

מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: יעילות-פארטו חלשה וחזקה

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו חזק** של מצב ב, אם מצב א טוב יותר לכל המשתתפים.
- מצב נקרא **יעיל פארטו חלש** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו-חזק שלו.

א. תנו דוגמה לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה-פארטו.

ב. הוכיחו, שכל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו-חלש.

ג. הוכיחו, שאם כל השחקנים מייחסים ערך חיובי ממש לכל משאב, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

ד. הוכיחו, שאם לכל השחקנים יש הערכות זהות, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

* שאלה 2: שיווי-משקל תחרותי

אחת הדרכים המקובלות לחלק משאבים היא בעזרת מנגנון השוק החופשי. יש מחיר לכל מוצר; לכל קונה יש ביקוש – שהוא סל המוצרים שהוא רוצה לקנות במחיר הנוכחי; אם סכום הביקושים למוצר מסויים גדול מההיצע – אז המחיר של המוצר גדל; אם סכום הביקושים קטן מההיצע – אז המחיר קטן. כך משתנים המחירים עד שמגיעים לשיווי-משקל. פורמלית, הקצאת-משאבים נתונה נקראת **שיווי משקל תחרותי שווה-תקציב** (competitive equilibrium with equal income, בקיצור CEEI) אם קיים וקטור-מחיר p (מחיר לכל משאב), כך שלכל משתתף i מתקיימים התנאים הבאים:

- המחיר הכולל של הסל שקיבל משתתף i הוא לכל היותר 1;
- כל משתתף מעדיף את הסל שקיבל על-פני כל שאר הסלים שהמחיר שלהם הוא לכל היותר 1.

בסמלים:

$$p(X_i) \leq 1$$

$$\text{For every } Y: \text{ if } p(Y) \leq 1 \text{ then } V_i(X_i) \geq V_i(Y)$$

א. תנו דוגמה להקצאה שהיא שיווי-משקל תחרותי שווה-תקציב בבעיה כלשהי של חלוקת משאבים, למשל הדוגמה במצגת:

$$\begin{bmatrix} 80, & 19, & 1 \\ 79, & 1, & 20 \end{bmatrix}$$

תארו את ההקצאה ואת וקטור המחיר p , והסבירו מדוע זה אכן ש"מ תחרותי שווה-תקציב.

ב. הוכיחו שכל ש"מ תחרותי שווה-תקציב הוא ללא קנאה.

ג. הוכיחו שכל ש"מ תחרותי שווה-תקציב הוא יעיל פארטו חלש (ראו הגדרה בשאלה 1).

שאלה 3: חלוקה אגליטרית וקנאה

נניח שיש שלושה משאבים וחמישה שחקנים עם הערכים הבאים:

שחקן	ברזל	נפט	עצים
א	6	9	0
ב	0	5	10
ג	0	0	15
ד	0	0	15
ה	0	0	15

- א. הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, כל שחקן מקבל ערך לפחות 5.
 ב. הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, כל העצים ניתנים לשחקנים ג, ד, ה, וכל הנפט לשחקן ב.
 ג. הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, יש קנאה (מי מקנא במי ומדוע?)

שאלה 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם נייר ועט

נתונה בעיית חלוקת משאבים עם הערכים הבאים:

- עמי: פלדה 1, נפט 0.

- תמי: פלדה t , נפט 1 פחות t

כאשר t הוא פרמטר כלשהו בין 0 ל-1.

- א. חשבו חלוקה הממקסמת את **סכום הערכים**, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
 ב. חשבו חלוקה הממקסמת את **סכום השורשים** של הערכים, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
 ג. חשבו חלוקה הממקסמת את **מכפלת הערכים**, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
 * ד. כתבו בעיית אופטימיזציה ב-cvxpy, המוצאת חלוקה הממקסמת את **מכפלת הערכים**, כפונקציה של t . (רמז: כנראה תקבלו הודעת שגיאה – עליכם למצוא לה פתרון).

שאלה 5: אלגוריתם חלופי לחלוקת משאבים

נתון האלגוריתם הבא לחלוקת משאבים רציפים.

- לכל משאב x :

○ תן לכל שחקן i חלק $V_i(x)/\sum_j V_j(x)$ מהמשאב x .

לדוגמה, בבעיית מהמזגת, עם ערכים $[1, 19, 80]$, $[1, 79]$, עמי יקבל $1/21$ מהפלדה, $19/20$ מהנפט, ו $80/159$ מהעצים (ותמי תקבל את השאר).

א. האם האלגוריתם מחזיר תמיד חלוקה פרופורציונלית? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

ב. האם האלגוריתם מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.