = cvxpy.Variable(3)# XS מהפלדה,XO מהנפט,XW שברים כמה עמי מקבל מהעצים
utility_ami  = xw*80 + xo*19 + xs*1
utility_tami = (1-xw)*79 + (1-xo)*1 + (1-xs)*20
print("\nUtilitarian division - maximum sum of utilities:")
prob = cvxpy.Problem(
    cvxpy.Maximize(utility_ami + utility_tami),
    constraints = [0 <= xw,xw <= 1,0 <= xo,xo <= 1,0 <= xs,xs <= 1])
prob.solve()
print("status:", prob.status)
print("optimal value: ", prob.value)
print("Fractions given to Ami: ", xw.value, xo.value, xs.value)
```

חלוקה אגליטרית- אלגו': הגדר משתנה z המייצג את הערך הקטן ביותר. פתרו את בעיית האופטימיזציה הבאה
maximize z; subject to Vi(Xi) ≥ z for all i in 1,…,n
חסרון: לא יעיל פראטו אם $\exists i \rightarrow Xi = 0$ קיים שחקן נתן ערך 0 לאחד המשאבים.

לקסימין-אגליטרית- חלוקה הממקסמת את וקטור הערכים המסודר מהקטן לגדול, לפי סדר מילוני. ממקסמת את הערך הקטן ביותר; בכפוף לזה, את הערך השני הכי קטן; בכפוף לזה, את הערך השלישי הכי קטן; וכו'. אלגו': ● מצא חלוקה שבה הערך המינימלי גדול ביותר (חלוקה אגליטרית). סמן ערך זה באות 1z. ●מבין כל החלוקות שבהן הערך המינימלי הוא 1z, מצא חלוקה שבה סכום שני הערכים הקטנים גדול ביותר. סמן ב: 1z + 2z ● מבין כל החלוקות עם ערך מינימלי 1z, וסכום שני ערכים מינימליים 1z + 2z, מצא חלוקה שבה סכום שלושת הערכים הקטנים גדול ביותר.
● המשך באותו אופן n פעמים. תכונות: יעיל פראטו

יעיל פראטו הוכחה: ● נתונה חלוקה לקסימין-אגליטרית א. נניח בשלילה שקיים לה שיפור-פארטו - חלוקה ב. ● בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו ב-א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גדול יותר. ● לכן וקטור-הערכים המסודר בחלוקה ב גדול יותר, בסדר מילוני, מבחלוקה א – סתירה להנחה שחלוקה א היא לקסימין-אגליטרית. ***

דוגמת הרצה: סיבוב :1 מקסימום ערך קטן ביותר = 3.
סיבוב:2 מקסימום סכום שני ערכים קטנים ביותר = 3+4 =7 .
סיבוב:3 מקסימום סכום שלושה ערכים קטנים ביותר = 3+4+5 = 12.
סיבוב:4 מקסימום סכום ארבעה ערכים קטנים ביותר 3+4+5+5 = 17.

	עצים	נפט	פלדה
א:	4	0	0
ב:	0	3	0
ג:	5	5	10
ד:	5	5	10

יעילות נאש- מצב יעיל-נאש הוא מצב הממקסם את סכום הלוגריתמים של הערכים $(f = \log)$. תכונות: ללא קנאה, יעילה פראטו.

משפטים

חלוקה אגליטרית- אלגו': הגדר משתנה z המייצג את הערך הקטן ביותר. פתרו את בעיית האופטימיזציה הבאה
maximize z; subject to Vi(Xi) ≥ z for all i in 1,…,n
חסרון: לא יעיל פראטו אם $\exists i \rightarrow Xi = 0$ קיים שחקן נתן ערך 0 לאחד המשאבים.

משפט: אם הערכים של השחקנים מנורמלים, כך שכל השחקנים מייחסים את אותו ערך לעוגה כולה, אז כל חלוקה אגליטרית (לקסימין או לא) היא פרופורציונלית.
הוכחה: ● קיימת חלוקה פרופורציונלית, למשל חלוקה שבה כל שחקן מקבל 1 חלקי n מכל משאב. ●יהי V ערך העוגה כולה (בעיני כולם). בחלוקה פרופ., הערך הקטן ביותר הוא לפחות V חלקי n. ●לכן, בחלוקה הממקסמת את הערך הקטן ביותר, הערך הקטן ביותר הוא לפחות V חלקי n. ●לכן, חלוקה זו גם היא פרופורציונלית. ***

משפט: לפעמים אין חלוקה אגליטרית וללא-קנאה

משפט: כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה פארטו.
הוכחה: ● נתונה חלוקה א הממקסמת סכום זה. ● נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו. ●אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה. ● בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר. ● כיוון שהפונקציה עולה בחלוקה ב הסכום גבוה יותר – סתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את הסכום.

הכללה: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה של הערכים: $\max_x f(V_j(X_j))$. אם הפונקציה f היא לוגריתמית $f(V) = \log V$ אז החלוקה לא רק יעילה אלא גם ללא קנאה!

משפט: כל חלוקה מסודרת בין שני שחקנים אא"מ יעילה־פארטו.

אגיליטרי לקסימין code

```
num_of_players = 4
xw = cvxpy.Variable(num_of_players)  # fractions of wood
xo = cvxpy.Variable(num_of_players)  # fractions of oil
xs = cvxpy.Variable(num_of_players)  # fractions of steel
A=0,B=1,C=2,D=3
utilities = [
    xw[A]*4,
    xo[B]*3,
    xw[C]*5+xo[C]*5+xs[C]*10,
    xw[D]*5+xo[D]*5+xs[D]*10]
fixed_constraints = \
    [0<=t for t in xw] + [t<=1 for t in xw] + \
    [0<=t for t in xo] + [t<=1 for t in xo] + \
    [0<=t for t in xs] + [t<=1 for t in xs] + \
    [sum(xw)==1, sum(xo)==1, sum(xs)==1]

print("\nITERATION 1: Egalitarian division")
min_utility = cvxpy.Variable()    # smallest utility of a single agent
prob = cvxpy.Problem(
    cvxpy.Maximize(min_utility),
    constraints = fixed_constraints + [min_utility <= u for u in utilities])
prob.solve()
print("optimal value: ", prob.value)
print("Utilities: ", [u.value for u in utilities])
print(f"  Wood: {xw.value.round(2)},\n  oil: {xo.value.round(2)},\n  steel: {xs.value.round(2)}")
# min_utility = 3
print("\nITERATION 3: Max the smallest sum of three")#השחקנים   וממשיכים האותה דרך ככמות
```

```
print("\nITERATION 2: Max the smallest sum of two:")
min_utility_of_two = cvxpy.Variable()
prob = cvxpy.Problem(

cvxpy.Maximize(min_utility_of_two),
    constraints =
fixed_constraints +

[min_utility.value <= u for u in utilities] +

[min_utility_of_two  <= u+v for u,v in combinations(utilities, 2)]
    )
prob.solve()
print("optimal value: ", prob.value)
print("Utilities: ", [u.value for u in utilities])
print(f"  Wood: {xw.value.round(2)},\n oil: {xo.value.round(2)},\n steel: {xs.value.round(2)}")
# min_utility_of_two = 7
```

משאבים בדידים

פתרונות מקובלים: 1. קירוב (חלוקת מושבים בכנסת) 2. שיתוף (חלוקת תיקים בממשלה) 3. מיטוב (השמת עבודות בתעשיה) 4. כסף (חלוקת חדרים ושכר-דירה) 5.הגרלה ("מחיר למשתכן").

m חפצים *זהים*, n זכויות *שוות*-

חלוקה הוגנת בקירוב- אלגו': כל שחקן מקבל m\n מעוגל למטה או למעלה.

m חפצים *זהים*, n זכויות *שונות*-
בעית חלוקה מושבים (כנסת), איך לחלק את m המושבים בכנסת בין n המפלגות, באופן יחסי למספר קולותיהן?

בעיה בקירוב: אי אפשר לעגל כי יכול לצאת מצב של מושב אחד או יותר שלא נבחר.

המלטון- אלגו' ● נותנים לכל מפלגה את מספר-המושבים המדוייק שלה מעוגל כלפי מטה. ●מחלקים את המושבים העודפים לפי סדר יורד של השארית. תכונות: בעיה בקירוב, הוגנת חסרון- לא עקבית
דוגמא- m=100 n=100 ●א: 69.4 ב: 30.35 ג: 20.25 ●א: 69 ב: 30 ג: 20 ●א: 70, ב: 30, ג: 20 החלוקה ●הסופות השארית הגדולה של א

ג'פרסון- אלגו' ● אתחול: כל מפלגה מקבלת 0 ● כל עוד יש מושבים: ● מחשבים, לכל מפלגה $\frac{\text{מספר קולות}}{1 + \text{מספר מושבים שהמפלגה קבלה עד כה}}$ ● נותנים את המושב הבא למפלגה שהמנה שלה גדולה ביותר. תכונות: בעיה בקירוב, עקבי חסרון- קנאה.
דוגמא: 5 מושבים, 500 בוחרים. א: 40, ב: 135, ג:325.
חלוקה: 0,0,0 מנה: 325,135,40. -> חלוקה: 1,0,0 מנה: 162.5,135,40. -> חלוקה: 2,0,0 מנה:108.33,135,40.
-> חלוקה: 2,1,0 מנה: 108.33,67.5,40. -> חלוקה: 3,1,0

הכליל ג'פרסון (שיטות מחלק)- אלגו' ● אתחול: כל מפלגה מקבלת 0 ● כל עוד יש מושבים: ●מחשבים, לכל מפלגה $\frac{\text{מספר קולות}}{F(\text{מספר מושבים שהמפלגה קבלה עד כה})}$ ●נותנים את המושב הבא למפלגה שהמנה שלה גדולה ביותר.
תכונות: בעיה בקירוב.
עם מחלק בשיטת $F(s) = s + y$
●שיטת ג'פרסון $F(s) = s + 1$ ●וובסטר שיטת $F(s) = s + 0.5$ ●אדאמס שיטת $F(s) = s$
●אם y<0.5, יש הטיה לטובת המפלגה הקטנה. ●אם y>0.5, יש הטיה לטובת המפלגה הגדולה. ●אם y=0.5, אין הטיה לאף צד.
מסכנה- שיטת וובסטר ללא כל הטיה לטובת מפלגות גדולות או קטנות.
משפט- שיטת וובסטר היא השיטה היחידה לחלוקת מושבים, שהיא גם עקבית וגם הוגנת
דוגמא: 3 מושבים,300 בוחרים -> א:210, ב:50, ג:40.
שיטת אדאמס:1 1 1 | שיטת וובסטר: 2 1 0 | שיטת ג'פרסון: 3 0 0 |

חיפוש במרחב המצבים- אלגו': ●נתחיל מחלוקה ריקה; ●ניצור את כל n המצבים הנובעים ממצב קיים + חלוקת חפץ אחד; ●נמחק מצבים מיותרים (גיזום – pruning); ●מתוך כל המצבים הסופיים (= m חפצים חולקו), נבחר מצב עם הערך המינימלי הגדול ביותר.
*גיזום: א. נמחק מצבים זהים. ב. נמחק כל מצב, שהחסם האופטימי שלו אינו טוב יותר מהחסם הפסימי הטוב ביותר שמצאנו.
*חסם פסימי = התוצאה המיטבית לא תהיה **גרועה** יותר. דוגמה: חלק את החפצים שנשארו באקראי.
*חסם אופטימי = התוצאה המיטבית לא תהיה **טובה** יותר. דוגמה: תן את כל החפצים שנשארו לכולם.
תכונות: אלגו' מדויק.

	חפץ א	חפץ ב	חפץ ג
שחקן 1	11	11	55
שחקן 2	22	22	33
שחקן 3	33	44	0

המצב (0,0,0 ;0):
- חסם פסימי: **11** (1:א, 2:ג, 3:ב).
- חסם אופטימי: **77** (1:א+ב+ג, 2:א+ב+ג, 3:א+ב+ג).

המצב (22,0,0 ;2):
- חסם אופטימי: **0** (נותנים את חפץ ג לכולם).
- אפשר לגזום את המצב הזה!

מצב התחלתי: (0,0,0 ;0)
נתינת חפץ א: (11,0,0 ;1), (0,22,0 ;1), (0,0,33 ;1).
נתינת חפץ ב: (22,0,0 ;2), (11,22,0 ;2), (11,0,44 ;2)
(11,22,0 ;2), (0,44,0 ;2), (0,22,44 ;2)
(11,0,33 ;2), (0,22,33 ;2), (0,0,77 ;2).
נתינת חפץ ג: 27 מצבים. באופן כללי: n^m.

-זכויות **שוות** n ,חפצים **שונים** m

בעיית שיבוץ העבודות - צריך לבצע m עבודות-חישוב באורכים שונים. יש n מחשבים זהים. צריך לשבץ עבודות למחשבים כך שזמן הסיום של העבודה האחרונה יהיה קצר ביותר.

אלגוריתם הָסֶבֶב- אלגו'- ●מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו. ●כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה. ●אם נשארו חפצים – חוזרים לשלב הקודם.
תכונות: בעיה בקירוב.
משפט- אלגוריתם הסבב מחזיר חלוקה 1EF.
הוכחה- ● נניח בה"כ ששחקן א מופיע בסבב לפני שחקן ב. ●א לא מקנא כלל: על כל חפץ ש-ב בחר, א בחר לפניו.●עכשיו נניח שמורידים מהסל של א את החפץ הראשון שבחר. על כל חפץ שנשאר בסל של א, ב בחר לפניו. לכן החלוקה 1EF גם עבור שחקן ב. ***

אלגוריתם סֶבב משוקלל-: אלגו'- ●אתחול כל שחקן מקבל 0. ●כל עוד יש חפצים: ●מחשבים לכל שחקן $\frac{\text{הזכות שלו}}{F(\text{מספר חפצים שקבלה עד כה})}$. ●השחקן, שהמנה שלו גדולה ביותר, בוחר, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה. תכונות: בעיה בקירוב. חסרון- קנאה
משפט- אלגוריתם הסבב המשוקלל עם פונקציית-מחלק $F(s) = s + y$ מחזיר חלוקה שבה לכל שני משתתפים i, j עם זכויות wi, wj, רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר: $y \cdot V_i(g)\backslash w_i + (1-y) \cdot V_i(g)\backslash w_j$
- **דוגמה**: לשחקן i זכות 1, לשחקן j זכות 2. רמת הקנאה המוצדקת של שחקן i בשחקן j היא לכל היותר:
- y*Vᵢ(g)/1 + (1-y)*Vᵢ(g)/2 =(y+(1-y)/2)* Vᵢ(g)
  - y=0: Vᵢ(g)/2 - פחות קנאה – טוב יותר לשחקן
  - y=1: Vᵢ(g) - יותר קנאה – טוב יותר לשחקן השני
  - y=0.5: 3*Vᵢ(g)/4 - ממוצע

משפט- שהמשאבים בדידים והערכות מנורמלות,**לא** כל חלוקה אגליטרית היא פרופורציונלית אבל חלוקה אגליטרית היא "הכי קרובה לפרופורציונלית" בהתחשב בחפצים הבדידים.

משפט- שהמשאבים **בדידים**, מציאת חלוקה אגליטרית היא בעיה NP-קשה. רידוקציה מ (Partition):" נתונים m מספרים חיוביים שסכומם 2S. האם ניתן לחלקם לשתי קבוצות שסכומן S"?.

שיבוץ העבודות וחלוקה אגליטרית בעיית שיבוץ m עבודות על n מחשבים שקולה לבעיית חלוקה אגליטרית של m מטלות (=חפצים עם ערך שלילי) בין n אנשים עם הערכות זהות.
דוגמה: 4 אנשים, 9 מטלות, ערכים: -4, -4, -4, -5, -5, -6, -6, -7, -7 חלוקה א: -5-6, -5-6, -4-7, -4-7, -4-4-7 ● ערך מינימלי: -15 חלוקה ב: -6-6, -5-7, -5-7, -4-4-4 ● ערך מינימלי: -12. חלוקה אגליטרית. חלוקה א היא קירוב 5/4 לחלוקה האגליטרית.

שיבוץ רשימה- אלגו':
●לכל עבודה j בין 1 ל-m:
 ●תן את j למחשב עם זמן-סיום נוכחי קטן ביותר.
●לכל מטלה j בין 1 ל-m:
 ●תן את j לשחקן, שהעלות (=מינוס הערך) הנוכחית שלו קטנה ביותר (= קרובה ביותר לאפס)
* **לא** מסדרים את הערכים של העבודות בסדר יורד **בשונה** מהאלגוריתם החמדני.
דוגמה- 4 אנשים, 9 מטלות עם עלויות: 7 ,7 ,6 ,6 ,5 ,5 ,4 ,4 ,4.
שחקן א 4,5,7. שחקן ב 4,6. שחקן ג 4,6. שחקן ד 5,7 ● עלות מקסימלית: 16 (ערך מינימלי: מינוס 16).
משפט- אלגוריתם הרשימה לחלוקת מטלות מוצא חלוקה שבה העלות המקסימלית קטנה מפי 2 מהעלות המקסימלית המיטבית.

האלגוריתם החמדני- ●סדר את העבודות בסדר יורד של זמן הריצה;●הפעל "תיזמון רשימה" על הרשימה המסודרת●סדר את המטלות בסדר יורד של העלות שלהן;●חלק את המטלות בעזרת "אלגוריתם הרשימה".
דוגמה- 4 אנשים, 9 מטלות עם עלויות: 7 ,7 ,6 ,6 ,5 ,5 ,4 ,4 ,4.
שחקן א 7,4,4. שחקן ב 7,4. שחקן ג 6,5. שחקן ד 6,5 | עלות מקסימלית: 15 (ערך מינימלי: מינוס 15).
משפט-האלגוריתם החמדני מוצא חלוקת מטלות עם עלות מקסימלית קטנה מפי4/3 מהעלות המיטבית.
לסיכום- אפשר להשתמש באותו אלגוריתם לחלוקת חפצים לשחקנים עם הערכות זהות: הערך המינימלי > פי 3/4 מהערך האגליטרי.לשחקנים עם הערכות שונות, הבעיה הרבה יותר קשה.

אלגוריתם מדויק + אלגוריתם קירוב אלגו'- ●משתמשים באלגוריתם מדוייק – חיפוש במרחב המצבים ●מחשבים חסמים פסימיים בעזרת אלגוריתם קירוב – כגון האלגוריתם החמדני שלמדנו.●אם נגמר הזמן, והחיפוש במרחב המצבים עדיין לא מצא חלוקה מיטבית – מחזירים את החלוקה הכי טובה שהחיפוש מצא עד כה. ●החסם הפסימי מבטיח, שהחלוקה הזאת טובה לפחות כמו החלוקה של אלגוריתם הקירוב

מיקסום מכפלת הערכים -החלוקה ה"אידיאלית" של חפצים בדידים היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. אלגו- חיפוש במרחב המצבים, עם כללי גיזום כמו שלמדנו, רק שבמקום לבדוק את התועלת הקטנה ביותר בכל מצב, בודקים את מכפלת התועלות בכל מצב.
תכונות: יעילות פארטו,1EF

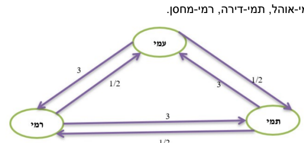
"חותכים" חפץ בדיד

איך "חותכים" חפץ בדיד - החפץ שצריך "לחתוך" נשאר בבעלות משותפת (כמו משמורת על ילדים).
המטרה- למצוא חלוקה הוגנת ויעילה עם **הכי מעט** שיתופים שאפשר.

אלגוריתם "המנצח המתוקן"- אלגו'- ●סדר חפצים בסדר עולה של יחס הערכים:
ערך-עבור-שחקן-א\ערך-עבור-שחקן-ב. ●אתחול: תן את כל החפצים לשחקן א. ●העבר חפצים לשחקן ב לפי הסדר, עד ש:(1)סכום הערכים של א שווה לסכום של ב, או -(2) יש חפץ אחד שאם "נחתוך" אותו הסכום ישתווה.
תכונות: חלוקה מסודרת (כלומר יעילה פראטו),פרופורציונלית, וללא קנאה, שיתוף של חפץ **אחד לכל היותר.**
חסרון- מתאים רק ל2 אנשים דוגמא- דונלד ואיוונה יש במטלה

"חותכים" חפץ בדיד בעיית 3 שחקנים ומעלה-
משפט- לכל n שחקנים, קיימת חלוקה יעילה- פארטו ופרופורציונלית עם 1-n שיתופים כל היותר.

גרף ההחלפות - גרף־ההחלפות של חלוקה נתונה הוא גרף מכוון שלם, עם ●n צמתים – צומת לכל שחקן.
●קשת מכוונת בין כל שני שחקנים i,j. ●משקל הקשת $i \rightarrow j$ = היחס (ערך של i \ ערך של j) הקטן ביותר של חפץ הנמצא בסל של שחקן i. דוגמא- עמי-אוהל, תמי-דירה, רמי-מחסן.



	אוהל	דירה	מחסן
עמי:	**3**	1	6
תמי:	6	**3**	1
רמי:	1	6	**3**

נחשב את משקלי הקשתות בדוגמה למעלה. כדי לחשב את משקל הקשת מעמי לתמי, יש לחשב את יחסי־הערכים של החפצים שנמצאים בסל של עמי. בחלוקה הנתונה, לעמי יש רק אוהל. יחס־הערכים של האוהל הוא 3/6. לכן משקל הקשת מעמי לתמי הוא 1/2. גם משקל הקשת מעמי לרמי נקבע לפי יחס־הערכים של האוהל, שהוא במקרה זה 3/1=..3 משקל הקשת מרמי לתמי נקבע לפי יחס הערכים של החפץ היחיד בסל של רמי, שהוא המחסן. יחס זה הוא 3/1=3.
לכל מעגל מכוון בגרף, ניתן לחשב את מכפלת המשקלים על הקשתות במעגל. לדוגמה: מכפלת המשקלים של המעגל (עמי ← תמי ← רמי ← עמי) היא ⅛;
איך לפתור- כדי שלא להעמיס בסימונים, נראה את ההוכחה עבור מעגל באורך 3 הכולל את השחקנים: a → c → b → a הקורא לא יתקשה להכליל את ההוכחה למעגל בכל אורך שהוא. נסמן את ההערכות של השחקנים במעגל ב: va, vb, vc, ואת החפצים שלפיהם נקבעו משקלי הקשתות ב:$x\ (a\ \text{שחקן})$, $y\ (b\ \text{שחקן})$, $z\ (c\ \text{שחקן})$ לשחק. נסמן את מכפלת המשקלים במעגל באות P.
לפי ההנחה P<1., נסמן ב־Q את השורש השלישי של P, ונשים לב שגם Q<1. כעת, נגדיר החלפת חפצים בין השחקנים, באופן הבא:● שחקן a נותן לשחקן b חלק קטן כלשהו, שנסמן ב־εx, של חפץ x. $\varepsilon_y = \varepsilon_x \cdot q \cdot \frac{Vb(x)}{Vb(y)}$
● שחקן b נותן לשחקן c חלק εy של חפץ y, המוגדר כך: $\varepsilon_z = \varepsilon_y \cdot q \cdot \frac{Vc(y)}{Vc(z)}$ ● שחקן c נותן לשחקן a חלק εz של חפץ z, המוגדר כך $\varepsilon_x = \varepsilon_z \cdot q \cdot \frac{Va(z)}{Va(x)}$
הגודל של εx יכול להיות כל מספר חיובי. נקבע אותו כך שההעברה תהיה אפשרית, כלומר: εx יהיה קטן מהכמות של x המוחזקת בידי שחקן a, εy יהיה קטן מהכמות של y המוחזקת בידי שחקן b, ו־ εzיהיה קטן מהכמות של z המוחזקת בידי שחקן c.

משפט- חלוקה היא יעילה־פארטו אם־ורק־אם בגרף־ההחלפות שלה, בכל מעגל מכוון, מכפלת־המשקלים גדולה או שווה 1.
חלוקה יעילה- מחפשים מעגל עם מכפלת-משקלים > 1? ● הופכים כל משקל ללוגריתם שלו; ●מחפשים מעגל עם סכום-משקלים שלילי (למשל, בעזרת אלגוריתם בלמן-פורד).

חלוקה הוגנת ויעילה ללא שיתופים - אלגו- ●מבצעים חיפוש במרחב המצבים; ●גוזמים מצבים המתאימים לחלוקות לא יעילות.

גרף־הצריכה- של חלוקה נתונה הוא גרף דו־צדדי לא־מכוון וללא משקלים, שבו: ●הקודקודים בצד אחד הם n השחקנים; ●הקודקודים בצד השני הם m החפצים; ●יש צלע בין שחקן i לבין חפץ j, אם ורק אם ● שחקן i מקבל חלק חיובי של חפץ j.
משפט- קיים אלגוריתם עם זמן-ריצה פולינומיאלי המוצא, לכל חלוקה נתונה, שיפור־פארטו־חלש עם גרף צריכה ללא מעגלים (← לכל היותר 1-n+m צלעות ← לכל היותר 1-n שיתופים).
משפט- קיים אלגוריתם עם זמן-ריצה פולינומיאלי המוצא, לכל חלוקה נתונה, שיפור־פארטו־חלש עם לכל היותר 1n- שיתופים.
חלוקה הוגנת ויעילה עם n-1 שיתופים- אלגו'- ●נמצא חלוקה פרופורציונלית ויעילה-פארטו (למשל: לקסימין-אגליטרית עם הערכות מנורמלות). ●נמצא שיפור-פארטו-חלש עם גרף-צריכה ללא מעגלים.
תכונות: יעילה-פארטו,פרופורציונלית

חלוקה הוגנת ויעילה עם n-1 שיתופים – זכויות שונות

אם לשחקנים יש זכויות שונות, ניתן להשתמש באותו אלגוריתם, אבל להתחיל מחלוקה שהיא יעילה-פארטו ופרופורציונלית בהתחשב בזכויות השונות. אלגו- ●נמצא חלוקה פרופורציונלית ויעילה-פארטו (למשל: לקסימין-אגליטרית עם הערכות מנורמלות בהתאם לזכויות השונות) ●נמצא שיפור-פארטו-חלש עם גרף-צריכה ללא מעגלים.
פתרון לבעיית הרכבת הממשלה - ניתן להקים ממשלה עם n מפלגות, ולחלק את התיקים בהוגנות מדוייקת, בהתאם לגדלים השונים של המפלגות, כך שיהיו לכל היותר 1-n תיקים עם רוטציה.

חלוקה הוגנת של חפצים בדידים וכסף (אין חובה לכמות החפצים שמקבל כל שחקן)

גוד או אגוד- אלגו'- ●שחקן א מציע מחיר כלשהו p. ●שחקן ב מחליט האם לקנות או לא: אם כן – ב משלם p/2 ל-א ומקבל את החפץ. אם לא – א משלם p/2 ל-ב ומקבל את החפץ.
תכונות: ללא קנאה,יעילה-פארטו חסרון- מתאים רק ל2 אנשים
משפט- "גוד או אגוד" מאפשר לכל שחקן קוואזיליניארי להשיג חלוקה פרופורציונלית.
הוכחה- שחקן א יכול להציע va=p. התועלת שלו: ●אם ב קונה: $p\2 = Va\2$ ●אם ב לא קונה: $Va - p\2 = Va\2$ ●שחקן ב יכול לקנות אם $p < Va$. ●קנה א: $Vb - p\2 > Vb\2$ ●אם לא קנה: $p\2 \geq Vb\2$ בשני המקרים, החלוקה פרופורציונלית. ***

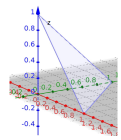
משפט- כשכל השחקנים הם קוואז..,חלוקה היא יעילה-פארטו אמ"מ היא ממקסמת את סכום הערכים.

אלגוריתם המכרז השווה- אלגו'- ●כל שחקן רושם את ערך לכל חפץ. ●האלגוריתם מוכר כל חפץ לשחקן עם הערך הגבוה ביותר, בתמורה לערך שרשם. ●האלגוריתם מחלק את הכסף, שהתקבל מכל השחקנים, שווה בשווה. תכונות: הרבה חפצים והרבה שחקנים,יעילה־פארטו,ללא-קנאה
תועלת- ●התועלת של כל שחקן i מהסל שלו היא: Vi(Xi) – Vi(Xi) + S/n = S/n ●התועלת של כל שחקן i מהסל של j היא: Vi(Xj) – Vj(Xj) + S/n.
משפט- אלגוריתם המכרז השווה מחזיר חלוקה יעילה־פארטו.
הוכחה- כל חפץ נמסר לשחקן המייחס לו ערך גבוה ביותר. לכן החלוקה ממקסמת סכום ערכים. לפי משפט קודם, החלוקה יעילה-פארטו. ***

חלוקה הוגנת של חפצים בדידים וכסף- כל שחקן מקבל לפחות חפץ אחד (דוג' בעיית חלוקת חדרים ושכר-דירה)

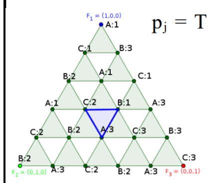
בעיית חלוקת שכר דירה נתונים- קלט- ●דירה עם n חדרים ודמי-שכירות נתונים R, ●קבוצה של n שותפים השוכרים את הדירה. הפלט ●השמה-לכל שחקן i מתאימים חדר אחד Xi. ●תמחור-לכל חדר j מתאימים מחיר j(p).
האתגר: להחליט מי יגור איפה, וכמה ישלם, כך שלא תהיה קנאה.
ללא קנאה: אף שותף לא מעדיף את החבילה (חדר+מחיר) של שותף אחר.
הערה: אם השחקנים קוואזיליניאריים, אז קיים מחיר גבוה מדי – למשל הערך הגבוה ביותר ששחקן כלשהו מייחס לחדר כלשהו.
משפט: אם קיים מחיר גבוה מדי, אז יש השמה +תימחור ללא קנאה.

סימפלקס התימחורים-
סימפלקס = אוסף הנקודות במרחב, שסכום הקוארדינטות שלהן שווה 1.
לדוגמה: סימפלקס במרחב 3- ממדי הוא משולש;

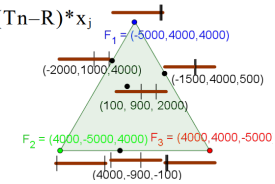


משפט- אם קיים מחיר גבוה מדי, אז יש השמה +תימחור ללא קנאה. (הוכחה עם סיפלקס)

סימפלקס התימחורים- הנחה: כל הדיירים הם קוואזיליניאריים. אלגו'- הקלט: מטריצה n x n המתארת את ערכי החדרים לכל אחד מהדיירים,הפלט: השמה X, תימחור p.אין קנאה: לכל שני שחקנים Vi(Xi) – p(Xi) ≥ Vi(Xj) – p(Xj.
●נחלק את סימפלקס התימחורים לסימפלקסונים; ●ניתן כל קודקוד לשחקן; נשאל אותו איזה חדר הוא מעדיף בתימחור המתאים לקודקוד.● נימצא סימפלקסון מגוון.
תכונות: תימחור ללא קנאה
דוגמה:



$$p_j = T - (Tn-R)*x_j$$

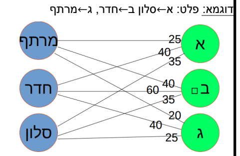


משפט- בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי. (לפי הגדרת קנאה לדיירים קוואזיליניאריים, חדרים-השמת ללא קנאה X, השמה אחרת כלשהי Y, לכל i מקיים: – Vi (Xi) (P(Xi) ≥ Vi (Yi) – P(Yi

משפט- כל תימחור ללא קנאה יישאר ללא-קנאה לכל השמה ממקסמת-סכום-ערכים.

חלוקת-חדרים ללא קנאה- אלגו': ●מצא חלוקה כלשהי X הממקסמת סכום-ערכים. מציאת השמה הממקסמת את סכום הערכים = מציאת שידוך עם משקל מקסימום בגרף דו-צדדי למשל:"האלגוריתם ההונגרי" (יש מימוש בפייתון בספריה networkx). ● מצא תמחור p שאיתו החלוקה X ללא ● קנאה. תכונות: ללא קנאה
דוגמא: פלט: א←סלון ב←חדר, ג←מרתף

	מרתף	חדר	סלון
דייר א	25	40	**35**
דייר ב	40	**60**	35
דייר ג	**20**	40	25



בעיה קביעת המחירים: סכום המחירים יהיה שווה לשכר-הדירה:
פתרון: בעיית תיכנות ליניארי $For\ all\ i,\ j:\ w[d[i],\ i]\ -\ p[i]\ \geq w[d[i],\ j]\ -\ p[j]$
(אפשר לפתור בעזרת cvxpy)

Code-

```
print("\n\nThere are three tennants and three rooms.")
# Construct an empty graph:
G=nx.Graph()
# Add edges with weights:
G.add_edge('aya','martef' ,weight=20)
G.add_edge('aya','heder',weight=40)
G.add_edge('aya','salon' ,weight=35)

G.add_edge('batya','martef' ,weight=40)
G.add_edge('batya','heder',weight=30)
G.add_edge('batya','salon' ,weight=35)

G.add_edge('gila','martef' ,weight=20)
G.add_edge('gila','heder',weight=40)
G.add_edge('gila','salon' ,weight=40)
print("Maximum-value matching: ", nx.max_weight_matching(G))
```

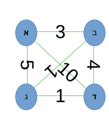
בעיית הטרמפיסט
משפט- ייתכן שבכל חלוקה ללא קנאה, אחד הדיירים ישלם מחיר שלילי (צריך לשלם לו שיסכים לגור בדירה...)
הנחת הדיירים העניים- כל דייר מעדיף חדר בחינם על-פני חדר בתשלום.
משפט סו- אם מתקיימת הנחת הדיירים העניים, אז קיימת חלוקת חדרים ללא קנאה, שבה כל דייר משלם מחיר חיובי (אין "טרמפיסטים").

אלגוריתמים מגלי-אמת

בעיה בחירת פרסומות לדף רשת: ●נתונים m מפרסמים שונים. לכל מפרסם יש ערך שונה להקלקה על הפרסומת שלו. ●בדף יש k מיקומים, m<k. לכל מיקום יש אחוזי-הקלקה שונים. ●צריך לבחור k מפרסמים ולתת מיקום לכל מפרסם, כך שתוחלת סכום הערכים תהיה גדולה ביותר.
תכונות: הערך של כל מפרסם ידוע רק למפרסם

מכרז ויקרי- אלגו'- ●המשתתפים כותבים הכרזות במעטפות;● המעטפות נפתחות ומסודרות בסדר יורד; ● בעל ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה בחפץ; ● הזוכה משלם את ההכרזה השניה בגובהה.
תכונות: מגלה-אמת (כשלשחקנים יש העדפות קוואזי-ליניאריות). יעיל פארטו (ממקסם את סכום הערכים)
משפט: מכרז מחיר ראשון אינו מגלה-אמת.

ויקרי – קלארק – גרובס (VCG)- הנחות:● יש מספר סופי של תוצאות אפשריות. ● לכל משתתף יש ערך כספי לכל תוצאה. ● התועלת = ערך התוצאה פחות התשלום הקוואזי-ליניארית.
אלגו':- ●בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר. ●עבור כל שחקן: ●חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים. ●חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף. ●גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים. תכונות: מגלה-אמת
דוגמא1: בעיית מציאת מסלול זול ביותר- נתונה רשת. לכל קשת יש עלות-מעבר. צריך להעביר חבילה בין שתי נקודות ברשת ד → א, במסלול עם עלות כוללת נמוכה ביותר.



צריך לפתור 1+6 בעיות מסלול-זול-ביותר.● כשכולם נמצאים: המסלול אבגד, הסכום 5- ● בלי אב: המסלול אגד, הסכום 6-. תשלום 4- ● בלי בג: המסלול אגד, הסכום 6-. תשלום 2- ● בלי גד: המסלול אבד, הסכום 7-. תשלום 3- ● בלי אג/אד/בד: אין שינוי, הסכום 5- תשלום 0. ● תשלום כולל 9-.
עוד 2 דוגמאות –>

דוגמא2:
$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05,$
$v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3=6.$

המחיר למפרסם 1:
- 9*0.1 + 6*0.05 – סכום האחרים בלעדיו
- **-** 9*0.05 – סכום האחרים כשהוא נמצא
- = **7.5** * 0.1

המחיר למפרסם 2:
- 10*0.1 + 6*0.05 – סכום האחרים בלעדיו
- **-** 10*0.1 – סכום האחרים כשהוא נמצא
- = **6 *** 0.05

דוגמא3:

	א זוכה	ב זוכה	ג זוכה
ערך משתתף א:	7	0	0
ערך משתתף ב:	0	8	0
ערך משתתף ג:	0	0	4
סכום:	7	**8**	4
נבחר:	FALSE	**TRUE**	FALSE
סכום בלי א:	0	**8**	4
סכום בלי ב:	**7**	0	4
סכום בלי ג:	7	**8**	0
	תשלום	ערך	תועלת
א:	0	0	0
ב:	7	8	1
ג:	0	0	0
סה"כ:	7	8	1

תקצוב משתף

המטרה: תקצוב משתף הוגן.
סוגי אלגוריתמים לחלוקת תקציב:
1. **בדיד** – לכל פריט יש עלות; כל פריט ממומן במלואו או בכלל לא. * מתאים למימון פרויקטי בניה.
2. **רציף** – כל פריט יכול להשתמש בכל סכום שנותנים לו. * מתאים למימון ארגונים ועמותות.

תקצוב משתף בדיד

ייצוג הוגן לקבוצות אחידות- נתונים: ● גודל הוועדה = k. ● מספר האזרחים = n.
המיכסה- k/n = מספר האזרחים שמגיע להם להחליט לגבי מושב אחד.
הגדרות:

קבוצה L-אחידה- קבוצת אזרחים בגודל לפחות L מיכסות, הבוחרים ביחד קבוצה זהה של L מועמדים. כמו הצבעה למפלגה. (תנאי קשה לקיום)

ייצוג הוגן לקבוצות אחידות - לכל קבוצה L-אחידה, הוועדה כוללת לפחות L מועמדים שחברי הקבוצה תומכים בהם.

קבוצה L-מגובשת - קבוצת אזרחים בגודל לפחות L מיכסות, התומכים בקבוצה כלשהי של L מועמדים.

ייצוג הוגן חזק - לכל קבוצה L-מגובשת, הוועדה כוללת לפחות L מועמדים שכל חברי הקבוצה תומכים בהם (ייצוג הוגן חזק לא תמיד אפשרי).
דוגמה שאין יצוג הוגן חזק - ● k=3, n=12, n/k=4 ● ההצבעות: אב, ב, בג, ג, גד, ד, דא, א, א. ● יש ארבע קבוצות -1מגובשות. (אב,ב,בג; בג,ג,גד; גד,ד,דא; דא,א,אב). ● ייצוג הוגן חזק מחייב לבחור ב,ג,ד,א – אבל k=3.

ייצוג הוגן מורחב - לכל קבוצה L-מגובשת, הוועדה כוללת לפחות L מועמדים שאחד מחברי הקבוצה תומך בהם. • לפחות אחד מחברי הקבוצה לא יצטרף לפרישה. (ייצוג הוגן מורחב תמיד אפשרי)

ייצוג הוגן יחסי - לכל קבוצה L-מגובשת, הוועדה כוללת לפחות L מועמדים, שכל אחד מהם נתמך ע"י חבר כלשהו מהקבוצה.

ייצוג הוגן חזק ← ייצוג הוגן מורחב ← ייצוג הוגן יחסי ← ייצוג הוגן לקבוצות אחידות.

אלגוריתמים תקצוב משתף בדיד

שיטת התרמיל- ●מסדרים את הנושאים בסדר יורד של מספר הקולות שקיבלו. ●מכניסים נושאים לתקציב, עד שהעלות מגיעה לסכום הכולל בקופה. חסרון: חוסר ייצוג הוגן לקבוצות

שיטת החלקים השוים- (בדיד) אלגו'- ●תן לכל אזרח "תקציב" וירטואלי בגודל k\n. ●קבע את העלות של כל מועמד ל 1; ●אם יש לפחות מועמד אחד, שתומכיו יכולים לשלם את העלות שלו - בחר מועמד כזה, שהעלות לכל תומך שלו תהיה נמוכה ביותר, וחזור ל 1. ●אחרת, סיים את האלגוריתם; אם חסרים חברים בוועדה, הוסף חברים באופן שרירותי.
תכונות: ייצוג הוגן מורחב,הוגן. חסרון: שיטת החלקים השווים לא מונוטונית בגודל הוועדה
דוגמא: n=100 k=5. מתוכם 51 בוחרים א,ב,ג,ד,ה; 49 בוחרים צ,ק,ר,ש,ת.
- התקציב ההתחלתי לאזרח = 5/100.לנוחות נכפיל ב-100: תקציב התחלתי לאזרח=5, והעלות של מועמד=100.
- סיבוב 1: למועמדים א,ב,ג,ד,ה, דרוש 1.96~100/51 לכל תומך; למועמדים צ,ק,ר,ש,ת, רק 2.04~100/49 לכל תומך. לכן נבחר מועמד כלשהו מבין א,ב,ג,ד,ה, למשל מועמד א.
- כל אחד מ51- התומכים של מועמד א משלם 1.96, ונשאר עם 3.04.
- סיבוב 2: החישוב דומה, נבחר מועמד נוסף מבין ב,ג,ד,ה, למשל מועמד ב.
- כל אחד מ51- התומכים של מועמד א משלם 1.96, ונשאר עם 1.08.
- סיבוב 3: התקציב הכולל של תומכי ג,ד,ה הוא רק 55.08, ולכן אף אחד מהם לא נבחר.
- נבחר אחד מהמועמדים צ,ק,ר,ש,ת, נניח מועמד צ
- כל אחד מ49- התומכים של מועמד צ משלם 2.04 ונשאר עם 2.96.
- סיבוב 4: נבחר אחד מהמועמדים ק,ר,ש,ת, נניח מועמד ק.
- כל אחד מ49- התומכים של מועמד ק משלם 2.04 ונשאר עם 0.92.
- סיבוב :5 אף מועמד לא יכול להשיג מימון.
- מוסיפים עוד מועמד שרירותית כדי להשלים ל,5- ומסיימים את האלגוריתם.

מתקיים ייצוג הוגן חזק: יש שתי קבוצות 2־מגובשות, וכל אחת מהן קיבלה 2 מועמדים.

משפט: שיטת החלקים השוים בוחרת וועדה המקיימת ייצוג הוגן לקבוצות אחידות.
הוכחה: ● התקציב ההתחלתי של כל אזרח הוא n/k. ●לכן התקציב ההתחלתי של כל קבוצה L-אחידה הוא L. ● כיוון שהקבוצה אחידה, חברי הקבוצה מממנים רק מועמדים שכל חברי הקבוצה תומכת בהם. ● התקציב שלהם מספיק כדי לממן לפחות L מועמדים.

שיטת פראגמן- (בדיד) אלגו': ● תן לכל אזרח "תקציב" וירטואלי התחלתי 0. ● קבע את העלות של כל מועמד ל 1. ● הוסף לכל אזרח תקציב בקצב קבוע, עד שיש מועמד אחד, שהתומכים שלו יכולים לממן אותו. ● ברגע שיש מועמד כזה, בחר אותו, והורד את היתרה של כל התומכים שלו לאפס. ● אם נבחרו כבר k מועמדים - סיים את האלגוריתם. אחרת – חזור לצעד 1. תכונות: לאפשר לוועדה לגדול באופן דינאמי,מונוטוניות,ייצוג הוגן יחסי חסרון: לא מבטיחה ייצוג הוגן מורחב. לא הוגן
דוגמא: n=100 k=5. מתוכם 51 בוחרים א,ב,ג,ד,ה; 49 בוחרים צ,ק,ר,ש,ת.
- התקציב ההתחלתי לאזרח = 0. לשם נוחות, העלות של מועמד = 100.
- נותנים לכולם כסף וירטואלי בהדרגה, עד שלכולם יש 1.96.
- 51 האזרחים הראשונים יכולים לממן מועמד, כי 100=1.96*51. נניח שהם מממנים את א.
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0, 49 אזרחים עם יתרה 1.96.
- ממשיכים לתת כסף וירטואלי בהדרגה, עד שמוסיפים עוד 0.08.
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0.08, 49 אזרחים עם יתרה 2.04.
- באותה שיטה נבחר את צ,ב,ק,ג ....
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0; 49 אזרחים עם יתרה 1.8. האלגוריתם מסתיים.

בעיית בחירת ועדה לחלוקת תקציב
שיטת החלקים השוים לחלוקת תקציב- (בדיד) (הכלילה של החלקים השווים ושיטת פראגמן) אלגו'- ● במקום המועמדים, יהיו הפריטים האפשריים בתקציב; ● במקום עלות של 1 לכל מועמד, תהיה העלות האמיתית של כל פריט בשקלים ● בשיטת החלקים השוים, התקציב הוירטואלי ההתחלתי של כל אזרח יהיה B\n,כאשר B = התקציב הכולל. תכונות: ייצוג הוגן מורחב

ייצוג הוגן בחלוקת תקציב:
קבוצה T-מגובשת - קבוצת אזרחים התומכת בכל הפריטים בקבוצה T, ומספר חברי הקבוצה הוא לפחות $cost(T) \cdot n\B$.
ייצוג הוגן מורחב בחלוקת תקציב- לכל תת-קבוצה T של פריטים, ולכל קבוצה T-מגובשת, יש לפחות חבר אחד בקבוצה שתומך בלפחות |T| פריטים שנכנסו לתקציב.

תקצוב משתף רציף

השאלה לא איזה נושאים לתקצב אלא כמה לתת לכל נושא
הגדרות- כסף בקופה: C. נושאים m, אזרחים n.
התועלת של אזרח i לנושא j היא: Ui,j. **(רוצה או לא רוצה 0 \ 1).**
וקטור d המייצג תקציב: (d1 ,…,dm) כאשר d1 + … + dm=C.
התועלת של אזרח i מהתקציב d היא: $U_i(d) = \sum_{j=1}^{m} U_{i,j} \cdot d_j$.

תקציב אנארכי- אלגו': נותן לכל אזרח את חלקו בתקציב C\n, ואומר לו לחלק את הכסף כרצונו בין כל הנושאים שהוא תומך בהם.
תכונות: הוגן-לקבוצות, מגלה-אמת חסרון- לא-יעיל פרטו
משפט: כל תקציב אנארכי הוא הוגן-לקבוצות.
הוכחה- לכל קבוצה בגודל k, סכום הכסף הניתן לחברי-הקבוצה הוא k*C\n, וכל הסכום הזה מפוזר על נושאים שלפחות אחד מחברי-הקבוצה תומך בהם. ***

תקציב אוטיליטרי- תקציב הממקסם את סכום התועלות של האזרחים אלגו': ● תן את כל התקציב לנושאים שיש להם הכי הרבה תומכים.
תכונות: יעיל פרטו, מגלה-אמת חסרון- לא-הוגן אפילו ליחידים, דוגמא . אזרחים 1,2 בעד א, אזרח 3 בעד ב.

משפט: תקציב פָּרִיק אא"מ הוגן לקבוצות.
הוכחה: כיוון אחד ←נניח שהתקציב d הוא פריק. לכל קבוצה בגודל k, סכום הכסף הניתן לחברי-הקבוצה על-ידי הפירוק של d הוא k*C\n. לפי הגדרת הפירוק, כל הסכום הזה מפוזר רק על נושאים שלפחות אחד מחברי-הקבוצה תומך בהם. לכן התקציב הוגן לקבוצות. ***

נאש מיקסום המכפלה - אלגו'- קציב נאש הוא תקציב הממקסם את מכפלת התועלות של האזרחים:
$max[d]\ product[i]\ u_i(d)$ שקולה ל- $max[d]\ sum[i]\ log(u_i(d))$
תכונות: פריק, יעיל פרטו (מיקסום המכפלה), חסרון- אינו מגלה-אמת

משפט: אלגוריתם נאש אינו מגלה-אמת.
הוכחה: נניח שיש ארבעה נושאים (א,ב,ג,ד,) חמישה אזרחים, והסכום הכולל 500. קלט: אב,אג,אד,בג,א; פלט (370 ,65 ,65 0). התועלת של אזרח "א+ב" היא 435=370+65. קלט: בד,אג,אד,בג,א; פלט (300 ,200 ,0 ,0). התועלת של אזרח "א+ב" היא 500=300+200 -. שווה לו להגיד "ב+ד"! ***

נאש מיקסום המכפלה - code

```
# There are 4 issues, denoted by a, b, c, d.
# The same letters denote the budget allocated to them.
allocations = cvxpy.Variable(4)
a, b, c, d = allocations

# There are 5 citizens. Their preferences are: ab, ac, ad, bc, a. The total budget is 500 - 100 for each citizen
donations = [100, 100, 100, 100, 100]
utilities = [a+b, a+c, a+d, b+c, a]

sum_of_logs = cvxpy.sum([cvxpy.log(u) for u in utilities])
positivity_constraints = [v >= 0 for v in allocations]
sum_constraint = [cvxpy.sum(allocations)==sum(donations)]

problem = cvxpy.Problem(
    cvxpy.Maximize(sum_of_logs),
    constraints = positivity_constraints+sum_constraint)
problem.solve()
```

אוטיליטרי-על-תנאי - ממקסם את סכום התועלות תחת האילוץ שהתקציב פריק. אלגו': ● כל אזרח תורם לנושאים, מאלה שהוא תומך בהם, עם הכי הרבה תומכים אחרים.
● דוגמא1 אב,אג,אד,בג,א: (400 ,50 ,50 ,0). ● דוגמא2 בד,אג,אד,בג,א: (300 ,100 ,50, 50)
תכונות: פריק, מגלה אמת (מיקסום המכפלה), חסרון- לא יעיל פרטו (אבל לא קיים שיפור-פארטו שהוא פריק)

טרילמה משפט- לא קיים אלגוריתם שהוא: יעיל-פארטו, וגם מגלה-אמת, וגם הוגן (ליחידים או לקבוצות).

מיזוג הצעות תקציב

הגדרות- כסף בקופה: C. נושאים m, אזרחים n.
התועלת של אזרח i לנושא j היא: Ui,j.**(לא בינארי).**
לכל אזרח i יש תקציב אידיאלי: $p_{i,1} + \ \ldots \ + p_{i,m} = C$
וקטור d המייצג תקציב: (d1 ,…,dm) כאשר d1 + … + dm=C.
התועלת של אזרח i מהתקציב d היא: $U_i(d) = \sum_{j=1}^{m} \left| d_j - p_{i,j} \right|$
הסבר: נניח שצריך להחליט רק על תקציב החינוך.כל אזרח i אומר מספר pi.
- אלגו' א: רוב. חסר משמעות; אולי לכל מספר יש תומך 1.
- אלגו' ב: ממוצע. הוגן לקבוצות, לא מגלה אמת, אפילו כשיש רק 2 אזרחים.
- אלגו' ג: קבוע שרירותי. לא יעיל פארטו.
- אלגו' ד: דיקטטור. לא אנונימי – מפלה בין אזרחים שונים אבל יעיל פראטו והוגן לקבוצות.

אלגוריתם החציון - ● סדר את ההצבעות בסדר עולה: p1 ≤ p2 ≤ … ≤ pn. ● בחר את הצבעה מספר n\2 (עגל למעלה). תכונות: יעיל פראטו, אנונימי,מגלה-אמת חסרון-לא יעיל לקבוצות (אם יש יותר מנושא אחד לתקציב)
*כדי להכללי את האלגו' ליותר מנושא אחד שיהיה יעיל לקבוצות אפשר להנריץ את אלגוריתם החציון על כל סעיף בנפרד ולנרמל ע"י הכפלה בשבר אבל אז האלגו' לא יהיה מגלה-אמת.
מסקנה- אלגוריתם החציון יכול לשמש לבחירת ערך בנושאים רבים נוספים שהם חד-ממדיים: ● כמה ימים בשנה צריך להיות שעון קיץ? ● מה צריך להיות מספר השרים בממשלה? ● ועוד…

אלגוריתם החציון המוכלל- אלגו'- ● בחר מראש קבוצה של הצבעות קבועות f1,…,fk. ● הוסף אותן לקבוצת הצבעות האזרחים p1,…,pn. ● הפעל את אלגוריתם החציון המקורי על קבוצת n+k ההצבעות (הקבועות ושל האזרחים).

משפט- כשיש שני סעיפי תקציב, אלגוריתם החציון המוכלל עם הצבעות קבועות מפוזרות באופן אחיד בין 0 ל-C הוא הוגן לקבוצות.
הוכחה- נניח ש-k אנשים תומכים רק בסעיף א (נותנים C), ו n-k תומכים רק בסעיף ב (נותנים 0). החציון המוכלל יהיה בהצבעה הקבועה מס' k, שערכה הוא בדיוק C*k\n.***

פונקציה F-
- בחר מראש קבוצה של פונקציות: $f_1(t),\ \ldots,\ f_{n-1}(t);\ t\ in\ [0, 1]$
- כל הפונקציות רציפות ועולות, ומקיימות: $f_i(1) = C\ , f_i(0) = 0$
- לכל t בין 0 ל,1- אפשר לחשב לכל נושא, חציון מוכלל עם הצבעות קבועות $f_1(t),\ \ldots,\ f_{n-1}(t)$
- עבור t=0, החציון = המינימום; הסכום ≤ C.
- עבור t=1, החציון = המקסימום; הסכום ≥ C.
- לפי משפט ערך הביניים, קיים *t שעבורו סכום הסעיפים = C
- התקציב = חציון מוכלל עם $f_1(t^*),\ \ldots,\ f_{n-1}(t^*)$

חציון מוכלל עם פונקציות לינארית -
משפט: לכל 1-n פונקציות רציפות עולות, אלגוריתם החציון המוכלל מגלה-אמת.
נגדיר -1n פונקציות ליניאריות: $for\ i\ =\ 1,\ \ldots,\ n\ -\ 1.\ \ f_i(t)\ =\ C\ \cdot\ min(1, i\ \cdot\ t)$
תכונות: תקציב הוגן לקבוצות

משפט- אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות ליניאריות אינו תמיד יעיל פארטו.
הוכחה- נניח שיש 9 נושאים, 3 אזרחים, C=30:
- אזרח א: 6, 6, 6, 0, 0; 6, 0, 0.
- אזרח ב: 0, 0, 6, 6, 6; 0, 6, 0.
- אזרח ג: 6, 6, 0, 0, 6, 6; 0, 0, 6.

עבור t=1/15, הצבעות קבועות 2 ,4, מתקבל: 4 ,4 ,4 ,4 ,4 ,4; 2, 2, 2 ;2 סכום=30, הפרש=24 . יש שיפור פארטו: 5, 5, 5, 5, 5, 5; 0, 0, 0; סכום=30, הפרש=20.

משפט- **לא קיים** אלגוריתם מגלה-אמת, הוגן לקבוצות, ויעיל-פארטו.

מבחנים

חלוקת שכר דירה שאלה- נתונה בעיית חלוקת שכר דירה עם שלושה חדרים ושלושה דיירים. הערכות הדיירים הן: a1, a2, a3 :א דייר• b1, b2, b3 :ב דייר• . c1, c2 ,c3 :ג דייר• נתון, שההשמה היחידה הממקסמת את סכום הערכים היא: דייר א – חדר 1, דייר ב – חדר 2, דייר ג – חדר 3. כתבו קוד בפייתון, המוצא חלוקת שכר דירה ללא קנאה. מבין כל החלוקות ללא קנאה, יש למצוא את החלוקה הטובה ביותר עבור דייר א)= החלוקה שבה התועלת של דייר א היא הגדולה ביותר(. השלימו את הקוד הבא:

```
import cvxpy TOTAL_RENT=1000
p1 = cvxpy.Variable() # price of room 1
p2 = cvxpy.Variable() # price of room 2
p3 = cvxpy.Variable() # price of room 3
problem = cvxpy.Problem(
.....)
problem.solve()
print(f"rents: 1={p1}, 2={p2}, 3={p3}")
```

פתרון-
נגדיר פונקציית מטרה – מקסימום תועלת לשחקן

```
objective = cvxpy.Maximize(a1-p1)
```

לחלופין, כיוון שערך החדר 1a קבוע, אפשר גם לחפש מינימום מחיר לשחקן : (Minimize(p1)
בשורות הבאות יש לכתוב את האילוצים – סכום המחירים שווה לשכר הדירה הכולל , ואף שחקן לא מקנא:

```
constraints = [ p1+p2+p3 = R,
a1 – p1 ≥ a2 – p2, a1 – p1 ≥ a3 – p3,
b 2 – p2 ≥ b 1 – p1, b 2 – p2 ≥ b 3 – p3,
c 3 – p3 ≥ c 1 – p1, c 3 – p3 ≥ c 2 – p2]
```

מיזוג הצעות תקציב בין מפלגות שאלה - בכנסת ישראל החליטו לממש אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב. שלוש מפלגות הציעו הצעות: • מפלגה א רוצה להעביר את כל התקציב למשרד הביטחון. • מפלגה ב רוצה לחלק את התקציב שווה בשווה בין משרד החינוך למשרד הפנים. • מפלגה ג רוצה לחלק את התקציב שווה בשווה בין משרד החינוך למשרד הביטחון.
א. מהו התקציב המתקבל ע"י אלגוריתם החציון הפשוט?
ב. מהו התקציב המתקבל ע"י אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניארית? פרטו לפחות שלושה שלבים בחיפוש הבינארי (לפחות שני ערכים לא מתאימים, והערך הנכון).
פיתרון א- נסמן את התקציב הכולל באות C. הצבעות המפלגות הן:
- נושא: חינוך, פנים,ביטחון.
- מפלגה א:,0 .0 ,C
- מפלגה ב: C\2 C\2 ו0
- מפלגה ג: C\2 C\2,0

החציון של תקציב הביטחון הוא C\2. של תקציב החינוך – C\2, ושל תקציב הפנים – 0. (במקרה זה יצא שסכום החציונים שווה בדיוק C ;לא תמיד זה כך).
פיתרון ב- אנחנו צריכים להוסיף שתי הצבעות קבועות. הצבעה קבועה i נקבעת לפי הפונקציה
$for\ i\ =\ 1,\ \ldots,\ n\ -\ 1.\ \ f_i(t)\ =\ C\ \cdot\ min(1, i\ \cdot\ t)$
עבור t=1/2, ההצבעות הקבועות הן C /2,C. החציונים הם: ביטחון – C\2. חינוך – /C\2. פנים –C\2. הסכום גדול מהתקציב הכולל
עבור t=1/4, ההצבעות הקבועות הן C\4,C\2. החציונים הם: ביטחון –C\2. חינוך –C\2. פנים – C\4. הסכום עדיין גדול מהתקציב הכולל
עבור t=1/8, ההצבעות הקבועות הן C\8,C\4, החציונים הם:ביטחון – C\4, חינוך – C\4. פנים – C\8 . הסכום קטן מהתקציב הכולל
ננחש t=1/5, ההצבעות הקבועות הן /5C2 /5,C. החציונים הם: ביטחון – 2C\5 חינוך – 2C\5 פנים –C\5. הסכום שווה בדיוק לתקציב הכולל, ולכן זה התקציב שיוחזר

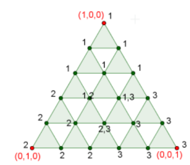
שאלות מבחנים

אגליטרית וקנאה שאלה-מחלקים שלושה משאבים רציפים בין חמישה שחקנים. ערכי השחקנים נתונים בטבלה:

	קמח	מים	שמן
עמי:	0	0	33
תמי:	0	11	22
רמי:	0	0	33
חמי:	15	16	0
ימי:	0	0	33

א. חשבו חלוקה אגליטרית אחת כלשהי. הסבירו את שלבי החישוב. הוכיחו שזו אכן חלוקה אגליטרית
ב. הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית)לא רק בחלוקה שחישבתם בסעיף א(יש קנאה. מי מקנא במי ומדוע?
פתרון א - עמי, רמי וימי מייחסים ערך חיובי רק לשמן. לכן, הערך הגבוה ביותר שאפשר להבטיח לשלושתם יחד הוא 11 – אם מחלקים את כל השמן שווה בשווה לשלושתם. לכן, הערך האגליטרי הגבוה ביותר האפשרי הוא לכל היותר .11 לכן, אם נמצא חלוקה שבה כל השחקנים מקבלים ערך לפחות 11 – מצאנו חלוקה אגליטרית. אכן קיימת חלוקה כזאת: אפשר לתת את כל המים לתמי (והערך שלה יהיה 11), ואת כל הקמח לחמי (והערך שלו יהיה 15).
פתרון ב - בכל חלוקה אגליטרית, צריך לחלק את השמן שווה בשווה בין עמי רמי וימי כדי שיקבלו ערך 11; לא נשאר כל שמן לתמי, ולכן תמי חייבת לקבל את כל המים כדי שתקבל ערך 11; ולכן חמי מקבל רק את הקמח. חמי מקנא בתמי – כי חמי מעריך את הקמח שקיבל ב- ,15 ואת המים שקיבלה תמי ב- 16.

משולש החלוקות שאלה - נתונה עוגה חד-ממדית באורך .1 רוצים למצוא חלוקה רציפה וכמעט-ללא-קנאה בין שלושה אנשים, בעזרת אלגוריתם סימונס- סו. שלושת האנשים מייחסים ערך אחיד לכל העוגה, כלומר, הערך של פרוסה באורך x הוא x.
א. רשמו את התוויות שיהיו על הקודקודים של משולש-החלוקות, שבו המרחק בין כל שני קודקודים סמוכים הוא .0.2 שימו לב: בחלק מהקודקודים יש כמה אפשרויות - רשמו את כל האפשרויות.
בסעיפים הבאים יש לבחור, עבור כל קודקוד עם כמה תוויות אפשריות, את התווית הקטנה ביותר.
ב. האם התיוג שהתקבל הוא תיוג ספרנר? הסבירו מדוע כן או מדוע לא.
ג. כמה משולשונים מגוונים יש? סמנו את כולם
פיתרון א-. כל קודקוד מייצג חלוקה, ובכל חלוקה, כל שחקן בוחר את הפרוסה הגדולה ביותר. בקודקוד העליון, ובקודקודים הסמוכים אליו, הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה הראשונה, ולכן התווית היא 1; בקודקוד השמאלי התחתון ובסמוכים אליו הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה השניה, ולכן התווית היא 2; בקודקוד הימני התחתון ובסמוכים אליו הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה השלישית, ולכן התווית היא .3 בשלושה קודקודים פנימיים יש שתי אפשרויות. לדוגמה, הקודקוד המסומן ב 1,2 מתאים לחלוקה 0.2 ,0.4 ,0.4, שבה פרוסות 1,2 הן גדולות ביותר



פיתרון ב- כן. על כל קודקוד ראשי יש תווית אחרת, ועל כל צלע בין שני קודקודים ראשיים יש רק תוויות שנמצאות על הקודקודים הראשיים: על הצלע בין 1 ל2- מופיעות רק התוויות 1 ו,2- על הצלע בין 2 ל- 3 מופיעות רק התוויות 2 ו ,3- ועל הצלע בין 3 ל1- מופיעות רק התוויות 3 ו- .1
פיתרון ג-אם בוחרים, בכל קודקוד שבו יש שתי אפשרויות, את האפשרות הקטנה ביותר, מתקבל התיווי הבא, ובו משולש מגוון אחד, (המסומן בכחול למעלה)

חלוקת מושבים שאלה- א. כתבו פונקציה בפייתון, המחשבת את חלוקת המושבים בכנסת או בפרלמנט אחר כלשהו, לפי שיטת וובסטר (שיטת המחלק עם מחלק s+1/2). כותרת הפונקציה:
$def\ webster(total\_seats: int,\ votes: List[int])\ -> \ List[int]$:
הפונקציה מקבלת את מספר המושבים הכולל בפרלמנט (seats_tota), ורשימה המציינת לכל מפלגה כמה קולות היא קיבלה. הפונקציה מחזירה רשימה המציינת לכל מפלגה כמה מושבים היא קיבלה. לדוגמה:[webster (6,[105,210])->[2,1
הסבר: מפלגה א קיבלה 105 קולות ומפלגה ב קיבלה 210 קולות; כשיש 6 מושבים בסה"כ, שיטת וובסטר תיתן 2 מושבים למפלגה א ו- 4 מושבים למפלגה ב.
ב. פרטו את שלבי הפעולה של הפונקציה שלכם על הקלט בסעיף א; כתבו את ערכי המשתנים בקוד בכל סיבוב (המספרים נבחרו כך שכל החישובים יהיו במספרים שלמים).
פיתרון א-

```
def webster(total_seats: int, votes: List[int]) -> List[int]:
 numparties = len(votes)
 seats = [0 for i in range(numparties)] # אתחול
 for i in range(total_seats): # הבא המושב מתן
   quotients = [votes[i]/(seats[i]+1/2)
      for i in range(numparties)]
   nextparty = max(range(numparties), key=lambda i:quotients[i])
   seats[nextparty] += 1
 return seats
```

פיתרון ב-• אתחול – מספר המושבים הוא .0,0 • בסיבוב הראשון, המנות הן 210, 420 (מחלקים את מספרי הקולות ב ½). המנה של מפלגה ב גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא 0, .1
•בסיבוב השני, המנות הן 210 למפלגה א, ו (2\3)\210 = 140 למפלגה ב. המנה של מפלגה א גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא 1, .1
•בסיבוב השלישי, המנות הן 105/(3/2) = 70 למפלגה א, ו 210/(3/2) = 140 למפלגה ב. המנה של מפלגה ב גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא 1, .2
• בסיבוב הרביעי, המנות הן 105/(3/2) = 70 למפלגה א, ו 210/(5/2) = 84 למפלגה ב. המנה של מפלגה ב גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא 1, .3
• בסיבוב החמישי, המנות הן 105/(3/2) = 70 למפלגה א, ו 210/(7/2) = 60 למפלגה ב. המנה של מפלגה א גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא 2, .3
• בסיבוב השישי, המנות הן 105/(5/2) = 42 למפלגה א, ו 60 למפלגה ב. המנה של מפלגה ב גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הסופי הוא 2, .4

חלוקה אגליטרית עם כללי גיזום שאלה- נתונה בעיית חלוקה אגליטרית של ארבעה חפצים בין שלושה שחקנים עם הערכות זהות. ערכי החפצים בעיני כל השחקנים הם: 10, 30, 40 .20 הדגימו את אלגוריתם החיפוש במרחב המצבים עם שני סוגי כללי- הגיזום שנלמדו בקורס (גיזום מצבים זהים, וגיזום לפי חסמים). תארו את המצב ההתחלתי ואת כל המצבים הנוצרים במהלך הביצוע, כאשר סדר החפצים הוא: 10, 30, 40 .20 פרטו את אופן החישוב של החסמים, של כללי הגיזום, ושל התוצאה הסופית.
רמזים שיחסכו לכם זמן:
• בגיזום מצבים זהים, היעזרו בעובדה שההערכות זהות.
• בגיזום לפי חסמים, חשבו את החסם הפסימי בעזרת אלגוריתם תיזמון רשימה.
• בפתרון שלי נוצרו בסך-הכל 16 מצבים, בכל הסיבובים יחד, כולל המצב ההתחלתי והמצבים הסופיים.
פיתרון- • המצב ההתחלתי הוא 0,0,0.;0 ניתן להשתמש באלגוריתם תיזמון רשימה כדי לחשב חסם פסימי. מתקבלת חלוקה עם ערכים 30, 30, 40 ולכן החסם הפסימי הוא .30
• בסיבוב ראשון נבדוק את כל האפשרויות לחלוקת החפץ .10 נוצרים שלושה מצבים: 1;10,0,0 ו 1;0,10,0 ו 1;0,0,10 . כיוון שההערכות זהות, כל המצבים האלה למעשה זהים, ולאחר גיזום נשאר רק מצב אחד: .1;10,0,0 ס החסם האופטימי מתקבל ע"י חלוקת כל החפצים הנותרים לכולם – יוצא .90 החסם הפסימי מתקבל ע"י האלגוריתם החמדני – שוב יוצא .30 החסם האופטימי גדול מהפסימי, ולכן לא גוזמים. • בסיבוב שני נבדוק את כל האפשרויות לחלוקת החפץ .30 נוצרים שלושה מצבים: 2;40,0,0 או 2;10,30,0 או 2;10,0,30.: שני המצבים האחרונים זהים; נגזום אחד מהם ונישאר עם שני מצבים: 2;40,0,0 ו 2;10,30,0.: בשני המצבים, החסם האופטימי הוא 60 שהוא גדול מהחסם הפסימי, ולכן לא גוזמים.
• בסיבוב שלישי נבדוק את כל האפשרויות לחלוקת החפץ .40 מהמצב 2;40,0,0 נוצרים שלושה מצבים, מתוכם רק שניים שונים: 3;80,0,0 ו 3;40,40,0.: מהמצב 2;10,30,0 נוצרים שלושה מצבים, שלושתם שונים: 3;50,30,0 ו 3;10,70,0 ו 3;10,30,40.: ס החסם האופטימי מתקבל ע"י חלוקת החפץ הנותר – שערכו 20 – לכל השחקנים. מבין חמשת המצבים השונים שנוצרו, בארבעה מהם החסם האופטימי הוא ,20 שהוא קטן מהחסם הפסימי של 30 שכבר מצאנו. לכן נגזום את כל המצבים פרט למצב האחרון: 3;10,30,40.:
• בסיבוב רביעי נבדוק את כל האפשרויות לחלוקת החפץ .20 נוצרים שלושה מצבים: 4;30,30,40 ו 4;10,50,40 ו 4;10,30,60.: הערך האגליטרי הגדול ביותר מתקבל עבור המצב הראשון, ולכן זו החלוקה שתוחזר – הערך האגליטרי הוא .30

חלוקת שכר דירה בעזרת VCG שאלה- נתונה דירה עם שלושה חדרים, שיש לחלק בין שלושה דיירים, כך שכל דייר יקבל חדר אחד בדיוק. הערכות הדיירים הן:
• חדר: מרתף, סלון, מטבח
• דייר א: 40, 50 80
• דייר ב:,70 40 30
• דייר ג: 90, 20 50
תארו את תהליך החלוקה בעזרת אלגוריתם **VCG**. פרטו את כל שלבי החישוב.
פיתרון- האפשרות הנבחרת היא האפשרות הממקסמת את סכום הערכים. ניתן לבדוק את 3! = 6 האפשרויות , ולראות שהאפשרות שבה סכום הערכים גבוה ביותר היא: א-מטבח, ב-סלון, ג -מרתף. סכום הערכים הוא .90+80+40=210
.כדי לחשב את התשלומים, צריך לחשב עבור כל אחד מהשחקנים את סכום הערכים כשהוא לא נמצא:
• עבור שחקן א: גם בלעדיו, השידוך הממקסם את סכום הערכים של האחרים הוא עדיין ב-סלון, ג-מרתף. סכום הערכים של האחרים נשאר ,130 ולכן שחקן א משלם .0
• עבור שחקן ב: כנ"ל: בלעדיו, השידוך הממקסם את סכום הערכים של האחרים הוא עדיין א-מטבח, ג- מרתף. סכום הערכים של האחרים נשאר ,170 ולכן שחקן ב משלם .0
• עבור שחקן ג: בלעדיו, השידוך הממקסם את סכום הערכים של האחרים הוא א-מטבח, ב-מרתף. סכום הערכים של האחרים הוא .150 אבל עם שחקן ג, סכום הערכים של האחרים הוא .120 לכן שחקן ג משלם .30

החלפת כליות עם עדיפות שאלה- מרכז להחלפת כליות מעוניין לבצע החלפה בזוגות בלבד. לכל אחד מהחולים יש עדיפות; צריך למצוא החלפת- כליות שבה כמה שיותר חולים בעדיפות ראשונה מקבלים כליה; בכפוף לזה, כמה שיותר חולים בעדיפות שניה מקבלים כליה; וכן הלאה.
א. תארו אלגוריתם כללי הפותר את הבעיה בזמן פולינומיאלי. כתבו פסאודו -קוד מפורט ומדויק של האלגוריתם (אפשר בפייתון). הוכיחו שהאלגוריתם שלכם אכן פותר את הבעיה.
פתרון א- נבנה את גרף ההתאמות של הזוגות.
• נסדר את הקודקודים בגרף בסדר עולה של העדיפות של החולה בזוג.
• ניתן לכל קודקוד, לפי הסדר, משקל גדול פי 2 משל הקודם (1 ,2 ,4 ...)
• ניתן לכל צלע בגרף משקל השווה לסכום משקלי שני הקודקודים שלה.
• נמצא שידוך משקל מקסימום בגרף.
כיוון שסכום חזקות של 2 תמיד קטן יותר מהחזקה הבאה, שידוך משקל מקסימום תמיד יעדיף צלע הסמוכה לקודקוד עם עדיפות גבוהה, על-פני צלע הסמוכה לק ודקוד עם עדיפ ות נמוכה יותר. ולכן יימצא שידוך העומד בדרישות.

שאלה **VCG**- עמי ותמי משתתפים במכרז קומבינטורי על שלושה חפצים שונים: א, ב, ג. כזכור, מכרז קומבינטורי הוא מכרז שבו כל משתתף יכול להציע מחיר לכל תת-קבוצה של חפ צים. ערכי המשתתפים נתונים בטבלה הבאה:

	עמי	תמי
קבוצה ריקה	0	0
א	3	6
ב	1	8
ג	8	7
א,ב	4	8
א,ג	1	1
ב,ג	2	1
א,ב,ג	9	10

א. מה יעשה מכרז VCG במצב זה – מי יקבל כל חפץ, וכמה ישלם?
ב. האם האלגוריתם, במקרה המסויים הזה)עם המספרים שבטבלה(מעודד-השתתפות? הוכיחו את תשובתכם ע"י חישוב מספרי
פתרון א -

הקבוצה שעמי מקבל	הקבוצה שתמי מקבלת	סכום הערכים
קבוצה ריקה	א, ב, ג	10=0+10
א	ב, ג	4=3+1
ב	א, ג	2=1+1
ג	**א, ב**	**16=8+8**
א,ב	ג	11=4+7
א,ג	ב	9=1+8
ב,ג	א	8=2+6
א,ב,ג	קבוצה ריקה	9=0+9

החלוקה הנבחרת היא: עמי מקבל ג, תמי מקבלת א+ב.
אם עמי לא נמצא, אז החלוקה הנבחרת היא: תמי מקבלת הכל. הערך שלה הוא .10 בחלוקה הנבחרת הערך שלה הוא .8 לכן עמי משלם .2
אם תמי לא נמצאת, אז עמי מקבל הכל. הערך שלו הוא ,9 בחלוקה הנבחרת הערך שלו הוא .8 לכן תמי משלמת .1
פתרון ב- . אלגוריתם מעודד-השתתפות הוא אלגוריתם המבטיח, שמצבו של כל שחקן אחרי הביצוע טוב לפחות כמו לפני הביצוע . במקרה שלנו, המשמעות היא שהתועלת של כל שחקן)ערך פחות מחיר(היא לפחות .0 נחשב את התועלות של שני השחקנים:
• עמי: ערך ,8 תשלום ,2 תועלת .6 • תמי: ערך ,8 תשלום ,1 תועלת .7
התועלת של שניהם חיובית, ולכן האלגוריתם מעודד השתתפות במקרה זה.

מציאת חלוקה אגליטרית שאלה- עמי ותמי רוצים לחלק ביניהם משאבים רציפים: 100 יחידות עץ, 100 יחידות ברזל, ו- 100 יחידות נפט. הערכים שהם מייחסים ליחידה אחת של כל משאב הן:
• עמי: עץ= ,70 ברזל= ,30 נפט=.20
• תמי: עץ=,10 ברזל=,50 נפט=.60
א. כיתבו קוד המוצא חלוקה אגליטרית של המשאבים בין עמי לתמי. ציינו במחברת הבחינה את הקוד שיש לכתוב בקוים הריקים 1, 2, .3 נמקו את תשובתכם – הסבירו מדוע הפתרון שלכם אכן מוצא חלוקה אגליטרית.
ב. נתונות שלוש חלוקות אפשריות: • עמי מקבל 100 עצים, 50 ברזל, 0 נפט. תמי מקבלת את השאר. • עמי מקבל 50 עצים, 50 ברזל, 50 נפט. תמי מקבלת את השאר. • עמי מקבל 0 עצים, 50 ברזל, 100 נפט. תמי מקבלת את השאר. מבין החלוקות הנ"ל, אחת מהן היא אגליטרית. מהי? הוכיחו)ע"י חישובים מספריים(ששתי החלוקות האחרות אינן אגליטריות.
פיתרון א-

```
import cvxpy
wood_to_ami = cvxpy.Variable() # How many units of wood are given to Ami.
iron_to_ami = cvxpy.Variable() # How many units of iron are given to Ami.
oil_to_ami = cvxpy.Variable() # How many units of oil are given to Ami.
### 1
utility_ami = wood_to_ami*70 + iron_to_ami*30 + oil_to_ami*20
utility_tami = (100-wood_to_ami)*10 + (100-iron_to_ami)*50 + (100-
oil_to_ami)*60
min_utility = cvxpy.Variable()
prob = cvxpy.Problem(
 ### 2
cvxpy.Maximize(min_utility),
constraints = [
 ### 3
 0 <= wood_to_ami, wood_to_ami <= 100,
 0 <= iron_to_ami, iron_to_ami <= 100,
 0 <= oil_to_ami, oil_to_ami <= 100,
 min_utility<=utility_ami,
 min_utility<=utility_tami
 ]
)
prob.solve()
print("Given to Ami: ", wood_to_ami.value, iron_to_ami.value,
oil_to_ami.value)
```

הפתרון מוצא חלוקה אגליטרית כי הוא ממקסם את התועלת הקטנה ביותר – המשתנה utility_min, תחת האילוצים שמדובר בחלוקה תקינה (עמי מקבל בין 0 ל100- מכל משאב), וכן שהמשתנה utility_min אכן מייצג את התועלת הקטנה ביותר (התועלת של עמי והתועלת של תמי גדולות ממנו).

פיתרון ב- צריך לחשב את התועלת המינימלית בכל אחת מהחלוקות, ולבחור את החלוקה עם התועלת המינימלית הגבוהה ביותר:
• עמי מקבל 100 עצים, 50 ברזל, 0 נפט – התועלת של עמי היא 8500 ושל תמי גם 8500; המינימום=.8500
• עמי מקבל 50 עצים, 50 ברזל, 50 נפט – התועלת של עמי היא 6000 ושל תמי גם 6000; המינימום=.6000
• עמי מקבל 0 עצים, 50 ברזל, 100 נפט -- התועלת של עמי היא 3500 ושל תמי גם 3500; המינימום=.3500
המינימום גבוה ביותר בחלוקה הראשונה, ולכן רק היא יכולה להיות חלוקה אגליטרית.

מיזוג הצעות תקציב שאלה-עמי ותמי רוצים להחליט על חלוקת התקציב המשפחתי שלהם. התקציב הכולל שלהם הוא .100 יש להם ארבעה סעיפים בתקציב: אוכל, בגדים, חשמל, נסיעות.
• עמי רוצה לחלק את התקציב באופן הבא: 30, 50, 20 .0
• תמי רוצה לחלק את התקציב באופן הבא: 20, 40, 0 .20
[הערה: היתה טעות בשאלה – סכום הערכים של תמי קטן מ.100- זה לא אמור להשפיע על הפתרון].
א. מהו התקציב המתקבל ע"י אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות?
ב. התקציב שהתקבל בסעיף א (אם פתרתם נכון) מקיים את התכונה הבאה: הסכום המוקצב לכל סעיף נמצא בין הערך של עמי לבין הערך של תמי((כולל). הוכיחו שהתכונה הזאת תתקיים בכל מקרה, גם אם התקציבים המוצעים ע"י עמי ותמי יהיו שונים. כלומר: האלגוריתם הנ"ל תמיד יקציב, לכל סעיף, סכום כלשהו שנמצא בין הערך של עמי לבין הערך של תמי (כולל) לאותו סעיף.
פתרון: א-. כיוון שיש רק n=2" אזרחים" במדינה, דרושה רק פונקציה אחת, שהערך שלה הוא: .min(100, 100t) = 100t
צריך למצוא t כך שסכום החציונים הוא בדיוק .100 חישוב החציון תלוי בתחום שבו נמצא הערך t100. אם t100 בין 0 ל-20, אז החציונים הם: 20, 40, t.100 ,t100 הסכום הוא: 200t+60 הסכום 100 מתקבל עבור t=0.2, כאשר t,100=20 שהוא אכן בתחום הנ"ל. לכן התקציב המתקבל הוא: 20, 40, 20, .20
ב. התקציב בכל אחד מהסעיפים הוא חציון בין שלושה ערכים: הערך של עמי, הערך של תמי, וההצבעה הקבועה t.100 כלומר:
• אם t100 הוא הקטן ביותר, אז הוא לא החציון - וייבחר הערך של עמי או הערך של תמי.
• אם t100 הוא הגדול ביותר, אז הוא לא החציון - וייבחר הערך של עמי או הערך של תמי.
• אם t100 הוא בין שני הערכים, אז הוא החציון.
בכל המקרים, התקציב שייבחר הוא הערך של עמי, או הערך של תמי, או ערך כלשהו ביניהם.

חלוקת מושבים (עיקביות) שאלה- במדינה מסוימת יש פרלמנט עם 6 מושבים. יש 60 אזרחים ושלוש מפלגות: צפון, מרכז ודרום. בבחירות האחרונות, מספר הקולות שקיבלו היה: צפון - ,33 מרכז – ,4 דרום – .23
א. הראו, בדוגמה זו, שאלגוריתם המילטון אינו עקבי עבור המפלגות צפון+מרכז.
ב. הראו, בדוגמה זו, שאלגוריתם אדאמס הוא עקבי עבור המפלגות צפון+מרכז)יש להראות ע"י הרצת האלגוריתם ולא ע"י ציטוט המשפט הכללי(. תזכורת: אלגוריתם אדאמס הוא שיטת-המחלק עם f(s)=s
פתרון א: נריץ את אלגוריתם המילטון על הדוגמה. מספר המושבים המגיע לכל מפלגה הוא: 3.3, 0.4, .2.3 מעגלים למטה ומקבלים 3, 0 .2 השארית הגדולה ביותר היא של מפלגת המרכז, ולכן התוצאה הסופית היא 3, 1, .2 עכשיו נריץ שוב את אלגוריתם המילטון, הפעם רק על מפלגת הצפון והמרכז עם המושבים שלהן. כלומר יש לנו עכשיו 4 מושבים ו37- קולות. מספר המושבים המגיע למפלגת הצפון הוא:
4*33/37 = 132/37 = 3 + 21/37
מספר המושבים המגיע למפלגת המרכז הוא:
4*4/37 = 16/37
החלוקה ללא השאריות היא: ,3 0 השארית הגדולה יותר היא של מפלגת הצפון, ולכן החלוקה הסופית היא 4, .0 השיטה אינה עקבית, כי החלוקה הפנימית בין מפלגת הצפון והמרכז בחלוקה הכללית (,3 1), שונה מהחלוקה ביניהן כשרק שתיהן נמצאות (,4 0).
פתרון ב: ראשית נפעיל את אלגוריתם אדאמס על כל שלוש המפלגות. בהתחלה כל המחלקים הם ,0 המנה היא אינסוף, ולכן כל מפלגה מקבלת מושב אחד)1,1 ,1(. נשארו עוד שלושה מושבים לחלוקה. המחלקים הם:
$33/1 = 33\,,4/1 = 4\,,23/1 = 3$ ← צפון
$33/2 = 16.5\,,4/1 = 4\,,23/1 = 23$ ← דרום
$33/2 = 16.5\,,4/1 = 4\,,23/2 = 11.5$ ← צפון
לכן החלוקה הסופית היא: ,3 1, .2 עכשיו נפעיל את האלגוריתם עבור צפון+מרכז בלבד – שוב יש לנו 4 מושבים ו37 קולות. בהתחלה כל מפלגה מקבלת מושב אחד (,1 1). נשארו עוד שני מושבים לחלוקה. המחלקים הם:
$33/1 = 33\,,4/1 = 4$ ← צפון
$33/2 = 16.5\,,4/1 = 4$ ← צפון
לכן החלוקה הסופית היא: ,3 1 – בדיוק כמו חלוקת המושבים ביניהן כשמריצים על כל שלוש המפלגות.

החלפת חדרים שאלה- שישה סטודנטים משובצים לחדרים שונים במעונות. סטודנט א כרגע גר בחדר א, סטודנט ב בחדר ב, וכו'. הסטודנטים רוצים להתחלף ביניהם בעזרת אלגוריתם סבן-סתורמן להחלפת חדרים עם אדישות. הטבלה הבאה מתארת את הערך שכל סטודנט מייחס לכל חדר (ערך גבוה יותר = הסטודנט רוצה יותר את החדר).

	חדר א	חדר ב	חדר ג	חדר ד	חדר ה	חדר ו
סטודנט א	10	8	10	6	3	3
סטודנט ב	10	10	7	10	2	1
סטודנט ג	5	7	10	1	10	1
סטודנט ד	2	13	20	15	8	4
סטודנט ה	10	7	5	4	1	10
סטודנט ו	1	20	12	5	8	1

א. ציירו את הגרף המכוון הנוצר בשלב הראשון של האלגוריתם מתוך הטבלה הנ"ל.
ב. מצאו את כל רכיבי הקשירות החזקים בגרף, ואת כל רכיבי הקשירות החזקים הסופיים בגרף.
ג. מהו מעגל-ההחלפה הראשון שמבצע האלגוריתם? הסבירו
פיתרון א- בשלב הראשון, יש חשיבות רק לחדרים שכל סטודנט רוצה בעדיפות ראשונה (החדרים עם ציון 10 או 20). לכן הגרף כולל את הקשתות הבאות:
- א ← א, ג
- ב ← א, ב, ד
- ג ← ג, ה
- ד ← ג
- ה ← א, ו
- ו ← ב

פיתרון ב-
•יש מסלול מכוון מכל צומת בגרף לכל צומת אחר בגרף. לכן, כל הגרף הוא רכיב קשירות חזק יחיד.
• הרכיב היחיד הנ"ל אינו סופי, כי לא לכל צומת יש קשת עצמית. לכן אין בכלל רכיבי-קשירות-חזקים סופיים.
פיתרון ג-צריך לבחור, עבור כל שחקן עם שתי קשתות יוצאות או יותר, קשת אחת בהתאם לכלל סבן-סתורמן:
• עבור כל שחקן שמקנא (= בלי קשת עצמית), בוחרים קשת המצביעה לבית עם מספר סידורי קטן ביותר. במקרה שלנו יש שלושה שחקנים מקנאים: ד, ה, ו. נבחר עבורם: ד->ג, ה->א, ו->ב.
• עבור כל שחקן שעדיין אינו "מסודר", שהוא שכן של שחקן "מסודר", נבחר קשת מכוונת אל שחקן מסודר. במקרה שלנו יש שני שחקנים כאלה: ב, ג. נבחר עבורם: ב->ד,ג->ה.
• נשאר עוד שחקן אחד שאינו מסודר – שחקן א. נבחר עבורו קשת המכוונת אל שחקן מסודר: א->ג

הגרף שנוצר הוא:
- א ← ג
- ב ← ד
- ג ← ה
- ד ← ג
- ה ← א
- ו ← ב

יש מעגל-החלפה אחד: א-ג-ה, ולכן זה המעגל הראשון שיתבצע

תקציב הוגן שאלה- בעיירה קטנה פועלות ארבע עמותות: הירוקים, האדומים, הצהובים והכחולים. ישנם ארבעה אזרחים. התקציב הכולל הוא .4000 האזרחים מעוניינים לחלק את התקציב בין העמותות בעזרת אלגוריתם שהוא גם יעיל פארטו וגם הוגן לקבוצות. העדפות האזרחים הן:
• אזרח :0 תומך בירוקים ובאדומים.
• אזרח :1 תומך באדומים ובצהובים.
• אזרח :2 תומך בצהובים ובכחולים.
• אזרח :3 תומך באדומים, בצהובים ובכחולים.
התועלת של כל אזרח שווה לסכום הכולל המועבר לעמותות שהוא תומך בהן. כיתבו קוד המוצא את התקציב הרצוי. העזרו בקוד הבא: ...
א. ציינו במחברת הבחינה את הקוד שיש לכתוב בקוים הריקים 1, 2, .3 נמקו את תשובתכם – הסבירו מדוע הפתרון שלכם אכן מוצא תקציב יעיל-פארטו והוגן לקבוצות.
ב. נתונים שלוש ה תקציבים אפשריים:
.1 ירוקים ,0 אדומים ,2000 צהובים ,2000 כחולים 0
.2 ירוקים ,1000 אדומים ,1000 צהובים ,1000 כחולים 1000
.3 ירוקים ,2000 אדומים ,0 צהובים ,0 כחולים 2000
מבין התקציבים הנ"ל, שניים מהם הוגנים ליחידים (Share Fair Individual), ואחד לא. הסבירו איזה תקציבים הוגנים ליחידים ומדוע, ואיזה תקציב אינו הוגן ליחידים ומדוע.
פתרון א-

```
TOTAL_BUDGET=4000
budget_for_greens = cvxpy.Variable()
budget_for_reds = cvxpy.Variable()
budget_for_yellows = cvxpy.Variable()
budget_for_blues = cvxpy.Variable()
utilities = [
    budget_for_greens+budget_for_reds, # citizen 0
    budget_for_reds+budget_for_yellows, # citizen 1
    budget_for_yellows+budget_for_blues, # citizen 2
    budget_for_reds+budget_for_yellows+budget_for_blues,# citizen 3
]
budgets = [budget_for_greens, budget_for_reds, budget_for_yellows,
           budget_for_blues]

problem = cvxpy.Problem(
cvxpy.Maximize(cvxpy.sum([cvxpy.log(u) for u in utilities])),
    constraints =
    [v >= 0 for v in budgets] +
    [cvxpy.sum(budgets)==TOTAL_BUDGET])
problem.solve()
```

פתרון ב- תקציב הוגן ליחידים הוא תקציב שבו התועלת של כל אזרח)= סכום התקציב המועבר לעמותות שהוא תומך בהן(הוא לפחות התקציב הכולל חלקי מספר האזרחים – במקרה שלנו .1000 נבדוק את התועלות של כל האזרחים בתקציבים הנתונים:
• הראשון: ,2000 ,4000 ,2000 4000 – הוגן ליחידים.
• השני: ,2000 ,2000 ,2000 3000 – הוגן ליחידים.
• השלישי: ,2000 ,0 2000 2000 – לא הוגן ליחידים – יש אזרח עם תועלת .0