Algorithm 1: Biswas And Barman (Same capacities)

Per category Donald Dobbin

דוגמה 1: מתחילים מדוגמה פשוטה שמתרגמת לפרטות
ממש פשוט רק 2 סוכנים

1) קבוצת סוכנים $[2] = Agents = \{1, 2\}$

2) הקצאות $X = \{X_1, X_2\}$, $X_1 = \emptyset$, $X_2 = \emptyset$

3) 2 קטגוריות ~~קטגוריה אחת~~ $C_1 = C_2 = \{C_i^1, C_i^2\}$ (קיבולות של הסוכן)

4) $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ $C^1 = \{m_1, m_2\}$, $C^2 = \{m_3\}$

5) מקבלות הקיבולות לקחת כמה אולי בפריט (לא מתמטיים, קיבולות)
מכיוון ש bundle switching מצריך תוספות ב Capacity

	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	2	8	7
סוכן 2	2	8	1

מכיוון שבאלגוריתם הזה יש חשיבות לקטגוריות אז נגדיר שונה בין סוכן לסוכן נגדיר שהקיבולת שווה לגודל הקטגוריה

$k_i^h = |c_i^h|$

$V_k \ldots = V_2(m_k)$ אותן הערכות

תוך

נריץ את האלגוריתם
ניתן מספר אקראי ל...
לסדר של האנשים

מתחילים כאשר $X_1 = \emptyset$

$V_1(m_1) = 2$ $V_1(m_2) = 8$

Algorithm 1 :- Biswas And Barman (Same capacities)

Per category Donal Dobbin

דוגמה 1: מתחילים מדוגמה פשוטה שמתארת לפרטות

מאוד פשוט קיים 2 סוכנים

1) קבוצת סוכנים $[2] = Agents = \{1, 2\}$

2) הקצאות $X = [X_1, X_2]$, $X_1 = \emptyset$, $X_2 = \emptyset$

3) 2 קטגוריות ~~קטגוריה אחת~~

$C_1 = C_2 = \{c_i^1, c_i^2\}$ (קיבולות של הפריטים)

4) $C^1 = \{m_1, m_2\}$, $C^2 = \{m_3\}$

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$

5) מקבוצת הערות לסוכנים כל אחד כפרדה (לא מעוניינים ורלוונטי)

מכיוון ש bundle switching מצריך תוספות ? capacity

$V_k \ldots = V_2(m_k)$ אותן הערכות

תוק

נריץ את האלגוריתם

נתחיל מספר אקראי לסוכנים נניח שזה זה.

$\sigma = (1, 2)$ הסדר של האובייקטים

מתחילים כאשר $X_1 = \emptyset$

$V_1(m_1) = 2 \quad V_1(m_2) = 8$

דוגמא עם 2 (~~שלא רק הגדרה באמת~~)

1. מרוצים [redacted] Round Robin (σ, C^h)

$\sigma = (1,2)$, $C^h = C^1$

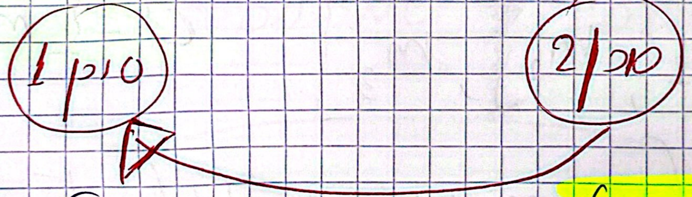
סוכן 1 מקבל את m_2 מכיון שעבורו שווה יותר מ m_1

סוכן 2 מקבל את m_1, $V_1(m_1)=2 < V_1(m_2)=8$.

$X_1^1 = \{m_2\} \longrightarrow X_1 = \{x_1^1\} \quad V(x_1^1) = 8$

$X_2^1 = \{m_1\} \longrightarrow X_2 = \{x_2^1\} \quad V(x_2^1) = 2$

נצייר גרף קנאה לפי ה קנאות F-EF1



אין לנו מעגלים בגרף הקנאה לכן פלוס

$\sigma \xrightarrow{\text{סדר טופולוגי}} (2,1)$

כלומר להראות 2 דוגמאות

1. $RR(\sigma, C^2)$

בפעם סוכן 2 בא ראשון בתור ונותנים לו m_3

$V_1(m_3)=7$, $V_2(m_3)=1$ לכן לא נוצר עוד קנאות

עכשיו, נצייר את גרף הקנאה מחדש

סוכן 1 ⇄ סוכן 2

$$V(X_2)$$

$$V_1(X_2) = V_1(m_1) + V_1(m_3) = 2 + 7 = \underline{9}$$

$$V_2(X_2) = V_2(m_1) + V_2(m_3) = 2 + 1 = 3$$

$V_1(X_2) > V_1(X_1)$ עכשיו סוכן 1 מקנא ב2

$V_2(X_1) = 8$

$V_2(X_1) > V_2(X_2)$

יש לנו מעגל בגרף הקנאה

לכן אלגוריתם סגירת מעגלי קנאה נותנים לסוכן 2 את חבילת סוכן 1 ולהפך וכך

לכן

$$X_1 = \{m_1, m_3\}$$

$$X_2 = \{m_2\}$$

כעת לא קנאה

סוכן 1   סוכן 2

אין קשת קנאה

סוכן \ חבילה	X_1	X_2
1	9	8
2	8	3

דוגמה 2 : 3 סוכנים 2 מעגלים

קואליציה אחת $C_1 = \{m_1, m_2, m_3\}$

~~[illegible]~~ פריקות לשם סוכן כיוון שהוא לשותף בקואליציה.

$[3] = Agents = \{1, 2, 3\}$ 3 סוכנים

וסדר לפי אינדקס $\cancel{(1,2,3)}$ $6 = (1,3,2)$

טבלת הערכות שנרצה להשיג את כל, לפחות 2 מעגלים

קואליציה / סוכן	$\cancel{m_1}$	$\cancel{m_2}$	$\cancel{m_3}$
סוכן 1	5	6	5
סוכן 2	6	5	6
סוכן 3	5	6	5

~~[illegible]~~

מסקנות כדי לעגות את הדוגמה (קשה לעבור מעמדה לדוגמה)

1) סוכן 2: יותר אחרון מהפרספקטיבה שלו

2) סוכן 1+3 לא משנה מי מהם יותר ראשון
אך סוכן 2 יותר לפעמים / קואליציה אחת.

נעשה כך:

1) סוכן 1,3 יותר מלפני 2 בקואליציה ראשונה (C^1)

2) סוכן 2 יותר ראשון בקואליציה שנייה (C^2)

$C^1 = \{m_1, m_3\}$ $\sigma = (1,3,2)$

$C^2 = \{m_2\}$

loop I

לולאה 1- נרוץ על הקטגוריה 1 נפעיל $RoundRobin(\sigma, C^1)$

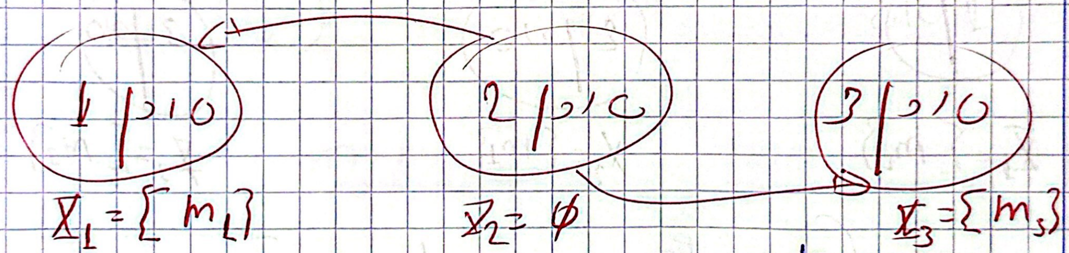
סוכן 1 בוחר ב m_1 $V_1(m_1) = 5$

סוכן 3 בוחר ב m_3 $V_3(m_3) = 5$

סוכן 2 אין לו אופציה לבחור כי אין פריטים

(לכן גם מבטיח לנו את EF1)

~~אחרי~~ גרף הקנאה:



אין מעגלים,

סדר טופולוגי →

1) $(2,1,3)$

או

2) $(2,3,1)$

ניקח את 1

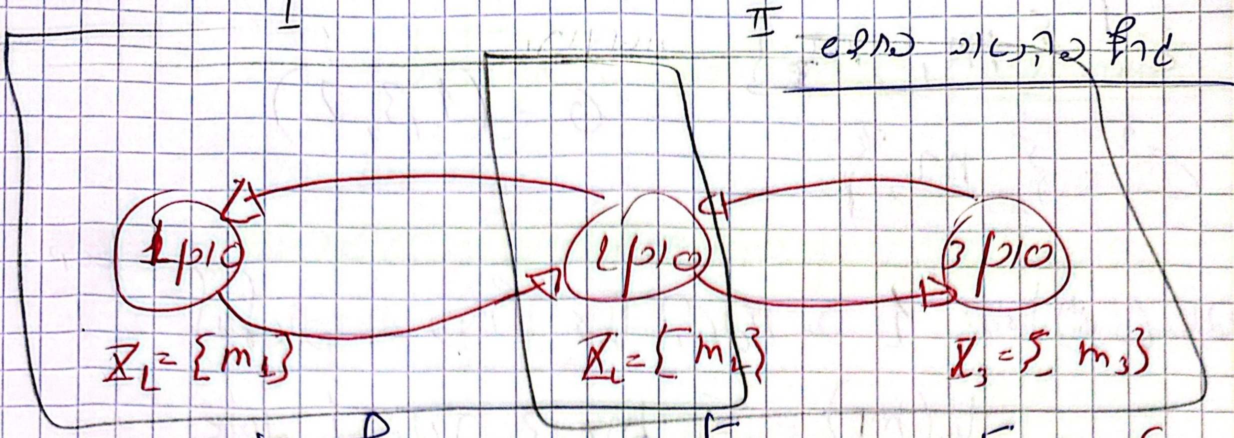
loop II

$RoundRobin((2,1,3), \underset{=\{m_2\}}{C^2}), C^2, h=2$

אין לנו חוץ מפריט אחד פה סכנו m_2, והקטגוריה נגמרת

שלכן סוכן 2 $V_2(m_2) = 5$,

גרף הרכיבים הקשים

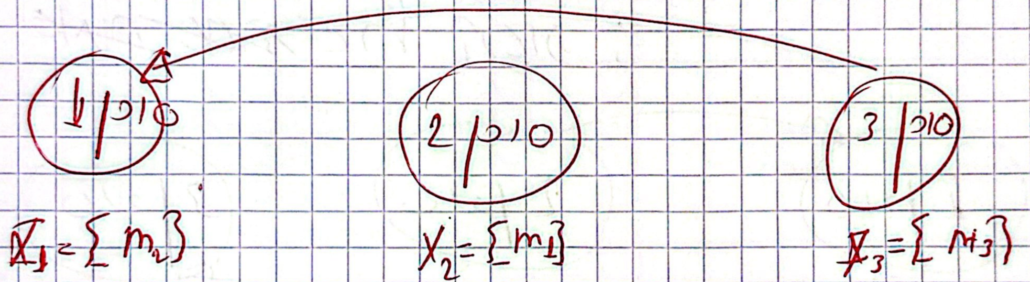


לכן קיבלנו 2 מעגלי קשירים בגרף שלנו

נצטרך לטפל בעניין נבחר את מעגל I

ונחליף תכולות של סוכן 1 ו סוכן 2

נקבל



כהוויה אחרי ביצוע אחד במעגל I אין לנו מעגלים עוד יותר, עכשיו לסדר טופולוגי topological sort

1) נבחר צומת שאין צלעות שמצביעות אליה

{סוכן 3, סוכן 2}

2) נמחק אותו ואת הצלעות ונחזור על התהליך

נבחר את סוכן 3 ואחר כך סוכן 2 ואחר כך סוכן 1

לכן הסדר לחלוקה הוא (3, 2, 1)

הערה- כאן זה לא משנה כי [illegible]

Output $X_1=\{m_2\}$ $X_2=\{m_1\}$ $X_3=\{m_3\}$ סופי

דוגמה 3: [redacted] ל 4 סוכנים 4 פריטים

לכל הסוכנים: $V_i(m) = 1 \quad m \in C^1$

לכל הסוכנים: $V_i(m) = 10 \quad m \in C^2$

$[4] = Agents = \{1, 2, 3, 4\}$

$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$

$C = \{C^1, C^2\}$

$\sigma = (1, 2, 3, 4)$

	m_1	m_2	m_3	m_4
סוכן 1	1	1	1	10
סוכן 2	1	1	1	10
סוכן 3	1	1	1	10
סוכן 4	1	1	1	10

הערכות זהות לכולם $V_i(m_k) = V_j(m_k)$

$\forall j, i \in [4]$

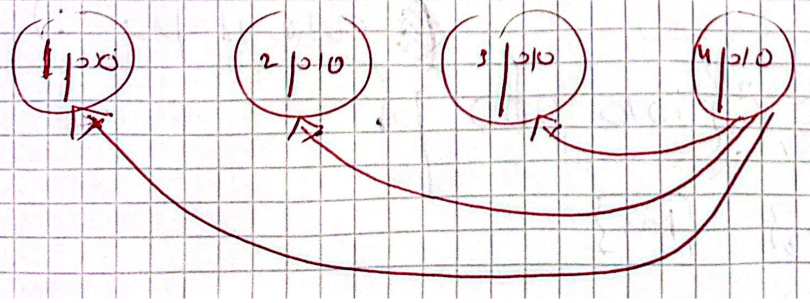
$k \in [|M|]$

loop 1: נריץ $Round Robin((1,2,3,4), C^1)$

לכן כל סוכן מקבל פריט בסבב של σ ונניח שכל סוכן בחר בפריט המתאים לאינדקס שלו (סוכן i בוחר ב m_i), הגענו לסיטואציה שכולם קיבלו חוץ מהאחרון מכיוון שלא נשאר עוד פריטים מהקטגוריה. לכן

גרף הקנאה: Envy graph

I



דוגמה 3: [redacted] עם 4 סוכנים 4 פריטים

לכל פריט $m \in C^1$: $v_i(m) = 1$

לכל פריט $m \in C^2$: $v_i(m) = 10$

$[4] = Agents = \{1, 2, 3, 4\}$

$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$

$C = \{C^1, C^2\}$ $\quad C^1 = \{m_1, m_2, m_3\}$

$\sigma = (1, 2, 3, 4)$ $\quad C^2 = \{m_4\}$

$$\boxed{X_i = \emptyset \quad \forall i \in [4]}$$

$\forall_{i,j \in [4]}$, $k \in [|M|]$: $v_i(m_k) = v_j(m_k)$ הערכות זהות לכולם

loop 1: נריץ $Round Robin((1,2,3,4), C^1)$

לכן כל סוכן מקבל פריט אחד בדיוק לפי σ ונניח שסוכן

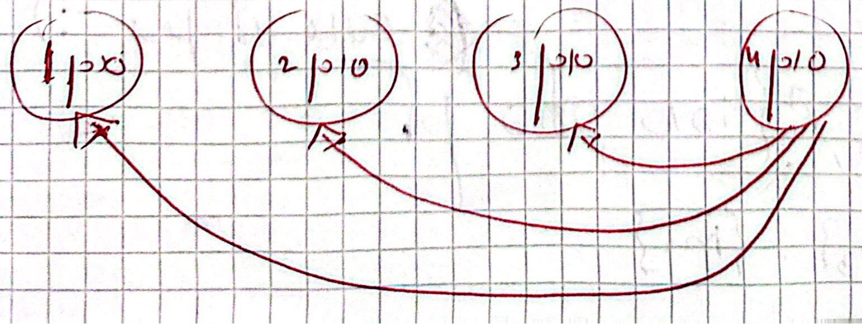
סוכן i קיבל את הפריט המתאים לאינדקס שלו

(סוכן i קיבל m_i), כשהגענו לסיטואציה שבה כל

סוכן קיבל חוץ מהאחרון מכיוון שלא נשאר עוד פריטים

מהקבוצה, לכן

גרף הקנאה: Envy graph



אין מעגלים, סדר טופולוגי קבוע במקרה
וכעת את סוכן 4 בראשון יש לנו 3
אופציות לסדר, ניקח את זה

$(4, 1, 2, 3)$

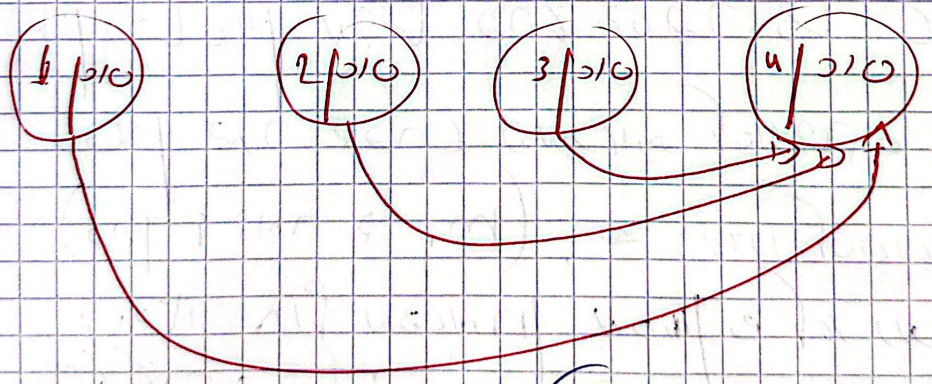
$V_1(m_4)=10 \quad C^2=\{m_4\} \quad \sigma(4,1,2,3)$ Loop II

נריץ Round Robin(σ, C^2)

לכן סוכן 4 יקבל את הפריט m_4 ויוצאים מ RR
כי לא נותר עוד פריטים,

גרף הקנאה

Envy graph II



אין עוד הגדרות, אין לולאות עוד יותר
סדר טופולוגי, קודקוד פנוי יבוא שסוכן 4 הוא באחרון
נתן לו עונש :)

לכן הפלט סופי $X=\{X_1^1, X_2^1, X_3^1, \cancel{X_4^1}, X_4^2\}$

$=\{m_1\} \quad \{m_2\} \quad \{m_3\} \quad \{m_4\}$

Algorithm 2 :- CRR

Single category + Different capacities

דוגמה 1 — 2 סוכנים לאחד מהם $k_1^h=0$ לכן

$[2]$ = Agents $= \{1, 2\}$

$L = C^h = \{m_1\}$ $\quad K^h = \{k_1^h = 0,\ k_2^h = 1\}$ ~~לסוכן 1 יש לכן $k_1^h=0$~~

$P = \{i : k_i^h = 0\} = \{1\}$

$t = 0$, $\quad x_1^h = \emptyset \quad x_2^h = \emptyset \qquad \sigma(1, 2)$

נריץ את CRR

$L \neq \emptyset \rightarrow (L = C^h = \{m_1\})$

$i = \sigma[0] = 1$

$(1 \in P)$ לכן לא נכניס אותו לאף

$t = t+1 \bmod (2) = 1$

נחזור ל אף

$L \neq \emptyset$ ✓

$i = \sigma[1] = 2$

$2 \notin P$

נכניס לשלב שלוש: פריטים לסוכן $\underline{\underline{2}}$

כשלוקחת את המקסימלי כיוון מקבלת ערך גבוה מכיוון שרק

פריט אחד יש אז אין השוואות

$x_2^h = \{m_2\}$

לא נשכח להוסיף את $i=2$ לרשימה
שמסומנים כי $|x_i^h| = k_i^h = 1$

① $\varphi \to \varphi \cup \{2\}$ ② $L \to L \setminus \{m_1\} = \emptyset$

While
עולים ל i ~~הבא~~ בסוף מסגלי איטרציות
אין לנו עוד פריטים $L=\emptyset$ לכן יוצאים
מהלולאה גורמת

$X^h = \{X_1^h, X_2^h\}$
$X_1^h = \emptyset$, $X_2^h = \{m_1\}$

∴ לוקה פיזור F-EF1 (כלומר סוכן 1 לא מקנא כי
כיוון שלא מקנא בפריטים) פיזור אופטי F-EF

דוגמה 2 :- 3 סוכנים, 4 חפצים

$$M = \{m_i \mid i \in [4]\} = C^h = L$$

$$Agents = [3] = \{1,2,3\} \quad \sigma = (1,2,3)$$

$$\forall_{i\in[3]}\, k_i^h = 2, \quad \forall_{i\in[3],\, m\in M}\, V_i(m) = 1$$

$$\forall_{i\in[3]}\, X_i^h = \emptyset, \quad t=0 \quad \varphi = \emptyset$$

מתחילים :)

$L \neq \emptyset$

$i = \sigma[0] = 1$

$1 \notin \varphi$ ✓

טבלת הערכות

	m_1	m_2	m_3	m_4
סוכן 1	1	1	1	1
סוכן 2	1	1	1	1
סוכן 3	1	1	1	1

טבלת קיבולת

סוכן 1	2
סוכן 2	2
סוכן 3	2

Scanned with CamScanner

לכן נותנים לסוכן 1 לבחור את הפריט המקסימלי בערכו
עבורו, מאחר שלסוכן יש את ערך $=1$
נשאר לו לבחור מתוך לסוכן את m_1
לכן

$$X_1^h = \{m_1\}$$

$$L = L \setminus \{m_1\} = \{m_2, m_3, m_4\}$$

$$|K_1^h| \neq |X_1^h|$$

$$2 \neq 1$$

לכן לא מכניסים לרשימת המסומנים

$$t = t + 1 \mod(3) = \underline{\underline{1}}$$

Loop II

כלומר $L \neq \emptyset$, $i = \sigma[1] = 2$, $i \notin P$

סוכן 2 בוחר, נתן לו m_2 (מאחר וכולם סוכנים שמכניסים ערך$=1$)

$$L = L \setminus \{m_2\} = \{m_3, m_4\}$$

$$X_2^h = \{m_2\}$$

כלומר

$$|X_2^h| \neq |K_2^h|$$

$$1 \neq 2$$

$$t = t + 1 \mod 3 = \underline{2}$$

Loop III

כלומר $L \neq \emptyset$ $i = \sigma[2] = 3$ $i \notin P$

סוכן 3 נתן לו את m_3

$$L = L \setminus \{m_3\} = \{m_4\}$$

$$X_3^h = \{m_3\}$$

$$|X_3^h| \neq K_3^h$$

$$1 \neq 2 \qquad t = t + 1 \mod 3 = \underline{\underline{0}}$$

Scanned with CamScanner

$i \notin P$ $\quad i = \sigma[0] = 1 \;, \quad L \neq \emptyset = \{m_4\}$ פלוס

III

הגענו לסוף 1, כמו מכן יש לו עוד קודקודות לטפל
פרוט נתן לו את כוחים שנותר m_4

$$X_1^h = \{m_1, m_4\}$$

$$L = L \setminus \{m_4\} = \emptyset$$

$$|X_1^h| = k_1^h = 2$$

לכן Θ מוסיפים אותו לרשימת פתוחים

$$P = P \cup \{1\}$$

$$t = t+1 \quad mal3 = 1$$

Loop IV

$\cancel{L = \emptyset}$

$\vec{L} = \emptyset$ כפתר

לכן סיימנו לולאה

ובסוף מפולולים מחזירים את X^h סיימנו

$$X^h = \{\underbrace{\{m_1, m_4\}}_{X_1^h}, \underbrace{\{m_2\}}_{X_2^h}, \underbrace{\{m_3\}}_{X_3^h}\}$$

דוגמא 3 להראות שמקרה כזה אפשר לבצע FEF

$M = \{m_1, m_2\} = L = C^h$

$[2] = Agents = \{1, 2\}$ $\forall_{i \in Agents}\ k_i^h = 1$

$\mathcal{P} = \emptyset$ $t = 0$ $\forall_{i \in Agents}\ x_i^h = \emptyset$ $\sigma = (1, 2)$

Blocked iterator

Agent \ item	m_1	m_2
1	10	5
2	5	10

טבלת הערכות

נריץ את CRR :)

Loop I

$L = \{m_1, m_2\}$

$L \neq \emptyset$

$i = \sigma[0] = 1$

$i \notin \mathcal{P}$

לפי $g = \operatorname{argmax}_{g \in L}(v_1(\{g\}))$ $= m_1$

לפי $x_1^h = \{m_1\}$

$L = L \setminus \{m_1\} = \{m_2\}$

$\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup \{1\} \leftarrow |x_1^h| = k_1^h = 1$ מכיוון ש

$t = 1$

Loop II

$i = \sigma[1] = 2 \notin \mathcal{P},\ L \neq \emptyset$

לפי הערכים של סוכן 2 $g = \{m_2\}$

$L = L \setminus \{m_2\} = \emptyset$

$x_2^h = \{m_2\}$

$P = P \cup \{2\} = \{1, 2\}$ מכיוון ש $|X_2^h| = k_2^h = 1$

$t = 0$

מכיוון ש $L = \emptyset$ לכן סיימנו terminates Loop

returns X^h

$$X^h = \big[\underbrace{\{m_1\}}_{X_1^h}, \underbrace{\{m_2\}}_{X_2^h}\big]$$

במקרה שלנו כל סוכן רוצה $\hat{v}_i(X_i) \geq \hat{v}_i(X_j)$ לכן

כל סוכן F-EF | שזה יותר חזק מ F-EF1

סיימנו ☺

Algorithm 3: CRR 2 categories

דוגמה 1 2 סוכנים, 2 קטגוריות, ~~[illegible]~~

$[2] = Agents = \{1, 2\}$ $\quad \forall_{i,j \in Agents,\ k \in M}\ V_i(k) = V_j(k) = 1$

$\forall_{i \in Agents}\ k_i^h = 2$

$C^1 = \{m_1, m_2\} \quad C^2 = \{m_3\} \quad \sigma = (1, 2)$

1) נריץ את $CRR(\sigma, C^1)$ (פירוט הריצה על איך האלגוריתם מנוסח בדוגמאות הקודמות, פה נקצר וניתן פלט סופי של CRR)

$output_1 \rightarrow X_1^1 = \{m_1\} \quad X_2^1 = \{m_2\}$

2) נהפוך סדר של σ $\quad G = (2,1)$ $\quad \underline{Reverse(\sigma) = (2,1)}$

נריץ $CRR(\sigma, C^2)$

$output_2 \rightarrow X_1^2 = \emptyset \quad X_2^2 = \{m_3\}$

$\forall_{i \in Agents}\ X_i^1 \cup X_i^2 = $ סוכן 1: $\{m_1\}$ $\quad$ סוכן 2: $\{m_2, m_3\}$

הדוגמה פה מקיימת EF1 מכיוון ש

$$\hat{V}_1(X_1) \geq \hat{V}_1(X_2 \setminus \{m_3\})$$

דוגמה 2 + מקרה פרטי של CRR להמחשה
יותר ספציפי כשנתון $C^2=\emptyset$

$C^1=\{m_1, m_2, m_3\}$ $C^2=\emptyset$

$\sigma=(1,2,3)$ $[3]=Agents=\{1,2,3\}$

$k_1^1=1$ $k_2^1=2$ $k_3^1=0$

1) נריץ $CRR(\sigma, C^1)$ (במקום הסברנו יותר מפורט לכן נסתכל רק על הפלט C)

Agent \ Item	m_1	m_2	m_3
1	2	3	3
2	3	1	1
3	∞	∞	∞

Output → $X_1^1=\{m_1\}$

$X_2^1=\{m_2, m_3\}$

$X_3^1=\emptyset$ לא מקבל כלום כי $k_3^1=0$

נהפוך סדר $\sigma_{new}=(3,2,1)$

אבל $C^2=\emptyset$ לכן סיימנו

$CRR(\sigma_{new}, \emptyset)=\emptyset$

~~Output →~~

ח. סופית: $X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2, m_3\}$

$X_3=\emptyset$

דוגמה 3 4 סוכנים , 6 פריטים

$$[4] = Agents = \{1, 2, 3, 4\} \quad \forall_{\substack{i\in[4] \\ k\in m}} \; V_i(m_k) = 1$$

$$C^1 = \{m_1, m_2\} \quad C^2 = \{m_3, m_4, m_5, m_6\}$$

$\cancel{K_2^1 = 1 \quad K_4^2 = 1}$

$\cancel{\forall_{i\in[4]} \; K_i^1 = 0 \quad i \neq 2, \; i \neq 4}$

$$\forall_{i\in[4]} \; K_i^2 = 1$$

$$\forall_{i\in[4]} \; K_i^1 = 1$$

$$\sigma = (2, 4, 1, 3)$$

1) נריץ $CRR(\sigma, C^1)$

output $\rightarrow$ $X_2^1 = \{m_1\}$ $\quad X_3^1 = \emptyset$

$X_4^1 = \{m_2\}$ $\quad X_1^1 = \emptyset$ ע. ראלפ F-EF1

$$\sigma = (3, 1, 4, 2)$$

2) נבצע סבב

נריץ $CRR(\sigma, C^2)$

output $\rightarrow$ $X_3^2 = \{m_3\}$ $\quad X_4^2 = \{m_5\}$

$X_1^2 = \{m_4\}$ $\quad X_2^2 = \{m_6\}$

לכן ב סופית

$X_1 = \{m_4\}$ $\quad X_2 = \{m_1, m_6\}$

$X_3 = \{m_3\}$ $\quad X_4 = \{m_2, m_5\}$

מכיון שסוכני מרגישים שהם כולם קבלו 4 לכן זו הקצאה **EF**

Algorithm 1 - Different capacities (Identical Valuations)

(With Identical Valuations, there is no envy cycles in the Envy graph)

דוגמא 1

2 סוכנים, קטגוריה אחת (כפי שכתוב)

שאין מעגלים בגרף הקנאה

$Agents = [2] = \{1, 2\}$ $\quad \forall_{i \in Agents, k \in M} \; v_i(k) = 1$

$C^1 = \{m_1, m_2, m_3\}$ $\quad \forall_{i \in Agents} \; k_i^1 = 2, \; k_i^2 = 2$

$G = (1, 2)$ $\quad C^2 = \{m_4\}$

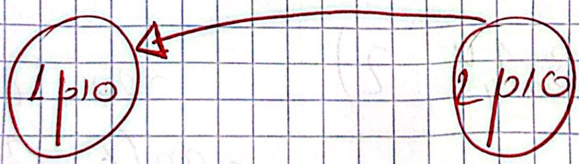
Loop I

$CRR(G, C^1)$ מריץ

Output $\rightarrow$ $X_1^1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2^1 = \{m_2\}$

Envy graph



$G = \text{topological sort}(G) = (2, 1)$

מפעילים את CRR עבור 2 קטגוריות

Loop II

$CRR(G, C^2)$

output $\to X_2^2 = \{m_4\}$

לכן אחד, איחוד הקודם של גרף-תלויות

$$X_1 = \{m_1, m_3\} \qquad V(X_1) = V(X_2) = 2$$

$$X_2 = \{m_2, m_4\}$$

לכן מחלוקה סופית כיון קבוץ ויתר אוקם מ F-EF1
כי קבוץ F-EF

דוגמה 2: 3 סוכנים, 3 קטגוריות, הקצאת שונה

$$M = C^1 \cup C^2 \cup C^3$$

$[3] = Agents = \{1, 2, 3\}$

$C^1 = \{m_1, m_2, \cancel{m_3}, m_4\}$

$C^2 = \{m_5, m_6, m_7\}$

$C^3 = \{m_8, m_9\}$

$$\boxed{\begin{matrix} K_1^1 = 0 \\ K_2^2 = 0 \\ K_3^3 = 0 \end{matrix}}$$

$\forall_{i,j}$ $K_i^j = 4$
$i \neq j$
$i \in Agents$
$j \in [3]$

$\forall_{i \in Agents, k \in M}$ $V_i(k) = 1$ (Same Valuations for simplicity we assume all equal to 1)

$\sigma = (1, 2, 3)$

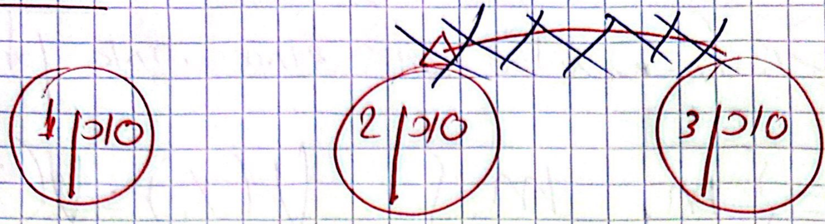
מתחילים :

I) $CRR(\sigma, C^1)$

output $\to X_1^1 = \emptyset \quad X_2^1 = \{m_1, m_3\} \quad X_3^1 = \{m_2, m_4\}$

k_i^j	C^1	C^2	C^3
1/סוכן	0	4	4
2/סוכן	4	0	4
3/סוכן	4	4	0

Envy graph



אין קשתות $\emptyset$

$\cancel{V_3(X_2^1) = 2 > V_3(X_3^1) = 1}$

לכן אפשר כל אופציה כי אין קשתות

Topological Sort

נבחר קודקוד שלא נכנסו אליו

יש לנו 2 אופציות $\{1, 3\}$

נבחר $\underline{1}$, נמחק אותו ונחזור על התהליך עם שנשארו

$\sigma = (1, 3, 2) \rightarrow$ אבל יש עוד אופציות כמו $(3, 2, 1)$ $(3, 1, 2)$

Loop II

$CRR(\sigma, c^2)$

נזכיר כי $k_2^2 = 0$ לכן רק $(1,3)$ יקבלו פריטים

לפי CRR

Output $\rightarrow$ $X_2^2 = \emptyset$ $X_1^2 = \{m_5, m_7\}$

$X_3^2 = \{m_6\}$

$\cancel{X_1 = \{m_5, m_7\}}$

$\cancel{X_2 = \{m_1, m_3\}}$

$\cancel{X_3 = \{m_3, m_6\}}$

$X_1 = \{m_5, m_7\}$ $V(X_1) = 2$

$X_2 = \{m_1, m_3\}$ $V(X_2) = 2$

$X_3 = \{m_2, m_4, m_6\}$ $V(X_3) = 3$

Envy graph

1 סוכן   2 סוכן   3 סוכן

אין קשתות

$\sigma = (3, 2, 1)$

$CRR(\sigma, C^3)$ $\boxed{III}$

output $\rightarrow$ $X_3^3 = \emptyset$ $X_2^3 = \{m_8\}$ $X_1^3 = \{m_9\}$

כעת

$X_1 = \{m_5, m_7, m_9\}$

$X_2 = \{m_1, m_3, m_8\}$

$X_3 = \{m_2, m_4, m_6\}$

Envy graph

1 סוכן   2 סוכן   3 סוכן

אין קשתות

סימטו

החלוקה היא F-EF

דוגמא 3 :- 3 סוכנים, 3 קטגוריות, פריט אחד
לכל קטגוריה

$$M = \{m_1, m_2, m_3\} \qquad C^1 = \{m_1\},\ C^2 = \{m_2\},\ C^3 = \{m_3\}$$

$$\forall_{\substack{i\in[3]\\ h\in|C|}} k_i^h = 1 \qquad \sigma = (1,2,3)$$

$\boxed{V(m_1) = 7 \quad V(m_2) = 8 \quad V(m_3) = 9}$

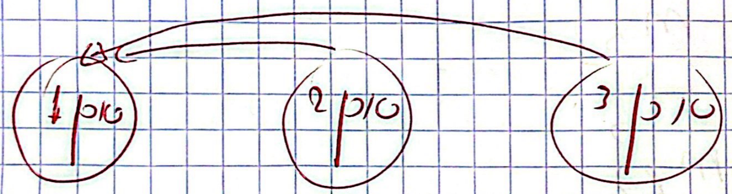
מתחילים בלולאה

loop I

$CRR(\sigma, C^1)$

output → $X_1^1 = \{m_1\}$

$X_i^1 = \emptyset$ כל השאר



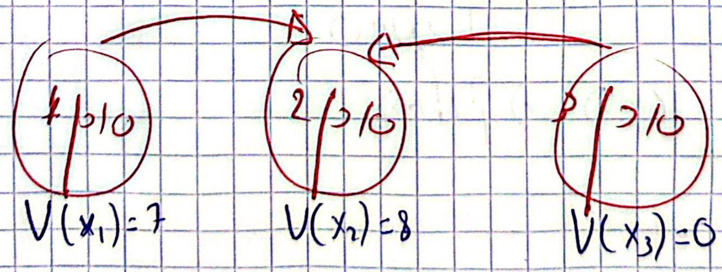
$\sigma = (2,3,1)$ סדר עדיפויות

loop II

$CRR(\sigma, C^2)$

output → $X_2^2 = \{m_2\}$

$X_i^2 = \emptyset$ כל השאר



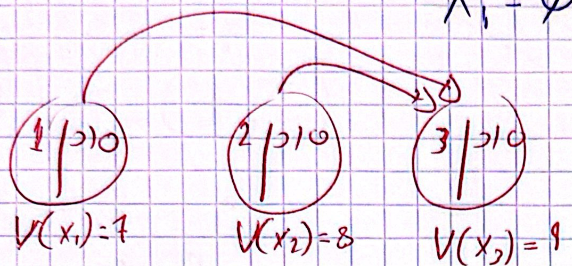
$\sigma = (3,1,2)$ ← סדר עדיפויות

Loop (1)

$CRR(\sigma, C^3)$

output $\rightarrow X_3^3 = \{m_3\}$

$X_1^3 = \emptyset$ כן נשאר



$X = \{\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}\}$ עבור סוכנים

X_1 X_2 X_3

F-EF1

Algorithm 5: Different capacities + Binary Valuations (same partition constraints)

דוגמא 1

$j_i \rightarrow$ Desired item set

$Agents = \{1, 2\}$ $C^1 = [m_1, m_2, m_3]$

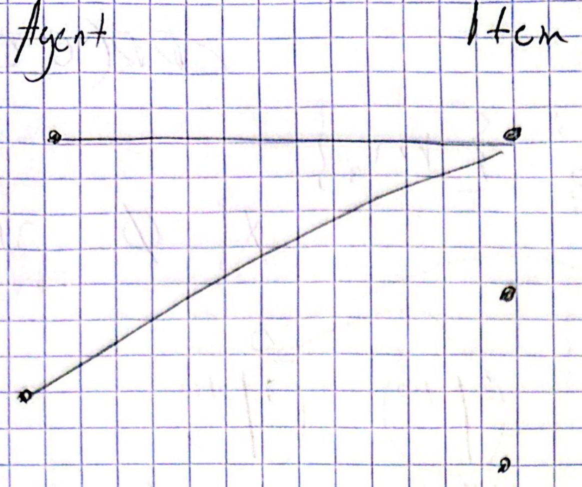
$V_1(m_1) = 1$ $V_2(m_2) = 1$ the rest is $V_i(m_k) = 0$

$k_1^1 = 1$ $k_2^1 = 2$ $\rightarrow T^h = 2$

$h=1$ $X_i^h = \emptyset$ לכל סוכן

$T^1 = 2$

V_i	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	1	0	0
סוכן 2	0	1	0



[illegible]
Matching

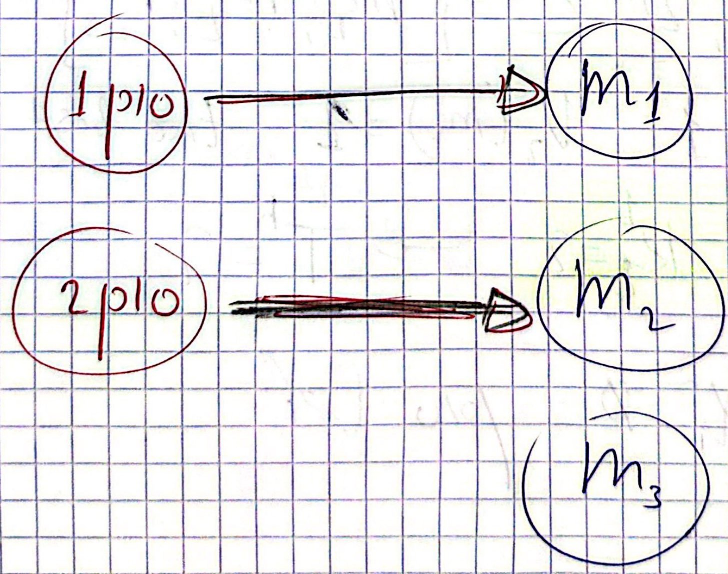
Matching is a subset of edges in which
there is no 2 edges sharing 1 node

= 1) 2 Agents same Item
2) 2 items 1 agent (We need item at a time)

Agent-Item Graph

n=1

Loop I



Envy graph

סוכן 1 סוכן 2

אין קשתות!

topological order $\sigma = (1, 2)$

Priority Matching

לפי G_t^h שבנינו בסעיף הקודם ניתן לראות שהזיווג מקסימום.
כל אחד יקבל $\underset{\text{סוכן 1} \quad \text{סוכן 2}}{(1, 1)}$ כך שסוכן 1 יקבל m_1
סוכן 2 יקבל m_2

ולכן

$X_1^1 = \{m_1\}$ $X_2^1 = \{m_2\}$

$h = 2$ Loop II

Agent - Item graph

סוכן 2 m_3

$V_2(m_3) = 0$ (not desirable)

Envy graph

סוכן 1 סוכן 2

אין קשתות

$G=(2,1)$

Probability Matching

אין לנו התאמה כי מכיוון שסוכן 2 אין לו אינטרס ב m_3

לכן התאמה מקסימלית פירושו (סוכן 1 $\emptyset$)

Loop terminated (i^h loop) (inner loop)

~~Loop terminated (h loop)~~

מקצה כל פריט שלא הותאם

לסוכן הלפני שיש לו ערך חיובי המקורי שלו

סוכן 2 מקבל את m_3 (למרות שסוכן לא שמים 1 סדורו)

$X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2,m_3\}$

Loop terminated (h loop) (outer loop)

סיכום $X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2,m_3\}$

כמובן הפוגמה פעלו אין תנאי הקצאה כי כל סוכן לא

מעוניין במה שיש לסוכן האחר (לא ב.ה.כ לוו תפיפה

של אין אינטרס ב G_h^+ ועכשיו $V_2(m_3)=0$)

דוגמה ל 3 סוכנים, תחילת אלגוריתם ב G_h^t

$Agents = \{1, 2, 3\} = [3]$

$\forall_{i \in [3], k \in M} \quad V_i(k) = 1$ (כולם מעוניינים בכל הפריטים)

$i \neq 3$ חוץ מסוכן 3 שמעוניין רק ב m_3

$i \neq 2$ סוכן 2 רוצה רק m_1, m_2

	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	1	1	1
סוכן 2	1	1	0
סוכן 3	0	0	1

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$

$C^1 = \{m_1\} \quad C^2 = \{m_2, m_3\}$

$\forall_{i \in Agents} \quad k_i^h = 2$

מתחילים

$h = 1 \quad X_i^h = \emptyset \quad T^h = 1$

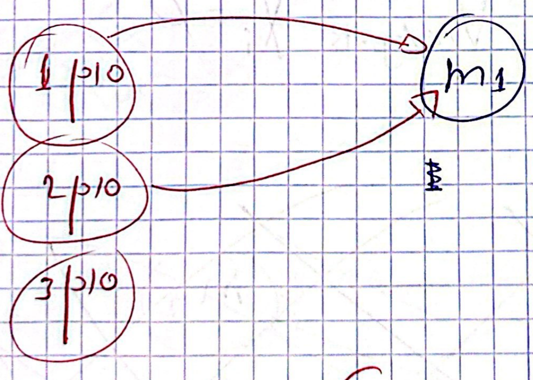
enter

Loop

enter

Loop

G_t^h



גרף הראשון ו- אין צורך להמשיך כי אין בגרף מעגל

$G = (1, 2, 3)$

[illegible]

בהינתן G ו- G_t^h מאותחל לריק

שניתן לבחור את m_1 אזי

1) סוכן 1 $(1,0)$ אזי לו, מספר של G סוכן 1

יהיה את m_1

2) סוכן 2 $(0,1)$

לכן

$$X_1^1 = \{m_1\}$$
$$X_2^1 = \emptyset$$
$$X_3^1 = \emptyset$$

End for

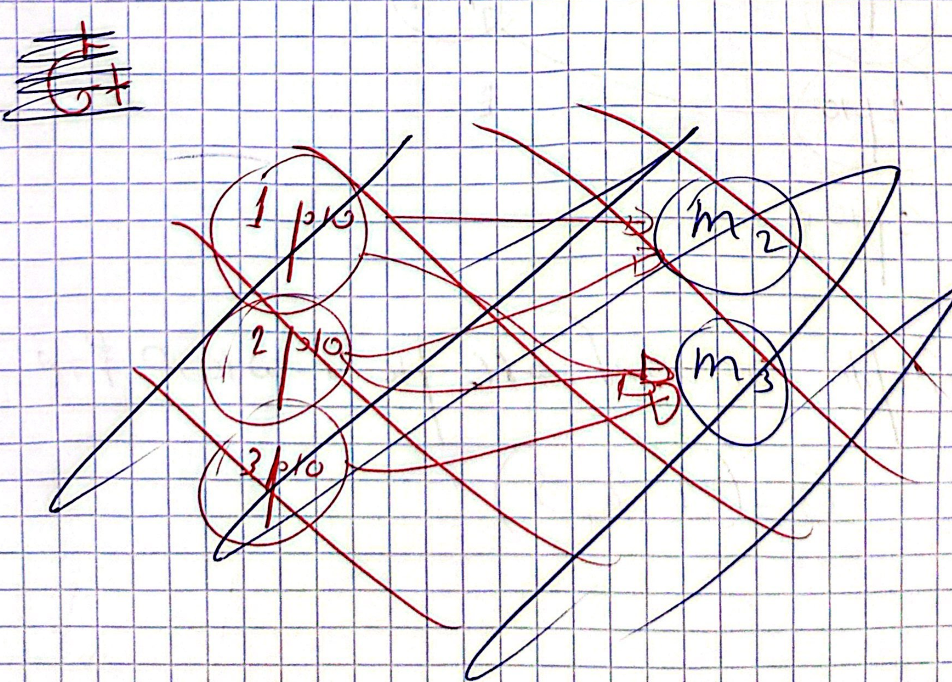
$$X_1 = \{m_1\}$$
$$X_2 = X_3 = \emptyset$$

End for

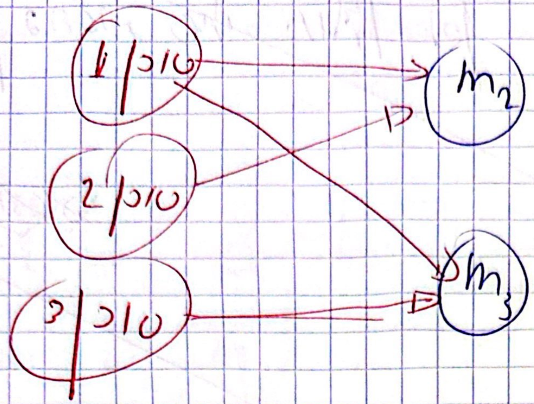
$T^h = 1$ $\quad \forall i \in Agents \; X_i^2 = \emptyset$ $\quad h = 2$

until loop ||

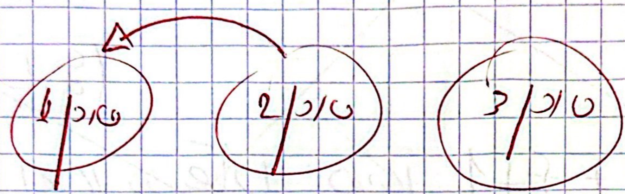
inner loop ||



G_4^n



Envy graph



$\hat{V}_2(X_1) > V_2(X_2)$

סדר אקראי:

1) נניח ~~2~~ אוהב את 3 {2,3 (אין ל3 אף שידוך, אז הוא...

~~נניח 2 אוהב 3 אוהב~~ ~~נניח 3 אוהב 2 אוהב 1~~

~~(3, 2, 1)~~

$G = (2, 1, 3)$ נניח 2 אוהב 1 אוהב 3

$$\begin{array}{cccc} & \text{סוכן 2} & \text{סוכן 1} & \text{סוכן 3} \\ \text{Vector} & m_2, & m_3, & \emptyset \end{array}$$

נמצא Max Probability Matching

$(1, 1, 0)$

לא הוקטור שלנו הוא לא

לא

$X_1^2 = \{m_3\}$

$X_2^2 = \{m_2\}$

$X_3^2 = \emptyset$

End for

אין פריטים שלא הוקצו לכן

$X_1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2 = \{m_2\}$

$X_3 = \emptyset$

End for

~~החלוקה~~

סיימנו :)

החלוקה כן שלנו היא F-EF1 מכיוון ש

End for

אין חפצים שלא הוקצו לכן

$X_1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2 = \{m_2\}$

$X_3 = \emptyset$

End for

סיימנו :)

החלוקה שלנו היא F-EF1 מכיוון ש סוכן 3

ו 2 מקנאים רק ב 1 עד-כדי פריט אחד

סוכן 2 מקנא עד-כדי m_1

סוכן 3 מקנא עד-כדי m_3

דוגמא 3

3 סוכנים 3 קטגוריות, המוצרים אוניברסליים

, פריטים שאינם מחולקים שאי אפשר לחלק

(מקסימום פריט אחד $|X_i^h| = k_i^h$)

$Agents = \{1, 2, 3\} = [3]$

$C^1 = \{m_1, m_2, m_3\}$

$C^2 = \{m_4, m_5\}$

$C^3 = \{m_6\}$

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
סוכן 1	1	1	0	1	1	1
סוכן 2	0	1	0	1	1	1
סוכן 3	0	0	0	0	0	1

$K_3^1 = 0 \quad K_2^1 = K_1^1 = 1$

$T^h_1 = 1$

מתחילים ב $\forall i \in Agents \; X_i^h = \emptyset$

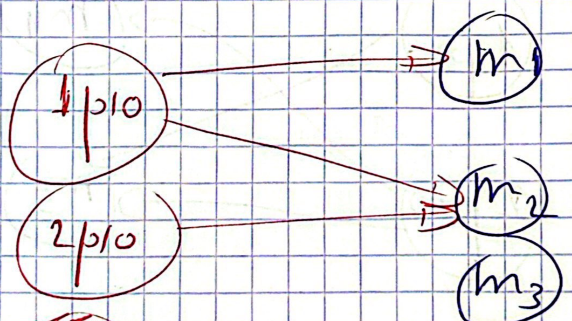
loop

I

loop2

I

G^1_t



לצור ארץ? הנאה: אין קנאה!

כמו לפני $\sigma = (1, 2, 3)$

לכן סכום אופטימלי, ועבור בסיבוב

$(1, 1)$

סוכן 1 לוקח m_1

סוכן 2 לוקח m_2

למצוא elicity matching

לכן

$X_1^1=\{m_1\}$ $X_3^1=\emptyset$

$X_2^1=\{m_2\}$

End Lab 2

הפריטים שעוד לא הוקצאו באיטרציה 1

$\{m_3\}$, אין אפשרות לתת לסוכן אקראי למישהו

שעדיין יש לו קיבולת כי פשוט כולם הגיעו למקס

של $|X_i^1| = k_i^1$ לכן m_3 נשאר ללא סוכן

$X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2\}$ $X_3=\emptyset$

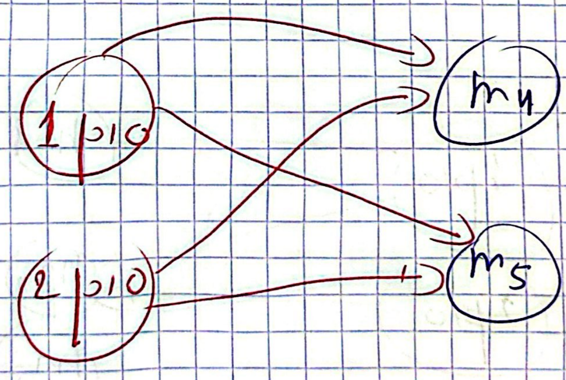
Ex.

$k_3^2=0$ $k_2^2=k_2^1=1$ $T_1^h=1$ $h=2$

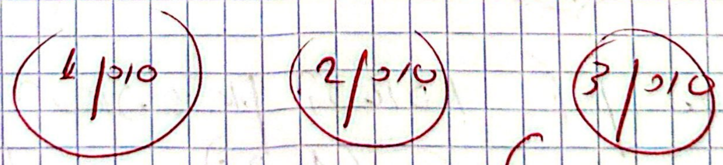
Loop1 II

Loop2 I

G_t^h



Envy graph



אין קשתות לכן נספר יפה איך שנרצה!

$\sigma=(2,1,3)$

Max ... Matching

לכן רואים ש סוכן 1 ו 2 רוצים את כל הפריטים

ניתן לכל אחד אחד מהם וכמו, לסוכן 2 m_5 ! סוכן 1 m_4, פתרנו את הסיבוב שלנו ולכן $(1,1)$

(סוכן 3 לא נכנס לחשבון כי, הפסדנו $k_3^2=0$ כבר לא מופיע בגרף סוכן - פריט בכלל)

לכן

End for 2

אין פריטים לא מחולקים לכן

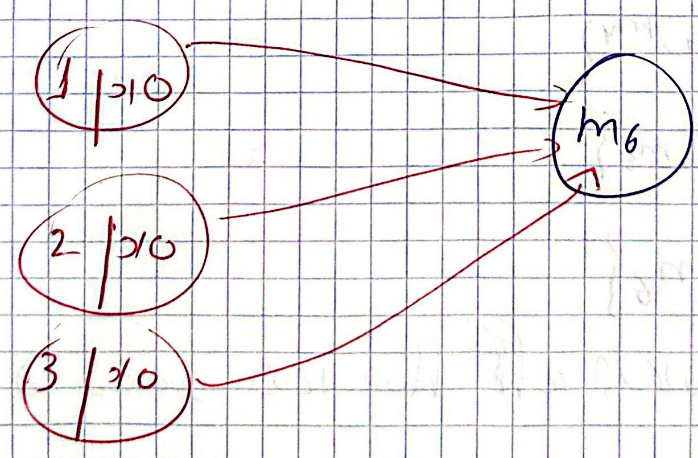
$X_1=\{m_1, m_4\}$

$X_2=\{m_2, m_5\}$

$X_3=\emptyset$

$T^h=1$ $\quad$ $n=3$ $\quad$ for 1 III

G_T^n



Envy graph

סוכן 1 סוכן 2 סוכן 3

אין קנאה!

נבחר $\sigma(3,2,1)$

לכן לפי סדר לקסיקוגרפי תמיד
כי כל ממקסם את הווקטור של התועלות
לתת את m_6 לסוכן 3 והוקטור יראה
כך $(1,0,0)$

לכן $X_1^3=X_2^3=\phi$ $X_3^3=\{m_6\}$

End for 2

~~אין פריטים לתת~~

אין פריטים שלא הוקצו לכן

$X_1=\{m_1,m_4\}$

$X_2=\{m_2,m_5\}$

$X_3=\{m_6\}$

החלוקה הסופית היא בטוח ללא קנאה F-EF

סיימנו :)