חלוקת חדרים בדירה שכורה

נניח שאתם שוכרים, יחד עם עוד שני שותפים, דירה שעולה 3000 שקלים לחודש. בדירה יש שלושה חדרים, כך שכל שותף צריך לקבל חדר. אבל החדרים לא שוים. לדוגמה, יש סלון גדול הפונה לים, חדרון הפונה לכביש, והחדר השלישי הוא מרתף טחוב. אם שכר הדירה יתחלק שווה בשווה בין הדיירים, אז ודאי שתהיה קנאה – הדייר שיקבל את המרתף בוודאי יקנא בדייר שגר בסלון. אבל אם המחיר של המרתף יהיה נמוך משמעותית מהמחיר של הסלון, אז ייתכן שמי שיקבל אותו לא יקנא (כלומר, ברור שהוא היה מעדיף לגור בסלון, אבל הוא מעדיף מרתף בזול על-פני סלון ביוקר). האם **תמיד** אפשר למצוא חלוקה כלשהי של שכר־הדירה בין הדיירים, כך שלא תהיה קנאה?

בעיה זו נקראת **בעיית חלוקת החדרים.** באנגלית היא נקראת בשם פיוטי יותר: `Rental Harmony`. היא מקרה פרטי של בעיית חלוקת חפצים עם כסף, עם המאפיינים הבאים:

- מספר השחקנים שווה למספר החפצים;
- כל שחקן צריך לקבל חפץ (חדר) אחד בדיוק;
- סכום התשלומים של השחקנים צריך להיות מספר קבוע מראש (שכר־הדירה הכולל).

פתרון של בעיית חלוקת־חדרים מורכב משני חלקים:

- **השמה (assignment)** – התאמה של חדר אחד ויחיד לכל שחקן. התאמה תסומן X, והחדר המתאים לשחקן i יסומן X_i.
- **תימחור (pricing)** – וקטור המתאים מספר ממשי (מחיר) לכל חדר. תימחור יסומן p, והמחיר של חדר j יסומן $p(j)$. שכר־הדירה הכולל יסומן R, וצריך להתקיים התנאי: $\mathrm{sum}_j\ p(j) = R$.

חלוקה ללא־קנאה היא זוג של השמה (X) ותימחור (p), כך שכל שחקן i מעדיף את החדר המיועד לו X_i במחיר $p(X_i)$, על־פני כל חדר אחר Y במחיר $p(Y)$.

אי-אפשר להשתמש באלגוריתם המכרז כדי לפתור את בעיית חלוקת החדרים, כי הוא עלול לתת לשחקן אחד שני חדרים או יותר, ולשחקן אחר לא לתת אף חדר. לכן אנחנו צריכים אלגוריתם חדש.

קיום חלוקה ללא קנאה

ראשית, נוכיח קיום של חלוקה ללא־קנאה. לא נניח שהשחקנים הם קוואזיליניאריים; נניח רק שיש להם **פונקציית־ביקוש (demand function)**: לכל תימחור, כל שחקן יכול להצביע על חדר אחד (או יותר) שהוא הכי רוצה, במחירים הנתונים. לדוגמה, עבור התימחור: "סלון=1200, חדרון=1000, מרתף=800". שחקן אחד יכול להגיד "במחירים הנתונים, אני הכי רוצה את הסלון". שחקן רשאי להיות אדיש בין שני חדרים או יותר, לדוגמה, הוא יכול להגיד "במחירים האלה, אני רוצה את הסלון או את החדרון – לא אכפת לי איזה מהם – רק אל תתנו לי את המרתף". היתרון של אלגוריתם המסתמך על פונקציות־ביקוש הוא, שלרוב האנשים קל יותר להגיד איזו אפשרות הם מעדיפים, מלייחס ערך מדוייק לכל חפץ.

לכל שחקן קוואזיליניארי יש פונקציית־ביקוש: השחקן פשוט בוחר את החדר שנותן לו תועלת גדולה ביותר במחירים הנתונים. פורמאלית, שחקן קוואזיליניארי עם פונקציית־ערך v בוחר את החדר j הממקסס את ההפרש: $v(j)-p(j)$. אולם ההנחה של פונקציות־ביקוש היא כללית יותר.

כשלשחקנים ישנן פונקציות־ביקוש כלליות, לא תמיד קיימת חלוקה ללא־קנאה. לדוגמה, ייתכן שכל השחקנים רוצים רק את הסלון, בכל מחיר. במקרה זה, מי שלא מקבל את הסלון תמיד יקנא במי שמקבל את הסלון. אנחנו נוכיח שקיימת חלוקה ללא־קנאה אם קיים "מחיר גבוה מדי", בהתאם להגדרה הבאה:

הגדרה. בבעיית חלוקת־חדרים, **מחיר גבוה מדי** הוא מספר חיובי כלשהו T, כך שאם המחיר של חדר כלשהו j הוא לפחות T, והמחיר של חדר אחר כלשהו הוא לכל היותר 0, אז אף שחקן לא בוחר בחדר j.

אם השחקנים קוואזיליניאריים, אז תמיד קיים מחיר גבוה מדי, ואפשר למצוא מחיר כזה בקלות: נשאל כל שחקן מה הערך הכספי שהוא מייחס לכל חדר, ונחשב את ההפרש הגדול ביותר בין ערכים של שני חדרים שונים עבור אותו שחקן. קל לראות שההפרש הזה הוא מחיר גבוה מדי בהתאם להגדרה.

האלגוריתם שנראה בסעיף זה מסתמך על אלגוריתם של פרנסיס סו (Francis Edward Su).
האלגוריתם מציג בפני השחקנים תימחורים שונים, ושואל אותם: "אם מחירי החדרים יהיו כאלה, איזה חדר תעדיפו לקבל?". אם כל שחקן עונה תשובה שונה, אז הצלחנו – מצאנו חלוקה ללא קנאה – חלוקה שבה כל שחקן מקבל בדיוק את החבילה (חדר+מחיר) שהוא הכי רוצה. תימחור שבו כל שחקן רוצה חדר אחר נקרא בקיצור **תימחור ללא־קנאה**.

כדי למצוא תימחור ללא־קנאה, נשתמש ב**למה של שפרנר** – אותה למה שהשתמשנו בה כדי להוכיח קיום של חלוקת־עוגה ללא־קנאה (מומלץ לחזור על ההרצאה כדי לרענן את זכרונכם). בגדול, התהליך הוא כזה:

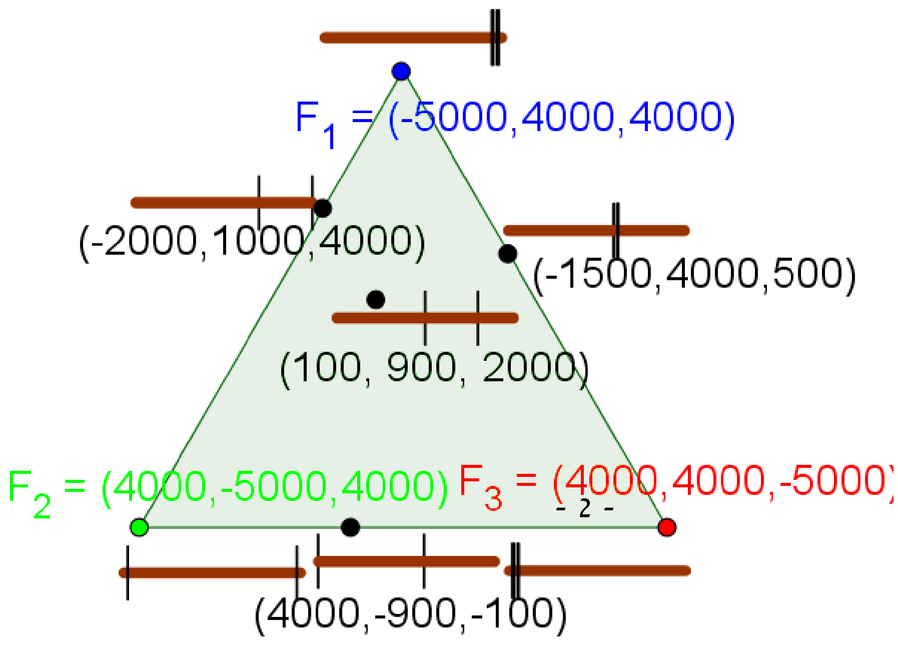
- נגדיר סימפלקס המייצג את כל התימחורים האפשריים;
- נבצע מישלוש – נחלק את הסימפלקס הגדול לסימפלקסונים קטנים;
- נשייך כל קודקוד של המישלוש לאחד השחקנים;
- נתייג כל קודקוד של המישלוש במספר המייצג את החדר, שהשחקן המשוייך מעדיף;
- נמצא **סימפלקסון מגוון** – סימפלקסון שבו כל התיוגים שונים.

סימפלקסון מגוון נותן לנו תימחור שהוא "כמעט" ללא־קנאה – עד־כדי גודל הצלע של הסימפלקסון. אם גודל הצלע הוא מספיק קטן (נניח, אגורה אחת), אז אפשר להניח שלא תהיה קנאה – כי השחקנים אינם מקפידים על הבדלים של אגורה אחת בשכר הדירה.

משפט. לכל n שחקנים עם פונקציות־ביקוש, אם קיים מחיר גבוה מדי, אז קיים תימחור כמעט־ללא־קנאה.
הוכחה. נסמן ב־R את שכר־הדירה הכולל, ונסמן ב־T מחיר גבוה מדי כלשהו, שגודלו לפחות R (ההנחה ש $T \geq R$ היא ללא הגבלת הכלליות, כי אם T הוא מחיר גבוה מדי, אז גם כל מספר גדול יותר הוא מחיר גבוה מדי). ניקח סימפלקס עם n קודקודים, הכולל את כל הנקודות עם קואורדינטות בין 0 ל־1, שסכום הקואורדינטות שלהן הוא 1. נתאים לכל נקודה בסימפלקס $(x_1, \ldots, x_n)$ תימחור $(p_1,\ldots,p_n)$, כאשר לכל j:

$$p_j = T - (Tn-R)*x_j$$

באיור למטה ניתן לראות דוגמה שבה $n=3$, $T=4000$, $R=3000$. הקודקודים הראשיים של הסימפלקס מסומנים ב: F_1, F_2, F_3.



סכום הקואורדינטות של כל נקודה בסימפלקס הוא 1, ולכן סכום המחירים בכל וקטור הוא R:

$$\text{sum}_i p_i = n*T - (Tn-R)*\text{sum}_i x_i = n*T - (Tn-R) = R.$$

שימו לב: בחלק מהוקטורים ישנם מחירים שליליים - נתייחס לבעיה זו בהמשך (סעיף).

נבצע **מישלוש** של הסימפלקס - נחלק אותו לסימפלקסונים קטנים, נניח, בגודל של אגורה אחת. נחלק את קודקודי המישלוש בין השחקנים, כך שבכל סימפלקסון, יש קודקוד אחד לכל שחקן. עבור כל תימחור שנמצא על קודקוד של המישלוש, נשאל את השחקן המשוייך לו "איזה חדר אתה מעדיף?". תשובת השחקן היא מספר בין 1 ל־n; נתייג את הקודקוד במספר זה.

אנחנו טוענים, שהתיוג המתקבל מתשובות השחקנים הוא **תיוג־שפרנר**, כלומר, בכל פאה הנמצאת בין הקודקודים הראשיים $F_{i1}, ..., F_{ik}$, מופיעות רק התויות i1, ..., ik.

אכן, בכל קודקוד ראשי F_j, המחיר של חדר j הוא לכל היותר 0:

$$T-(Tn-R)*1 = R-(n-1)T \leq R-T \leq 0$$

המחיר של כל חדר אחר הוא בדיוק T:

$$T-(Tn-R)*0 = T$$

כיוון ש־T הוא מחיר גבוה מדי, כל השחקנים בוחרים את חדר j, ולכן התווית היא j.

בתוך כל פאה של הסימפלקס, הערכים של x_j שונים מאפס עבור האינדקסים j המתאימים לקודקודי הפאה, ושווים לאפס עבור כל האינדקסים האחרים. לכן, מחירי החדרים המתאימים לאינדקסים האחרים הם בדיוק T, ומחירי החדרים המתאימים לקודקודי הפאה קטנים מ־T. כיוון שיש לפחות חדר אחד שמחירו T, ו־ T≥R, חייב להיות לפחות חדר אחד שמחירו לכל היותר אפס. לכן, לפי הגדרת מחיר גבוה מדי, כל השחקנים בוחרים חדרים שמחיריהם קטנים מ־T, ולכן כל תווית זהה לאחת התוויות שבקודקודי הפאה. עד כאן הוכחת הטענה.

לפי הלמה של שפרנר, קיים סימפלקסון מגוון, ולכן קיים תימחור כמעט־ללא־קנאה. ***

כמו בבעיית חלוקת העוגה, גם כאן ניתן להוכיח קיום תימחור שהוא ממש ללא־קנאה, בהנחה שפונקציות־הביקוש של השחקנים הן **רציפות** (- אם שחקן א בוחר את חדר ב עבור סדרה מתכנסת של תימחורים, אז שחקן א בוחר את חדר ב גם עבור הגבול של סדרה זו).

משפט. לכל n שחקנים עם פונקציות־ביקוש **רציפות**, אם קיים מחיר גבוה מדי, אז קיים תימחור ללא־קנאה.

חישוב חלוקה ללא קנאה - שחקנים קוואזיליניאריים

הוכחנו שקיימת חלוקה ללא קנאה. אבל איך מחשבים אותה? ניתן להשתמש ישירות בהוכחה של המשפט מהסעיף הקודם: לבנות את הסימפלקס, לחלק לסימפלקסונים קטנים, להציג את התימחורים לשחקנים, לשאול אותם איזה חדר הם רוצים, ולהמשיך עד שמוצאים סימפלקסון מגוון. כך נקבל חלוקה כמעט־ללא־קנאה. אם הסימפלקסון מספיק קטן, החלוקה תהיה ממש ללא־קנאה עבור כל שחקן סביר. מימוש יפה ושימושי של אלגוריתם זה ניתן למצוא באתר של הניו־יורק טיימס.[1] הבעיה היא, שבמקרה הגרוע, מציאת סימפלקסון מגוון עשויה לקחת זמן מעריכי במספר השחקנים - סדר גודל של מספר הקודקודים של המישלוש.

1 https://www.nytimes.com/interactive/2014/science/rent-division-calculator.html נבדק ב־4.8.22.

בסעיף זה נראה אלגוריתם שונה, המוצא חלוקה ללא־קנאה בזמן פולינומיאלי במספר השחקנים. האלגוריתם מתייחס למקרה הפרטי שבו כל השחקנים הם **קוואזיליניאריים**. כלומר, כל שחקן יודע להעריך כמה בדיוק שווה עבורו כל חדר בדירה, בשקלים לחודש. במצב זה, הקלט לאלגוריתם הוא מטריצה בגודל n על n, כאשר האיבר בשורה i ובעמודה j הוא הערך הכספי ששחקן i מייחס לחדר j. האלגוריתם פועל בשני שלבים:

- שלב א: מציאת השמה X של דיירים לחדרים.
- שלב ב: חישוב תימחור p, כך שהזוג (X,p) הוא חלוקה ללא־קנאה.

כהכנה לאלגוריתם, נציג שני משפטים המקשרים בין הוגנות ליעילות בבעיית חלוקת החדרים.

משפט. כשכל השחקנים קוואזיליניאריים, כל השמה ללא־קנאה ממקסמת את סכום הערכים. פורמאלית: אם (X,p) היא חלוקה ללא־קנאה, אז סכום ערכי השחקנים בהשמה X גבוה לפחות כמו בכל השמה אחרת.

הוכחה. תהי Y השמת־חדרים כלשהי. בחלוקה ללא־קנאה, כל שחקן מעדיף את החדר שלו (במחיר שלו) על־פני כל חדר אחר. כיוון שהשחקנים קוואזיליניאריים, העדפה זו מוגדרת ע"י התנאי הבא, לכל שחקן i:

$$V_i(X_i) - p(X_i) \geq V_i(Y_i) - p(Y_i)$$

הביטוי בצד שמאל הוא התועלת של שחקן i בחדר שהוא מקבל בהשמה X, והביטוי בצד ימין הוא התועלת ששחקן i מייחס לחדר שהוא מקבל בהשמה Y.

נסכום את אי־השיוויון הנ"ל על כל הדיירים (כל הסכומים על i בין 1 ל-n):

$$\sum (V_i(X_i) - p(X_i)) \geq \sum (V_i(Y_i) - p(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum p(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum p(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה לשכר־הדירה הכולל R. לכן אפשר לצמצם אותו ומקבלים:

$$\sum V_i(X_i) \geq \sum V_i(Y_i)$$

מכאן, שסכום הערכים בהשמה X גדול לפחות כמו בכל השמה אחרת Y. ***

המשפט מלמדנו, שבשלב א של האלגוריתם, אנחנו צריכים למצוא השמה הממקסמת את סכום הערכים. אבל זה לא מספיק: ייתכן שיש כמה השמות שונות הממקסמות את סכום הערכים. איך נדע באיזו מהן לבחור? המשפט הבא מלמדנו, שזה לא משנה באיזו מהן נבחר.

משפט. כל תימחור ללא קנאה, יישאר ללא־קנאה לכל השמה ממקסמת סכום־ערכים. פורמאלית: אם (X,p) היא חלוקה ללא־קנאה, ו־Y היא השמה הממקסמת סכום ערכים, אז גם (Y,p) היא חלוקה ללא־קנאה.

הוכחה. לפי המשפט הקודם, ההשמה X ממקסמת סכום ערכים. תהי Y השמה אחרת הממקסמת סכום ערכים. סכום הערכים בשתי ההשמות זהה:

$$\sum V_i(X_i) = MaxSum = \sum V_i(Y_i)$$

השיוויון נשאר גם כאשר מפחיתים מכל ערך את מחיר החדר המתאים:

$$\sum [V_i(Xi)-p(Xi)] = MaxSum - R$$
$$= \sum [V_i(Y_i)-p(Y_i)]$$

נתון שהחלוקה (X,p) היא ללא־קנאה. לכן לפי הגדרת קנאה, לכל i:

$$V_i(X_i) - p(X_i) \geq V_i(Y_i) - p(Y_i)$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל-n:

$$\sum[V_i(X_i) - p(X_i)] \geq \sum[V_i(Y_i)-p(Y_i)]$$

אבל כיוון שמתקיים שיוויון בין הסכומים, חייב להתקיים שיוויון בכל איבר, לכל i :

$$V_i(X_i) - p(X_i) = V_i(Y_i) - p(Y_i)$$

לכן גם Y היא השמה ללא־קנאה, עם אותו תימחור p. ***

משלושת המשפטים הקודמים נובע:

משפט. לכל השמה X של חדרים לשחקנים קוואזיליניאריים, שני התנאים הבאים שקולים:
(א) ההשמה X ממקסמת סכום ערכים;
(ב) קיים תימחור p שעבורו החלוקה (X,p) היא ללא־קנאה.

המשפט הזה מאד מעניין בפני עצמו. הוא מראה, שבבעיית חלוקת־חדרים, יעילות אוטיליטרית שקולה להוגנות. זאת, בניגוד מוחלט לבעיית החלוקה בלי כסף (שלמדנו בפרק 3). שם ראינו כמה דוגמאות לכך, שחלוקה אוטיליטרית יכולה להיות מאד לא־הוגנת. השימוש בכסף פותר את הניגוד בין יעילות להוגנות! לפי המשפט, ניתן למצוא חלוקה ללא־קנאה בעזרת האלגוריתם הבא:

א. מצא השמה X הממקסמת את סכום הערכים של השחקנים.
ב. חשב וקטור־מחירים p כך שהחלוקה (X,p) היא ללא קנאה.

כעת נסביר בפירוט, איך לבצע כל אחד מהשלבים.

בשלב א, עלינו למצוא השמה של אנשים לחדרים, הממקסמת את סכום הערכים. אם יש n אנשים ו־n חדרים, אז מספר ההשמות השונות הוא n! (n עצרת), וכאשר n גדול, אין זה מעשי לבדוק את כל ההשמות. כדי למצוא פתרון מהיר יותר לבעיה, נציג אותה כבעיה בתורת הגרפים. בהינתן מטריצת הקלט, נבנה **גרף דו־צדדי**, שבו:

- הקודקודים בצד אחד הם השחקנים;
- הקודקודים בצד השני הם החדרים;
- יש צלע בין כל שחקן לכל חדר, ומשקלה שווה לערך שהשחקן מייחס לחדר.

להזכירכם, **שידוך (matching)** בגרף הוא קבוצה של צלעות, כך שכל קודקוד נוגע לכל היותר בצלע אחת מהקבוצה. **שידוך מושלם (perfect matching)** הוא שידוך שבו כל קודקוד נוגע בדיוק בצלע אחת. כל השמה של n השחקנים ל־n החדרים היא שידוך מושלם בגרף הקלט.

המשקל של שידוך מסויים הוא סכום משקלי הצלעות המשתתפות בשידוך. השמה הממקסמת את סכום ערכי השחקנים היא שידוך שמשקלו גדול ביותר – היא **שידוך משקל־מקסימום (maximum-weight matching)** – בגרף הקלט. במטריצת הקלט למעלה, המספרים המודגשים מייצגים שידוך משקל־מקסימום; המשקל הוא 115.

בעיית מציאת שידוך־משקל־מקסימום נקראת גם **בעיית ההשמה (assignment problem)**. יש לה שימושים רבים בתעשייה, מעבר לחלוקה הוגנת. לדוגמה, תחנת מוניות מסויימת מקבלת בו־זמנית 3 הזמנות לנסיעה. לתחנה יש 3 מוניות הנמצאות במקומות שונים. לכל זוג של מונית+נוסע ישנה עלות, הנובעת מהזמן שייקח למונית להגיע אל הנוסע. התחנה צריכה להתאים מונית לכל נוסע, כך שסכום זמני ההגעה יהיה מינימלי. בבעיית חלוקת החדרים, אנחנו מחפשים השמה שבה סכום הערכים הוא **מקסימלי**, אבל ההבדל הזה הוא טכני בלבד – אם יש לנו אלגוריתם הפותר את בעיית ההשמה עם סכום מינימלי, אנחנו יכולים פשוט להריץ אותו עם ערכים שליליים, ונקבל פתרון עם סכום מקסימלי.

ישנם אלגוריתמים רבים לפתרון בעיית ההשמה, למשל **האלגוריתם ההונגרי** (Hungarian Algorithm / Munkres Algorithm / Kuhn Algorithm). אלגוריתמים לבעיית ההשמה נלמדים בקורס על אלגוריתמים בתורת הגרפים. בקורס הנוכחי, אנחנו מתייחסים לאלגוריתמים האלה כ"קופסה שחורה". כדי למצוא השמה הממקסמת את סכום הערכים, פשוט נבנה את הגרף הדו־צדדי המייצג את הקלט, ונפעיל את אחד האלגוריתמים. לשם המחשה, נראה קוד פשוט בשפת פייתון הפותר בעיה עם שלושה אנשים ושלושה חדרים (במקום המספרים 111, 222, 333 וכו' יש להכניס את הערכים האמיתיים של האנשים לחדרים):

```
import networkx as nx
G=nx.Graph()  # Construct an empty graph:
G.add_edge('person 1','room 1' ,weight=111)
G.add_edge('person 1','room 2' ,weight=222)
G.add_edge('person 1','room 3' ,weight=333)
G.add_edge('person 2','room 1' ,weight=444)
...
...
...
G.add_edge('person 3','room 3' ,weight=999)
print(nx.max_weight_matching(G))
```

כמובן, בכל שפה ישנן דרכים אחרות לביצוע חישוב זה; הבאנו את הקוד רק כדי להמחיש את השימוש בבעיית שידוך־משקל־מקסימום כקופסה שחורה.

בשלב ב, לאחר שמצאנו השמה ממקסמת־סכום־ערכים, אנחנו צריכים לקבוע מחיר לכל חדר, כך שההשמה תהיה ללא קנאה. בנוסף, אנחנו צריכים לוודא שסכום המחירים שווה בדיוק לשכר־הדירה. איך נעשה את זה?

דרך אחת אפשרית היא לפתור **בעיית תיכנות ליניארי**. יש לנו n משתנים – לכל חדר j יש משתנה p_j המייצג את מחיר החדר. האילוצים הם שהחלוקה צריכה להיות ללא־קנאה, ושסכום המחירים צריך להיות שווה למחיר הדירה. בתוכנית למטה, הביטוי d[j] מציין את הדייר המשוייך לחדר מספר j בהשמה הממקסמת־סכום־ערכים (ההשמה שמצאנו בשלב א):

$$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i \quad \text{For } i, j \text{ in } 1,...,n$$

$$Sum_{j=1..n}\ p_j = R$$

ניתן לפתור בעיה זו בעזרת כל ספריה לפתרון תוכניות ליניאריות. שימו לב, שבתוכנית הזאת אין פונקציית מטרה – היא מוצאת תימחור ללא קנאה כלשהו.

עכשיו, כשיש בידינו אלגוריתם בסיסי למציאת חלוקת־חדרים ללא־קנאה, אפשר לפתור בעיות מתקדמות יותר.

תימחור מיטבי

בבעיית חלוקת חדרים יכולים להיות הרבה תימחורים שונים. לדוגמה, בבעייה הבאה:

דייר	מרתף	חדר	סלון
א:	25	40	**35**

35	**60**	40	ב:
25	40	**20**	ג:

התאים המודגשים מציינים השמה ממקסמת־סכום־ערכים. הנה שני תימחורים שונים, שכולם ללא קנאה:

- סלון=30, חדר=45, מרתף=25
- סלון=33.33, חדר=43.33, מרתף=23.33

התימחור הראשון טוב יותר לדייר א; התמחור השני טוב יותר לדיירים ב, ג.

איך נדע באיזה תימחור לבחור? – אפשרות לא־כל־כך הוגנת היא לתת לאחד הדיירים לבחור את התימחור שהוא מעדיף. הדייר הנבחר יוכל לעשות זאת על־ידי פתרון בעיית מיטוב ליניארית. לדוגמה, אם הדייר הנבחר הוא דייר א, שקיבל את הסלון, אז הוא יפתור את התוכנית הליניארית הבאה:

```
Minimize p_salon
Subject to:
        V_d[j](j) - p_j ≥ V_d[j](i) - p_i    For i, j in 1,...,n
        Sum_j=1..n p_j  = R
```

התוכנית למעשה מוצאת את התימחור, שבו מחיר הסלון הוא הנמוך ביותר, תחת האילוץ שהתימחור הוא ללא־קנאה.

פתרון הוגן יותר הוא להשתמש בעיקרון **האגליטרי**. נחשב תימחור, הממקסם את התועלת הקטנה ביותר של שחקן, מבין כל התמחורים ללא־קנאה:

```
Maximize min j=1..n (V_d[j](j) - p_j)
Subject to:
        V_d[j](j) - p_j ≥ V_d[j](i) - p_i    For i, j in 1,...,n
        Sum_j=1..n p_j  = R
```

הפונקציה min אינה פונקציה ליניארית, אבל אפשר להפוך את הבעיה לליניארית ע"י שימוש במשתנה־עזר, כמו שעשינו כשלמדנו על חלוקה אגליטרית של משאבים (מטלה).

רעיון זה פורסם בשנת 2016 ע"י קובי גל, מושיק מש, אריאל פרוקצ'יה ויאיר זיק. האלגוריתם שלהם מומש באתר הפופולארי "ספלידיט".[2] הם גם ביצעו ניסוי שהשווה את שביעות־הרצון של משתמשי האתר מאלגוריתם זה, לעומת בחירת וקטור ללא־קנאה אקראי כלשהו, ומדווחים שרוב המשתמשים העדיפו את האלגוריתם האגליטרי. לפי התגובות שהתקבלו באתר, אלפי דיירים ברחבי העולם השתמשו באלגוריתם זה כדי לחלק שכר־דירה בקלות ובמהירות. הדבר מעיד על הפוטנציאל של אלגוריתמי חלוקה הוגנת לשיפור איכות החיים והחברה.

סוג אחר של תימחור מיטבי מתעורר בבעיות של חלוקת ירושה. נניח ש־n אחים מקבלים בירושה n דירות, ורוצים לתת דירה לכל אחד ולהעביר כספים ביניהם, כך שהחלוקה תהיה ללא־קנאה. ניתן למצוא חלוקה כזאת בעזרת האלגוריתם לבעיית חלוקת החדרים, פרט לכך שאין שכר־דירה, ולכן סכום התשלומים צריך להיות אפס (R=0). אולם בבעיה זו יש שיקול נוסף: כל תשלום חיובי חייב במס, והשחקנים רוצים לשלם כמה שפחות מס. לכן הם רוצים, שסכום התשלומים **החיוביים** יהיה קטן ככל האפשר, בכפוף לכך שהתימחור יהיה ללא קנאה. ניתן להציג בעיה זו באופן הבא:

```
Minimize sum_j=1..n max(p_j,0)
Subject to:
        V_d[j](j) - p_j ≥ V_d[j](i) - p_i    For i, j in 1,...,n
```

2 http://www.spliddit.org/apps/rent נבדק ב־4.8.22.

$Sum_{j=1..n}\ p_j = 0$

הפונקציה max אינה ליניארית, אך ניתן להפוך את הבעיה לליניארית ע"י הוספת משתני עזר $q_1,...,q_n$, והוספת אילוצים שיגרמו לכך שכל q_j יהיה שווה ל $max(p_j,0)$. התוכנית הליניארית הסופית תיראה כך:

$$\text{Minimize } sum_{j=1..n}\ q_j$$

Subject to:

$$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i \quad \text{For } i, j \text{ in } 1,...,n$$

$$Sum_{j=1..n}\ p_j = 0$$

$$q_j \geq p_j$$

$$q_j \geq 0$$

בעיית הטרמפיסט

כזכור, כשהוכחנו קיום של חלוקה ללא קנאה, השתמשנו בסימפלקס המכיל גם תימחורים שבהם חלק מהמחירים שליליים. במציאות, בהחלט תיתכן חלוקה ללא־קנאה שבה חלק מהמחירים שליליים. לדוגמה: אם הסלון המרווח עולה 1000 שקלים לחודש והמרתף הטחוב עולה מינוס 50 שקלים לחודש, אז ייתכן שדייר אחד יעדיף את הסלון ודייר אחר יעדיף את המרתף, והחלוקה תהיה ללא־קנאה.

אבל הפתרון הזה הוא בעייתי: הדיירים האחרים למעשה משלמים מכיסם 50 שקלים לדייר שגר במרתף. ייתכן שהם לא יסכימו לזה – הם יעדיפו לוותר על המרתף ועל הדייר, ולקחת את 50 השקלים לעצמם.

האם תמיד אפשר למצוא חלוקה ללא־קנאה וללא מחירים שליליים, כשהדיירים קוואזיליניאריים? התשובה היא לא. הנה דוגמה:

נתונה דירה שמחירה הכולל 100. יש שני חדרים ושני דיירים קוואזיליניאריים עם הערכים:

	סלון	מרתף
דייר א:	**150**	0
דייר ב:	140	**10**

יש כאן רק השמה אחת הממקסמת את סכום הערכים: דייר א בסלון ודייר ב במרתף. כדי שדייר ב לא יקנא, ההפרש במחירים צריך להיות לפחות כהפרש הערכים שהוא מייחס לחדרים, כלומר 130. סכום המחירים הוא 100, ולכן מחיר הסלון הוא 115 ומחיר המרתף הוא ‎–15. הוכחנו, שבכל חלוקה ללא־קנאה, בהכרח יש מחיר שלילי.

בדוגמה זו, סכום הערכים שהדיירים מייחסים לחדרים גדול משכר־הדירה הכולל. אבל גם אם נדרוש שסכום הערכים יהיה **שווה** לשכר־הדירה הכולל, עדיין לא נוכל להבטיח שכל המחירים יהיו חיוביים. הדוגמה הבאה לקוחה ממאמר של בראמס וקילגור. נתונה דירה שמחירה הכולל 100. יש 4 חדרים ו4 דיירים קוואזיליניאריים עם הערכים:

	חדר ד	חדר ג	חדר ב	חדר א	סכום
דייר א:	0	30	34	**36**	100
דייר ב:	0	33	**36**	31	100
דייר ג:	0	**36**	30	34	100
דייר ד:	**0**	35	33	32	100

ההשמה היחידה הממקסמת את סכום הערכים היא ההשמה המודגשת. נניח בשלילה שקיים תימחור שבו כל המחירים לפחות 0.

- המחיר של חדר ד לפחות 0, ולכן התועלת של דייר ד לכל היותר 0. לכן, כדי שדייר ד לא יקנא בדייר ג, המחיר של חדר ג צריך להיות לפחות 35.
- מאותה סיבה, כדי שדייר ד לא יקנא בדייר ב, המחיר של חדר ב צריך להיות לפחות 33.
- התועלת של דייר ג לכל היותר 36–35=1. לכן, כדי שדייר ג לא יקנא בדייר א, המחיר של חדר א צריך להיות לפחות 33.
- סכום המחירים הוא לפחות 35+33+33+0=101 – גדול משכר־הדירה הכולל – סתירה.

אם בכל חלוקה ללא־קנאה יש מחירים שליליים, והדיירים לא מוכנים "לסבסד" את חבריהם ולשלם להם שיגורו בדירה, אז אפשר פשוט לעגל את המחירים השליליים למעלה ל־0, ולחלק את ההפרש שווה בשווה בין הדיירים האחרים. כתוצאה מכך, חלק מהדיירים יקנאו – אולם כל הדיירים המקנאים יהיו דיירים המקבלים חדר בחינם.

הפתרון הזה אינו אידיאלי, ולכן אנחנו רוצים להשתמש בו רק אם אין ברירה – רק אם אכן **בכל** חלוקה ללא־קנאה יש מחירים שליליים. איך נדע אם זה המצב? – אפשר פשוט להוסיף לתוכנית הליניארית לחישוב שכר־הדירה, אילוצים הקובעים שכל המחירים חייבים להיות לפחות אפס. כלומר נפתור את הבעיה הליניארית הבאה:

$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i \quad$ For i, j in 1,...,n

$Sum_{j=1..n}\ p_j = R$

$\mathbf{p_j \geq 0}$ **For all i in 1,...,n.**

כעת יש שני מקרים:

- אם מצאנו פתרון לתוכנית הזאת, אז סיימנו.
- אם לא מצאנו פתרון, אז אנחנו יודעים (לפי המשפט שהוכחנו), שבכל חלוקה ללא־קנאה ישנם מחירים שליליים. ואז נאפשר לדיירים לבחור מה הם רוצים: לעגל את המחירים למעלה ובכך לאפשר קנאה, או לפתור את התוכנית הליניארית ללא האילוץ ובכך לאפשר מחירים שליליים.

האלגוריתם שהצגנו כעת עשוי למצוא תימחור שבו חלק מהמחירים שווים אפס. ייתכן שגם תימחור כזה לא ימצא חן בעיני חלק מהדיירים, שיטענו שהם לא רוצים "אוכלי חינם" בדירה שלהם. האם אפשר למצוא תימחור שבו כל המחירים חיוביים ממש?

יכולנו לחשוב, שאפשר להשתמש בתוכנית הליניארית שהוצגה למעלה, ורק להחליף את האילוץ האחרון מ"גדול או שווה" ל"גדול ממש":

$p_j > 0 \quad$ For all i in 1,...,n.

אבל הפתרון הזה לא עובד: אלגוריתמים לפתרון תוכניות ליניאריות אינם יודעים להתמודד עם אילוצים של "גדול ממש" (הסיבה לכך היא מעבר להיקפו של הספר הנוכחי). הפתרון הוא להגדיר **בעיית מיטוב**. נחפש את התימחור, שבו המחיר **הקטן** ביותר הוא **גדול** ככל האפשר:

Maximize z

Subject to:

$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i \quad$ For i, j in 1,...,n

$Sum_{j=1..n}\ p_j = R$

$p_j \geq z \quad$ For all i in 1,...,n

אם הערך שהתקבל עבור z גדול מאפס, סיימנו. אחרת, לפי המשפט, לא קיים תימחור ללא־קנאה שבו כל המחירים חיוביים ממש. נצטרך לחיות עם טרמפיסטים...

סיכם: אראל סגל-הלוי.