

"וְנָחֲלֶתֶם אֶתְּהָ אִישׁ כְּאֶזְרִי" (יחזקאל מ"ד 14)

# חלוקה הוגנת ויעילה של חפצים בדידים

אראל סגל-הלוי

# חלוקת חפצים הוגנת ויעילה

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה EF ויעילה.

האם כשהחפצים בדידים קיימת חלוקה  $EF1$  ויעילה?

כשה"עוגה" רציפה – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא ללא-קנאה ויעילה.

האם כשהחפצים בדידים – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא  $EF1$  ויעילה פארטו?

כן! התגלה ב-2016.

# מיקסום מכפלת הערכים

(Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, Wang, 2016)

**משפט:** נניח ש:

\* ההעדפות חיבוריות – ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל.

\* קיימת לפחות חלוקה אחת שבה כל שחקן מקבל ערך גדול מאפס.

אז, כל חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם יעילה-פארטו וגם EF1.

**הוכחה:** יעילות פארטו – ברורה.  
EF1 – בשקף הבא.

# מיקסום מכפלת הערכים – הוכחת EF1

**המשך:** נניח ש- $i$  מקנא ב- $j$ . נסתכל על כל החפצים בסל של  $j$ . לכל חפץ  $g$ , נבדוק את יחס הערכים:

$$V_i(g) / V_j(g)$$

נבחר את החפץ שיחס-הערכים שלו הכי גדול, ונעביר אותו מ- $j$  ל- $i$ . המכפלה בחלוקה החדשה שווה-או-קטנה מהמכפלה בחלוקה הקודמת, ולכן:

$$\begin{aligned} [V_i(X_i) + V_i(g)] * [V_j(X_j) - V_j(g)] &\leq V_i(X_i) * V_j(X_j) \\ \rightarrow V_j(X_j) * V_i(g) / V_j(g) &\leq V_i(X_i) + V_i(g) \end{aligned}$$

# מיקסום מכפלת הערכים – הוכחת EF1

$$\rightarrow V_j(X_j) * V_i(g) / V_j(g) \leq V_i(X_i) + V_i(g)$$

המשך: החפץ  $g$  נבחר כך שיחס הערכים שלו הוא הכי גדול ב- $X_j$ :

$$V_i(X_j) / V_j(X_j) \leq V_i(g) / V_j(g)$$

מציבים למעלה ומקבלים:

$$V_j(X_j) * V_i(X_j) / V_j(X_j) \leq V_i(X_i) + V_i(g)$$

$$V_i(X_j) \leq V_i(X_i) + V_i(g)$$

$$V_i(X_j) - V_i(g) \leq V_i(X_i)$$

מכאן: אם מורידים את  $g$  מהסל של  $j$ , אז  $i$  כבר לא מקנא. \*\*\*

# מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

הבנו שהחלוקה ה"אידיאלית" של חפצים בדידים היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. אבל איך מוצאים חלוקה כזאת?

א. פתרון אחד במאמר – תיכנות ליניארי.

ב. פתרון כללי יותר - חיפוש במרחב המצבים, עם כללי גיזום כמו שלמדנו, רק שבמקום לבדוק את התועלת הקטנה ביותר בכל מצב, בודקים את מכפלת התועלות בכל מצב.

# שאלה פתוחה

בעיית מיקסום מכפלת הערכים היא NP-קשה.

אבל, המטרה שלנו היא לא מיקסום מכפלת הערכים – המטרה שלנו היא חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה-עד-חפץ-1.

תיאורטית, אפשר להשיג את המטרה הזאת גם בדרכים אחרות.

האם קיים אלגוריתם פולינומיאלי המוצא חלוקה יעילה-פארטו ו-EF1?