

מטלה מספר 10 באלגוריתמים כלכליים

שם המגיש: בנימין סאלדמן.

שאלה 2

- א. נוכיח שאם יש 2 נושאים אז האלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו. נניח שיש לנו $n \geq 2$ שחקנים עם תקציבים $p_{i,1}, p_{i,2}$ כאשר $p_{i,1} + p_{i,2} = C$ (זה התקציב הכולל). החלוקה שנקבל תהיה $d = [\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,1}}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,2}}{n}]$. נשים לב שהתועלת של שחקן i היא $u_i(d) = -\left|\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,1}}{n} - p_{i,1}\right| - \left|\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,2}}{n} - p_{i,2}\right|$. נניח בשלילה שיש שיפור פארטו $P = [p_1, p_2]$ לפי הגדרה, קיים שחקן j עבורו מתקיים: $u_j(P) = -|p_1 - p_{j,1}| - |p_2 - p_{j,2}| > u_j(d) = -\left|\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,1}}{n} - p_{j,1}\right| - \left|\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,2}}{n} - p_{j,2}\right|$. נזכר שמתקיים $p_1 + p_2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,1}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,2}}{n} = C$. בגלל שזה שיפור פארטו אז בהכרח מתקיים שאנחנו מגדילים את אחד ההמוצעים ומקטינים את השני, כלומר בלי הגבלת הכלליות: $p_1 > p_2$. בגלל זה, קיים שחקן k עבורו $u_k(P) = -|p_1 - p_{k,1}| - |p_2 - p_{k,2}| < u_k(d) = -\left|\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,1}}{n} - p_{k,1}\right| - \left|\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,2}}{n} - p_{k,2}\right|$ (אם לא היה קיים כזה שחקן היינו מקבלים סתירה על הסכום $p_1 + p_2$). מכאן נובע שהחלוקה P היא לא שיפור פארטו של החלוקה d (בגלל שעבור השחקן k התועלת קטנה) ונקבל סתירה. כלומר, החלוקה d יעילה פארטו.
- ב. כדי להוכיח שעבור 3 נושאים האלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא לא יעיל פארטו נראה דוגמה נגדית. נניח שיש 3 שחקנים ו-3 נושאים עם ההעדפות הבאות:

0	0	100
50	50	0
50	0	50

- החלוקה שהאלגוריתם יחזיר תהיה $d = [\frac{100}{3}, \frac{50}{3}, 50]$. התועלות של השחקנים הן:
- $$u_1(d) = -\frac{100}{3} - \frac{50}{3} - 50 = -100, u_2(d) = -\left(50 - \frac{100}{3}\right) - \left(50 - \frac{50}{3}\right) - 50 = -100, u_3(d) = -\left(50 - \frac{100}{3}\right) - \frac{50}{3} = -\frac{100}{3}$$
- נתבונן בחלוקה $p = [50, 0, 50]$. מתקיים:
- $$u_1(p) = -50 - (100 - 50) = -100, u_2(p) = -50 - 50 = -100, u_3(p) = -(50 - 50) - (50 - 50) = 0$$
- כלומר החלוקה p היא שיפור פארטו של d ולכן נקבל שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא לא יעיל פארטו כי קיים שיפור פארטו (עבור דוגמה נגדית כלשהי).
- ג. האלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא הוגן לקבוצות לפי ההגדרה: נניח שיש תקציב C , אז לכל קבוצה בגודל k שכל אחד מהמשתתפים מביא לאפשרות ה- k 100% מהתקציב נובע שהתקציב שהם יקבלו בחלוקה יהיה $C \cdot \frac{k}{n}$. כלומר, כל אפשרות k תקבל בדיוק $\frac{C \cdot k}{n}$ מהתקציב ולכן האלגוריתם הוא הוגן לקבוצות.