

חלוקה הוגנת של

חפצים בדידים

Fair Indivisible Item  
Allocation

אראל סגל-הלוי

# חלוקה הוגנת בקירוב

מקרה פשוט:

- $m$  חפצים זהים.

- $n$  שחקנים עם זכויות שוות.

מה הן החלוקות שאפשר לקרוא להן "הוגנות בקירוב"?

- כל אחד מקבל  $m/n$  מעוגל למטה או למעלה.

- בכל חלוקה אחרת, יש חוסר-הגינות שאי-אפשר להצדיק בכך שהחפצים בדידים.

# חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

א. חפצים זהים – זכויות שונות.

ב. חפצים שונים – זכויות שוות.

ג. חפצים שונים – זכויות שונות.

# חפצים זהים – זכויות שונות

בעיית חלוקת המושבים (apportionment):

- איך לחלק את 120 המושבים בכנסת בין המפלגות, באופן יחסי למספר קולותיהן?



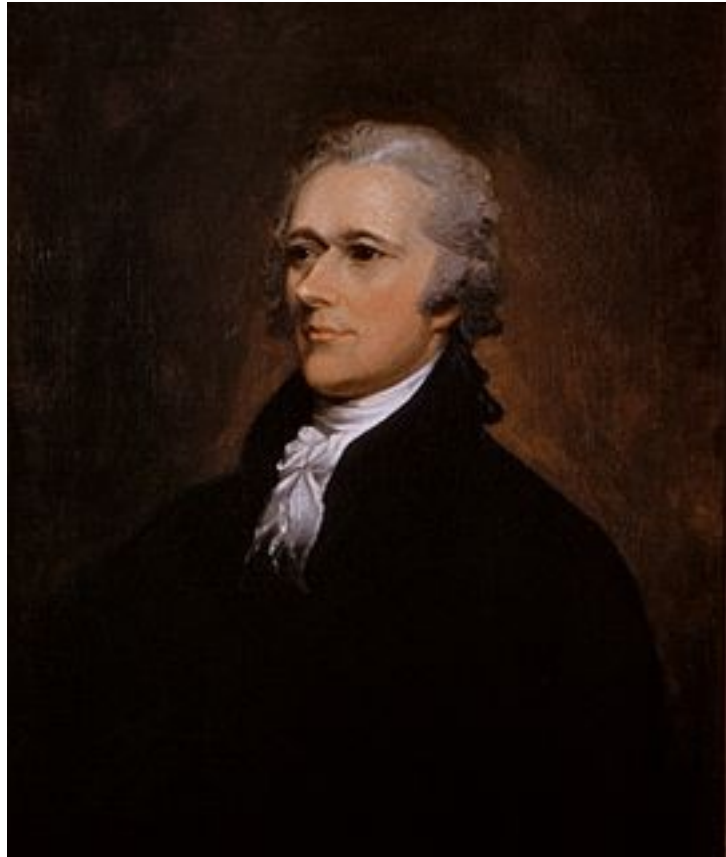
# בעיית חלוקת המושבים - דוגמה

- שתי מפלגות.
- מפלגה א:  $68.7/120$  מכלל הקולות;
- מפלגה ב:  $51.3/120$  מכלל הקולות.
- מהי חלוקה הוגנת של 120 המושבים?
- $51:69$
- מעגלים לשלם הקרוב ביותר.

# בעיית חלוקת המושבים - הכללה

- שלוש מפלגות.
- א: 69.4, ב: 30.35, ג: 20.25
- מהי חלוקה הוגנת של 120 המושבים?
- עיגול לשלם הקרוב ביותר יוצא רק 119!
- איך נכליל את העקרון "עיגול לשלם הקרוב ביותר" למספר כלשהו של מפלגות?

# אלגוריתם המילטון - Hamilton



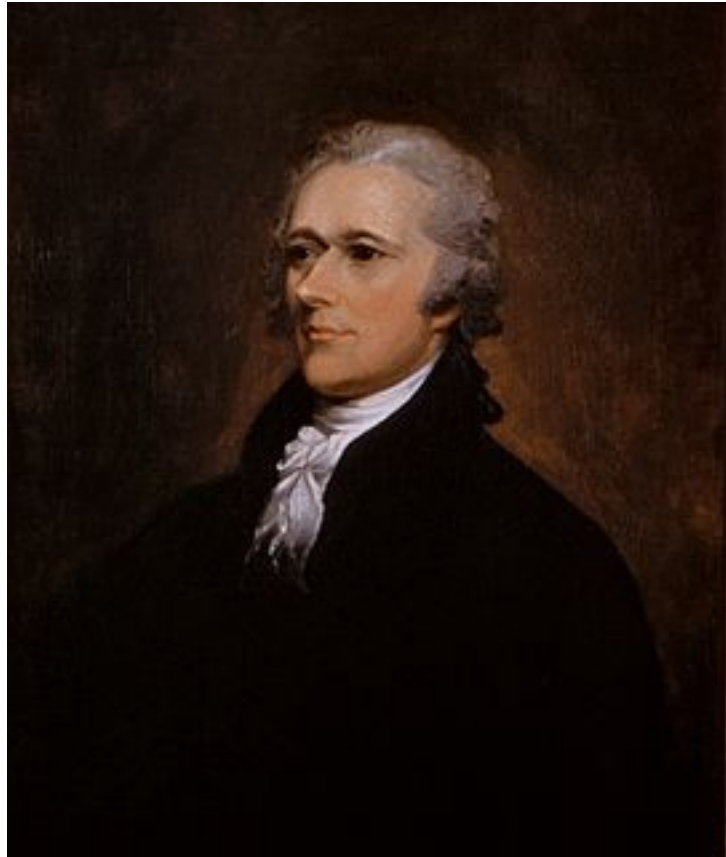
- נותנים לכל מפלגה את מספר-המושבים המדוייק שלה מעוגל כלפי מטה.
- מחלקים את המושבים העודפים לפי סדר יורד של השארית.

א: 69.4, ב: 30.35, ג: 20.25

א: 69, ב: 30, ג: 20

א: 70, ב: 30, ג: 20

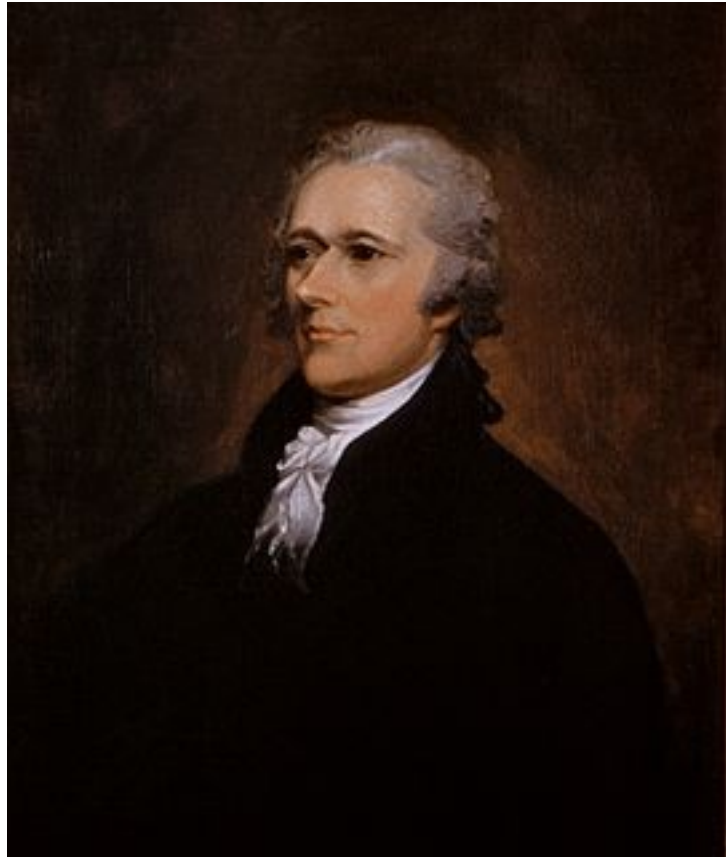
# אלגוריתם המילטון - Hamilton



- היה בשימוש בארה"ב בין 1852 ל 1900.
- היה בשימוש בישראל מהבחירות השניות עד הבחירות השביעיות.
- עדיין בשימוש ברוסיה, אוקראינה, ליטא, תוניס, נמיביה, טייוואן, הונג-קונג.
- מה הבעיה איתו?



# אלגוריתם המילטון - חוסר-עקביות



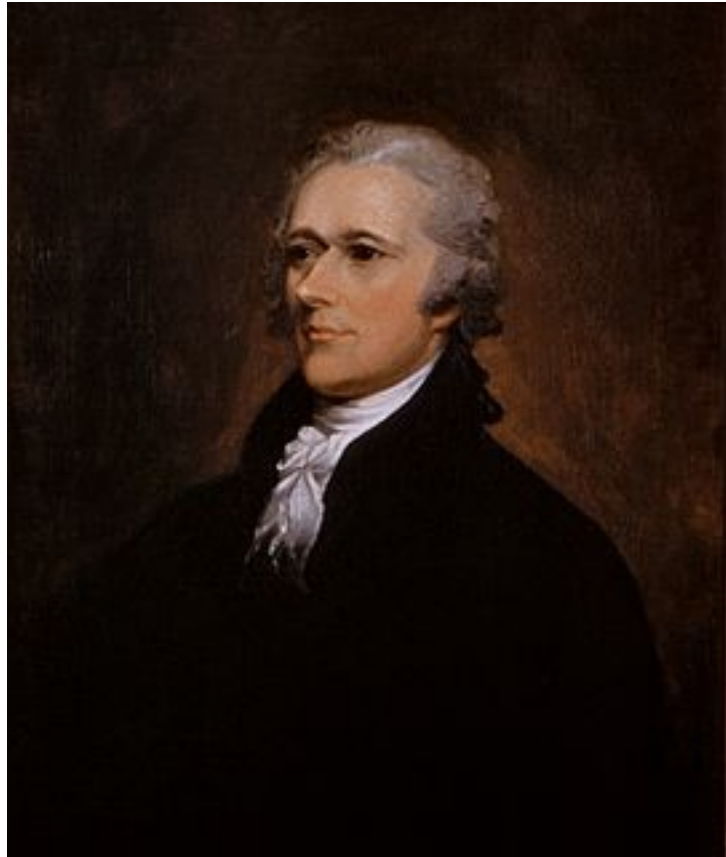
• 5 מושבים, 500 בוחרים  
• א: 40, ב: 135, ג: 325  
המילטון:

• א: 1, ב: 1, ג: 3  
מפלגות א, ב קיבלו ביחד  
175 קולות ו-2 מושבים.  
מהי חלוקה הוגנת של 2  
המושבים ביניהן?

למפלגה א מגיע 0  
למפלגה ב מגיע 2!

• א:  $0.457 = 40/175 * 2$   
• ב:  $1.543 = 135/175 * 2$

# אלגוריתם המילטון - אסטרטגיה



- 5 מושבים, 500 בוחרים
- א: 25, ב: 140, ג: 335

המילטון:

- א: 0, ב: 2, ג: 3

אם מפלגה א פורשת,

ותומכיה נשארים בבית -

- $140 \cdot 5 / 475 = 1.47$

- $335 \cdot 5 / 475 = 3.53$

- א: 0, ב: 1, ג: 4

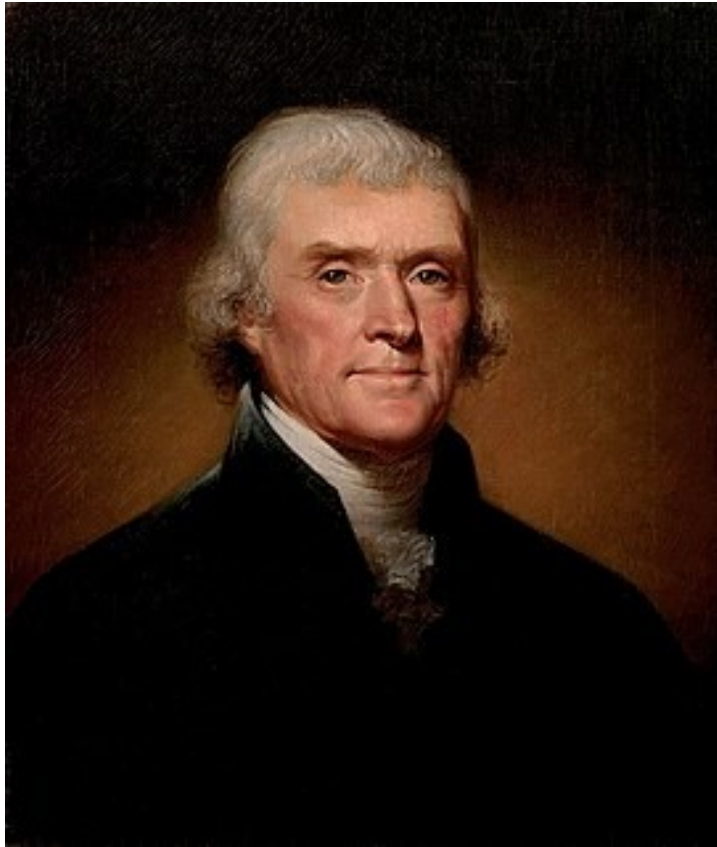
מפלגה א בלי מושבים  
השפיעה על חלוקת  
המושבים!

# עקביות

הגדרה. אלגוריתם לחלוקת-מושבים נקרא עקבי אם עבור כל תת-קבוצה  $X$  של מפלגות, שקיבלו ביחד  $n$  מושבים בחלוקה הכללית – אם נשתמש באותו אלגוריתם כדי לחלק את  $n$  המושבים בין המפלגות בקבוצה  $X$  בלבד, נקבל אותה חלוקה בדיוק כמו בחלוקה הכללית.

אלגוריתם המילטון אינו עקבי.  
האם קיים אלגוריתם חלוקת-מושבים עקבי?

# אלגוריתם ג'פרסון - Jefferson



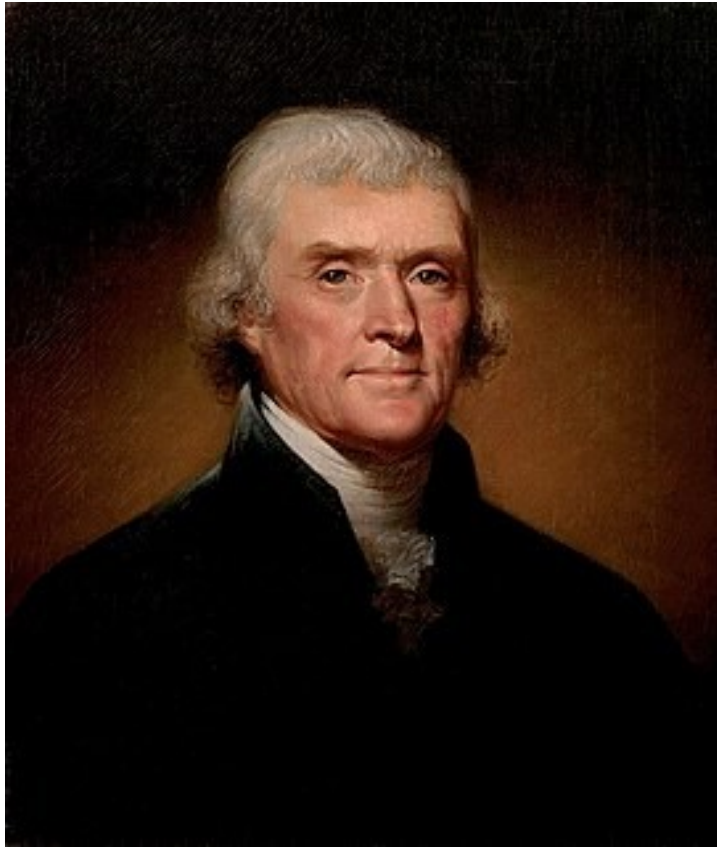
- אתחול: כל מפלגה מקבלת 0
- כל עוד יש מושבים:
- מחשבים, לכל מפלגה:  
(מספר קולות)

-----  
(מספר מושבים נוכחי + 1)

- נותנים את המושב הבא  
למפלגה שהמנה שלה  
גדולה ביותר.

# אלגוריתם ג'פרסון - דוגמה

5 מושבים, 500 בוחרים. א: 40, ב: 135, ג: 325.



• חלוקה: 0 0 0

• מנות: 325, 135, 40

• חלוקה: 1 0 0

• מנות: 162.5, 135, 40

• חלוקה: 2 0 0

• מנות: 108.33, 135, 40

• חלוקה: 2 1 0

• מנות: 108.33, 67.5, 40

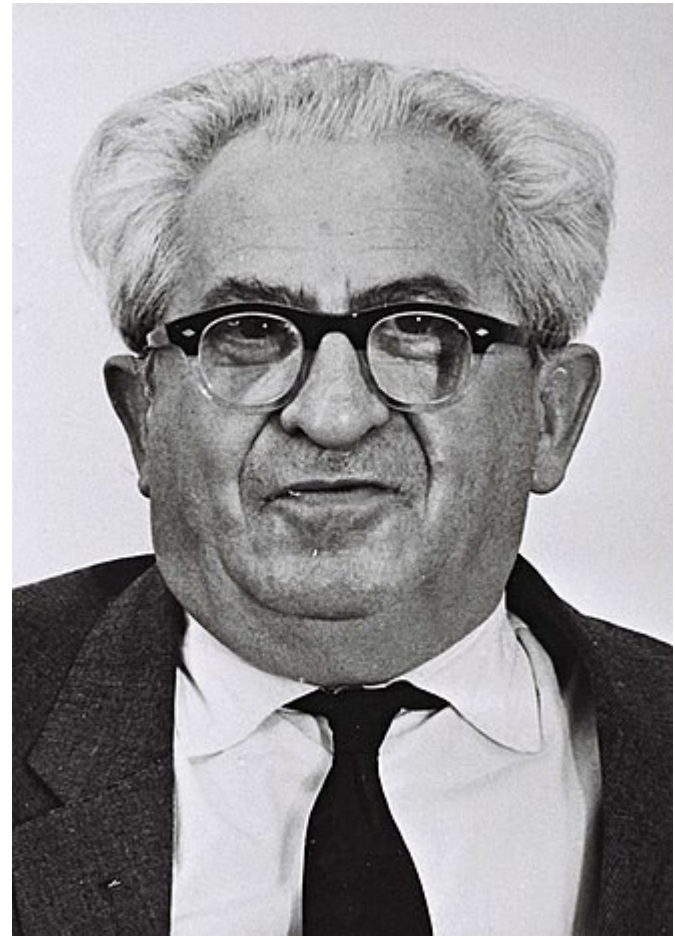
• חלוקה: 3 1 0

• מנות: 80.25, 67.5, 40

• חלוקה: 4 1 0

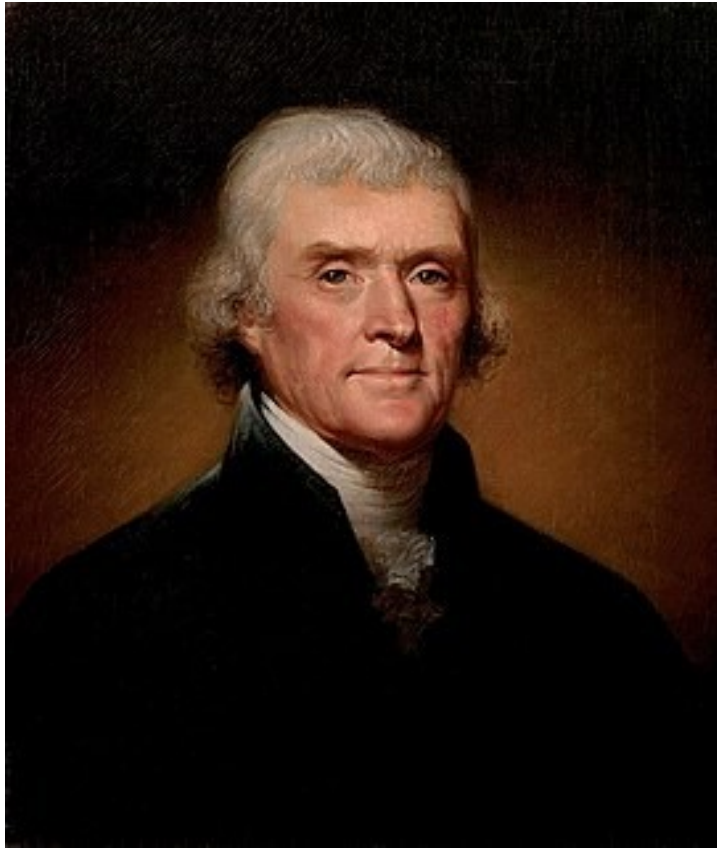
# אלגוריתם ג'פרסון = חוק בדד-עופר

- בשימוש בישראל החל מהכנסת השמינית –  
**חוק בדד-עופר - ועד היום.**
- בשימוש בעוד עשרות מדינות בעולם.





# אלגוריתם ג'פרסון - עקביות



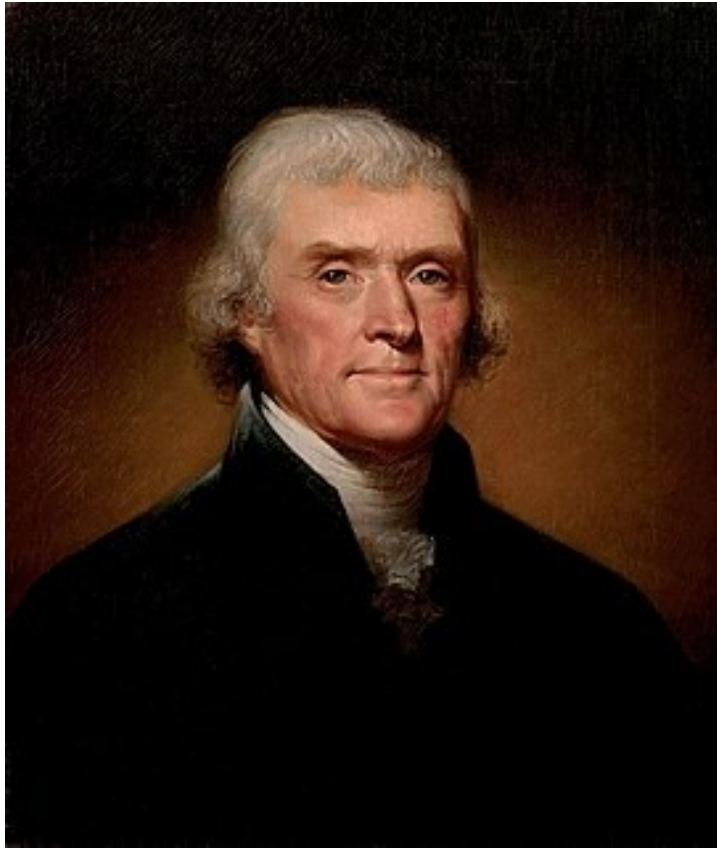
גגאבגבבאגבאא

אב בבאא באא

- **משפט.** אלגוריתם ג'פרסון עקבי.
- **הוכחה.** נסתכל על סדרת המפלגות המקבלות מושבים. נניח שמוחקים מהסדרה חלק מהמפלגות, עם המושבים שקיבלו. סדר חלוקת המושבים למפלגות הנותרות נשאר זהה – עדיין, המפלגה המקבלת את המושב הבא היא המפלגה שהמנה (מספר קולות) / (מספר מושבים נוכחי + 1) שלה היא הגדולה ביותר. \*\*\*

# אלגוריתם ג'פרסון - הוגנות

5 מושבים, 500 בוחרים. א: 160, ב: 340.



- המספר המדויק: 1.6 3.4
- עיגלנו הפוך מהכיוון הנכון!
- נראה לא הוגן.

- חלוקה: 0 0
- מנות: 160, 340
- חלוקה: 0 1
- מנות: 160, 170
- חלוקה: 0 2
- מנות: 160, 113
- חלוקה: 1 2
- מנות: 80, 113
- חלוקה: 1 3
- מנות: 80, 85
- חלוקה: 1 4



# עקביות והוגנות

האם קיים אלגוריתם שהוא גם  
וגם הוגן (= מעגל לכיוון הנכון)  
עבור לכל זוג של מפלגות?

# שיטות מחלק – divisor methods

נכליל את שיטת ג'פרסון באופן הבא:

- אתחול: כל מפלגה מקבלת 0
- כל עוד יש מושבים:
- מחשבים, לכל מפלגה:  
(מספר קולות)

נבחר פונקציה  
כלשהי  $f$ ,  
המייחסת לכל  
מספר שלם  $s$ ,  
מספר ממשי  
כלשהו בתחום  
 $[s, s+1]$ .

-----  
(מספר מושבים נוכחי)  $f$

- נותנים את המושב הבא  
למפלגה שהמנה שלה  
גדולה ביותר.

$$f(s) = s + 1$$

שיטת ג'פרסון = שיטת-מחלק עם

# שיטות מחלק - עקביות

• **משפט.** לכל פונקציה  $f$ , שיטת-המחלק עם פונקציה  $f$  היא עקבית.

• **הוכחה** (בדיוק כמו שיטת ג'פרסון). נסתכל על סדרת המפלגות המקבלות מושבים. נניח שמוחקים מהסדרה חלק מהמפלגות, עם המושבים שקיבלו. סדר חלוקת המושבים למפלגות הנותרות נשאר זהה. \*\*\*

# שיטות-מחלק - דוגמאות

• שיטת אדאמס –  $f(s)=s$

• שיטת דין –  $f(s)=2/(1/s+1/(s+1))$

• שיטת הנטינגטון-היל –  $f(s)=\text{sqrt}(s*(s+1))$

• שיטת וובסטר –  $f(s)=s+0.5$

• שיטת ג'פרסון –  $f(s)=s+1$

• במה לבחור?!

• לצורך הדיון נתמקד בשיטות הפשוטות יותר:

אדאמס, וובסטר, ג'פרסון. --<

# שיטות-מחלק - הטיות

3 מושבים, 300 בוחרים. א: 210, ב: 50, ג: 40

• שיטת אדאמס: 1 1 1

• שיטת וובסטר: 0 1 2

• שיטת ג'פרסון: 0 0 3

זה לא במקרה <--

# שיטות-מחלק - הטיות

**משפט.** לכל  $y$ , בשיטת-מחלק עם פונקציה

$f(s)=s+y$ , כשמחלקים  $a+b+1$  מושבים לשתי

מפלגות, אם מספר המושבים המדויק המגיע

למפלגה א הוא  $a$  + שארית, ולמפלגה ב הוא  $b$  +

שארית, אז מפלגה א תקבל את המושב הנוסף (ה-

$a+1$ ) אם ורק אם השארית של מפלגה א גדולה מ:

$$0.5 - (a-b)*(y-0.5)/(a+b+2y)$$

**דוגמה.**

• א קיבלה  $1+ש$  שארית; ב קיבלה  $3+ש$  שארית.

•  $y=0.2$ : הסף הוא  $\sim 0.4$ . כלומר מפלגה א תקבל 2

מושבים אם"ם היא תקבל מעל 1.4. טוב ל-א.

•  $y=0.8$ : הסף הוא  $\sim 0.6$ . כלומר מפלגה א תקבל 2

מושבים אם"ם היא תקבל מעל 1.6. טוב ל-ב.

# שיטות-מחלק - הטיות

**משפט.** לכל  $y$ , בשיטת-מחלק עם פונקציה  $f(s)=s+y$ , כשמחלקים  $a+b+1$  מושבים לשתי מפלגות, אם מספר המושבים המדויק המגיע למפלגה א הוא  $a$  + שארית, ולמפלגה ב הוא  $b$  + שארית, אז מפלגה א תקבל את המושב הנוסף (ה-  $a+1$ ) אם ורק אם השארית של מפלגה א גדולה מ:

$$0.5 - (a-b) \cdot (y-0.5) / (a+b+2y)$$

## הכללה.

- אם  $y < 0.5$ , הסף  $0.5 >$  עבור המפלגה הקטנה – הטיה לטובת המפלגה הקטנה.
- אם  $y > 0.5$ , הסף  $0.5 >$  עבור המפלגה הגדולה – הטיה לטובת המפלגה הגדולה.
- אם  $y = 0.5$ , הסף הוא תמיד  $0.5$  – תמיד מעגלים לשלם הקרוב ביותר!

# שיטות-מחלק - הטיות

הוכחת המשפט. נסמן:

- מפלגה א במדויק:  $a+x$  מושבים ( $a$  שלם,  $x$  שבר).
- מפלגה ב במדויק:  $b+1-x$  מושבים.

כיוון א: נניח ש:

$$x > 0.5 - (a-b)*(y-0.5)/(a+b+2y)$$

כל עוד למפלגה א יש  $a$  מושבים או פחות, המנה שלה היא לפחות:

$$(a+x)/(a+y) > (a+b+1)/(a+b+2y)$$

בשלב כלשהו מפלגה ב תגיע ל- $b$  מושבים, ואז המנה שלה תהיה:

$$(b+1-x)/(b+y) < (a+b+1)/(a+b+2y)$$

המנה של א גדולה יותר, ולכן היא תקבל את

המושב ה- $a+1$ . הוכחת הכיוון השני דומה. \*\*\*



# שיטות-מחלק - הטיות

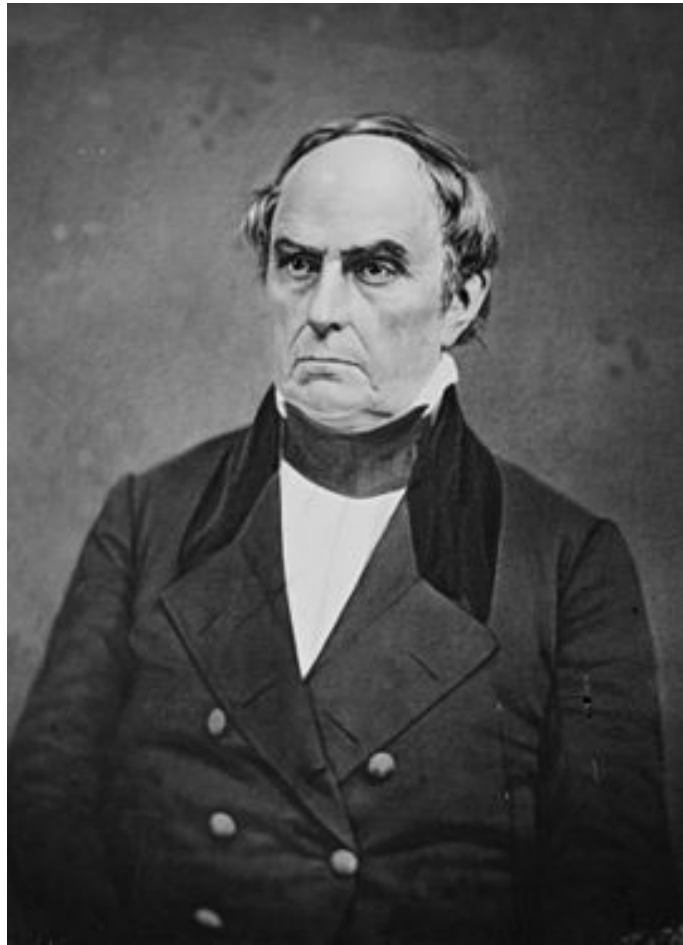
בשיטת מחלק עם  $f(s)=s+y$

- אם  $y < 0.5$ , יש הטיה לטובת המפלגה הקטנה.
- אם  $y > 0.5$ , יש הטיה לטובת המפלגה הגדולה.
- אם  $y = 0.5$ , אין הטיה לאף צד.



מכאן קל להבין  
מדוע ברוב  
המדינות  
משתמשים  
בשיטת ג'פרסון..

# שיטת וובסטר



• **מסקנה. בשיטת וובסטר (=**  
**שיטת המחלק עם  $s+0.5$ ),**  
**בחלוקת-המושבים בין כל שתי**  
**מפלגות, כל מפלגה מקבלת**  
**את החלק היחסי שלה מעוגל**  
**לשלם הקרוב ביותר – ללא כל**  
**הטיה לטובת מפלגות גדולות**  
**או קטנות.**

# שיטת וובסטר

- **משפט.** שיטת וובסטר היא השיטה היחידה לחלוקת מושבים, שהיא גם עקבית וגם הוגנת (= מעגלת לכיוון הנכון) עבור כל זוג מפלגות.
- **הוכחה.** נניח בשלילה שקיימת שיטת חלוקת-מושבים כלשהי, שהיא עקבית והוגנת, אבל שונה משיטת וובסטר.
- נניח שההבדל בין השיטות מתגלה עבור מספר מושבים מסויים  $h$  וקטור-הצבעות כלשהו  $v$ , כאשר שיטת וובסטר מחזירה וקטור חלוקת-מושבים כלשהו  $x$ , והשיטה האחרת מחזירה וקטור אחר כלשהו  $z$ .
- סכום רכיבי שני הוקטורים שווה  $h$ , לכן הוקטורים נבדלים בשני מקומות לפחות; יש לפחות שתי מפלגות  $a$ ,  $i$ , שעבורן  $x_i < z_i$  אבל  $x_k > z_k$  (שיטת וובסטר נותנת יותר מושבים למפלגה  $k$  והשיטה האחרת נותנת יותר למפלגה  $i$ ).

# שיטת וובסטר

הוכחה [המשך].

• כיוון ששיטת וובסטר היא עקבית והוגנת, מתקיים (כאשר "round" מציין עיגול לשלם הקרוב ביותר):

$$x_i = \text{round}((x_i + x_k) * v_i / (v_i + v_k))$$

$$x_k = \text{round}((x_i + x_k) * v_k / (v_i + v_k))$$

הדבר נכון, לפי הנחתנו, גם לשיטה האחרת, ולכן:

$$z_i = \text{round}((z_i + z_k) * v_i / (v_i + v_k))$$

$$z_k = \text{round}((z_i + z_k) * v_k / (v_i + v_k))$$

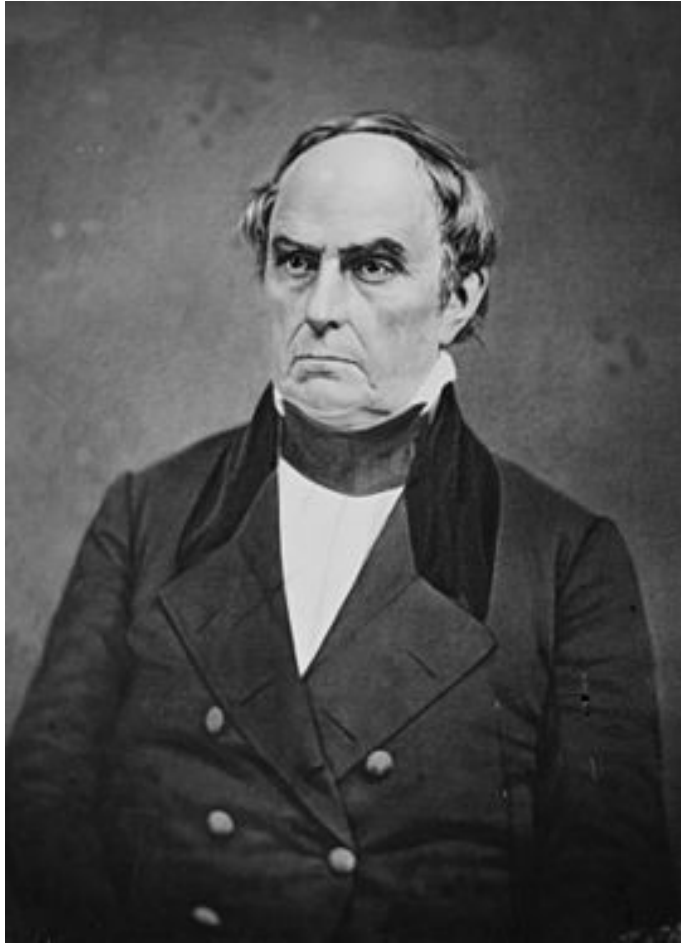
כיוון ש-  $x_i < z_i$ , ופונקציית העיגול round היא

$$z_i + z_k > x_i + x_k \text{ בהכרח.}$$

מצד שני, כיוון ש-  $x_k > z_k$ , בהכרח  $z_i + z_k < x_i + x_k$ .

הגענו לסתירה. \*\*\*

# שיטת וובסטר



• שיטת וובסטר בשימוש כיום ב:  
שוודיה, נורווגיה, ניו-זילנד, בוסניה  
והרצגובינה, קוסובו, לטביה,  
עיראק.

• בקרוב אצלנו?