מטלה – מיזוג הצעות תקציב

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

שאלה 1: הוגנות חזקה ליחידים

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. הוכחנו בהרצאה, שכאשר האזרחים מתחלקים לקבוצות "ממוקדות", כך שהאזרחים בכל קבוצה j נותנים 100% מהתקציב לנושא j, התקציב המתקבל מתחלק בין הנושאים ביחס ישר למספר התומכים של כל נושא: נושא שיש לו k תומכים יקבל לפחות C*k/n . בפרט, נושא שיש לו תומך אחד יקבל לפחות C/n.

עכשיו נניח שיש רק אזרח אחד ממוקד, הנותן 100% מהתקציב לנושא j. שאר האזרחים יכולים לחלק את התקציב באופן כלשהו – לא דווקא באופן ממוקד. לדוגמה, נניח שיש שלושה אזרחים ושלושה נושאים והתקציב הכולל הוא 100. הצבעות האזרחים:

- אזרח א: 100, 0, 0.
- אזרח ב: 0, 50, 50.
- אזרח ג: 0, 50, 50.

אזרח א ממוקד, אבל אזרחים ב, ג לא ממוקדים.

הגדרה: אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב נקרא **הוגן-חזק ליחידים** אם בכל מצב שבו קיים אזרח ממוקד התומך בנושא j בלבד, נושא j מקבל לפחות C/n.

א. הוכיחו, בעזרת הדוגמה למעלה, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות אינו הוגן-חזק ליחידים. פרטו את שלבי החישוב בעזרת חיפוש בינארי.

* ב. הציעו אלגוריתם חציון מוכלל, עם פונקציות שונות מהפונקציות שהראינו בהרצאה, שהוא גם הוגן-חזק ליחידים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם, והדגימו אותו על הדוגמה למעלה.

שאלה 2: אלגוריתם הממוצע

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע **אינו** יעיל פארטו כשיש שלושה נושאים.

ג. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא הוגן לקבוצות.

שאלה 3: מניפולציה קבוצתית

נתון אלגוריתם כלשהו לחלוקת משאבים. נאמר שלתת-קבוצה כלשהי של שחקנים יש **מניפולציה קבוצתית מוצלחת** אם הם יכולים לשנות את הקלט שלהם (להגיד ערכים שונים מהערכים האמיתיים שלהם), כך שלפחות שחקן אחד מהקבוצה ירוויח, וכל השחקנים בקבוצה לא יפסידו.

אלגוריתם הוא **מגלה-אמת לקבוצות** (באנגלית group strategyproof) אם לאף תת-קבוצה של שחקנים אין מניפולציה קבוצתית מוצלחת. שימו לב: אלגוריתם הוא מגלה-אמת (לפי ההגדרה שראינו

באחד השיעורים הקודמים) אם לאף תת-קבוצה בגודל 1 אין מניפולציה קבוצתית מוצלחת. לכן, כל אלגוריתם מגלה-אמת-לקבוצות הוא גם מגלה-אמת.

א. הוכיחו, שמכרז ויקרי למכירת חפץ יחיד אינו מגלה-אמת-לקבוצות.

ב. הוכיחו, שאלגוריתם החציון הפשוט הוא מגלה-אמת-לקבוצות.

שאלה 4: פונקציית תועלת שונה

בהרצאה הגדרנו את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן **i** כסכום המרחקים בין התקציב האידיאלי שלו לבין התקציב בפועל:

$- \mathbf{Sum}_j\ |\mathbf{d}_j - \mathbf{p}_{i,j}|$

נניח שמגדירים את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן כסכום ריבועי המרחקים:

$- \mathbf{Sum}_j\ (\mathbf{d}_j - \mathbf{p}_{i,j})^2$

א. הוכיחו, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות ליניאריות **אינו** מגלה אמת. העזרו בדוגמה הבאה, עם שלושה נושאים ושני אזרחים:

- אזרח א: 20, 60, 20.
- אזרח ב: 0, 50, 50.

* ב. הוכיחו, שעם פונקציות התועלת הריבועיות, אלגוריתם הממוצע הוא יעיל פארטו לכל מספר של נושאים.

שאלה 5: תיכנות: חישוב תקציב

כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט את כמות הכסף בקופה והצבעות האזרחים, ומחשבת את התקציב בעזרת אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. כותרת הפונקציה:

```
def compute_budget(
    total_budget:float,
    citizen_votes:List[List]
) → List[float]
```

הנה דוגמת קריאה לפונקציה עבור תקציב עם שלושה סעיפים, ושני אזרחים:

```
compute_budget(100, [ [100, 0, 0], [0, 0, 100] ])
```

הערך המוחזר הוא רשימה עם מספרים כמספר הסעיפים, למשל:

```
[50, 0, 50]
```

צרפו דוגמאות-הרצה.