

### שאלה 3

(א) בדוגמה ספציפית זו, המטרה של בעיית האופטימיזציה היא למקסם את התועלת המינימלית (ערך) שמקבל כל שחקן. תועלת מינימלית זו מיוצגת על ידי המשתנה  $Z$  בבעיית האופטימיזציה.

בהינתן הערכים שהוקצו לכל משאב על ידי כל שחקן:

- שחקן A מעריך ברזל ב-6 ונפט ב-9.
- שחקן B מעריך נפט ב-5 ועץ ב-10.
- שחקנים C, D ו-E מעריכים עץ ב-15 ולא מעריכים ברזל או נפט.

הנה הסיבות לכך שכל שחקן מקבל ערך של לפחות 5 בכל חלוקה אגליטרית:

1. התועלת המינימלית של שחקן B: הערך הנמוך ביותר של שחקן B עבור כל משאב הוא 5 (עבור נפט). לכן, כדי להבטיח שהתועלת של שחקן B תהיה לפחות 5, הם חייבים לקבל כמות מספקת של נפט או עץ. מכיוון שעץ מוערך מאוד על ידי שחקנים C, D ו-E, יעיל יותר להקצות נפט לשחקן B.
2. ערך גבוה של עץ עבור שחקנים C, D, E: שחקנים C, D ו-E מעריכים מאוד עץ (15 נקודות). אפילו חלק קטן מהעץ שהוקצה להם יבטיח שהתועלת שלהם תהיה הרבה מעל 5.
3. הקצאה לשחקן A: שחקן A מעריך ברזל ונפט. כדי למקסם את התועלת המינימלית, האלגוריתם יכול להקצות כמות מסוימת של ברזל או נפט לשחקן A. מכיוון ששחקן B גם צריך נפט ומעריך אותו בסף המינימלי של 5, ייתכן שיהיה יעיל יותר להקצות ברזל לשחקן A, במיוחד אם זה מספיק כדי לתת לו תועלת של לפחות 5.
4. מקסום התועלת המינימלית ( $Z$ ): תהליך האופטימיזציה מבקש למקסם את  $Z$ , התועלת המינימלית בקרב כל השחקנים. בהינתן האילוצים וההערכות, הפתרון ימצא דרך להקצות את המשאבים כך שכל שחקן יקבל תועלת של לפחות 5. זאת מכיוון:
  - שחקנים C, D, E יכולים בקלות לקבל יותר מ-5 עם כמות קטנה של עץ.
  - שחקן B יכול לקבל לפחות 5 עם קצת נפט.
  - שחקן A יכול לקבל לפחות 5 עם ברזל או נפט.

לסיכום, בשל ההערכות הספציפיות שיש לכל שחקן עבור המשאבים והמטרה של מקסום התועלת המינימלית, האופטימיזציה מבטיחה שכל שחקן יקבל ערך של לפחות 5 בהקצאה הסופית. זהו עיקרון החלוקה האגליטרית בהקשר זה: הבטחת שהשחקן הכי פחות מועדף (במונחי תועלת) יהיה במצב הטוב ביותר האפשרי בהתחשב באילוצים.

---

(ב) בהסתמך על ההוכחה הקודמת לפיה בכל חלוקה אגליטרית כל שחקן מקבל ערך של לפחות 5, נוכל לחזק את הטענה עבור הקצאה ספציפית של משאבים (עץ ונפט) לשחקנים C, D, E ו-B, בהתאמה. הנה כיצד:

שחקנים C, D ו-E (הקצאת עץ):

- שחקנים C, D ו-E מעריכים עץ ב-15, ולא מעריכים ברזל או נפט.
- כדי להבטיח שכל אחד משחקנים אלה יקבל ערך של לפחות 5, יש להקצות להם חלק מעץ. עם זאת, מכיוון שהם מעריכים עץ מאוד (15), אפילו חלק קטן מעץ ייתן להם תועלת הרבה מעל 5.

- מכיוון שאלה השחקנים שמעריכים ביותר עץ, הקצאת כל העץ להם היא השימוש היעיל ביותר במשאב זה. זה מקסימום את התועלת שלהם, ללא פגיעה בתועלת של שחקנים אחרים.

שחקן B (הקצאת נפט):

- שחקן B מעריך נפט ב-5 ועץ ב-10. בהתחשב בערך הגבוה של עץ עבור שחקנים C, D ו-E, יעיל יותר להקצות את כל העץ להם בלבד.
- כדי להבטיח שהתועלת של שחקן B תהיה לפחות 5, יש להקצות לו נפט. מכיוון ששחקן A גם מעריך נפט אך יש לו חלופה בברזל, הקצאת נפט לשחקן B היא הדרך היעילה ביותר להבטיח שהם מגיעים לתועלת המינימלית של 5.

שחקן A (הקצאת ברזל):

- שחקן A מעריך ברזל ב-6 ונפט ב-9. עם הקצאת הנפט לשחקן B כדי לעמוד בדרישת התועלת המינימלית שלו, המשאב הטוב ביותר עבור שחקן A הוא ברזל.
- הקצאת ברזל לשחקן A מבטיחה שהם יקבלו תועלת מעל סף המינימום של 5, למרות שהם מעריכים נפט יותר.

הקצאה יעילה של משאבים:

- על ידי הקצאת כל העץ לשחקנים C, D ו-E, וכל הנפט לשחקן B, חלוקה אגליטרית מבטיחה בצורה יעילה את מקסום התועלת המינימלית בקרב כל השחקנים.
- הקצאה זו מבטיחה שכל שחקן יקבל תועלת של לפחות 5, עומדת בתנאי שקבענו קודם לכן, ואף משאב לא מבזבז או מוקצה בצורה לא יעילה.

לסיכום, הקצאת כל העץ לשחקנים C, D ו-E, וכל הנפט לשחקן B, היא הדרך היעילה ביותר להבטיח שכל שחקן יקבל תועלת של לפחות 5, בהתאם לעקרון השוויוני של מקסום התועלת המינימלית. חלוקה זו מנצלת את ההערכה של כל שחקן למשאבים בצורה מיטבית תחת האילוצים הנתונים.

ג) כדי לקבוע אם קיימת קנאה בכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, עלינו לשקול את ההקצאות ואת ההעדפות של כל שחקן. קנאה מתרחשת בחלוקה אם שחקן כלשהו מעדיף את החבילה (הקצאת המשאבים) שניתנה לשחקן אחר על פני החבילה שלו.

בהינתן הערכות השחקנים:

- שחקן A: מעריך ברזל ב-6, נפט ב-9, ולא מעריך עץ.
- שחקן B: מעריך נפט ב-5, עץ ב-10, ולא מעריך ברזל.
- שחקנים C, D ו-E: מעריכים עץ ב-15 ולא מעריכים ברזל או נפט.

בחלוקה אגליטרית שבה כל שחקן מקבל ערך של לפחות 5, ההקצאה הסבירה תהיה:

- כל העץ לשחקנים C, D ו-E.
- כל הנפט לשחקן B.

- כל הברזל לשחקן A.

כעת, הבה נבחן את הקנאה:

הקצאת שחקן A:

- מקבל: 100% ברזל.
- מעריך: ברזל ב-6.
- דעות על הקצאות אחרים:
  - הנפט של שחקן B: מוערך ב-9, יותר מהברזל שלו.
  - העץ של שחקנים C, D, E: מוערך ב-0, פחות מהברזל שלו.

הקצאת שחקן B:

- מקבל: 100% נפט.
- מעריך: נפט ב-5.
- דעות על הקצאות אחרים:
  - הברזל של שחקן A: מוערך ב-0, פחות מהנפט שלו.
  - העץ של שחקנים C, D, E: מוערך ב-10, יותר מהנפט שלו.

הקצאת שחקנים C, D, E:

- מקבלים: חלק שווה ב-100% עץ.
- מעריכים: עץ ב-15 (כל אחד).
- דעות על הקצאות אחרים:
  - הברזל של שחקן A: מוערך ב-0, פחות מהעץ שלהם.
  - הנפט של שחקן B: מוערך ב-0, פחות מהעץ שלהם.

בניתוח זה:

- שחקן A יקנא בשחקן B בגלל שהוא מעריך את הנפט של שחקן B (9) יותר מאשר את הברזל שלו (6).
- שחקן B יקנא בשחקנים C, D, E בגלל שהוא מעריך את העץ (10) יותר מאשר את הנפט שלו (5).
- שחקנים C, D, E לא מקנאים לאף אחד כי הם מעריכים את העץ שלהם (15) הכי הרבה ולא מעריכים את המשאבים האחרים.

לכן, חלוקה זו אינה חופשית מקנאה. כדי להיות חופשית מקנאה, כל שחקן חייב לתפוס את ההקצאה שלו לפחות טובה כמו ההקצאה של כל שחקן אחר, מה שלא מתקיים כאן.

## שאלה 5

נתון האלגוריתם הבא לחלוקת משאבים רציפים:

- לכל משאב  $x$ :
- תן לכל שחקן  $i$  חלק  $V_i(x)/\sum_j V_j(x)$  מהמשאב  $x$ .

לדוגמה:

עצים	נפט	פלדה	
80	19	1	עמי
79	1	20	תמי

עמי יקבל  $1/21$  מהפלדה,  $19/20$  מהנפט ו  $80/159$  מהעצים.

תמי תקבל השאר.

(א) הפרכה. נתן דוגמה נגדית:

עצים	נפט	פלדה	
79	2	1	עמי
80	18	20	תמי

חלוקה פרופורציונלית = כל שחקן חושב שהחלק שלו לפחות ערך העוגה כולה/ $n$

בדוגמה הזאת :

- $V_{\text{עמי}} = (1+2+79) / 200 = 82/200 > 1/2$
- $V_{\text{תמי}} = 118/200 < 1/2$

עמי מקבל פחות מ-  $1/2$  מהשווי הכללי לכן זאת לא חלוקה פרופורציונלית.

(ב) הפרכה. נתן דוגמה נגדית:

יש לנו שני שחקנים: שחקן 1 ושחקן 2. העדפות השחקנים עבור המשאבים מיוצגות בטבלה הבאה:

משאב B	משאב A	
1	10	עמי
10	1	תמי

משמעות הדבר היא שעמי מעריך את משאב A פי עשרה יותר ממשאב B, ולהיפך עבור תמי.

על פי האלגוריתם שלנו, כל שחקן מקבל חלק מכל משאב באופן יחסי לערך שהוא מייחס לאותו משאב ביחס לערך הכולל המיוחס לאותו משאב על ידי כל השחקנים.

נחשב את החלקים עבור כל שחקן:

עבור משאב A: עמי מקצה ערך של 10 ותמי מקצה ערך של 1, מה שהופך סך של 11. לפיכך, עמי מקבל  $10/11$  מתוך משאב A ותמי מקבל  $1/11$ .

עבור משאב B: עמי מקצה ערך של 1 ותמי מקצה ערך של 10, מה שהופך סך של 11. לפיכך, עמי מקבל  $1/11$  מתוך משאב B ותמי מקבל  $10/11$ .

כעת, נחשב את הערך הכולל שכל שחקן מייחס לחלק שהוא מקבל:

$$9.18 = 101/11 = 1 * 1/11 + 10 * 10/11$$
 הערך עבור עמי:

$$9.18 = 101/11 = 10 * 10/11 + 1 * 1/11$$
 הערך עבור תמי:

אם נשפר את ההקצאה כך שכל שחקן יקבל את כל המשאב שהוא מעריך יותר (עמי יקבל את כל משאב A ותמי יקבל את כל משאב B):

$$10 = 1 * 0/11 + 10 * 11/11$$
 הערך עבור עמי:

$$10 = 10 * 11/11 + 1 * 0/11$$
 הערך עבור תמי:

כל אחד יקבל ערך של 10, שהוא גבוה יותר מהערך שהוא מייחס לחלק שהוא מקבל בהקצאה הנוכחית. זהו דוגמה נגדית המראה שהאלגוריתם לא תמיד מוביל להקצאה יעילה פארטו.