

"וְנִזְכָּרְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאֻזְיוֹ" (יחזקאל מז' 14)

תקצוב משתף הוגן – אלגוריתמים בדידים אראל סגל-הלוי

איפה הכסף?

מקרה פרטי – בחירת וועדה

- צריך לבחור וועדה בגודל k קבוע מראש.
- כמו תקצוב משתף בדיד, עם תקציב k , ועלות 1 לכל פריט.
- שיטות מקובלות:
- בחירות אישיות – יש קשר אישי, אין ייצוג הוגן.
- בחירות מפלגתיות – יש ייצוג הוגן, אין קשר אישי.
- אנחנו רוצים לשלב את היתרונות של שני השיטות:
- כל אזרח יצביע למועמד אחד או יותר באופן אישי;
- האלגוריתם יבטיח ייצוג הוגן.
- מה זה ייצוג הוגן?

ייצוג הוגן לקבוצות אחידות

- גודל הוועדה = k .
- מספר האזרחים = n .
- **המיכסה (quota)** = n/k = מספר האזרחים שמגיע להם להחליט לגבי מושב אחד.
- **קבוצה L-אחידה** = קבוצת אזרחים בגודל לפחות L מיכסות, הבוחרים ביחד קבוצה זהה של L מועמדים.
 - כמו הצבעה למפלגה.
- **ייצוג הוגן לקבוצות אחידות** = לכל קבוצה L-אחידה, הוועדה כוללת לפחות L מועמדים שחברי הקבוצה תומכים בהם.

ייצוג הוגן לקבוצות אחדות – תנאי הכרחי אבל לא מספיק

- דוגמה: $k=4$, $n=1200$, $n/k=300$.
- 700 תומכים במועמדים א, ב, ג, ד.
- 200 תומכים במועמדים ה, ו.
- 200 תומכים במועמדים ה, ז.
- 100 תומכים במועמדים ה, ח.
- הוועדה הנבחרת: א, ב, ט, י.
- הוועדה מקיימת ייצוג הוגן לקבוצות אחדות.
- אבל ל-500 אזרחים התומכים במועמד ה אין כל ייצוג, כי הם לא קבוצה אחידה.

ייצוג הוגן לקבוצות לא אחידות

קבוצה L-מגובשת = קבוצת אזרחים בגודל לפחות L מיכסות, התומכים בקבוצה כלשהי של L מועמדים.

ייצוג הוגן חזק (Strong Justified Representation) =
לכל קבוצה L-מגובשת, הוועדה כוללת לפחות L מועמדים שכל חברי הקבוצה תומכים בהם.

ייצוג הוגן חזק לא תמיד אפשרי ☹️.

- **דוגמה:** $n=12$, $k=3$, $n/k=4$.
- ההצבעות: אב, ב, ב, בג, ג, ג, ג, ג, ג, ד, ד, ד, דא, א, א, א.
- יש ארבע קבוצות 1-מגובשות
(אב,ב,ב,בג; בג,ג,ג,ג,ג,גד; גד,ד,ד,ד,דא; דא,א,א,א,א,אב).
- ייצוג הוגן חזק מחייב לבחור ב,ג,ד,א – אבל $k=3$.

ייצוג הוגן מורחב

ייצוג הוגן מורחב

= (EJR ,Extended Justified Representation)

לכל קבוצה L-מגובשת, הוועדה כוללת לפחות L מועמדים **ש אחד** מחברי הקבוצה תומך בהם.

• לפחות אחד מחברי הקבוצה לא יצטרף לפרישה.

• ייצוג הוגן חזק ← ייצוג הוגן מורחב ← ייצוג הוגן לקבוצות אחידות.

ייצוג הוגן מורחב תמיד אפשרי! ←

שיטת החלקים השווים –

Method of Equal Shares

Dominik Peters, Piotr Skowron, 2020

0. תן לכל אזרח "תקציב" וירטואלי בגודל k/n .

קבע את העלות של כל מועמד ל-1.

1. אם יש לפחות מועמד אחד, שתומכיו יכולים לשלם את העלות שלו - בחר מועמד כזה, שהעלות לכל תומך שלו תהיה נמוכה ביותר, וחזור ל-1.

2. אחרת, סיים את האלגוריתם; אם חסרים חברים בוועדה, הוסף חברים באופן שרירותי.

שיטת החלקים השווים – דוגמה

- $n=100, k=5$. מתוכם 51 בוחרים א,ב,ג,ד,ה; 49 בוחרים צ,ק,ר,ש,ת.
- התקציב ההתחלתי לאזרח $= 5/100$.
- לשם נוחות נכפיל ב-100: תקציב התחלתי לאזרח $=5$, והעלות של מועמד $=100$.
- סיבוב 1: למועמדים א,ב,ג,ד,ה, דרוש $1.96 \sim 100/51$ לכל תומך; למועמדים צ,ק,ר,ש,ת, רק $2.04 \sim 100/49$ לכל תומך. לכן נבחר מועמד כלשהו מבין א,ב,ג,ד,ה, למשל **מועמד א**.
- כל אחד מ-51 התומכים של מועמד א משלם 1.96, ונשאר עם 3.04.
- סיבוב 2: החישוב דומה, נבחר מועמד נוסף מבין א,ב,ג,ד,ה, למשל **מועמד ב**.
- כל אחד מ-51 התומכים של מועמד א משלם 1.96, ונשאר עם 1.08.
- סיבוב 3: התקציב הכולל של תומכי ג,ד,ה הוא רק 55.08, ולכן אף אחד מהם לא נבחר.
- נבחר אחד מהמועמדים צ,ק,ר,ש,ת, נניח **מועמד צ**.
- כל אחד מ-49 התומכים של מועמד צ משלם 2.04 ונשאר עם 2.96.
- סיבוב 4: נבחר אחד מהמועמדים ק,ר,ש,ת, נניח **מועמד ק**.
- כל אחד מ-49 התומכים של מועמד ק משלם 2.04 ונשאר עם 0.92.
- סיבוב 5: אף מועמד לא יכול להשיג מימון.
- מוסיפים עוד מועמד שרירותית כדי להשלים ל-5, ומסיימים את האלגוריתם.
- **מתקיים ייצוג הוגן חזק: יש שתי קבוצות 2-מגובשות, וכל אחת מהן קיבלה 2 מועמדים.**

שיטת החלקים השוים – ייצוג הוגן לקבוצות אחידות

משפט (חימום): שיטת החלקים השוים בוחרת וועדה המקיימת ייצוג הוגן לקבוצות אחידות.

הוכחה:

- התקציב ההתחלתי של כל אזרח הוא k/n .
- לכן התקציב ההתחלתי של כל קבוצה L-אחידה הוא L.
- כיוון שהקבוצה אחידה, חברי הקבוצה מממנים רק מועמדים שכל הקבוצה תומכת בהם.
- התקציב שלהם מספיק כדי לממן לפחות L מועמדים.

שיטת החלקים השווים – ייצוג הוגן מורחב

משפט: שיטת החלקים השווים מבטיחה ייצוג הוגן מורחב.

הוכחה: נניח בשלילה שהתנאי אינו מתקיים לגבי קבוצה L -מגובשת כלשהי - "קבוצת המקופחים". כל מקופח תומך לכל היותר ב- $L-1$ מועמדים שנבחרו לוועדה.

כיוון שקבוצת המקופחים היא L -מגובשת, ישנם L מועמדים, שכל המקופחים תומכים בהם. לכן יש מועמד אחד לפחות, נניח מועמד א, שכל המקופחים תומכים בו, ולא נבחר לוועדה.

יש לפחות Ln/k מקופחים ($L =$ מיכסות), לכן מועמד א דורש לכל היותר k/nL לאזרח. האלגוריתם בוחר מועמד שהתשלום עבורו לכל אזרח הוא הנמוך ביותר. לכן, העלות של כל מועמד שנבחר עד כה היא לכל היותר k/nL לאזרח.

כל מקופח שילם לכל היותר k/nL , ונשאר לו לפחות $k/nL - (L-1) * k/nL = k/n$. לכן המקופחים יכולים לממן את מועמד א. מכאן: האלגוריתם עדיין לא הסתיים. ***

שיטת החלקים השווים – מונוטוניות

- שיטת החלקים השווים דורשת לדעת מראש את גודל הוועדה k .

- לפעמים רוצים לאפשר לוועדה לגדול באופן דינאמי.

- דוגמה: בחירות מקדימות למפלגה. לא יודעים מראש כמה מועמדים ייבחרו; רוצים, שכל מספר של נבחרים, יבטיחו ייצוג הוגן למתפקדים.

הגדרה: אלגוריתם לבחירת וועדה הוא **מונוטוני בגודל הוועדה** אם לכל k , הוועדה הנבחרת כשהגודל הוא $k+1$ מכילה את הוועדה הנבחרת כשהגודל הוא k .

- שיטת החלקים השווים לא מונוטונית בגודל הוועדה.

שיטת פראגמן - Phragmen

Lars Edvard Phragmen, 1893

0. תן לכל אזרח "תקציב" וירטואלי התחלתי 0.
- קבע את העלות של כל מועמד ל-1.
1. הוסף לכל אזרח תקציב בקצב קבוע, עד שיש מועמד אחד, שהתומכים שלו יכולים לממן אותו.
2. ברגע שיש מועמד כזה, בחר אותו, והורד את היתרה של כל התומכים שלו לאפס.
3. אם נבחרו כבר k מועמדים - סיים את האלגוריתם. אחרת – חזור לצעד 1.

שיטת פראגמן – דוגמה

$n=100, k=5$. מתוכם 51 בוחרים א,ב,ג,ד,ה; 49 בוחרים צ,ק,ר,ש,ת.

- התקציב ההתחלתי לאזרח = 0. לשם נוחות, העלות של מועמד = 100.
- נותנים לכולם כסף וירטואלי בהדרגה, עד שלכולם יש 1.96.
- 51 האזרחים הראשונים יכולים לממן מועמד, כי $51 \cdot 1.96 = 100$. נניח שהם מממנים את **א**.
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0, 49 אזרחים עם יתרה 1.96.
- ממשיכים לתת כסף וירטואלי בהדרגה, עד שמוסיפים עוד 0.08.
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0.08, 49 אזרחים עם יתרה 2.04.
- 49 האזרחים עם יתרה 2.04 יכולים לממן מועמד, כי $49 \cdot 2.04 = 100$. נניח שבוחרים את **צ**.
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0.08; 49 אזרחים עם יתרה 0.
- אחרי הוספה של עוד 1.88, יש 51 אזרחים עם יתרה 1.96, היכולים לממן מועמד, נניח **ב**.
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0; 49 אזרחים עם יתרה 1.88.
- אחרי הוספה של עוד 0.16, יש 49 אזרחים עם יתרה 2.04, היכולים לממן מועמד, נניח **ק**.
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0.16; 49 אזרחים עם יתרה 0.
- אחרי הוספה של עוד 1.8, יש 51 אזרחים עם יתרה 1.96, היכולים לממן מועמד, נניח **ג**.
- המצב הנוכחי הוא: 51 אזרחים עם יתרה 0; 49 אזרחים עם יתרה 1.8. **האלגוריתם מסתיים**.

שיטת פראגמן – מונוטוניות

משפט: שיטת פראגמן היא מונוטונית בגודל הוועדה.

הוכחה: נובע ישירות מהגדרת האלגוריתם.

האלגוריתם לא משתמש כלל בגודל הוועדה, עד לשלב הסופי שבו הוא מחליט אם לעצור או להמשיך.

כשהוועדה גדלה, האלגוריתם פשוט ממשיך מאותה נקודה, ומחלק כסף וירטואלי לאזרחים עד שחלק מהם צוברים מספיק כסף כדי לממן מועמד נוסף. ***

שיטת פראגמן – ייצוג הוגן מורחב

משפט: שיטת פראגמן לא מבטיחה ייצוג הוגן מורחב.

הוכחה: דוגמה נגדית. $k=12$. יש 14 מועמדים: א, ב, ג, ..., ג₁₂.

יש 24 אזרחים עם ההעדפות הבאות:

- שניים מצביעים א, ב, ג₁;
- שניים מצביעים א, ב, ג₂;
- שישה מצביעים ג₁, ג₂, ..., ג₁₂;
- חמישה מצביעים ג₂, ג₃, ..., ג₁₂;
- תשעה מצביעים ג₃, ג₄, ..., ג₁₂.

שיטת פראגמן בוחרת לוועדה את ג₁, ..., ג₁₂ (חישוב ארוך..)

התוצאה מפרה את תנאי ייצוג הוגן מורחב עבור ארבעת האזרחים הראשונים, שהם קבוצה הזו 2-מגובשת עם רק נציג 1 לכל אחד.

ייצוג הוגן יחסי

ייצוג הוגן יחסי

= (PJR ,Proportional Justified Representation)

לכל קבוצה L-מגובשת, הוועדה כוללת לפחות L מועמדים, שכל אחד מהם נתמך ע"י חבר כלשהו מהקבוצה.

• ייצוג הוגן חזק ← ייצוג הוגן מורחב ← ייצוג הוגן יחסי ← ייצוג הוגן לקבוצות אחידות.

שיטת פראגמן – ייצוג הוגן יחסי

משפט: שיטת פראגמן בוחרת וועדה המקיימת ייצוג הוגן יחסי.

הוכחה: נניח בשלילה שהתנאי אינו מתקיים לגבי קבוצה L -מגובשת כלשהי - "קבוצת המקופחים". יש לכל היותר $L-1$ נבחרים, שנמתכים ע"י מקופח כלשהו.

אולם יש L מועמדים, שכל המקופחים תומכים בהם. לכן יש לפחות מועמד אחד, שכל המקופחים תומכים בו, ולא נבחר לוועדה.

בשיטת פראגמן, כל האזרחים יחד מקבלים לפחות k , ולכן כל אזרח מקבל לפחות k/n . יש לפחות Ln/k מקופחים ($L =$ מיכסות), ולכן כולם יחד מקבלים לפחות L .

המקופחים השתתפו במימון $L-1$ מועמדים לכל היותר, ולכן נשאר להם ביחד לפחות 1. לכן הם יכולים לממן מועמד נוסף. ***

בחירת ועדה - סיכום

מונוטוניות	הוגנות	
לא	חזקה - EJR	שיטת החלקים השווים
כן	חלשה - PJR	שיטת פראגמן

שאלה פתוחה: האם קיים אלגוריתם מונוטוני בגודל הוועדה, המבטיח ייצוג הוגן מורחב (EJR)?

מבחירת ועדה לחלוקת תקציב

נכליל את שיטת החלקים השווים ושיטת פראגמן:

- במקום המועמדים, יהיו הפריטים האפשריים בתקציב;
- במקום עלות של 1 לכל מועמד, תהיה העלות האמיתית של כל פריט בשקלים.
- בשיטת החלקים השווים, התקציב הוירטואלי ההתחלתי של כל אזרח יהיה B/n , כאשר $B =$ התקציב הכולל.

שיטת החלקים השווים לתקצוב משתף כבר מיושמת בעולם.

בקרוב אצלנו?

מבחירת ועדה לחלוקת תקציב

נכליל את שיטת החלקים השווים ושיטת פראגמן:

- במקום המועמדים, יהיו הפריטים האפשריים בתקציב;
- במקום עלות של 1 לכל מועמד, תהיה העלות האמיתית של כל פריט בשקלים.
- בשיטת החלקים השווים, התקציב הוירטואלי ההתחלתי של כל אזרח יהיה B/n , כאשר $B =$ התקציב הכולל.

ייצוג הוגן בחלוקת תקציב

קבוצה T-מגובשת = קבוצת אזרחים התומכת בכל הפריטים בקבוצה T, ומספר חברי הקבוצה הוא לפחות $n/B \cdot \text{cost}(T)$.

ייצוג הוגן מורחב בחלוקת תקציב = לכל תת-קבוצה T של פריטים, ולכל קבוצה T-מגובשת, יש לפחות חבר אחד בקבוצה שתומך בלפחות $|T|$ פריטים שנכנסו לתקציב.

משפט: שיטת החלקים השוים לחלוקת תקציב מבטיחה ייצוג הוגן מורחב.

שיטת החלקים השוים לתקצוב משתף כבר מיושמת בעולם.

בקרוב אצלנו?