

## מטלה – תקצוב משתף

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בניקוד כפול.  
יש לדווח על כל שימוש בחומר-עזר או קבלת עזרה, בהתאם לתקנון היושר של המחלקה.

### שאלה 1: שיטת פראגמן - תיכנות

כתבו קוד פייתון המבצע שלב אחד של שיטת פראגמן לחלוקת תקציב. כותרת הפונקציה:

```
def elect_next_budget_item(
    votes: list[set[str]], # רשימת ההצבעות של האזרחים. לכל אזרח מצביע לקבוצה של פריטים
    balances: list[float], # היתרה הוירטואלית של כל אחד מהאזרחים
    costs: dict[str, float] # העלות של כל אחד מהפריטים
)
```

הפונקציה צריכה לכתוב למסך כמה כסף ווירטואלי כל אזרח יקבל, מה הפריט הבא שייבחר, ומה היתרות החדשות. למשל:

After adding 0.08 to each citizen, "Park in street X" is chosen.

Citizen 1 has 1.96 remaining balance.

Citizen 2 has 0 remaining balance.

### שאלה 2: שיטת החלקים השווים - תיכנות

כתבו קוד פייתון המבצע שלב אחד של שיטת החלקים השווים לחלוקת תקציב. כותרת הפונקציה:

```
def elect_next_budget_item(
    votes: list[set[str]], # רשימת ההצבעות של האזרחים. לכל אזרח מצביע לקבוצה של פריטים
    balances: list[float], # היתרה הוירטואלית של כל אחד מהאזרחים
    costs: dict[str, float] # העלות של כל אחד מהפריטים
)
```

**שימו לב למקרי קצה:** ייתכן שלחלק מהתומכים אין מספיק כסף לשלם, ולכן תומכים אחרים יצטרכו לשלם יותר.

הפונקציה צריכה לכתוב למסך מה הפריט הבא שייבחר, כמה כסף ישלם כל אחד מהתומכים שלו, ומה היתרות החדשות. למשל:

Round 1: "Park in street X" is elected.

Citizen 1 pays 0 and has 1.96 remaining balance.

Citizen 2 pays 0.5 and has 1.4 remaining balance.

...

### שאלה 3: גילוי אמת

א. הוכיחו (ע"י דוגמה) ששיטת פראגמן לא מגלה אמת.

ב. הוכיחו (ע"י דוגמה) ששיטת החלקים השווים לא מגלה אמת.

ניתן להיעזר בספריה זו: <https://github.com/martinlackner/abcvoting> לצורך חישוב מהיר של וועדות בשיטות השונות.

\* ג. הוכיחו, שהאלגוריתם החמדני לחלוקת תקציב, שנלמד בתחילת ההרצאה, מגלה אמת.

### \* שאלה 4: שיטת החלקים השווים לא מונוטונית

הוכיחו (ע"י דוגמה) ששיטת החלקים השווים אינה מונוטונית.

**הדרכה:** יש להגדיר את הבחירות של האזרחים (באיזה מועמדים כל אחד תומך). ואז להראות, שעבור  $k$  מסויים נבחרת ועדה מסויימת, ועבור  $k+1$  נבחרת ועדה שאינה מכילה את הוועדה המקורית (כלומר, יש מועמד שנבחר עבור  $k$  ולא נבחר עבור  $k+1$ ).

ניתן להיעזר בספריה זו: <https://github.com/martinlackner/abcvoting> לצורך חישוב מהיר של וועדות.

### \* שאלה 5: שיטת החלקים השווים לחלוקת תקציב

מטרת השאלה היא להוכיח ששיטת החלקים השווים הוגנת גם כשמכלילים אותה לחלוקת תקציב. לשם כך נכליל את ההגדרות מההרצאה.

**הגדרה 1.** לכל קבוצה  $T$  של פריטי-תקציב, קבוצת בוחרים  $X$  נקראת **T-מגובשת** אם כל הבוחרים בקבוצה  $X$  תומכים בכל הפריטים בקבוצה  $T$ , ומספר הבוחרים בקבוצה  $X$  הוא לפחות  $n \cdot \text{cost}(T)/B$ . במילים אחרות: אם לכל חבר בקבוצה נותנים את חלקו היחסי בתקציב  $B/n$ , אז לכל הקבוצה ביחד יש מספיק כסף כדי לממן את כל  $T$ .

**הגדרה 2.** תקציב מקיים **ייצוג הוגן מורחב** אם לכל תת-קבוצה  $T$  של פריטים, ולכל קבוצה  $X$  שהיא  $T$ -מגובשת, יש לפחות חבר אחד ב- $X$ , שתומך בלפחות  $|T|$  פריטים בתקציב.

הוכיחו: שיטת החלקים השווים לחלוקת תקציב מוצאת תמיד תקציב המקיים ייצוג הוגן מורחב.

### \*\*\* שאלה 6: אלגוריתם מונוטוני והוגן לבחירת וועדה

האם קיים אלגוריתם לבחירת וועדה, שהוא גם מונוטוני בגודל הוועדה, וגם מחזיר תמיד ועדה המקיימת ייצוג הוגן מורחב (EJR)?

אם כן – תארו אלגוריתם כזה והוכיחו שהוא מקיים את התכונות.

אם לא – הוכיחו שלא קיים אלגוריתם כזה.