מטלה מספר 6 באלגוריתמים כלכליים

שם המגיש: בנימין סאלדמן

תשובה לשאלה מספר 3

א. הבעיה הזאת מאוד דומה לבעיה של מציאת שידוך מושלם בגרף דו-צדדי ממושקל עם סכום משקלים מקסימלי. פורמלית – נניח שיש לנו גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$ עם פונקציית משקלים $w_i: E \to \mathbb{R}$, אזי שידוך מושלם בגרף G הוא תת קבוצה של הצלעות $M \subseteq E$ כך שלכל $x \in X$ ו-$y \in Y$ מתקיים: אם הצלע $(x, y) \in M$, אזי לכל $x' \neq x, x' \in X$ מתקיים: $(x', y) \notin M$. שידוך M נקרא מושלם אם הוא מכסה את כל הקודקודים בגרף (כלומר לכל $x \in X$ יש צלע לאיזשהו $y \in Y$). אלגוריתמים למציאת שידוך מקסימלי עם סכום משקלים מקסימלי בגרף דו-צדדי ידועים מהקורסים אלגוריתמים 1 ואלגוריתמים 2 (למשל האלגוריתם ההונגרי). כדי לקשר את בעיית מציאת השידוך המושלם עם סכום מקסימלי לבעיית מציאת חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, אפשר לחשוב על השחקנים בתור קודקודים בגרף, השחקנים יהיו שייכים לקבוצת הקודקודים X, הפריטים לחלוקה יהיו קבוצת הקודקודים Y, ונעביר צלעות בין כל שחקן לכל משאב, כאשר המשקל של כל צלע הוא ההערך שהשחקן נתן לפריט הזה (כלומר, נניח שהשחקן i נתן ערך k למשאב r, אז $w(i, r) = k$). כעת, אם נמצא שידוך מושלם שממקסם את סכום המשקלים בגרף, נגיע למצב שכל שחקן קיבל בדיוק פריט אחד (כי השידוך הוא מושלם), וסכום הערכים הוא מקסימלי כי השידוך הזה הוא מקסימלי במשקל. במקרה שלנו, יש 500 חפצים ו-100 שחקנים וכל שחקן צריך לקבל בדיוק 5 פריטים. נתאר אלגוריתם שמוצא את החלוקה הזאת על ידי מציאת שידוך מושלם עם משקל מקסימלי בגרף דו-צדדי.

האלגוריתם:

א. לכל שחקן $i \in \{1, \dots, 100\}$, ניצור 5 קודקודים זהים $v^p_{x,i}$ (כלומר, נניח $i = 1$, אז ניצור את הקודקודים $(v^1_{x,i}, v^2_{x,i}, v^3_{x,i}, v^4_{x,i}, v^5_{x,i})$. נאסוף את כל הקודקודים האלה לתוך קבוצה אחת ונקרא לה X.

ב. לכל משאב $j \in \{1, \dots, 500\}$, ניצור את הקודקוד $v_{y,j}$. נאסוף את כל הקודקודים האלה לתוך קבוצה אחת ונקרא לה Y.

ג. לכל קודקוד $v_{x,i}$, נוסיף את הצלע $(v_{x,i}, v_{y,j})$ לכל $j \in \{1, \dots, 500\}$ כאשר המשקל של הצלע הוא הערך שהשחקן ה-i נותן לפריט ה-j.

ד. נריץ אלגוריתם למציאת שידוך מקסימלי עם משקל מקסימלי בגרף $G = (X \cup Y, E)$.

ה. נסמן את השידוך שהתקבל מהאלגוריתם בתור M.

ו. אם $|M| \neq |X|$ (כלומר השידוך הוא לא מושלם), החזר: לא קיימת חלוקה כזאת.

ז. אחרת, לכל שחקן i המיוצג על ידי הקודקודים $v^p_{x,i}$, החזר את הקבוצה:
$\{j | (v^p_{x,i}, v_j) \in M, p \in \{1, \dots, 5\}\}$ בתור הפריטים שהשחקן קיבל.

קל לראות שהאלגוריתם מחזיר חלוקה שבה כל שחקן מקבל בדיוק 5 פריטים (בגלל שלכל שחקן יש 5 קודקודים והאלגוריתם מחזיר חלוקה אם ורק אם יש שידוך מושלם בגרף). כמו כן, סכום המשקלים הוא מקסימלי בגלל שהשידוך שאנחנו מוצאים הוא בעל משקל מקסימלי (ולכן הסיכוי שכל שחקן יקבל את מקסימום הערך שלו עבור ערך כלשהו גדל).

ב. כדי לפתור את השאלה הזאת, ניזכר בכמה משפטים שלמדנו בהרצאה.
משפט 1 – כשכל השחקנים הם קוואזילינאריים, חלוקה היא יעילה פארטו אם ורק אם היא ממקסמת את סכום הערכים.
משפט 2 – בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

משפט 3 – כל תמחור ללא קנאה, יישאר ללא קנאה לכל השמה שממקסמת את סכום הערכים.

משפט 4 – האלגוריתם הבא מוצא חלוקת חדרים ללא קנאה:

1. מצא חלוקה כלשהי X הממקסמת את סכום הערכים.
2. מצא תמחור p שאיתו החלוקה X היא ללא קנאה.

ניתן לבצע את האלגוריתם לפי מה שלמדנו בהרצאה – כדי למצוא חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, ניתן להפוך את הבעיה לגרף דו-צדדי ולמצוא שידוך מקסימלי עם משקל מקסימלי בגרף הזה. כדי למצוא תמחור p שאיתו החלוקה שמצאנו היא ללא קנאה, ניתן להשתמש בתכנות לינארי.

כדי לפתור את השאלה שלנו, אנחנו צריכים למצוא רדוקציה בין הבעיה שלנו, לבעיית חלוקת החדרים ולמצוא לבעיית חלוקת החדרים, חלוקה ללא קנאה. לפי משפטים 1,2,3,4 החלוקה שנמצא היא גם ללא קנאה וגם יעילה פארטו.

תיאור הרדוקציה – בעיית חלוקת החדרים היא מקרה פרטי של בעיית חלוקת החפצים עם כסף: מספר החדרים שווה למספר החפצים, כל שחקן צריך לקבל חדר (במקרה שלנו חפץ) אחד בדיוק וסכום התשלומים של השחקנים צריך להיות מספר קבוע מראש. הרדוקציה שלנו תיקח את כל החפצים ותמיר אותם לחדרים, שכר הדירה הכולל יהיה סכום ההעדפות של כל השחקנים והתמחור ייקבע לפי ההעדפות של השחקנים. פה יש 500 חפצים ו-100 שחקנים ודורשים שכל שחקן יקבל 5 חפצים בדיוק. כדי להתגבר על האתגר הזה, נשתמש באותו ה-"טריק" מהסעיף הקודם – על כל שחקן i, נוסיף חמישה שחקנים: $v_i^1, v_i^2, v_i^3, v_i^4, v_i^5$ שמקושרים לאותו השחקן.

לאחר שנפעיל את הרדוקציה, נקבל שהבעיה היא בעיית חלוקת החדרים ונוכל להפעיל עליה את האלגוריתם של משפט 4. האלגוריתם הזה ימצא חלוקה כלשהי X הממקסמת את סכום הערכים, והאלגוריתם גם ימצא תמחור p שאיתו החלוקה X היא ללא קנאה. לפי משפט 1, החלוקה הזאת היא גם יעילה פארטו בגלל שהיא ממקסמת את סכום הערכים. לאחר שקיבלנו חלוקה לחדרים, כל שחקן i יקבל את החדרים שהשחקנים $v_i^1, v_i^2, v_i^3, v_i^4, v_i^5$ קיבלו והמחיר שלו יהיה הסכום של המחירים של השחקנים $v_i^1, v_i^2, v_i^3, v_i^4, v_i^5$.