

מטלה – חלוקה עם שיתופים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול. סעיפים המסומנים בכוכבית (*) הם רשות ומזכים בניקוד כפול.

שאלה 1: "המנצח המתוקן" עם זכויות שונות

תארו אלגוריתם דומה ל"המנצח המתוקן", המבטיח חלוקה עם התנאים הבאים:

- יעילה פארטו;
 - ללא קנאה משוקללת (WEF) – ראו הגדרה בהרצאה 3.
 - לכל היותר חפץ אחד משותף.
- הוכיחו שהתכונות מתקיימות. הדגימו את פעולת האלגוריתם על שחקנים עם זכויות שונות.

שאלה 2: אלגוריתם "המנצח המתוקן" – נקמנות

דונאלד ואיוואנה מחלקים ביניהם ארבעה חפצים בעזרת אלגוריתם "המנצח המתוקן". הערכים האמיתיים שלהם הם אותם ערכים מהדוגמה שבהרצאה (נמצאים בקובץ אקסל בתיקיית code).

א. לפני הפעלת האלגוריתם, איוואנה גילתה את המספרים האמיתיים של דונאלד. היא רוצה לנצל את העובדה **כדי שהערך של דונאלד יהיה כמה שיותר קטן** (לא אכפת לה בכלל מה היא תקבל – העיקר שדונאלד יקבל כמה שפחות). איזה מספרים היא צריכה למסור לאלגוריתם, כך שהסל של דונאלד יהיה בעל הערך הקטן ביותר האפשרי עבורו, בהינתן שדונאלד מוסר את המספרים האמיתיים? **שימו לב:**

- סכום המספרים של איוואנה עדיין חייב להיות 100 – בהתאם לדרישת האלגוריתם.
- יש להריץ את האלגוריתם בהתאם למספרים **הלא-אמיתיים** שאיוואנה כתבה, ואחר-כך לחשב את ערך הסל של דונאלד לפי המספרים **האמיתיים** שלו.

ב. חזרו על סעיף א בכיוון ההפוך – דונאלד גילה את המספרים האמיתיים של איוואנה, והוא רוצה שהערך שלה יהיה כמה שיותר קטן (בסעיף זה, איוואנה מוסרת את המספרים האמיתיים שלה לאלגוריתם).

ג. איזו חלוקה יחזיר האלגוריתם, אם גם דונאלד וגם איוואנה ידווחו בו-זמנית מספרים לא-אמיתיים – איוואנה לפי סעיף א, ודונאלד לפי סעיף ב? האם החלוקה הוגנת? האם החלוקה יעילה-פארטו?

שאלה 3: בדיקת יעילות פארטו של חלוקה

א. כתבו פונקציה בפייטון, המקבלת מטריצת ערכים של שחקנים ומטריצת חלוקה בין שחקנים, ובודקת אם החלוקה יעילה פארטו. ניתן להניח שמטריצת החלוקה חוקית. כותרת הפונקציה:

```
def is_pareto_efficient(  
    valuations: list[list[float]],  
    allocation: list[list[float]] ) → bool
```

דוגמה עם שני שחקנים:

```
is_pareto_efficient(
    valuations = [[10,20,30,40], [40,30,20,10]],
    allocation = [[0,0.7,1,1], [1,0.3,0,0]])
```

במקרה זה התשובה אמורה להיות "כן".

לצורך מימוש הפונקציה, היעזרו בספריה `networkx` של פייתון. כל האלגוריתמים שלמדתם בקורסי האלגוריתמים כנראה כבר נמצאים שם – השתמשו בהם.

* ב. שפרו את הפונקציה שלכם כך שאם החלוקה לא יעילה פארטו, החלוקה תחזיר שיפור פארטו. רמז: היעזרו בהוכחת המשפט שלמדנו בהרצאה.

* שאלה 4: חלוקה יעילה והוגנת לשחקנים עם זכויות שונות

נתונים m משאבים רציפים, וכן n שחקנים עם זכויות שונות: הזכות של כל שחקן i היא w_i , סכום כל הזכויות הוא 1, ופונקציית הערך של i היא V_i .

כזכור, **חלוקה פרופורציונלית לשחקנים עם זכויות שונות** היא חלוקה שבה כל שחקן i מקבל ערך לפחות:

$$w_i * V_i(All)$$

כאשר $All =$ כל המשאבים.

כתבו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו ופרופורציונלית של המשאבים בין השחקנים.

הוכיחו את תשובתכם. הדגימו את האלגוריתם שלכם על שחקנים עם זכויות שונות.

רמז: התחילו מחלוקה פרופורציונלית כלשהי, לא בהכרח יעילה. חישבו איך להפוך אותה ליעילה.

שאלה 5: חיפוש - חלוקה הוגנת ויעילה עם מינימום שיתופים

כתבו קוד חיפוש במרחב המצבים, המוצא חלוקה הוגנת ויעילה בין שני שחקנים, עם מספר השיתופים הקטן ביותר האפשרי. מותר להשתמש בקוד מפתרון המטלה הקודמת. הסבירו מה שיניתם ומדוע; הדגימו ובדקו את תשובתכם.