אלגוריתמים כלכליים מטלה 6 שאלה 5
מגיש: בר גולדנברג

נתונים n שחקנים ו־ n חדרים. צריך לתת חדר אחד בדיוק לכל שחקן, ללא כספים. תארו אלגוריתמים

יעילים (- זמן ריצה פולינומיאלי ב-n)

למציאת השמות המקיימות את התנאים הבאים:

א. השמה הממקסמת את מכפלת הערכים:

האלגוריתם:

בנה גרף דו-צדדי שמצד אחד יש n קודקודים המייצגים כל שחקן, ומהצד השני יש n קודקודים המייצגים כל חדר.
עבור כל קודקוד שחקן הוסף n צלעות לכל החדרים שבו משקל הצלע הינו $log(valuation_i)$ כלומר לוגריתם של הערך של השחקן לחדר ה-i.
מצא שידוך מקסימלי והחזר.

ניתוח זמן ריצה: בניית הגרף - $O(n^2)$
מציאת שידוך מקסימלי $O(E\sqrt{V})$ -> $O(n^2\sqrt{n})$
סה״כ $O(n^2\sqrt{n} + n^2)$ = $O(n^2\sqrt{n})$
הוכחת נכונות:
בכיתה ראינו שמציאת שידוך מקסימלי ממקסמת את סכום הערכים, אבל אנחנו רוצים למקסם את מכפלת הערכים.

נניח בשלילה כי מצאנו חלוקה שממקסמת את סכום הלוגים $\{X: \sum_{x_i \in X} log(x_i) = MAX\}$ אבל לא ממקסמת את מכפלת הערכים, אזי בהכרח קיים חלוקה אחרת $\bar{X}$ כך ש $\prod_{\bar{x}_i \in \bar{X}} \bar{x}_i > \prod_{x_i \in X} x_i$

$$log(\prod_{\bar{x}_i \in \bar{X}} \bar{x}_i) > log(\prod_{x_i \in X} x_i) \Rightarrow \sum_{\bar{x}_i \in \bar{X}} log(\bar{x}_i) > \sum_{x_i \in X} log(x_i)$$

סתירה למקסימליות של X.

ב. השמה אגליטרית
האלגוריתם:
נריץ את האלגוריתם של סעיף א באיטרציות:

נגדיר משתנה $minValuation$ להיות ההערכה הקטנה ביותר מבין כל השחקנים
ונגדיר משתנה $maxValuation$ להיות ההערכה הגדולה ביותר מבין כל השחקנים.

כל עוד אלגוריתם א׳ מחזיר פתרון וגם $minValuation <= maxValuation$
קדם את $minValuation$ באחד.

החזר את הפתרון האחרון שאלגוריתם א׳ החזיר.

ניתוח זמן ריצה:
אלגוריתם א׳ רץ ב$O(n^2\sqrt{n})$ ואנחנו מבצעים אותו לכל היותר n פעמים אז קיבלנו:
$O(n^3\sqrt{n})$
ניתן לשפר את זמן הריצה ל$O(log(n)n^2\sqrt{n})$ בעזרת חיפוש בינארי אך לשם פשטות בחרתי באופציה הראשונה.
גם ניתן להשתמש באלגוריתם המוצא סתם שידוך מושלם ולאו דווקא מקסימלית כדי לשפר את זמן הריצה.

הוכחת נכונות:
נניח בשלילה כי האלגוריתם החזיר תשובה שלא ממקסמת את הערך המינימלי. כלומר קיים חלוקה אחרת שבו הערך המינימלי שלו $\bar{x}$ גדולה מהערך המינימלי של החלוקה מהאלגוריתם x
נחלק למקרים:
מקרה א
$x = maxValuation$
אם הם שווים אזי כל ההערכות בחלוקה שווים ומקסימלים, כי יש רק צלעות שגדולות או שוות למקסימום, סתירה לכך ש $x > \bar{x}$.
מקרה ב
$x < maxValuation$
אזי x הוא הערך הגדול ביותר שבו קיים זיווג מושלם על פי האלגוריתם, , סתירה לכך ש $x > \bar{x}$.

ג. השמה לקסימין אגליטרית

האלגוריתם:
נריץ את האלגוריתם מסעיף ב׳ באיטרציות:
הרץ את אלגוריתם ב׳ ושמור את הערך המינימלי מהחלוקה.
הוצא את השחקן עם הערך הזה והחדר שבחר מהגרף
והמשך כך n פעמים.
החזר את כל הערכים שהוצאנו מאלגוריתם ב׳ בתור חלוקה.

ניתוח זמן ריצה:
אלגוריתם א׳ רץ ב$O(n^3\sqrt{n})$ ואנחנו מבצעים אותו n פעמים אז קיבלנו:
$O(n^4\sqrt{n})$

הוכחת נכונות, נובע מזה שחלוקה אגליטרית ממקסמת את המינימום אז כל פעם אנחנו מקבלים את המינימום הגדול ביותר.