מטלה 4

שאלה 4: האלגוריתם החמדני – יחס קירוב הדוק

בסיכום הוכחנו, שלכל n, **ולכל** בעיית חלוקת מטלות עם n שחקנים, יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני הוא **לכל היותר (4n-1) חלקי (3n)**.

הראו, שלכל n, **קיימת** בעיית חלוקת מטלות עם n שחקנים, שבה יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני הוא **בדיוק (4n-1) חלקי (3n)**.

רמז: הדוגמה בהרצאה מתאימה ל- n=4; נסו להכליל את הדוגמה לכל n.

הוכחה:

נראה שיחס הקירוב הוא הדוק באמצעות דוגמא לבעיה ספציפית, שכאשר שנפעיל את האלגוריתמים על הערכים של הבעיה נקבל את היחס הנ"ל.

נעזר בדוגמא מההרצאה על מנת להגדיר חלוקה כללית ולזהות חוקיות:

דוגמה: 4 אנשים, 9 מטלות עם עלויות:

4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7.

אזי נגדיר זוגות של מספרים ושלשה שמהווים את אורך המטלות, שסה"כ מספר המטלות הוא 2n+1 כאשר קיימת שלשה בסוף של מספרים שערכם הוא n כל אחד (בדוגמא הנ"ל זה 4 כמספר האנשים).

כלומר החלוקה תראה באופן הבא:

2n-1,2n-1,2n-2,2n-2,....n+1,n+1,n,n,n

האלגוריתם החמדני עובד באופן הבא:

מחלקים את ה-n המטלות הראשונות מהגבוה לנמוך לפי סדר אקראי, ואת ה-n מטלות הבאות נחלק הפוך מהסדר שחולק בהתחלה, כאשר תיוותר מטלה שאורכה הוא n (היות וחילקנו 2n מטלות מתוך ה2n+1 מטלות).

בסיבוב הראשון:

לכל שחקן p, כאשר $1\le p\le n$ זמן המטלה שהשחקן p יקבל: $2n - \lceil \frac{p}{2} \rceil$

2n-1,2n-1,2n-2,2n-2,2n-3,2n-3…….

בסיבוב השני יתבצע בסדר ההפוך:

לכל שחקן p, כאשר $1\le p\le n$ זמן המטלה שהשחקן p יקבל: $n-1 + \lceil \frac{p}{2} \rceil$

n,n,n+1,n+1,n+2,n+2,n+3,n+3…….

לאחר שני הסיבובים כל שחקן p מקבל מטלות שאורכן ביחד:

$2n-\lceil \frac{p}{2} \rceil + \lceil \frac{p}{2} \rceil + n-1 = 3n-1$

כאשר בסיבוב השלישי תיוותר רק מטלה אחת שאורכה n, אזי נתן אותה באופן אקראי לאחד מהשחקנים.

כלומר לסיום, יהיה שחקן אחד שזמן המטלות שלו יהיה: $3n-1+n=4n-1$

לכן סה"כ **__בחלוקה החמדנית:__** האחרון יסיים לאחר עלות של 4n-1.

כעת נראה כיצד החלוקה תתבצע באמצעות חלוקה אגליטרית.

נחלק בהתחלה את השלשה של המטלות שאורכן n לשחקן אקראי, ואז את המטלות הנותרות נחלק בדיוק כפי שחילקנו בחמדני.

בסיבוב הראשון:

לכל שחקן p, כאשר $1 \le p \le n$ זמן המטלה שהשחקן p יקבל: $2n - \lceil \frac{p}{2} \rceil$

2n-1,2n-1,2n-2,2n-2,2n-3,2n-3…….

בסיבוב השני יתבצע בסדר ההפוך:

לכל שחקן p, כאשר $1 \le p \le n$ זמן המטלה שהשחקן p יקבל: $n + \lceil \frac{p}{2} \rceil$

n+1,n+1,n+2,n+2,n+3,n+3,n+4,n+4…….

לאחר שני הסיבובים כל שחקן p מקבל מטלות שאורכן ביחד:

$2n-\lceil \frac{p}{2} \rceil + \lceil \frac{p}{2} \rceil + n = 3n$

כאשר קיים שחקן שחילקנו לו את השלשה לכן הוא קיבל: n+n+n=3n.

כלומר לאחר **__החלוקה האגליטרית__** כל שחקן קיבל מטלות שסכומם הכולל הוא בדיוק 3n לכל שחקן.

כלומר, באלגוריתם החמדני האחרון יסיים לאחר 4n-1, לעומת החלוקה האגליטרית שהיא הOPT, האחרון יסיים לאחר 3n.

יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני: $\frac{4n-1}{3n}$ כנדרש.