

מטלה – תקצוב משתף רציף

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בניקוד כפול.
יש להוכיח את נכונות התשובות. אפשר לכתוב אלגוריתם בפסאודו-קוד, אבל הוא צריך להיות מדויק ומפורט ברמה של שפת תיכנות.

שאלה 1: תקציב לקסימין-אגליטרי

הגדרה: **תקציב לקסימין-אגליטרי** הוא תקציב הממקסם את הערך הנמוך ביותר של שחקן כלשהו:

$$\max[d] \min[i] u_i(d)$$

בכפוף לזה, הוא ממקסם את הערך השני הכי נמוך; וכו'.

לכל אחת מהתכונות למטה, הוכיחו שכל תקציב לקסימין-אגליטרי מקיים את התכונה הזאת, או הביאו דוגמה נגדית.

- א. הוגן ליחידים.
- ב. הוגן לקבוצות.
- ג. יעיל פארטו.
- ד. מגלה-אמת.

שאלה 2: זכויות לפי גובה המס

נניח שאזרח i משלם מס בגובה C_i (התקציב C שווה לסכום המיסים שמשלמים כל האזרחים). אנחנו רוצים להגדיר מערכת לחלוקת תקציב, שתתן זכויות רבות יותר לאזרחים המשלמים יותר מיסים. לדוגמה, ההגדרה של תכונת "הוגנות ליחידים" תהיה: "התועלת של אזרח i היא לפחות C_i ".

א. כתבו הגדרה מוכללת של תקציב הוגן לקבוצות, ושל תקציב פריק.

ב. הוכיחו, שכל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות – בהתאם להגדרות של סעיף א.

ג. נגדיר "תקציב נאש מוכלל" כתקציב d הממקסם את הסכום:

$$\sum_{i=1, \dots, n} C_i * \log(u_i(d))$$

(מכפילים את הלוג של אזרח i בגובה המס ששילם אזרח i).

הוכיחו שתקציב נאש מוכלל הוא פריק (לפי ההגדרה של סעיף א).

* שאלה 3: תיכנות – תקציב פריק

כתבו פונקציה, המקבלת תקציב כלשהו, ובודקת אם הוא פריק, ואם כן – מחזירה פירוק אחד שלו.
כותרת הפונקציה:

```
def find_decomposition(
```

```
budget: list[float], # (... ,1,0) לפי הסדר
preferences: list[set[int]] # הנושאים שכל אזור תומך בהם
)
```

דוגמה לקלט:

```
budget = [400, 50, 50, 0] # נושא 0 קיבל 300, נושא 1 קיבל 100, וכו'
preferences = [ {0,1}, {0,2}, {0,3}, {1,2}, {0} ]
# 'שחקן א תומך בנושאים 0,1; שחקן ב תומך בנושאים 0,2; וכו'.
```

במקרה זה התקציב פריק. דוגמה לפירוק: שחקנים א, ב, ג, ה תורמים 100 לנושא 0; שחקן ד תורם 50 לנושא 1 ו-50 לנושא 2.

שאלה 4: תועלת מינימום

בהרצאה הנחנו, שהתועלת של כל תורם שווה לסכום התרומות לנושאים שהוא תומך בהם:

$$u_i(d) = \sum_{j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0} d_j$$

לדוגמה, אם עמי תומך בנושאים א, ב, נושא א מקבל 4000 ו-ב 2000, אז התועלת של עמי היא 6000.

בשאלה זו, נניח שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לנושא כלשהו שהוא תומך בו:

$$u_i(d) = \min_{j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0} d_j$$

בדוגמה למעלה, התועלת של עמי היא 2000.

נתונים 100 אזרחים ו-4 נושאים. 90 אזרחים תומכים בנושאים א,ב,ג; 10 אזרחים תומכים בנושאים ג,ד.

א. הראו שהתקציב האנארכי הוא פריק אבל לא יעיל-פארטו.

ב. הראו שהתקציב השווה (כל הנושאים מקבלים אותו סכום) יעיל-פארטו אבל לא פריק.

* ג. מצאו תקציב שהוא גם יעיל פארטו וגם פריק.

שאלה 5: מונוטוניות של אלגוריתמי תקצוב

אלגוריתם לחלוקת תקציב רציף נקרא **מונוטוני** אם, כשמפעילים אותו עם תקציב גדול יותר, וההצבעות של כל האזרחים לא משתנות, ההקצאה לכל אחד מהנושאים לא קטנה. לכל אחד מהאלגוריתמים הבאים, הוכיחו שהוא מונוטוני, או הביאו דוגמה נגדית:

א. אוטיליטרי;

ב. אוטיליטרי על תנאי;

* ג. נאש (מיקסום המכפלה).

*** שאלה 6: מונוטוניות של שיטת החלקים השוים – ללא שבירת שיוון**

שאלה 4 במטלה הקודמת היתה למצוא דוגמה המראה, ששיטת החלקים השוים לבחירת ועדה אינה מונוטונית. בכל הפתרונות שהוגשו, הדוגמאות הסתמכו על שבירת שיוון מסוימת באלגוריתם עצמו או בשלב האחרון (של החלוקה שרירותית).

מצאו דוגמה **שאינה** תלויה בשבירת שיוון או בחלוקה שרירותית כלשהי, כלומר, בכל שלב יש רק מועמד אחד שאפשר לבחור לפי כללי האלגוריתם, ובסוף התהליך נבחרים k מועמדים.