

מטלה מספר 7 באלגוריתמים כלכליים

שם המגיש: בנימין סאלדמן

פתרון לשאלה 3

- א. נניח שכל שחקן מייחס ערך לפחות 0 לכל אפשרות באלגוריתם VCG. נתבונן באפשרות הממקסמת את סכום הערכים של כל השחקנים. לכל שחקן, הסכום של שאר השחקנים (כאשר שחקן מסוים משפיע) הוא סכום הערכים של שאר השחקנים שהם מספרים שהם לפחות 0, כלומר הסכום הוא לפחות 0. נתבונן בכל סכום אחר שממקסם את הסכום של שאר השחקנים (כאשר אותו השחקן לא משפיע). יש 2 אפשרויות – האפשרות הראשונה היא שהסכום שממקסם את הסכום (כאשר השחקן לא משתתף) קטן (או שווה) לסכום של שאר השחקנים (כאשר השחקן משפיע), אז התשלום של אותו השחקן יהיה 0. בגלל שהערך של השחקן הוא לפחות 0, נקבל שהתועלת היא לפחות 0. באפשרות השנייה אחד הסכומים שממקסמים את הערך (כאשר השחקן לא משתתף) גדול מהסכום של שאר השחקנים (כאשר אותו השחקן משפיע). נשים לב שההפרש בין שני הסכומים הללו לא יכול להיות גבוה יותר מהערך שאותו שחקן הביא לאפשרות שנבחרה. נניח שיש n שחקנים והם מביאים ערכים v_1^c, \dots, v_n^c לאפשרות הנבחרת וערכים v_1^o, \dots, v_n^o לאפשרות אחרת. נשים לב שמתקיים $\sum_i v_i^c \geq \sum_i v_i^o$. נניח כרגע שמחשבים את התשלום של השחקן הראשון, כלומר נחשב את הסכום $\sum_{i=2} v_i^o - \sum_{i=2} v_i^c$. נשים לב שמתקיים: $\sum_{i=2} v_i^o - \sum_{i=2} v_i^c = v_1^o - v_1^c + v_1^o - v_1^c + v_1^o - v_1^c + v_1^o - v_1^c \leq v_1^o - v_1^c \leq v_1^c - v_1^o \leq v_1^c$. כלומר, קיבלנו שהתשלום של השחקן הוא לכל היותר הערך שלו ולכן התועלת תהיה לפחות 0.
- ב. כדי לענות על הסעיף הזה, נשתמש באותה האבחנה של הסעיף הקודם. נניח שיש n שחקנים והם מביאים ערכים v_1^c, \dots, v_n^c לאפשרות הנבחרת וערכים v_1^o, \dots, v_n^o לאפשרות אחרת. נשים לב שמתקיים $\sum_i v_i^c \geq \sum_i v_i^o$. נניח כרגע שמחשבים את התשלום של השחקן הראשון, כלומר נחשב את הסכום $\sum_{i=2} v_i^o - \sum_{i=2} v_i^c$. נשים לב שמתקיים: $\sum_{i=2} v_i^o - \sum_{i=2} v_i^c = \sum_{i=2} v_i^o - \sum_{i=2} v_i^c - v_1^o + v_1^o - v_1^o + v_1^o \leq v_1^o - v_1^c \leq \max(v_1^c, -v_1^o)$. האי שוויון האחרון נכון בגלל שהנחנו ש- v_1^o הוא חיובי, ולכן אנחנו רק מקטינים את הביטוי. אם $-v_1^o$ הוא המקסימלי, זה אומר שהערך הוא v_1^o הוא שלילי. בגלל ש- v_1^c חיובי, נקבל שהתשלום יהיה v_1^c ולכן התועלת תהיה 0. המקרה ש- v_1^c מקסימלי גורר שהתשלום הוא לכל היותר הערך הזה ולכן גם כאן התועלת תהיה לפחות 0.
- ג. כדי להוכיח את הטענה הזאת נראה דוגמה נגדית. ניקח את הדוגמה שראינו בהרצאה ונשנה אותה מעט.

אפשרות 3	אפשרות 2	אפשרות 1	
3	-4	1	ערך של שחקן א'
1	8	2	ערך של שחקן ב'
3	5	3	ערך של שחקן ג'

נשים לב שאפשרות 2 היא עם הערך הגבוה ביותר (ערך של 9), לכן זו האפשרות שתיבחר. נתבונן בכל המקרים של הסכום ללא א' – עבור אפשרות 1 נקבל 5, עבור אפשרות 2 נקבל 13 ועבור אפשרות 3 נקבל 4. כלומר, התשלום עבור שחקן א' יהיה 0. התועלת של השחקן א' תהיה הערך שהוא נתן – העלות. הערך שהוא נתן הוא -4 והעלות היא 0, מכאן שהתועלת של השחקן א' היא -4.