חלוקה הוגנת בקירוב

חלוקה ללא-קנאה-מלבד-1 וגם יעילה

ראינו איך מוצאים חלוקה EF1. כזכור, כשלמדנו על חלוקת משאבים רציפים, למדנו שתמיד קיימת חלוקה EF ויעילה. האם כשהחפצים בדידים - תמיד קיימת חלוקה **EF1** ויעילה?

בחלוקת משאבים רציפים, החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא ללא-קנאה ויעילה. האם כשהחפצים בדידים – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא EF1 ויעילה פארטו?

התשובה היא כן! זה התגלה ב-2016.

משפט: נניח ש:

* ההעדפות חיבוריות – ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל.

* קיימת לפחות חלוקה אחת שבה כל שחקן מקבל ערך גדול מאפס.

אז, כל חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם יעילה-פארטו וגם EF1.

הוכחה: יעילות פארטו ברורה – כל שיפור פארטו מגדיל את המכפלה.

EF1 - נניח ש-i מקנא ב-j. נסתכל על כל החפצים בסל של j. לכל חפץ g, נבדוק את יחס הערכים:

$V_i(g)\ /\ V_j(g)$

נבחר את החפץ שיחס-הערכים שלו הכי גדול, ונעביר אותו מ-j ל-i. המכפלה בחלוקה החדשה שווה-או-קטנה מהמכפלה בחלוקה הקודמת, ולכן:

$$[V_i(X_i)+V_i(g)]*[V_j(X_j)-V_j(g)] \quad \leq \quad V_i(X_i)*V_j(X_j)$$

$$\rightarrow \quad V_j(X_j)\ *\ V_i(g)\ /\ V_j(g) \quad \leq \quad V_i(X_i)\ +\ V_i(g)$$

$$\rightarrow \quad V_j(X_j)\ *\ V_i(g)\ /\ V_j(g) \quad \leq \quad V_i(X_i)\ +\ V_i(g)$$

יחס הערכים של g הוא הכי גדול ב-X_j, ולכן:

$$V_i\ (X_j\ )\ /\ V_j\ (X_j\ ) \quad \leq \quad V_i(g)\ /\ V_j(g)$$

[הסבר מפורט על שורה זו נמצא בנספח]

מציבים למעלה ומקבלים:

$$V_i\ (X_j\ ) \quad \leq \quad V_i(X_i)\ +\ V_i(g)\ V_i\ (X_j\ )\ -\ V_i(g) \quad \leq \quad V_i(X_i)$$

מכאן: אם מורידים את g מהסל של j, אז i כבר לא מקנא.   ***

הבננו שהחלוקה ה"אידיאלית" של חפצים בדידים היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. אבל איך מוצאים חלוקה כזאת?

נסמן:

$V_{i,g}$= Value of good g to player i.

$x_{i,g}$ = quantity of good g given to player i.

אנחנו רוצים לפתור בעיית אופטימיזציה:

$$\text{Maximize} \quad \text{sum}_i \log (\text{sum}_g (x_{i,g} * V_{i,g}))$$
$$\text{such that for all } g: \quad \text{sum}_i x_{ig} = 1$$

כאשר ה- $x_{i,g}$ רציפים, זה קל. כאשר ה- $x_{i,g}$ בדידים, זה קשה!

במאמר מ-2016 (ראו "מקורות") ישנו טריק המאפשר לפתור בעיה זו בזמן סביר, כאשר כל אחד מהערכים מוגבל למספר בין 1 ל-1000. כיוון שממשק-המשתמש באתר שלהם (http://www.spliddit.org/apps/goods) ממילא מאפשר להכניס רק ערכים בין 1 ל-1000, האלגוריתם עובד על כל קלט מציאותי.

יש כאן דרך חשיבה מעניינת: אם מסתכלים על הבעיה כבעיה תיאורטית בלבד, ומנסים לפתור אותה לכל הקלטים האפשריים - זה מאד קשה. אבל אם מסתכלים עליה כבעיה מעשית, ומנסים לפתור אותה רק עבור הקלטים שבני-אדם בפועל מזינים לאלגוריתם - הבעיה נעשית פתירה!

נספח

בהוכחה למעלה השתמשנו בטענה הבאה.

טענה. נתונה קבוצת חפצים X_j. יהי g חפץ כלשהו בסל, שעבורו היחס: $V_i(g)/V_j(g)$ גדול ביותר. אז:

$$V_i(X_j) \ / \ V_j(X_j) \quad \leq \quad V_i(g)/V_j(g)$$

הוכחת הטענה:

נסמן את יחס הערכים של כל חפץ g ב r(g).

נכתוב את שני ערכי הסלים בצד שמאל כסכומים:

$$\boldsymbol{V_i(X_j)} = \text{sum}_{h \text{ in } Xj} \ V_i(h) = \textbf{sum}_{h \text{ in } Xj} \ \boldsymbol{r(h)*V_j(h)}$$
$$\boldsymbol{V_j(X_j)} = \textbf{sum}_{h \text{ in } Xj} \ \boldsymbol{V_j(h)}$$

מכאן נובע, שהמנה בצד שמאל: $V_i(X_j) \ / \ V_j(X_j)$, היא ממוצע משוקלל של הערכים r(h), כאשר המשקל של כל ערך r(h) הוא $V_j(h)$ (ממוצע משוקלל = סכום הערכים כפול המשקלים, מחולק בסכום המשקלים).

כל ממוצע משוקלל של ערכים, קטן או שווה מהערך המקסימלי. לכן:

$$V_i(X_j) \ / \ V_j(X_j) \quad \leq \quad \max_{h \text{ in } Xj} \ r(h)*V_j(h) \ = \ r(g)$$

כיוון ש-g הוגדר כחפץ שהיחס r(g) עבורו הוא מקסימלי. ***

מקורות

- Lipton, R. J.; Markakis, E.; Mossel, E.; Saberi, A. (2004). "On approximately fair allocations of indivisible goods". Proceedings of the 5th ACM conference on Electronic commerce - EC '04. p. 125. doi:10.1145/988772.988792. - אלגוריתם מעגלי הקנאה
- Caragiannis, Ioannis; Kurokawa, David; Moulin, Hervé; Procaccia, Ariel D.; Shah, Nisarg; Wang, Junxing (2016). The Unreasonable Fairness of Maximum Nash Welfare. Proceedings of the 2016

ACM Conference on Economics and Computation - EC '16. p. 305. doi:10.1145/2940716.2940726. ISBN 9781450339360. - אלגוריתם מיקסום המכפלה

סיכם: אראל סגל-הלוי.