Algorithm 1: Biswas And Barman (Same capacities)

Per category Donal Dobbin

דוגמה 1: מתחילים מדוגמה פשוטה שמראה לנו הפרדות

מעבר פשוט בין 2 סוכנים

1) קבוצת סוכנים $[2] = Agents = \{1, 2\}$

2) הקצאות $X = \{X_1, X_2\}$, $X_1 = \emptyset$, $X_2 = \emptyset$

3) 2 קטגוריות ~~קטגוריה אחת~~ $C_1 = C_2 = \{C_i^1, C_i^2\}$ (קיבולות של קטגוריה)

4) $C^1 = \{m_1, m_2\}$, $C^2 = \{m_3\}$, $M = \{m_1, m_2, m_3\}$

5) מקבלות הערות לפריטים בכל אחד בנפרד (לא מתמטיות, הערות)

מכיוון ש bundle switching מצריך תוספות ? capacity

	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	2	8	7
סוכן 2	2	8	1

מכיוון שבקטגוריות בכלל יש חשיבות לפריטים אבל תמיד שונים בין סוכן לשני נשמור שהמטלות בקטגוריות שונות לעומת הקטגוריות

$k_i^h = |c_i^h|$

$V_k \ldots = V_2(m_k)$ אותן הערכות

תוך

נריץ את האלגוריתם

נתחיל מספר אקראי ל...

כמספר של האוגמה

מתחילים מכאן $X_1 = \emptyset$

$V_1(m_1) = 2 \quad V_1(m_2) = 8$

Algorithm 1 : Biswas And Barman (Same capacities)

Per category Round Robin

דוגמה 1: מתחילים מדוגמה פשוטה שמראה להראות

מדובר פשוט רק 2 סוכנים

1) קבוצת סוכנים $[2] = \text{Agents} = \{1, 2\}$

2) הקצאות $X = \{X_1, X_2\}$, $X_1 = \emptyset$, $X_2 = \emptyset$

3) 2 קטגוריות ~~הקטגוריות את~~ $C_1 = C_2 = \{c_i^1, c_i^2\}$ (קיבולות של קטגוריה)

4) $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ $C^1 = \{m_1, m_2\}$ $C^2 = \{m_3\}$

5) מבחינת היכולת לטפל בזה אחת בנפרד (לא מתמטיים להרמוניה)

מכיוון ש bundle switching מצריך תוספות ? Capacity

$V_k \ldots = V_2(m_k)$ אותן הערכות

תוקן

נריץ את האלגוריתם

נתחיל מספר אקראי לסוכנים נניח שזה כך.

הסדר של האגנטים $\sigma = (1, 2)$

מאותחלים כלומר $X_1 = \emptyset$

$V_1(m_1) = 2 \quad V_1(m_2) = 8$

דוגמא עם 2 (~~שלא עונה להגדרה בשאלה~~)

1. מריצים [redacted] Round Robin(σ, c^h)

$(1,2)$ $\quad c^1$

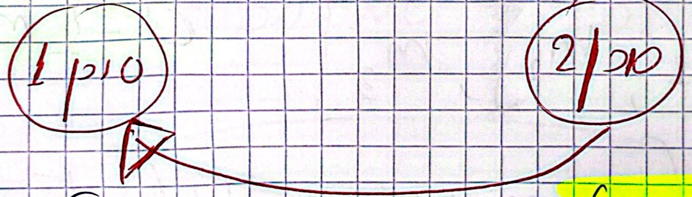
סוכן 1 מקבל את m_2 מכיון שהוא שמח יותר מ m_1

סוכן 2 מקבל את m_1, $V_1(m_1)=2 < V_1(m_2)=8$.

$$X_1^1=\{m_2\} \longrightarrow X_1=\{x_1^1\} \quad V(x_1^1)=8$$

$$X_2^1=\{m_1\} \longrightarrow X_2=\{x_2^1\} \quad V(x_2^1)=2$$

נצייר גרף קנאה   לכן יש הקצאה F-EF1



אין לנו מעגלים בגרף הקנאה לכן פלט

$\sigma \leftarrow$ סדר טופולוגי $(2,1)$

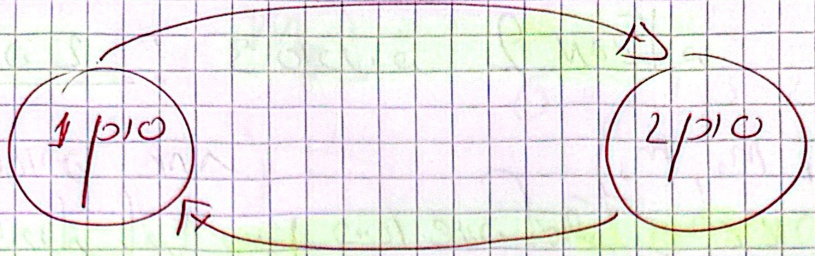
הולכים להגדרת ה 2 בשאלה

1. $RR(\sigma, c^2)$

בפעם סוכן 2 בא ראשון לבחור ונותר לו m_3

$V_1(m_3)=7, V_2(m_3)=1$ לכן לא נוצר עוד קנאות

ולבסוף, נצייר את גרף הקנאה החדש



$V(X_2)$

$V_1(X_2) = V_1(m_1) + V_1(m_3)$
$= 2 + 7 = \underline{9}$

$V_2(X_2) = V_2(m_2) + V_2(m_3)$
$= 2 + 1 = 3$

$V_1(X_2) > V_1(X_1)$ עכשיו סוכן 1 מקנא ב2

$V_2(X_1) = 8$

$V_2(X_1) > V_2(X_2)$

יש לנו מעגל בגרף הקנאה

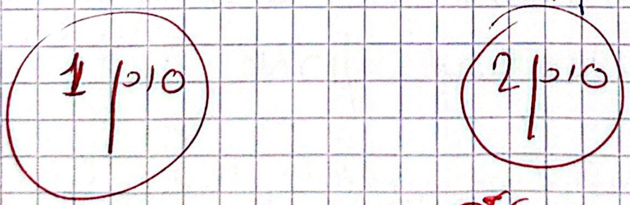
לכן אלגוריתם סילוק מעגלי קנאה נותנים לסוכן 2 את מתנות סוכן 1 ולהפך וכן

לכן

$X_1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2 = \{m_2\}$

כעת הגרף כך



אין קשתות קנאה

סוכן \ מתנה	X_1	X_2
1	9	8
2	8	3

דוגמה 2 : 3 סוכנים 2 מעבדים

קטגוריה אחת $C_1 = \{m_1, m_2, m_3\}$

פריטים לכל סוכן כולו שווה לשווי הקטגוריה.

סוכנים $[3] = Agents = \{1, 2, 3\}$

וסדר לפי אינדקס $\cancel{(1,2,3)}$ $\sigma = (1,3,2)$

טבלת הערכות

שורכה לשייר אותה כי יש 2 מעבדים

סוכן \ מעבדים/פריט	$\cancel{m_1}$	$\cancel{m_2}$	$\cancel{m_3}$
סוכן 1	5	6	5
סוכן 2	6	5	6
סוכן 3	5	6	5

מסקנות כדי לבנות את הדוגמה (הקשה לעבוד משמעותי לדוגמה)

1) סוכן 2 ; יבחר אחרון מהפרספקטיבה שלו

2) סוכן 1 + 3 לא משנה מי מהם יבחר ראשון
אך סוכן 2 יבחר לפניהם / קלוקים אחת

נעשה כך :

1) סוכן 1, 3 יבחרו לפני 2 בקטגוריה ראשונה (C^1)

2) סוכן 2 יבחר ראשון בקטגוריה שניה (C^2)

$C^1 = \{m_1, m_3\}$

$C^2 = \{m_2\}$ $\qquad \sigma = (1,3,2)$

loop I

לולאה 1 : נריץ על הקטגוריה 1 נפתור $RoundRobin(\sigma, C^1)$

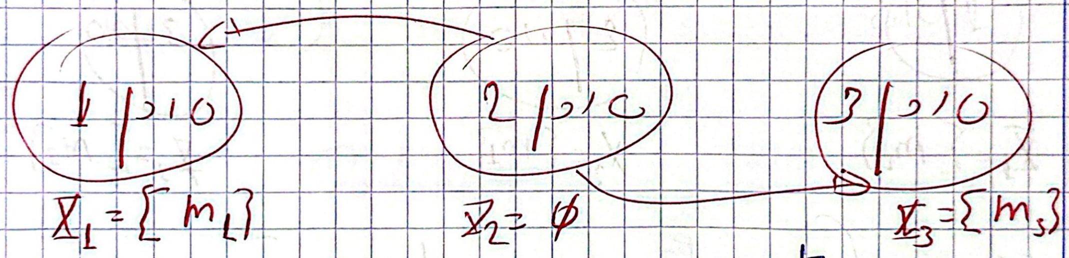
סוכן 1 בוחר ב m_1 $\quad V_1(m_1) = 5$

סוכן 3 בוחר ב m_3 $\quad V_3(m_3) = 5$

סוכן 2 אין לו אופציה לבחור כי אין פריטים

(לכן גם מבטיח לנו את EF1)

~~אחר~~ גרף הקנאה :



אין מעגלים ,

סדר טופולוגי $\longrightarrow$

1) $(2,1,3)$

או

2) $(2,3,1)$

נבחר את 1

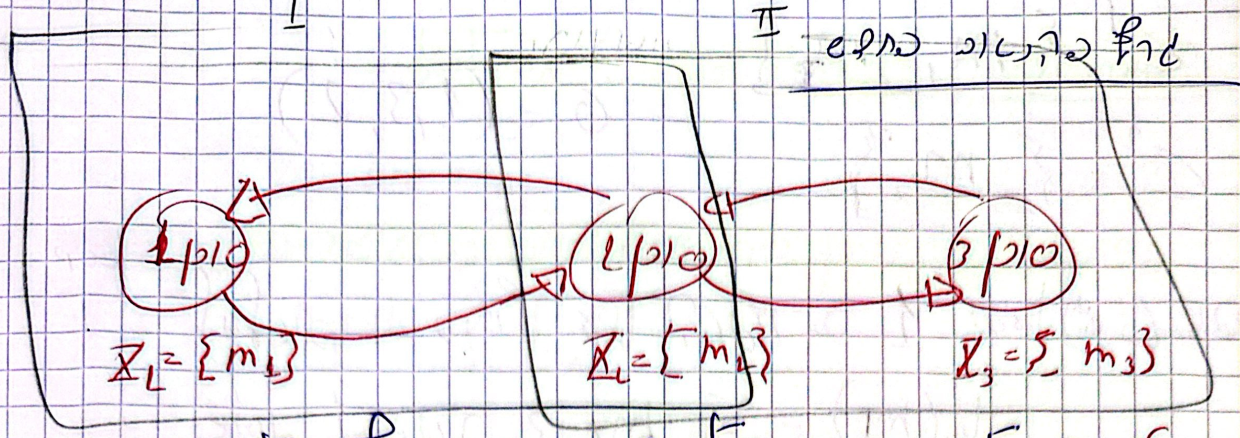
loop II

$RoundRobin((2,1,3), \underset{=\{m_2\}}{C^2})$, C^2 , $h=2$

אין לנו חוץ מפריט אחד בקטגוריה שזה m_2 , והקטגוריה נגמרה

שבחר סוכן 2 $V_2(m_2) = 5$,

גרף הרכיבים הקשורים

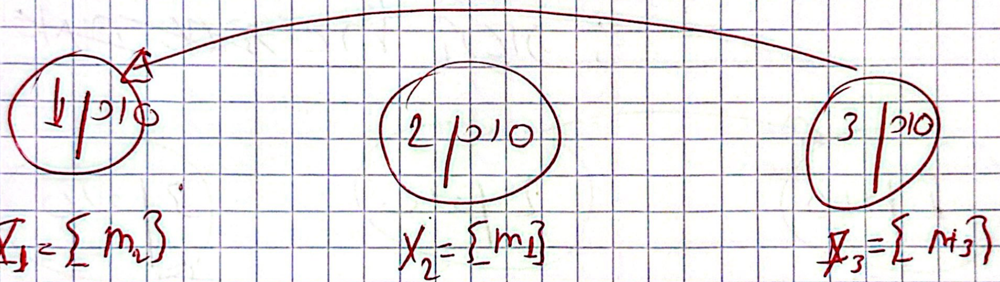


לכן קיבלנו 2 מעגלי קשירות בגרף שלנו

נצטרך לטפל בעניין, נבחר את מעגל I

ונחליף תוכניות של סוכן 1 ו סוכן 2

נקבל



בהוצאה אחת, ביטלנו את המעגל I אין לנו מעגלים עוד יותר, עכשיו נסדר טופולוגית topological sort

1) נבחר צומת שאין צלעות שמצביעות אליה: {סוכן 3, סוכן 2}

2) נמחק אותם ואת הצלעות ונחזור על התהליך

נבחר את סוכן 3 ואז סוכן 2 ואז סוכן 1

לכן הסדר המתקבל הוא $(3, 2, 1)$

הערה - כל אחד מקבל יותר טוב בהתאמה הסופית.

סופי

Output $X_1=\{m_2\}$ $X_2=\{m_1\}$ $X_3=\{m_3\}$

דוגמה 3: [redacted] עם 4 סוכנים 4 פריטים

$[4] = Agents = \{1, 2, 3, 4\}$

$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$

$C = \{C^1, C^2\}$

$\sigma = (1, 2, 3, 4)$

לכל סוכן i: $V_i(m) = 1 \quad m \in C^1$

לכל סוכן i: $V_i(m) = 10 \quad m \in C^2$

	m_1	m_2	m_3	m_4
סוכן 1	1	1	1	10
סוכן 2	1	1	1	10
סוכן 3	1	1	1	10
סוכן 4	1	1	1	10

C^1

$C^2 =$

$\{\forall i \in$

הערכות זהות לכולם $V_i(m_k) = V_j(m_k)$ $\quad \forall j, i \in [4]$, $k \in [|M|]$

loop 1: ~~נר.~~ נריץ $Round Robin((1,2,3,4), C^1)$

לכן כל סוכן מקבל פריט לפי הסדר של σ נניח שכל

סוכן בחר בפריט המתאים לאינדקס שלו

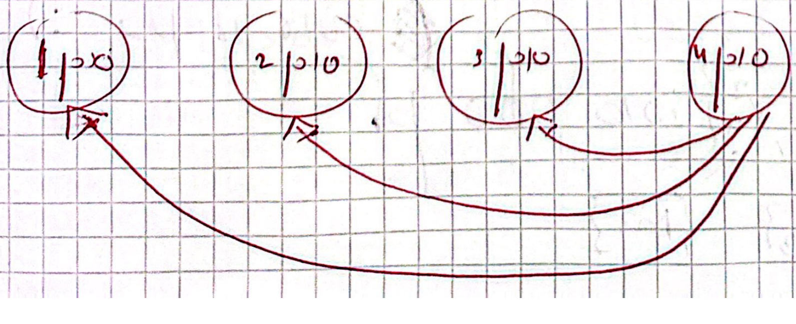
(סוכן i בוחר ב m_i), הגענו לסיטואציה שבה כל

הקצאה חוץ מהאחרון מכיוון שלא נשאר עוד פריטים

בקטגוריה. לכן

גרף הקנאה: Envy graph

I



דוגמה 3: [redacted] ל 4 סוכנים 4 פריטים

לכל פריט ב C^1 $v_i(m)=1\ \ m\in C^1$

לכל פריט ב C^2 $v_i(m)=10\ \ m\in C^2$

$$[4] = \text{Agents} = \{1,2,3,4\}$$

$$M=\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$$

$$C=\{C^1, C^2\} \qquad C^1=\{m_1,m_2,m_3\}$$

$$\sigma=(1,2,3,4) \qquad C^2=\{m_4\}$$

$$\boxed{X_i=\emptyset \quad \forall i\in[4]}$$

$\forall i,j\in[4]$
$k\in[|M|]$

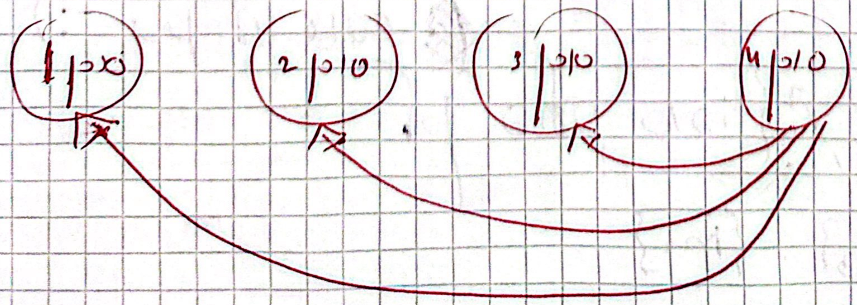
$v_i(m_k)=v_j(m_k)$ הערכות זהות לכולם

loop 1

ריצה Round Robin$((1,2,3,4), C^1)$

לכן כל סוכן מקבל פריט בסבב הזה σ נותר אותו
כאן אחרי הסבב המיקום לאחרון שלו
(סוכן 1 בוחר ב m_i), הגענו לסיטואציה שבה לכל
קודקוד חוץ מהאחרון מכוון שלא נבחר עוד פריטים
תלויים לכן

גרף הקנאה: Envy graph



אין מעגלים, סדר טופולוגי קבלנו במקרה

ונבטל את סוכן 4 בראשון יש לנו 3

אופציות לסדר, ניקח את זה

$(4, 1, 2, 3)$

~~$(4, 2, 1, 3)$~~

~~$(4, 1, 3, 2)$~~

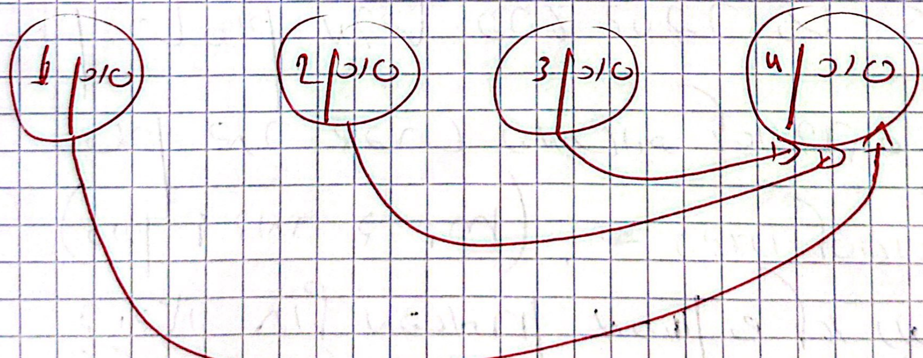
$V_1(m_4)=10 \quad C^2=\{m_4\} \quad \sigma(4,1,2,3)$ Loop II

נריץ $RoundRobin(\sigma, C^2)$

לכן סוכן 4 יקבל את הפריט m_4 ויוצא מ RR

כי לא נותר עוד פריטים,

גרף הקנאה Envy graph II



אין עוד מעגלים, אין לולאות עוד יותר

סדר טופולוגי, קיבלנו סידור שסוכן 4 הוא באחרון

נתן לו עונש :)

לכן פלט סופי $X=\{X_1^1, X_2^1, X_3^1, \cancel{X_4^1}, X_4^2\}$

$=\{m_1\} \quad \{m_2\} \quad \{m_3\} \quad \{m_4\}$

Algorithm 2 : CRR ~~[illegible]~~

Single category + Different capacities

2 סוכנים אחד מהם עם $k_1^h=0$ דוגמא 1

$$[2] = Agents = \{1, 2\}$$

$$L = C^h = \{m_1\} \quad K^h = \{k_1^h = 0,\ k_2^h = 1\}$$

$$P = \{i : k_i^h = 0\} = \{1\}$$

$$t = 0,\ x_1^h = \emptyset \quad x_2^h = \emptyset \qquad \sigma(1, 2)$$

~~נריץ את~~ נריץ את CRR

$$L \neq \emptyset \quad (L = C^h = \{m_1\})$$

$$i = \sigma[0] = 1$$

לכן לא נכנסים לתנאי if $(1 \in P)$

$$t = t + 1 \bmod (2) = 1$$

נחזור ל if

$L \neq \emptyset$ ✓

$$i = \sigma[1] = 2$$

$$2 \notin P$$

נכנסים לשלב ג שלולאה; פריטים לסוכן 2

פונקציה את המקסימלי; כיוון מקבלת ערך תוך מניעת שרק

פריט אחד יש אז סוכן מקבל

$$X_2^h = \{m_2\}$$

לא נשכח להוסיף את $i=2$ לרשימה

שמסופקים כי $|x_i^h| = k_i^h = 1$

① $\varphi \leftarrow \varphi \cup \{2\}$ ② $L \leftarrow L \setminus \{m_1\} = \emptyset$

While
עולים ב-i בסוכן מסוים אחרים
אין לנו עוד פריטים | $L=\emptyset$ לכן יוצאים
מפני גורמים

פלט סופי:

$$X^h = \{X_1^h, X_2^h\}$$

$$X_1^h = \emptyset, \quad X_2^h = \{m_1\}$$

חלוקה זו היא F-EF1 (בגלל סוכן 1 לא מקנא כי הוא לא מעוניין בפריטים) היא אפילו F-EF

דוגמא 2: 3 סוכנים, 4 מפגשים

$$M = \{m_i \mid i \in [4]\} = C^h = L$$

$$Agents = [3] = \{1,2,3\} \quad \sigma = (1,2,3)$$

$$\forall_{i\in[3]}\ k_i^h = 2, \quad \forall_{i\in[3],\ m\in M}\ v_i(m) = 1$$

$$\forall_{i\in[3]}\ X_i^h = \emptyset, \quad t=0 \quad \varphi = \emptyset$$

טבלת הערכות

	m_1	m_2	m_3	m_4
סוכן 1	1	1	1	1
סוכן 2	1	1	1	1
סוכן 3	1	1	1	1

טבלת קיבולת

סוכן 1	2
סוכן 2	2
סוכן 3	2

מתחילים (:

$L \neq \emptyset$

$i = \sigma[0] = 1$

$1 \notin \varphi$ ✓

Scanned with CamScanner

לכן נותנים לסוכן 1 לבחור את הפריט המקסימלי בערכו עבורו, משום שלסוכן יש את ערך $=1$
(מקסימום) לו לבחור נותנים לסוכן את m_1
לכן

$$X_1^h = \{m_1\}$$

$$L = L \setminus \{m_1\} = \{m_2, m_3, m_4\}$$

$$|K_1^h| \neq |X_1^h|$$

$$2 \neq 1$$

לכן לא מכניסים לרשימת המסומנים

$$t = t + 1 \mod (3) = \underline{\underline{1}}$$

Loop II

בלולאה $L \neq \emptyset$, $i = \sigma[1] = 2$, $i \notin P$

סוכן 2 בוחר, נתן לו m_2 (מאוזנת סוכנים שמצב ערך$=1$)

$$L = L \setminus \{m_2\} = \{m_3, m_4\}$$

$$X_2^h = \{m_2\}$$

בלולאה

$$|X_2^h| \neq |K_2^h|$$

$$1 \neq 2$$

$$t = t + 1 \mod 3 = \underline{2}$$

Loop II

בלולאה $L \neq \emptyset$ $i = \sigma[2] = 3$ $i \notin P$

סוכן 3 נתן לו את m_3

$$L = L \setminus \{m_3\} = \{m_4\}$$

$$X_3^h = \{m_3\}$$

$$|X_3^h| \neq |K_3^h|$$

$$1 \neq 2 \qquad t = t + 1 \mod 3 = \underline{\underline{0}}$$

Scanned with CamScanner

Loop III

$i \notin P \qquad i = \sigma[0] = 1 \;,\; L \neq \emptyset$ $= \{m_4\}$ פלוט

חזרנו לסוף 1, כיוון שמכונה יש לו עוד קודקודים לסוף
פריט, נתן לו את הפריט שנותר m_4

$$X_1^h = \{m_1, m_4\}$$

$$L = L \setminus \{m_4\} = \emptyset$$

$$|X_1^h| = k_1^h = 2$$

לכן מוסיפים אותו לרשימת המסומנים

$$P = P \cup \{1\}$$

$$t = t+1 \quad mal3 = 1$$

Loop IV

$$L = \emptyset \qquad \text{הערה}$$

$\cancel{L = \emptyset}$

לכן סיימנו לולאה
ולכן קיבלנו מהלולאה המחיצה את X^h סיימנו

$$X^h = \{\underbrace{\{m_1, m_4\}}_{X_1^h}, \underbrace{\{m_2\}}_{X_2^h}, \underbrace{\{m_3\}}_{X_3^h}\}$$

דוגמא 3 להראות שמקרה כזה אפשר לבצע FEF

$M = \{m_1, m_2\} = L = C^h$

$[2] = Agents = \{1, 2\}$ $\quad \forall_{i \in Agents}\ k_i^h = 1$

$P = \emptyset$ $\quad t = 0$ $\quad \forall_{i \in Agents}\ X_i^h = \emptyset$ $\quad \sigma = (1, 2)$

Blocked $\quad$ iterator

Agent \ item	m_1	m_2
1	10	5
2	5	10

כללית הערכות

נריץ את CRR :)

Loop I

$L = \{m_1, m_2\}$

$L \neq \emptyset$

$i = \sigma[0] = 1$

$i \notin P$

לפי $g = \arg\max_{g \in L}(v_1(\{g\})) = m_1$

לכן $X_1^h = \{m_1\}$

$L = L \setminus \{m_1\} = \{m_2\}$

מכיוון ש $|X_1^h| = k_1^h = 1 \longrightarrow P = P \cup \{1\}$

$t = 1$

Loop II

$i = \sigma[1] = 2 \notin P, \quad L \neq \emptyset$

לפי הערכה של סוכן 2 $g = \{m_2\}$

$L = L \setminus \{m_2\} = \emptyset$

$X_2^h = \{m_2\}$

$P = P \cup \{2\} = \{1, 2\}$ מכיוון ש $|X_2^h| = k_2^h = 1$

$t = 0$

מכיוון ש $L = \emptyset$ לכן סיימנו terminates Loop

return X^h

$$X^h = [\overset{X_1^h}{\{m_1\}}, \overset{X_2^h}{\{m_2\}}]$$

במקרה שלנו כל סוכן רוצה $\hat{v}_1(X_1) \geq \hat{v}_1(X_2)$ לכן

הם כמובן F-EF שכן יותר חזק מ F-EF1

סיימנו (:

Algorithm 3: CRR 2 categories

דוגמה 1 ,2 סוכנים, 2 קטגוריות, ~~[illegible]~~

Agent	m1	m2	m3
Agent1	10	1	1
Agent2	1	1	1

$[2] = Agents = \{1, 2\}$ $\forall_{i \in \ldots}$

$\forall_{i \in Agents} \; k_i^h = 2$

$C^1 = \{m_1, m_2\}$ $\quad C^2 = \{m_3\}$ $\quad G = (1, 2)$

1) נריץ את $CRR(G, C^1)$ (כפי שראינו בהרצאה על איך האלגוריתם מתנהג בדוגמאות הקודמות, כפי שהגדר ונתן פלט סופי ל CRR)

Output 1 $\rightarrow$ $X_1^1 = \{m_1\}$ $\quad X_2^1 = \{m_2\}$

2) נבצע היפוך סדר של G $\quad G = (2, 1)$ $\quad Reverse(G) = (2, 1)$

נריץ $CRR(G, C^2)$

Output 2 $\rightarrow$ $X_1^2 = \emptyset$ $\quad X_2^2 = \{m_3\}$

$$\forall_{i \in Agents} \; X_i^1 \cup X_i^2 = \underbrace{\{m_1\}}_{\text{סוכן 1}} \quad \underbrace{\{m_2, m_3\}}_{\text{סוכן 2}}$$

בדוגמה הזו נראה כי ה-EF1 מתקיים

$$\hat{V}_1(X_1) \geq \hat{V}_1(X_2 \setminus \{m_3\})$$

דוגמא 2 + מקרה פרטי של CRR להמחשה:

יש שני קטגוריות $C^2=\emptyset$

$$\cancel{M=\{m_1, m_2\}} \quad C^1=\{m_1, m_2, m_3\} \quad C^2=\emptyset$$

$$\sigma=(1,2,3) \qquad [3]=Agents=\{1,2,3\}$$

$$K_1^1=1 \quad K_2^1=2 \quad K_3^1=0$$

1) נריץ $CRR(\sigma, C^1)$ (כמובן הסדרנו יותר מפי עלי לכן נעקוב רק על הפלט C)

Output →
$$X_1^1=\{m_1\}$$
$$X_2^1=\{m_2, m_3\}$$
$$X_3^1=\emptyset$$

Agent \ Item	m_1	m_2	m_3
1	10	3	3
2	3	1	1
3	∞	∞	∞

לא מקבל כלום כי $K_3^1=0$

נהפוך סדר $\sigma_{new}=(3,2,1)$

וכעת $C^2=\emptyset$ לכן סיימנו

$$CRR(\sigma_{new}, \emptyset)=\emptyset$$

~~Output →~~

$$X_1=\{m_1\} \quad X_2=\{m_2, m_3\}$$ ת. סופית

$$X_3=\emptyset$$

דוגמה 3   4 סוכנים , 6 פריטים

$[4] = Agents = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad \forall_{\underset{[4]}{i}, \underset{m}{k}}$

$C^1 = \{m_1, m_2\}$ $\quad C^2 = \{m_3, m_4, m_5, m_6\}$

Agent	m1	m2	m3	m4	m5	m6
Agent1	1	1	1	10	1	1
Agent2	10	1	1	1	1	1
Agent3	1	1	10	1	1	1
Agent4	1	1	1	1	10	1

$\forall_{i \in [4]} \; k_i^2 = 1$

$\forall_{i \in [4]} \; k_i^1 = 1$

$\sigma = (2, 4, 1, 3)$

1) נריץ $CRR(\sigma, C^1)$

output $\rightarrow$ $X_2^1 = \{m_1\}$ $\quad X_3^1 = \emptyset$

$X_4^1 = \{m_2\}$ $\quad X_1^1 = \emptyset$ כי רואים F-EFF1

$\sigma = (3, 1, 4, 2)$

2) נשנה סדר

נריץ $CRR(\sigma, C^2)$

output $\rightarrow$ $X_3^2 = \{m_3\}$ $\quad X_4^2 = \{m_5\}$

$X_1^2 = \{m_4\}$ $\quad X_2^2 = \{m_6\}$

חלוקה סופית

$X_1 = \{m_4\}$ $\quad X_2 = \{m_1, m_6\}$

$X_3 = \{m_3\}$ $\quad X_4 = \{m_2, m_5\}$

מכיון שכל סוכן קיבל את ה10 שלו לכן אין קנאה EF

Algorithm 1 - Different capacities (Identical Valuations)

(With identical Valuations, there is no envy cycles in the Envy graph)

דוגמא 1

2 סוכנים, קטגוריה אחת (כפי שלמדנו)

שאין מעגלים בגרף קנאה

$$Agents = [2] = \{1,2\} \qquad \forall_{i \in Agents,\ k \in M}\ V_i(k) = 1$$

$$C^1 = \{m_1, m_2, m_3\} \qquad \forall_{i \in Agents}\ k_i^1 = 2,\ k_i^2 = 2$$

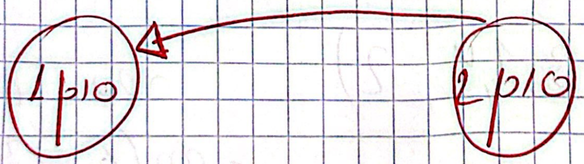
$$\sigma = (1,2) \qquad C^2 = \{m_4\}$$

$CRR(\sigma, C^1)$ הרצה

Loop I

Output $\rightarrow$ $X_1^1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2^1 = \{m_2\}$



Envy graph

$$\sigma = \text{topological sort}(G) = (2,1)$$

מפעילים את CRR עם 2 קטגוריות

Loop II

$\cancel{\sigma = C^2 \mid A}$ $CRR(\sigma, C^2)$

~~Output~~ $\rightarrow$ $\cancel{X_2^2 = \{}$

~~σ(2)...~~

output $\rightarrow X_2^2 = \{m_4\}$

לכן מאחר ואותו הרכיב של גרף-תחליף

$$X_1 = \{m_1, m_3\} \qquad V(X_1) = V(X_2) = 2$$

$$X_2 = \{m_2, m_4\}$$

לכן התיאוריה פסוקית כיוון הקצאה ולכן מקבלים F-EF1

כי הקצאה F-EF

דוגמה 2 3 סוכנים, 3 קטגוריות, הגבלות שונות

$$M = C^1 \cup C^2 \cup C^3$$

$$[3] = Agents = \{1, 2, 3\}$$

$$C^1 = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$$

$$C^2 = \{m_5, m_6, m_7\}$$

$$C^3 = \{m_8, m_9\}$$

$$k_1^1 = 0 \qquad k_2^2 = 0 \qquad k_3^3 = 0$$

$$\forall_{i,j} \; k_i^j = 4 \qquad i \neq j,\; i \in Agents,\; j \in [3]$$

$$\forall_{i \in Agents, \, k \in M} \; V_i(k) = 1$$

(Same Valuations for simplicity we assume all equal to 1)

$$\sigma = (1, 2, 3)$$

מתחילים (:

I) $CRR(\sigma, C^1)$

output $\rightarrow X_1^1 = \emptyset \quad X_2^1 = \{m_1, m_3\} \quad X_3^1 = \{m_2, m_4\}$

k_i^j	C^1	C^2	C^3
סוכן 1	0	4	4
סוכן 2	4	0	4
סוכן 3	4	4	0

Envy graph

סוכן 1   סוכן 2   סוכן 3

~~$v_3(X_2^1)=2 > v_3(X_3^1)=1$~~

אין קנאה

בכלל אפשר כל אופציה כי אין קנאה

Topological Sort

נבחר קודקוד שלא נכנסו לו צלע.

יש לנו 2 אופציות $\{1, 3\}$

ניקח 1, נמחק אותו ונחזור על התהליך עד שמסתיים

$\sigma = (1, 3, 2) \rightarrow$ אבל יש עוד אופציות כמו $(3,2,1)$ $(3,1,2)$

Loop II

$CRR(\sigma, c^2)$

נזכיר כי $k_2^2=0$ לכן רק $(1,3)$ יקבלו פריטים

לפי CRR

Output $\rightarrow$ $X_2^2=\emptyset$ $\quad X_1^2=\{m_5, m_7\}$

$X_3^2=\{m_6\}$

~~$X_1=\{m_5, m_7\}$~~

~~$X_2=\{m_1, m_3\}$~~

~~$X_3=\{m_3, m_6\}$~~

$X_1=\{m_5, m_7\}$ $\quad V(X_1)=2$

$X_2=\{m_1, m_3\}$ $\quad V(X_2)=2$

$X_3=\{m_2, m_4, m_6\}$ $\quad V(X_3)=3$

Envy graph

סוכן 1 סוכן 2 סוכן 3

אין קשתות

$$\sigma = (3, 2, 1)$$

$CRR(\sigma, C^3)$ $\boxed{III}$

output $\rightarrow$ $X_3^3 = \emptyset$ $X_2^3 = \{m_8\}$ $X_1^3 = \{m_9\}$

כעת

$X_1 = \{m_5, m_7, m_9\}$

$X_2 = \{m_1, m_3, m_8\}$

$X_3 = \{m_2, m_4, m_6\}$

Envy graph

סוכן 1 סוכן 2 סוכן 3

אין קשתות

[illegible]

כמו כן הוא F-EF

דוגמה 3 :- 3 סוכנים, 3 קטגוריות, פריט אחד לכל קטגוריה

$$M = \{m_1, m_2, m_3\} \qquad C^1 = \{m_1\} \quad C^2 = \{m_2\} \quad C^3 = \{m_3\}$$

$$\forall_{\substack{i \in [3] \\ h \in |C|}} \; k_i^h = 1$$

$$\sigma = (1, 2, 3)$$

$V(m_1) = 7$
$V(m_2) = 8$
$V(m_3) = 9$

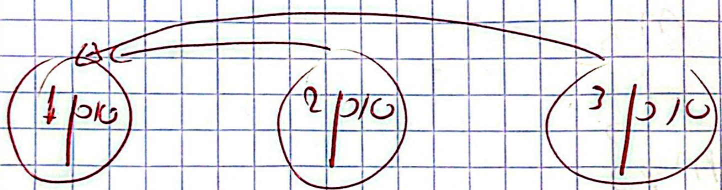
מתחילים בלולאה

loop I

$$CRR(\sigma, C^1)$$

output → $X_1^1 = \{m_1\}$

כל השאר $X_i^1 = \emptyset$



$$\sigma = (2, 3, 1)$$

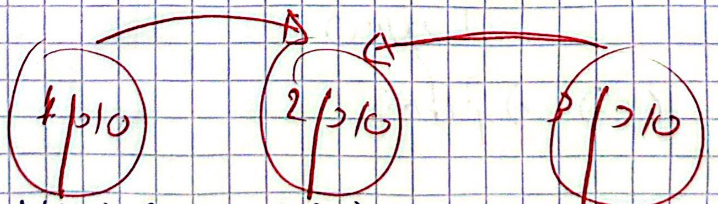
סדר טופולוגי

loop II

$$CRR(\sigma, C^2)$$

output → $X_2^2 = \{m_2\}$

כל השאר $X_i^2 = \emptyset$



$V(x_1) = 7$ $V(x_2) = 8$ $V(x_3) = 0$

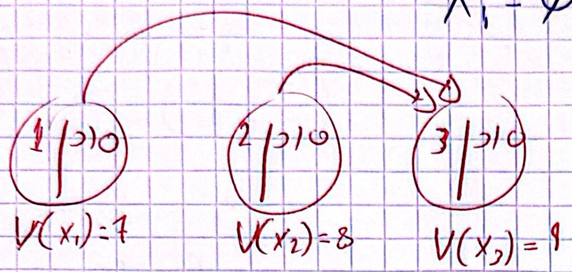
$$\sigma = (3, 1, 2)$$ ← סדר טופולוגי

Loop (1)

$CRR(\sigma, C^3)$

Output $\rightarrow X_3^3 = \{m_3\}$

$X_1^3 = \emptyset$ כל נשאר



$X = \{\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}\}$ תוצאה סופית

$X_1 \quad X_2 \quad X_3$

F-EF1

Algorithm 5: Different capacities + Binary Valuations (same partition constraints)

דוגמה 1

$J_i \rightarrow$ Desired item set

$\text{Agents} = \{1, 2\} \quad C^1 = [m_1, m_2, m_3]$

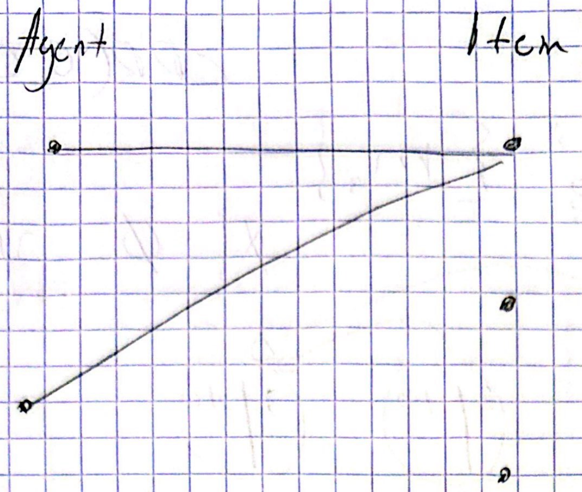
$V_1(m_1) = 1 \quad V_2(m_2) = 1$ the rest is $V_i(m_k) = 0$

$k_1^1 = 1 \quad k_2^1 = 2 \rightarrow T^h = 2$

$h = 1 \quad X_i^h = \emptyset$ לכל סוכן

$T^1 = 2$

V_i	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	1	0	0
סוכן 2	0	1	0



Matching

Matching is a subset of edges in which there is no 2 edges sharing 1 node

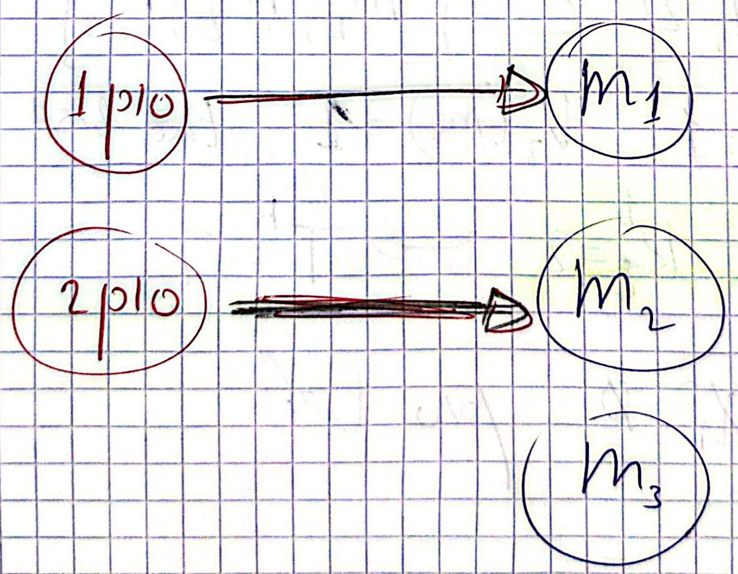
= 1) 2 Agents same Item

2) 2 Items 1 agent (We need item at a time)

Agent-Item Graph

$h = 1$

Loop I



Envy graph

פריט 1 פריט 2

אין קשתות!

topological order $\sigma = (1, 2)$

Priority Matching

לפי שקבענו G_t^h במצב הכי טוב צריך להראות שהוא מקסימום.

כל אחד מקבל $\underset{\text{פריט 1}}{1}, \underset{\text{פריט 2}}{1}$ כי פריט 1 הולך ל m_1

פריט 2 הולך ל m_2

$X_1^1 = \{m_1\}$ $X_2^1 = \{m_2\}$

לכן

$h = 2$ Loop II

Agent - Item graph

פריט 2 m_3

$v_2(m_3) = 0$ (not desirable)

Envy graph

פריט 1 פריט 2

אין קשתות

$G=(2,1)$

Probability Matching

אין לנו התאמה כי מכיוון שסוכן 2 אין לו אינטרס ב m_3

לכן התאמה מקסימלית ריקה כלומר (0) משקל

Loop terminated (T^h loop) (inner loop)

~~Loop terminated (h loop)~~

מקדם כל פריט שלא הותאם

לסוכן כלשהו שיש לו עניין ביחידה במחיר הנוכחי

סוכן 2 מקבל את m_3 (למרות שהוא לא שווה 1 סכום)

$X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2,m_3\}$

Loop terminated (h loop) (outer loop)

סיום: $X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2,m_3\}$

כמובן שהשמה הזו אינה יעילה כי כל סוכן לא

מעוניין במה ש.י. לסוכן האחר (לא כ.ג. לגבי תפוקה

של אינטרס ב G_h^+ וכן $V_2(m_3)=0$)

דוגמה 2 3 סוכנים, תפיסת אלגוריתם ב G_h^t

$Agents = \{1, 2, 3\} = [3]$

$\forall_{i \in [3], k \in M} \; V_i(k) = 1$ (כולם מעוניינים בכל הפריטים) $i \neq 3$, $i \neq 2$

חוץ מסוכן 3 שהוא רק מעוניין ב m_3

וסוכן 2 רוצה רק m_1, m_2

	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	1	1	1
סוכן 2	1	1	0
סוכן 3	0	0	1

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$

$C^1 = \{m_1\}$ $\quad C^2 = \{m_2, m_3\}$

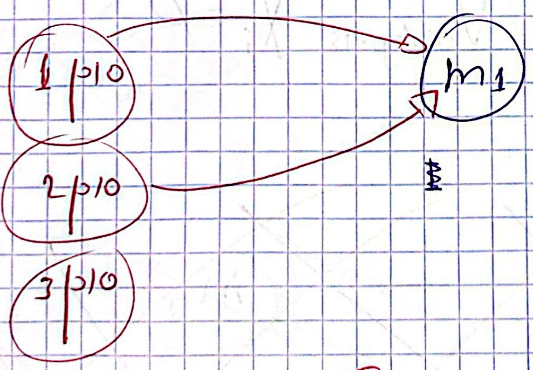
$\forall_{i \in Agents} \; K_i^h = 2$

מתחילים

$h = 1 \quad X_i^h = \emptyset \quad T^h = 1$

until
T
Loop
forever
I
Loop

G_*^h



גרף הנאום ו- אין טעם לבנות כי אין השתתפות עמית

$G = (1, 2, 3)$

Plurality Matching

תכונות | G ! G_t^1 אופטימלית

שיכולים לקחת את m_1 אלו

1) סוכן 1 $(1,0)$ אוכל לו, מספר של G סוכן 1

יקח את m_1

2) סוכן 2 $(0,1)$

לכן

$$X_1^1=\{m_1\}$$

$$X_2^1=\emptyset$$

$$X_3^1=\emptyset$$

End for

$$X_1=\{m_1\}$$

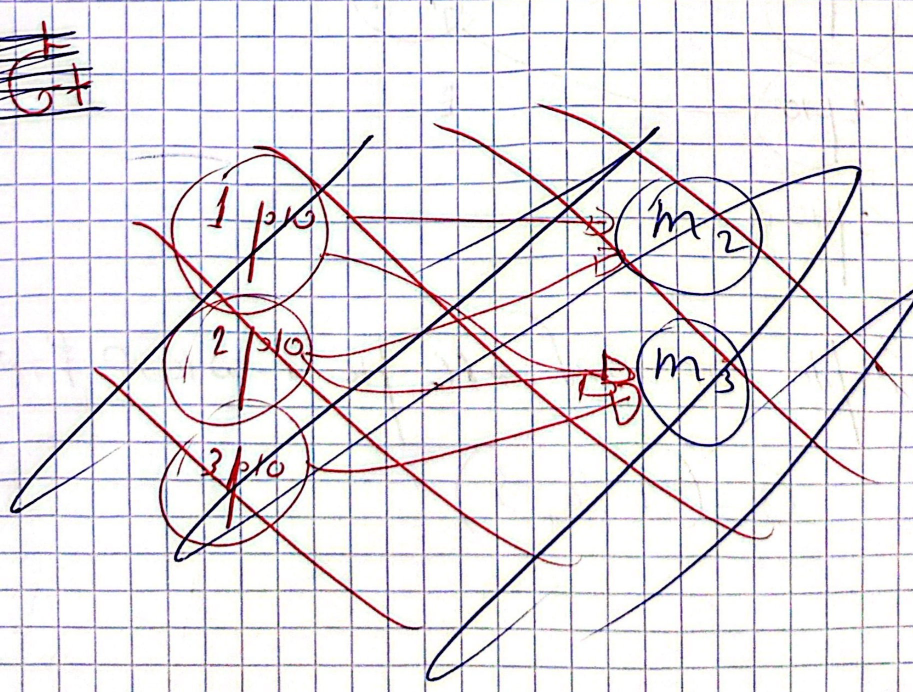
$$X_2=X_3=\emptyset$$

End for

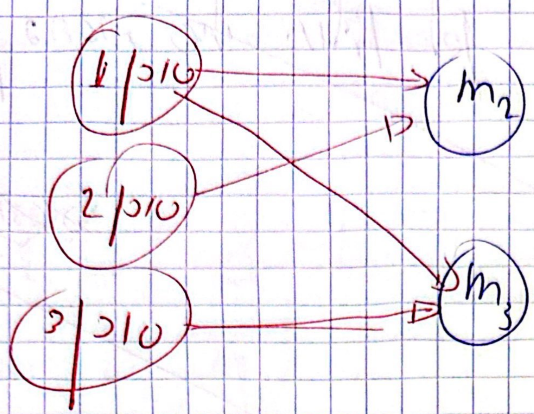
$T^h=1 \qquad \forall i \in \text{Agents}\ X_i^2=\emptyset \qquad h=2$

until loop ||

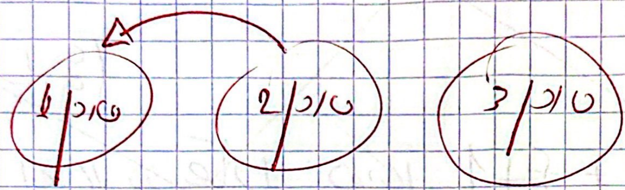
inner loop ||



G_4^h



Envy graph



$\hat{V}_2(X_1) > V_2(X_2)$

סדר אופטימלי.

1) נניח ~~2 אח~~ אחרי 3 {2,3 (אין ל3 [illegible])

$G=(2,1,3)$ נניח 2 אחרי 1 אחרי 3

$$\begin{array}{cccc} & \text{2 סוכן} & \text{1 סוכן} & \text{3 סוכן} \\ \text{Vector} & (m_2, & m_3, & \emptyset) \end{array}$$

$(1, 1, 0)$

Max Probity matching נסמן

לכן הוקטור שלנו הוא

$X_1^2=\{m_3\}$

$X_2^2=\{m_2\}$

$X_3^2=\emptyset$

End for

אין פרגמנט שלא תלויה לכן

~~כתוצאה~~

$X_1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2 = \{m_2\}$

$X_3 = \emptyset$

End for

סיימנו (:

התוצאה כך שלנו היא F-EF1 מכיוון e

End for

אין תפזיה שלא בודדת לכן

$X_1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2 = \{m_2\}$

$X_3 = \emptyset$

End for

סיימנו (:

כתוצאה שלנו הוא F-EF1 מכיוון ש סוכן 3

ו 2 מקנאים ב 1 ע״י טעם פריט אחד

סוכן 2 מקנא ע״י טעם m_1

סוכן 3 מקנא ע״י טעם m_3

דוגמא 3

3 סוכנים, 3 קטגוריות, העדפות אדיטיביות, פריטים שלא מסומנים שאי אפשר לתת ~~[illegible]~~
(מכיוון שמסומן $|X_i^h| = k_i^h$)

$$Agents = \{1, 2, 3\} = [3]$$

$$C^1 = \{m_1, m_2, m_3\}$$

$$C^2 = \{m_4, m_5\}$$

$$C^3 = \{m_6\}$$

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
סוכן 1	1	1	0	1	1	1
סוכן 2	0	1	0	1	1	1
סוכן 3	0	0	0	0	0	1

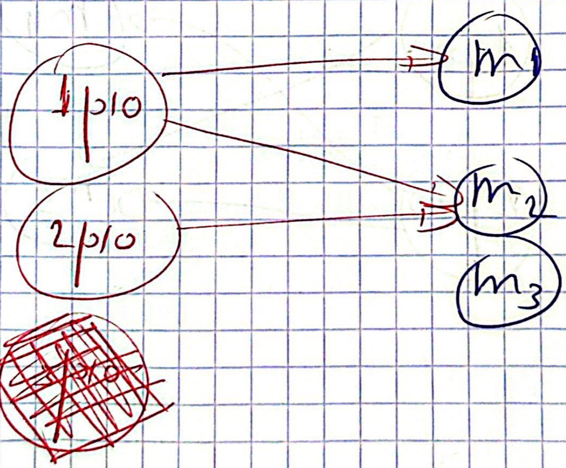
$K_3^1 = 0 \quad K_2^1 = K_1^1 = 1$

מתחילים ב- $\forall i \in Agents\ X_i^h = \emptyset$

$T^h = 1$

loop
I
loop2
I

~~Agent~~ G^h



לבנות גרף קנאה: אין קנאה! לכן סדר טופולוגי, כמו לפיו $\sigma = (1, 2, 3)$

ונבחר בסיבוב
$(1, 1)$

~~$(1, 1, 0)$~~

למצוא plurality matching :-
סוכן 1 לוקח m_1
סוכן 2 לוקח m_2

לכן $X_1^1=\{m_1\}$ $X_3^1=\emptyset$

$X_2^1=\{m_2\}$

End for 2

הפריטים שעוד לא הוקצו בקטגוריה 1

$\{m_3\}$, אין אפשרות לתת לסוכן אחר כי למישהו

שעדיין יש לו קיבולת כי בשביל כולם הגיעו למצב

של $|X_i^1|=k_i^1$ לכן m_3 נשאר ללא סוכן

$X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2\}$ $X_3=\emptyset$

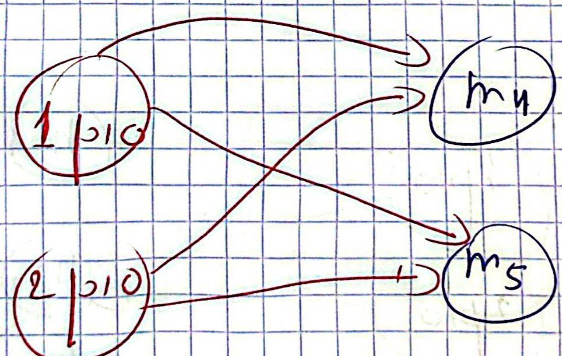
Ex.

$k_3^2=0$ $k_2^2=k_2^1=1$ $T^h=1$ $h=2$

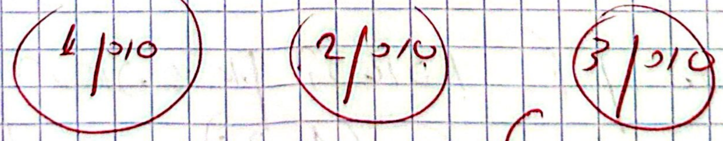
Loop1 II

Loop2 I

G_T^h



Envy graph



אין קשתות לכן נסדר איך שנרצה!

$\sigma=(2,1,3)$

Max Proportionality Matching

לכן רצינו ש סוכן 1 ו 2 רוצים את כל הפריטים

ניתן לכל אחד אחד מהם וכמו, לסוכן 2 m_5 ! סוכן 1

עם m_4 , פורקו רק הסיבוק שלנו יהיה $(1, 1)$

(סוכן 3 לא נכנס לחשבון כי, הפסד $k_3^2=0$ הוא לא מופיע
בגרף סוכן - פריט בכלל)

לכן

End for 2

אין פריטים לא מחולקים לכן

$X_1 = \{m_1, m_4\}$

$X_2 = \{m_2, m_5\}$

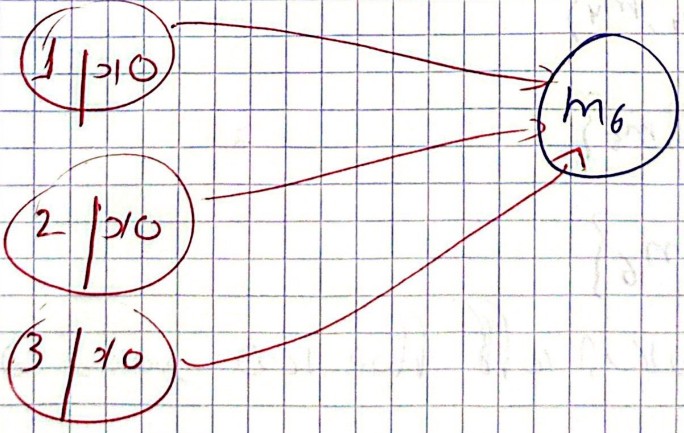
$X_3 = \emptyset$

for 1

III

$T^h = 1 \qquad h = 3$

G_T^h



Envy graph

סוכן 1   סוכן 2   סוכן 3

אין קשתות!

נבחר $\sigma(3,2,1)$

לכן לפי סדר לקסיקוגרפי תמיד
כי כל למקסם את הווקטור של התועלת
לתת את m_6 לסוכן 3 והווקטור.. רצוי
רק $(1,0,0)$

לכן $X_1^3 = X_2^3 = \emptyset \qquad X_3^3 = \{m_6\}$

End for 2

~~אין פריטים לחלק~~

אין פריטים שלא חולקו לכן

$X_1 = \{m_1, m_4\}$

$X_2 = \{m_2, m_5\}$

$X_3 = \{m_6\}$

בחלוקה כוללת היא גם ללא קנאה F-EF

סיימנו :)