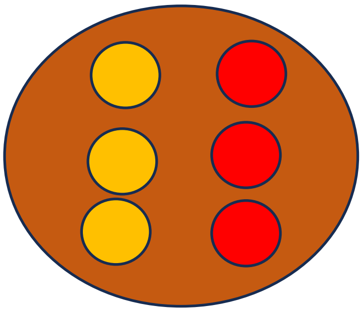
<u>מטלה 1 באלגוריתמים כלכליים</u>

שם המגיש: בנימין סאלדמן

שלום אראל, פתרתי כמה תרגילים אבל אשמח שתבדוק לי את התרגיל הראשון שפתרתי פה (שאלה מספר 5 בדף השאלות) אבל אם צדקתי גם בשאלת הבונוס אשמח לקבל אותו בבקשה 😊.

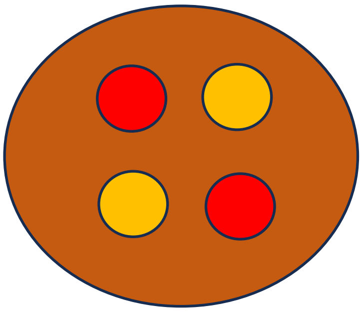
<u>שאלה מספר 5</u>

א. אלגוריתם "חתוך ובחר" עובד בצורה הבאה: נניח שיש 2 משתתפים, בן ורונן. נניח בלי הגבלת הכלליות שבן הוא זה שחותך את העוגה. בן חותך חצי מהעוגה כראות עיניו ורונן בוחר ראשון את הפרוסה. כעת נתון שלבן יש מידע על ההעדפות של רונן. כיצד הוא יוכל להשיג 100% מההעדפות שלו? נניח שהם מתחלקים בעוגת שוקולד ונניח שלעוגה יש פצפוצים בצבע אדום וצהוב. נניח שההעדפה של בן היא פצפוצים בצבע אדום וההעדפה של רונן היא פצפוצים בצע צהוב. נניח שהעוגה נראית ככה:



אז כדי שבן יוכל לקבל 100% מההעדפה שלו הוא יחתוך את העוגה לאורך באמצע. רונן יבחר את הפרוסה עם 3 הפצפוצים הצהובים (בגלל שההעדפה שלו היא פצפוצים צהובים) ולבן תישאר הפרוסה עם 3 הפצפוצים האדומים.

מצב אחר שבו בן יוכל להשיג רק 50% מהערך הוא תלוי בצורה של העוגה. נניח שהעוגה נראית ככה:



ונניח שההעדפות של בן ורונן נשארות זהות. במקרה הזה כל חיתוך של העוגה ל-2 חלקים ייתן לבן לכל היותר 50% מהערך של ההעדפות שלו. זה בגלל שלא ניתן להפריד לינארית את הפצפוצים. (כמו שלא ניתן להפריד לינארית את הפונקציה XOR, ולכן לא ניתן לחשב אותה בעזרת נוירון אחד, מבוא לנוירו חישוביות).

ב. צריך להוכיח שאם אין לנו מידע מדויק על ההערכה של השחקן השני, אז כל חיתוך של העוגה שלא לפי האלגוריתם עלול לתת לנו פרוסה ששווה פחות מ-50% מהערך שלנו.
הוכחה: לצורך ההוכחה נחלק למקרים, ולכל מקרה נחלק לתתי-מקרים.
מקרה ראשון: בן חותך את העוגה ככה שהחלק שהוא רוצה מכיל מעל 50% מהשווי שלו (כלומר, פרוסה אחת מכילה מעל 50% מהשווי שלו, והפרוסה השנייה מכילה לכל היותר 49% מהשווי שלו).
תת מקרה ראשון: ההעדפה של רונן מוכלת בהעדפה של בן (למשל רונן רוצה סוכריות צהובות ובן רוצה סוכריות צהובות ואדומות). במקרה הזה רונן עלול לבחור את הפרוסה המועדפת על בן בעת החיתוך ובגלל שהיא שווה לו מעל 50% מהשווי שלו, הפרוסה השנייה (שבן יקבל) תכיל לכל היותר 49% מהשווי שלו. תת מקרה שני: ההעדפה של בן מוכלת בתוך ההעדפה של רונן (למשל רונן רוצה סוכריות צהובות ואדומות ובן רוצה רק סוכריות אדומות). במקרה הזה גם רונן עלול לבחור את הפרוסה ששווה לבן מעל 50% מהשווי שלו (נניח שבן יודע שרונן רוצה סוכריות צהובות ואדומות אבל הוא לא יודע איזה צבע רונן מעדיף

יותר). גם במקרה הזה, אם רונן יבחר את הפרוסה שמכילה מעל 50% מהשווי של בן, בן עדיין יישאר עם פרוסה שמכילה לכל היותר 49% מהשווי שלו.
מקרה שני: בן חותך את העוגה ככה שהחלק שהוא רוצה מכיל מתחת ל-50% מהשווי שלו. תתי המקרים של המקרה הזה זהים למקרה הקודם – אם ההעדפה של רונן נמצאת בחלק שמכיל לפחות 50% מהשווי של בן אז בן יישאר עם פרוסה שמכילה לכל היותר 49% מהשווי שלו.
המקרה האחרון הוא אם לרונן אין באמת פונקציית ערך וכדי לבחור פרוסה הוא מטיל מטבע. בגלל שרונן הוא זה שבוחר ראשון אז בהסתברות מסוימת (שהיא לא 0) הוא יכול לבחור את הפרוסה שמכילה מעל 50% מהשווי של בן (זה בתנאי שבן חתך את העוגה כמו ב-2 המקרים הקודמים).
המקרה היחיד שיכול להבטיח (בהסתברות ששווה ל-1) שבכל פעם בן יקבל לפחות 50% מהשווי שלו הוא אם בן חותך את העוגה לחצי (לפי איך שהוא רואה את זה). במקרה הזה הבחירה של רונן לא משנה בגלל שבן חושב שכל אחת מ-2 החתיכות של העוגה שוות לפחות 50% ולכן הוא תמיד ירוויח לפחות 50%.

<u>שאלה מספר 1</u>

א. האלגוריתם שנשתמש בו הוא אלגוריתם לחלוקה פרופורציונלית שמבטיח שכל משתתף יקבל לפחות $\frac{1}{D}$ כאשר D הוא ערך העוגה כולה. לכן נשתמש באלגוריתמי חלוקה פרופורציונלית ל-n שחקנים כמו אלגוריתם המפחית האחרון או אלגוריתם אבן-פז.
ב. הבעיה באלגוריתמים לחלוקה פרופורציונלית שציינתי בסעיף הקודם היא שהם לא מוצאים חלוקה ללא קנאה. יכול להיות שאח אחד קיבל זמן קצת יותר ארוך מהשני ואז תיווצר קנאה על קטע הזמן הזה. נציע אלגוריתם חדש ברוח אלגוריתם המפחית האחרון – "המוסיף האחרון". אופן פעולת האלגוריתם: בהינתן עוגה שמייצגת את התפלגות השעות, האח הראשון מסמן $\frac{1}{n}$ מהעוגה בעיניו. אם האח הבא חושב שערך הפרוסה הזאת נמוך מדי, הוא מוסיף ל-$\frac{1}{\mathrm{n}}$ וכן הלאה. האחרון שהוסיף, מקבל את החלק שסימן וממשיכים ברקורסיה על שאר העוגה. נדגים את האלגוריתם: נניח שיש שלושה משתתפים: בן, עמי ותמי. לצורך הפשטות הם מחלקים את העוגה ל-24 חלקים שכל אחד מהחלקים היא שעה עגולה. נניח שבן בוחר את הקטע שבין 9:00-12:00, עמי טוען שהחלק הזה קטן מדי ולכן הוא מגדיל את טווח השעות: 8:00-12:00. תמי טוענת שהטווח הזה גם קטן מדי ומגדילה אותו ל--8:00 16:00. תמי מקבלת את הטווח הזה ובן ועמי מריצים מחדש את האלגוריתם. בן בוחר את הטווח של 00:00-6:00, עמי חושב שזה מעט מדי ומגדיל את הטווח ל- 00:00-8:00. בגלל שעמי הוסיף אחרון, הוא מקבל את הטווח הזה ובן מקבל את מה שנשאר: 16:00-00:00. בסוף הריצה כל אחד קיבל משמרת של 8 שעות לכל היותר. טענה: אלגוריתם "המוסיף האחרון" נותן חלוקה פרופורציונלית – כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לכל היותר $\frac{1}{n}$ מערך העוגה בעיניו.
הוכחה: נניח שערך העוגה כולה הוא n. נוכיח שכל שחקן מקבל חלק שהוא לכל היותר 1 בעיניו. נוכיח באינודקציה על n. בסיס: n=1 – המקרה הזה טריוויאלי שכן שחקן אחד מקבל את כל העוגה שזה בדיוק חתיכה אחת. צעד: נניח נכונות ל-n-1 שחקנים ונוכיח עבור n. אחד מהשחקנים מקבל חלק שווה לכל היותר 1 בעיניו. נשארים n-1 שחקנים. עבורם, החלק שנמסר שווה לכל הפחות 1. לכן, החלק שנשאר שווה בעיניהם הוא לכל היותר n-1. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מהם מקבל חלק ששווה לכל היותר 1 עבורם.
החלוקה הזאת רציפה בגלל שכל חלק של העוגה מייצג טווח רציף של זמנים.

שאלה מספר 3

א. ההגדרה לחלוקה פרופורציונלית במקרה הזה תשתנה מעט – נסמן באמצעות C את ערך העוגה כולה, X_i את הפרוסה שקיבל השחקן ה-i ו-V_i בתור פונקציית הערך של השחקן ה-i. אזי חלוקה פרופורציונלית במקרה הזה תהיה: $V_i(X_i) \geq V_i(C) * t_i$ לכל i.

ב. נתאים מחדש את אלגוריתם המפחית האחרון כדי שיתאים לתנאים של השאלה – בהינתן עוגה בגודל n, נסמן: $t_i = \frac{k_i}{D}$. השחקן הראשון בוחר $\frac{1}{D}$ מכלל העוגה, השחקן הבא בתור יכול להפחית מהחתיכה אם הוא חושב שהיא גדולה מדי וכך עוברים לשחקן הבא עד שמגיעים לשחקן האחרון. השחקן האחרון שהפחית, מקבל את החתיכה. לאחר מכן, מעדכנים לאותו שחקן $t_i = \frac{k_i - 1}{D}$ וממשיכים ברקורסיה, כל עוד לא לכל השחקנים $t_i = 0$ (שחקן עם חלק כזה לא משתתף בשאר הסיבובים). טענה: כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות t_i מערך העוגה בעיניו. הוכחה: ההוכחה באינדוקציה ומסתמכת על ההוכחה של אלגוריתם המפחית האחרון – בסיס n=1 טריוויאלי. צעד: נניח עבור n-1 שחקנים ונוכיח עבור n. בסיבוב ה-k שחקן אחד מקבל חלק ששווה בעיניו 1. ייתכנו שתי אפשרויות – או ש-$t_i - 1 = 0$ ואז נשארים n-1 שחקנים. עבורם, החלק שנמסר שווה לכל היותר 1. לכן, החלק שנשאר הוא לפחות D-1 בעיניהם. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מהם מקבל לפחות 1. זה קורה בכל סיבוב, ולכן כל אחד מקבל לפחות t_i מערך העוגה. או שזה לא מתקיים ואנחנו נשארים עם n שחקנים גם באיטרציה הבאה. אבל, n-1 מתוכם הסכימו על זה ששווי הפרוסה שקיבל השחקן ה-n שווה לכל היותר 1 ולכן השווי נשמר גם במקרה הזה. זמן ריצה: נשים לב שזמן הריצה של אלגוריתם המפחית האחרון הוא: $O(n^2)$. אנחנו מריצים את אלגוריתם המפחית האחרון עד ש-$k_i = 0$. זה יכול לקחת D צעדים לשחקן לכל היותר. כל שחקן נשאל שאלה אחת בכל סיבוב, כלומר במקרה הכי גרוע נשאל D שאלות n פעמים ולכן זמן הריצה הוא: $O(D * n)$.

ג. לצורך השאלה הזאת נשנה קצת את אלגוריתם אבן-פז. נסמן: $t_i = \frac{k_i}{D}$. אופן פעולת האלגוריתם: כל שחקן מחלק את העוגה D חלקים בשווי $\frac{1}{D}$ בעיניו. חותכים את העוגה בחציון ושולחים כל שחקן לחצי שלו. כאשר שחקן מקבל חלק (כלומר לא חילקו את העוגה על החלק שהוא נמצא בא) הוא מסמן: $t_i = \frac{k_i - 1}{D}$ ואם $t_i = 0$ הוא מפסיק את ההשתתפות שלו. ממשיכים כל עוד יש שחקן כך ש: $t_i \neq 0$. נוכיח שהאלגוריתם נותן חלוקה פרופורציונלית באינדוקציה: נניח שהערך של העוגה הוא n, נוכיח שכל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות $n * t_i$ מערך העוגה בעיניו. בסיס: n=1 טריוויאלי. נניח עבור n-1 ונוכיח עבור n. כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו ל-k כאשר k הוא $\frac{D}{2}$ או $\frac{D+1}{2}$ או $\frac{D-1}{2}$. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1, ולכן בסך הכל, בסוף הריצה כל שחקן יקבל לפחות $n * t_i$. זמן ריצה: נשים לב שבכל פעם מחלקים את D ב-2, לכן נקבל $O(\log(D))$ סיבובים. בכל סיבוב שואלים כל שחקן שאילתה אחת, ולכן נקבל שזמן הריצה הוא: $O(2 * n * \log(D))$.