בס"ד

מטלה 7

מגישה: רננה הברג'מן

שאלה 3: עידוד השתתפות

הגדרה: אלגוריתם הוא מעודד השתתפות אם התועלת של כל שחקן המשתתף באלגוריתם היא לפחות 0 (אף אחד לא ניזוק מהשתתפות באלגוריתם).

נתונה בעיה כללית של החלטה בין אפשרויות שונות (כמו בעיית "בחירת המסעדה" שהודגמה בשיעור).

א. הוכיחו, שאם כל שחקן מייחס ערך לפחות אפס לכל אפשרות, אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

* ב. הוכיחו, שאם כל שחקן i מייחס ערך לפחות אפס לאפשרות הנבחרת כשהוא לא משפיע (האפשרות הממקסמת את סכום הערכים של השחקנים האחרים כאשר מתעלמים משחקן i), אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

ג. הוכיחו, שאם התנאי בסעיף ב אינו מתקיים, אז אלגוריתם VCG אינו מעודד השתתפות.

א. נתון: כל שחקן מייחס ערך לפחות 0 לכל אפשרות.

צ"ל: אלגוריתם VCG מעודד השתתפות

כלומר נרצה להוכיח שהתועלת של כל שחקן המשתתף באלגוריתם הוא לפחות 0.

הוכחה: נסתכל על שחקן ספציפי,

נבחין כי התועלת של השחקן מוגדרת להיות: תשלום - ערך = תועלת

לפי האלגוריתם התשלום של השחקן מוגדר כך:

- חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.
- חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים *אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.*
- גבה מהשחקן את *ההפרש* בין שני הסכומים.

נבחין בין שני מקרים:

1. האפשרות שנבחרת עם ובלי השחקן היא אותה אפשרות. ⇐ התשלום הוא 0

$\Leftarrow \quad 0 \underset{\text{מהנתון}}{\geq} \text{ערך} = \text{תועלת}$

2. האפשרות שנבחרת עם ובלי השחקן היא אפשרות שונה.

נבדוק במקרה הזה מה יהיה התשלום של השחקן: כאשר j הוא השחקן הנוכחי: $p(\text{שחקן}) = \sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) - \sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן})$

מכיוון שהאפשרות שנבחרה היא האפשרות עם השחקן אזי סכום הערכים בחלוקה עם השחקן גדול יותר מסכום הערכים בחלוקה בלי השחקן,

אזי מתקיים: $\sum_{i}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) - \sum_{i}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) \geq 0$

$$\sum_{i}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) - \sum_{i}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) \geq 0$$

חוצאת השחקן הנוכחי מהסכום $\Rightarrow \sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) + v_j(\text{חלוקה עם השחקן}) - \left(\sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) + v_j(\text{חלוקה בלי השחקן})\right) \geq 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) - \sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן})}_{\text{p- של השחקן}} + \underbrace{v_j(\text{חלוקה עם השחקן})}_{\text{הערך}} - v_j(\text{חלוקה בלי השחקן}) \geq 0$$

סידור שיוויון לפונקציית התועלת $\Rightarrow \underbrace{v_j(\text{חלוקה עם השחקן}) - \left(\sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) - \sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן})\right)}_{\text{תועלת}} - v_j(\text{חלוקה בלי השחקן}) \geq 0$

$$\Rightarrow \underbrace{v_j(\text{חלוקה עם השחקן}) - \left(\sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) - \sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן})\right)}_{\text{תועלת}} \geq v_j(\text{חלוקה בלי השחקן}) \underset{\text{מהנתון}}{\geq} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{v_j(\text{חלוקה עם השחקן}) + \sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) - \sum_{i,i\neq j}^{n} v_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן})}_{\text{תועלת}} \geq 0$$

הראיתי כי בשתי האפשרויות התועלת של השחקן היא לפחות 0, הראיתי את זה עבור שחקן שרירותי

⇐ אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

ב. נתון: כל שחקן i מייחס ערך לפחות אפס לאפשרות הנבחרת כשהוא לא משפיע.
צ"ל: אלגוריתם VCG מעודד השתתפות

הוכחה: נסתכל על שחקן i כלשהו.
באותו אופן כמו בסעיף א' נבחין בין שני מקרים:
1. האפשרות שנבחרת עם ובלי השחקן היא אותה אפשרות. $\Rightarrow$ התשלום הוא 0
מהנתון שחקן i מייחס ערך לפחות אפס לאפשרות הנבחרת כשהוא לא משפיע. כיוון שזו אותה אפשרות כאשר הוא משפיע, מתקיים: $0 \geq$ ערך = תועלת

2. האפשרות שנבחרת עם ובלי השחקן היא אפשרות שונה.
נשים לב שמחישוב בסעיף א', התשובה היחידה בה יש שימוש בנתון: $V_j(\text{חלוקה עם השחקן}) - \left(\sum_{i,i\neq j}^{n} V_i(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) + \sum_{i,i\neq j}^{n} V_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן})\right) \geq V_j(\text{חלוקה בלי השחקן}) \underset{\text{מהנתון}}{\geq} 0$
אבל הנתון של סעיף זה מתקיים פה גם כיוון שבכל אופן מסתכלים על חלוקה בלי השחקן ולכן הערך שלו עדיין לפחות 0.

הראיתי כי בשתי האפשרויות התועלת של השחקן היא לפחות 0, הראיתי את זה עבור שחקן שרירותי
$\Leftarrow$ אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

ג. נתון: קיים שחקן שמייחס ערך קטן מאפס לאפשרות הנבחרת כשהוא לא משפיע.
צ"ל: קיימים ערכים עבור שאר השחקנים כך שאלגוריתם VCG אינו מעודד השתתפות
נניח בשלילה כי לא קיימים ערכים כאלה עבור שאר השחקנים.
עבור שחקן i שרירותי, מההנחה בשלילה, כיוון שלא קיימים ערכים כאלה עבור שאר השחקנים מתקיים $V_i(\text{עבור חלוקה כשהשחקן משתתף}) - p_i \geq 0$ = תועלת
$p(\text{שחקן}) = \sum_{j\neq i}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) - \sum_{j\neq i}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) \geq 0$, $\sum_{j}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) - \sum_{j}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) > 0$ ($\rightarrow$ מהסעיפים הקודמים)

$$V_i(\text{עבור חלוקה כשהשחקן משתתף}) - p_i \geq 0 \Rightarrow V_i(\text{עבור חלוקה כשהשחקן משתתף}) - \left(\sum_{j\neq i}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) - \sum_{j\neq i}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה עם השחקן})\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow V_i(\text{עבור חלוקה כשהשחקן משתתף}) - \sum_{j\neq i}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) + \sum_{j\neq i}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) \geq 0$$

הכנסת הערך של השחקן לתוך הסכום
$$\Rightarrow -\sum_{j\neq i}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) + \sum_{j}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) \geq \sum_{j\neq i}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה בלי השחקן})$$

$$\Rightarrow \sum_{j}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) \geq \sum_{j}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) - V_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{j}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה עם השחקן}) - \sum_{j}^{n} V_j(\text{עבור חלוקה בלי השחקן})}_{\geq 0} \geq - V_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן})$$

מהנתון
$$\Rightarrow 0 \geq - V_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן})$$

$$\Rightarrow V_i(\text{עבור חלוקה בלי השחקן}) \geq 0$$

בסתירה לנתון שקיים שחקן שמייחס ערך קטן מאפס לאפשרות הנבחרת כשהוא לא משפיע. (שחקן i היה שרירותי)