מטלה 9 - אלגוריתמים כלכליים

שאלה 2: זכויות לפי גובה המס

נניח שאזרח i משלם מס בגובה C_i (התקציב C שווה לסכום המיסים שמשלמים כל האזרחים). אנחנו רוצים להגדיר מערכת לחלוקת תקציב, שתתן זכויות רבות יותר לאזרחים המשלמים יותר מיסים. לדוגמה, ההגדרה של תכונת "הוגנות ליחידים" תהיה: "התועלת של אזרח i היא לפחות C_i".

א. כתבו הגדרה מוכללת של תקציב הוגן לקבוצות, ושל תקציב פריק.

ב. הוכיחו, שכל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות – בהתאם להגדרות של סעיף א.

ג. נגדיר "תקציב נאש מוכלל" כתקציב d הממקסם את הסכום:

```
Sum[i=1,…,n] Cᵢ * log(uᵢ(d))
```

(מכפילים את הלוג של אזרח i בגובה המס ששילם אזרח i).

הוכיחו שתקציב נאש מוכלל הוא פריק (לפי ההגדרה של סעיף א).

פתרון:

א. כתבו הגדרה מוכללת של תקציב הוגן לקבוצות, ושל תקציב פריק.

<u>תקציב הוגן לקבוצות:</u>

לכל קבוצה $k \subseteq n$, הסכום הכולל שמועבר לנושאים שלפחות אחד מחברי הקבוצה תומך בהם הוא לפחות $\sum_{i \in k} c_i$

<u>תקציב פריק:</u>

תקציב $d_1, \dots, d_m$ נקרא פריק אם קיימים סכומים $d_{i,j}$ לכל אזרח i ולכל נושא j כך ש:

- לכל נושא j מתקיים: $\Sigma_i d_{i,j} = d_j$
- לכל אזרח i מתקיים: $\Sigma_j d_{i,j} = c_i$
- $u_{i,j} > 0$ רק אם $d_{i,j} > 0$

ב. הוכיחו, שכל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות – בהתאם להגדרות של סעיף א.

<u>הוכחה:</u>

נניח שהתקציב d הוא פריק. לכל קבוצה $k \subseteq n$, סכום הכסף שניתן לחברי הקבוצה ע"י הפירוק של d הוא

$$\sum_{i \in k} \left(\sum_{j} d_{i,j}\right) = \sum_{i \in k} c_i.$$

לפי הגדרת הפירוק, כל הסכום הזה מפוזר רק על נושאים שלפחות אחד מחברי הקבוצה k תומך בהם. לכן לפי ההגדרה, התקציב הוגן לקבוצות.

ג. נגדיר "תקציב נאש מוכלל" כתקציב d הממקסם את הסכום:

```
Sum[i=1,…,n] Ci * log(ui(d))
```

(מכפילים את הלוג של אזרח i בגובה המס ששילם אזרח i).

הוכיחו שתקציב נאש מוכלל הוא פריק (לפי ההגדרה של סעיף א).

הוכחה:

נתון תקציב d הממקסם את סכום הלוגריתמים.

נבנה תקציב חדש 'd ע"י העברת סכום קטן e מנושא 1 לנושא 2. השינוי בתועלת של כל שחקן i הוא:

$$u_i(d') - u_i(d) = e \cdot (u_{i,2} - u_{i,1})$$

השינוי בפונקציה כלשהי f של התועלת שווה בקירוב:

$$f(u_i(d')) - f(u_i(d)) =\sim e \cdot (u_{i,2} - u_{i,1}) \cdot f'(u_i(d))$$

בפרט, כאשר f היא לוגריתם:

$$log(u_i(d')) - log(u_i(d)) =\sim \frac{e\cdot(u_{i,2} - u_{i,1})}{u_i(d)}$$

השינוי בסכום הלוגריתמים הוא:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e\cdot(u_{i,2} - u_{i,1})}{u_i(d)} = e \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i,2}}{u_i(d)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i,1}}{u_i(d)}\right]$$

התקציב המקורי d ממקסם סכום לוגריתמים. לכן השינוי בסכום הלוגריתמים הוא לכל היותר 0:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i,2}}{u_i(d)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i,1}}{u_i(d)} \leq 0$$

אותו הדבר נכון אם הופכים את התפקיד של 1,2:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i,1}}{u_i(d)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i,2}}{u_i(d)} \leq 0$$

ולכן חייב להתקיים שיוויון:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i,1}}{u_i(d)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i,2}}{u_i(d)}$$

ולכן הסכום הנ"ל קבוע לכל נושא j:

$$\forall j \in [m]: \quad \sum_{i=1}^{n} (c_i \cdot \frac{u_{i,j}}{u_i(d)}) = z$$

נפרק את התקציב באופן הבא: (פה מתחיל השינוי בהוכחה)

$$d_{i,j} := c_i \cdot d_j \cdot \frac{u_{i,j}}{u_i(d)}$$

א. לכל שחקן i, מתקיים:

$$\sum_j d_{i,j} = c_i \cdot \sum_j (d_j \cdot u_{i,j}) \cdot \frac{1}{u_i(d)}$$
$$= c_i \cdot u_i(d) \cdot \frac{1}{u_i(d)}$$
$$= c_i$$

$$\sum_i \sum_j d_{i,j} = \sum_i c_i = C \qquad (1)$$

ב. לכל נושא j, מתקיים:

$$\sum_i d_{i,j} = \sum_i (c_i \cdot d_j \cdot \frac{u_{i,j}}{u_i(d)}) \qquad (3)$$
$$= d_j \cdot \sum_i (c_i \cdot \frac{u_{i,j}}{u_i(d)})$$
$$= d_j \cdot z$$

$$\sum_j \sum_i d_{i,j} = \sum_j (d_j) \cdot z$$
$$= C \cdot z \qquad (2)$$

מ- (1) ו- (2) קיבלנו:

$$\sum_j \sum_i d_{i,j} = C = C \cdot z$$
$$\rightarrow 1 = z$$

אז נציב את ה-z ב- (3) ונקבל:

$$\sum_i d_{i,j} = d_j \cdot 1 = d_j$$

לסיום, קיבלנו שמתקיימת ההגדרה שנתנו לתקציב פריק (בסעיף א):

- לכל נושא j מתקיים: $\Sigma_i d_{i,j} = d_j$
- לכל אזרח i מתקיים: $\Sigma_j d_{i,j} = c_i$