

"וְנִזְכָּרְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאֻזְלִי" (יזוֹקֶאֱל בַּז 14)

# תקצוב משתף רציף

אראל סגל-הלוי ע"פ:

Brandl, Brandt, Greger, Peters, Stricker, Suksompong  
(2021).

איפה הכסף?

# הקלט:

- כסף בקופה:  $C$ .
- נושאים:  $1, \dots, m$  (עמותות, ארגונים...).
- אזרחים:  $1, \dots, n$ .
- התועלת של אזרח  $i$  לנושא  $j$  היא:  $u_{i,j}$ .
- הנחה: התועלות בינאריות – 0 או 1.

# הפלט:

- וקטור  $d$  המייצג תקציב:  $d_1, \dots, d_m$ .
- $d_1 + \dots + d_m = C$ .
- התועלת של אזרח  $i$  מהתקציב  $d$  היא:
  - $u_i(d) = \text{Sum}[j=1, \dots, m] u_{i,j} * d_j$

# מהו תקציב הוגן?

א. הוגנות ליחידים (Individual Fair Share):

$$u_i(d) \geq C/n.$$

- הכרחי, אבל לא מספיק. לדוגמה:

- 99 תומכים בנושא א, 1 תומך בנושא ב.
- נותנים 1% לנושא א, 99% לנושא ב.

ב. הוגנות לקבוצות (Group Fair Share):

לכל קבוצה בגודל  $k$ , הסכום הכולל המועבר לנושאים שאחד מחברי-הקבוצה תומך בהם הוא לפחות:

$$k \cdot C/n$$

האם קיים תקציב הוגן לקבוצות? <

# תקציב אנארכי

הגדרה. תקציב אנארכי נותן לכל אזרח את חלקו בתקציב  $C/n$ , ואומר לו לחלק את הכסף כרצונו בין כל הנושאים שהוא תומך בהם.

**משפט.** כל תקציב אנארכי הוא הוגן-לקבוצות.

הוכחה. לכל קבוצה בגודל  $k$ , סכום הכסף הניתן לחברי-הקבוצה הוא  $k \cdot C/n$ , וכל הסכום הזה מפוזר על נושאים שלפחות אחד מחברי-הקבוצה תומך בהם. \*\*\*

**משפט.** תקציב אנארכי עלול להיות לא-יעיל <

# חוסר-יעילות

- דוגמה:** ביישוב יש 3 מבנים שצריך לתפעל:  
מגרש כדורסל, מועדון שחמט, ספריה.
- 1000 ש"ח מאפשרים לתפעל את המבנה לשעה ביום. התקציב הכולל: 6000.
  - עמי אוהב תחרויות (כדורסל, שחמט).
  - תמי בעד מקומות סגורים (שחמט, ספריה)
  - תקציב אנארכי יכול להיות: 1500, 3000, 1500. התועלת – 4.5 שעות לכל אחד.
  - קיים שיפור פארטו: תקציב 0, 6000, 0. התועלת – 6 שעות לכל אחד. \*\*\*

# תקציב אוטיליטרי

הגדרה. תקציב אוטיליטרי הוא תקציב הממקסם את סכום התועלות של האזרחים.

• אלגוריתם: תן את כל התקציב לנושאים שיש להם הכי הרבה תומכים.

משפט. כל תקציב אוטיליטרי הוא יעיל-פארטו.  
הוכחה. הוכחנו בשיעור 2. \*\*\*

משפט. תקציב אוטיליטרי עלול להיות לא-הוגן אפילו ליחידים.

דוגמה. אזרחים 1,2 בעד א, אזרח 3 בעד ב. \*\*\*

האם יש תקציב הוגן-לקבוצות וגם יעיל-פארטו? <

# תקציב פריק

הגדרה: תקציב  $d_1, \dots, d_m$  נקרא פריק

(decomposable) אם קיימים סכומים  $d_{i,j}$  לכל אזרח  $i$  ולכל נושא  $j$  כך ש:

- $\sum_i d_{i,j} = d_j$  ; לכל נושא -
- $\sum_j d_{i,j} = C/n$  – לכל אזרח -
- $d_{i,j} > 0$  only if  $u_{i,j} > 0$ .

משמעות: אפשר לממש את התקציב באופן הבא: נותנים לכל אזרח את החלק היחסי שלו בתקציב  $C/n$ , ואומרים לו לפזר את התקציב בין הנושאים שהוא תומך בהם, לפי  $d_{i,1}, \dots, d_{i,m}$ .

# הוגנות-לקבוצות ופריקות

## משפט. כל תקציב פֶּרִיק הוא הוגן לקבוצות.

הוכחה. נניח שהתקציב  $d$  הוא פריק. לכל קבוצה בגודל  $k$ , סכום הכסף הניתן לחברי-הקבוצה על-ידי הפירוק של  $d$  הוא  $k \cdot C/n$ . לפי הגדרת הפירוק, כל הסכום הזה מפוזר רק על נושאים שלפחות אחד מחברי-הקבוצה תומך בהם. לכן התקציב הוגן לקבוצות. \*\*\*

**הערה.** גם הכיוון ההפוך נכון: כל תקציב הוגן לקבוצות הוא פריק [הוכחה בסיכום בגיטהאב].



# אלגוריתם נאש – מיקסום המכפלה

הגדרה. תקציב נאש הוא תקציב הממקסם את מכפלת התועלות של האזרחים:

$$\max_d \prod_i u_i(d).$$

• הגדרה שקולה: מיקסום סכום הלוגריתמים:  
 $\max_d \sum_i \log(u_i(d)).$

• חישוב: פתרון בעיית אופטימיזציה קמורה – ראו בתיקיית הקוד.

משפט. כל תקציב נאש הוא יעיל-פארטו.  
הוכחה. הוכחנו בשיעור 2. \*\*\*

משפט. כל תקציב נאש הוא פְּרִיק <

# תקציב נאש - פריקות

**משפט.** כל תקציב נאש הוא פְּרִיק.

**הוכחה.** נתון תקציב  $d$  הממקסם סכום הלוגריתמים.  
נבנה תקציב חדש  $d'$  ע"י העברת סכום קטן  $e$  מנושא 1 לנושא 2. השינוי בתועלת של כל שחקן  $i$  הוא:

$$u_i(d') - u_i(d) = e^*(u_{i,2} - u_{i,1})$$

השינוי בפונקציה כלשהי  $f$  של התועלת שווה בקירוב:

$$f(u_i(d')) - f(u_i(d)) \approx e^*(u_{i,2} - u_{i,1}) * f'(u_i(d))$$

בפרט, כאשר  $f$  היא לוגריתם:

$$\log(u_i(d')) - \log(u_i(d)) \approx e^*(u_{i,2} - u_{i,1}) / u_i(d)$$

--> השינוי בסכום הלוגריתמים הוא:

$$\text{Sum}[i=1, \dots, n] e^*(u_{i,2} - u_{i,1}) / u_i(d)$$

$$= e * [\text{Sum}[i] u_{i,2} / u_i(d) - \text{Sum}[i] u_{i,1} / u_i(d)].$$

# תקציב נאש - פריקות

הוכחה [המשך].

התקציב המקורי  $d$  ממקסם סכום לוגריתמים. לכן השינוי בסכום הלוגריתמים הוא לכל היותר 0:

$$\text{Sum}[i] \, u_{i,2}/u_i(d) - \text{Sum}[i] \, u_{i,1}/u_i(d) \leq 0$$

אותו הדבר נכון אם הופכים את התפקיד של 1,2:

$$\text{Sum}[i] \, u_{i,1}/u_i(d) - \text{Sum}[i] \, u_{i,2}/u_i(d) \leq 0$$

ולכן חייב להתקיים שיוויון:

$$\text{Sum}[i] \, u_{i,1}/u_i(d) = \text{Sum}[i] \, u_{i,2}/u_i(d)$$

ולכן הסכום הנ"ל קבוע לכל נושא  $j$ :

$$\text{Sum}[i] \, u_{i,j}/u_i(d) = Z \quad \text{for all } j \text{ in } 1, \dots, m.$$

[בהמשך נראה למה שווה הקבוע  $Z$ ].

# תקציב נאש - פריקות

הוכחה [המשך]. נפרק את התקציב באופן הבא:

$$d_{i,j} := (C/n) * (d_j * u_{i,j} / u_i(d))$$

א. לכל שחקן  $i$ , מתקיים:

$$\begin{aligned} \sum_j d_{i,j} &= (C/n) * \sum_j (d_j * u_{i,j}) * (1/u_i(d)) \\ &= (C/n) * u_i(d) * (1/u_i(d)) = C/n. \end{aligned}$$

ב. לכל נושא  $j$ , מתקיים:

$$\begin{aligned} \sum_i d_{i,j} &= (C/n) * (d_j) * (\sum_i u_{i,j} / u_i(d)) \\ &= (C/n) * (d_j) * Z \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j} d_{i,j} = (C/n) * (C) * Z$$

מצד שני, מסעיף א נובע:

$$\sum_{i,j} d_{i,j} = \sum_i (C/n) = C \rightarrow Z = n/C.$$

ולכן:

$$\sum_i d_{i,j} = d_j. \quad ***$$

# גילוי אמת

**הגדרה.** אלגוריתם תקצוב השתתפותי נקרא **מגלה-אמת** (truthful) אם לכל אזרח  $i$ , כאשר הבחירות של שאר האזרחים קבועות, התועלת של  $i$  גדולה ביותר כאשר ה- $u_{i,j}$  אמיתיים.

**משפט.** האלגוריתם האנארכי מגלה-אמת.  
**הוכחה.** כל אזרח עושה מה שהוא רוצה. \*\*\*

**משפט.** האלגוריתם האוטייליטרי מגלה אמת.  
**הוכחה.** כל הצבעה של אזרח בעד נושא שהוא תומך בו, מגדילה את מספר התומכים בנושא זה, ולכן מגדילה את הסיכוי שיתוקצב. \*\*\*

# אלגוריתם נאש – גילוי-אמת

**משפט.** אלגוריתם נאש אינו מגלה-אמת.

הוכחה. בניח שיש ארבעה נושאים (א, ב, ג, ד),  
חמישה אזרחים, והסכום הכולל 500.

• קלט: אב, אג, אד, בג, א; פלט (0, 65, 65, 370).  
• התועלת של אזרח "א+ב" היא  $435 = 370 + 65$ .

• קלט: בד, אג, אד, בג, א; פלט (0, 0, 200, 300).  
• התועלת של אזרח "א+ב" היא  $500 = 300 + 200$ .  
שווה לו להגיד "ב+ד"! \*\*\*

האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת, יעיל, והוגן? <

# אלגוריתם - אוטיליטרי-על-תנאי

## האלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי

(conditional utilitarian) – ממקסם את סכום התועלות תחת האילוץ שהתקציב פריק. איך?  
-- כל אזרח תורם לנושאים, מאלה שהוא תומך בהם, עם הכי הרבה תומכים אחרים.

- בדוגמה אב, אג, אד, בג, א: (0, 50, 50, 400).
- בדוגמה בד, אג, אד, בג, א: (50, 50, 100, 300).
- פריק – לפי הגדרה.
- מגלה אמת – כמו האלגוריתם האוטיליטרי.
- לא יעיל פארטו - בדוגמה השניה יש שיפור פארטו: (0, 0, 150, 350).
- אבל לא קיים שיפור-פארטו שהוא פריק.

# טרילמה

**משפט.** לא קיים אלגוריתם שהוא: יעיל-פארטו, וגם מגלה-אמת, וגם הוגן (ליחידים או לקבוצות).

ההוכחה המלאה ארוכה מאד. נוכיח משפט חלש יותר: לא קיים אלגוריתם כנ"ל שהוא גם סימטרי

(=מתייחס באופן שווה לאזרחים זהים ולנושאים זהים).

**הוכחה.** כשהקלט אב, אג, אד, בג, א, הנושאים ב, ג

סימטריים, לכן הם חייבים לקבל סכום זהה. אם

הסכום אפס, אז אין הוגנות לאזרח 4. לכן הסכום חייב

להיות חיובי. בפרט, לא כל התקציב הולך ל: א+ב.

כשהקלט בד, אג, אד, בג, א, הנושאים ג, ד סימטריים,

לכן הם חייבים לקבל סכום זהה. אם הסכום אפס, אז

אזרח 1 מרויח מהשינוי אב<בד; אם הסכום חיובי, אז

קיים שיפור פארטו: ג-<א , ד-<ב. \*\*\*



# תקצוב משתף רציף - טרילמה

מגלה אמת	הוגן	יעיל פארטו	
כן	לא	כן	אוטיליטרי
כן	כן	לא (* יעיל מבין התקציבים הפריקים)	אוטיליטרי על-תנאי
לא	כן	כן	מיקסום המכפלה