Algorithm 1 :- Biswas And Barman (Same capacities)

Per category — Donal Dobbin

דוגמה 1 : מתחילים מדוגמה פשוטה שמתרגמת לפרקטיקה

מעגל פשוט בין 2 סוכנים

1) קבוצת סוכנים $[2] = \text{Agents} = \{1, 2\}$

2) הקצאות $X = \{X_1, X_2\}$, $X_1 = \emptyset$, $X_2 = \emptyset$

3) 2 קטגוריות ~~קטגוריה אחת~~ $C_1 = C_2 = \{C_i^1, C_i^2\}$ (קטגוריות של הדוגמה)

4) $C^1 = \{m_1, m_2\}$, $C^2 = \{m_3\}$

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$

5) מקבלות הרעיון לעשות כזה אותו דבר (לא מתעמקים בדרישות)

מכיוון ש bundle switching מצריך תוספות ל Capacity

	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	2	8	7
סוכן 2	2	8	1

מכיוון שבקטגוריות הכל יש חשיבות להקצאות אבל תמיד שורה בין סוכן לשני נשמר שלמות הקבלת שווה לערכי הקטגוריות

$k_i^h = |c_i^h|$

$V_k \ldots = V_2(m_k)$ אותן הערכות

תוקן

נריץ את האלגוריתם

ניתן מספר אקראי ל...

כמספר של האגנטים

מתחילים כאשר $X_1 = \emptyset$

$V_1(m_1) = 2$ $V_1(m_2) = 8$

Algorithm 1 :- Biswas And Barman (Same capacities)

Per category Round Robin

דוגמה 1: מתחילים מדוגמה פשוטה שמראה להראות
מערך פשוט קיים 2 סוכנים

1) קבוצת סוכנים

$$[2] = Agents = \{1, 2\}$$

2) הקצאות

$$X = \{\underset{=\emptyset}{X_1}, \underset{=\emptyset}{X_2}\}$$

3) 2 קטגוריות ~~הקטגוריה את~~

$$C_1 = C_2 = \{C_i^1, C_i^2\}$$ (קבוצות של פריטים)

4)

$$C^1 = \{m_1, m_2\}$$
$$C^2 = \{m_3\}$$

$$M = \{m_1, m_2, m_3\}$$

5) מתחילות היום לבדוק כמה אולי כבר (לא מתמודדים להרצה)
מכיוון ש bundle switching מצריך תוספות ל Capacity

V_k ... $= V_2(m_k)$ אותן הערכות

תוקף

נריץ את האלגוריתם

נתחיל מספר אקראי לסוכנים ננית שפה זה.

$\sigma = (1, 2)$ הסדר של האקראית

מאתחלים לכולם $X_1 = \emptyset$

$$V_1(m_1) = 2 \qquad V_1(m_2) = 8$$

Scanned with CamScanner

דוגמא עם 2 (~~שלא עבד הקצאה באקראי~~)

1. מריצים [redacted] Round Robin(σ, c^h)

$\sigma = (1,2)$, $c^h = c^1$

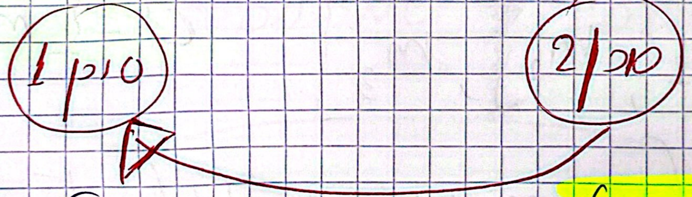
סוכן 1 מקבל את m_2 מכיון שהוא שווה יותר מ m_1

סוכן 2 מקבל את m_1, $\underline{V_1(m_1)=2 < V_1(m_2)=8}$.

$$X_1^1 = \{ m_2 \} \longrightarrow X_1 = \{ X_1^1 \} \quad V(X_1^1) = 8$$

$$X_2^1 = \{ m_1 \} \longrightarrow X_2 = \{ X_2^1 \} \quad V(X_2^1) = 2$$

<u>נצייר גרף קנאה</u> לכן יש פתרון F-EF1



אין לנו מעגלים בגרף הקנאה לכן פותרים

$\sigma \xrightarrow{\text{סדר טופולוגי}} (2,1)$

כעת לאיטרציה 2 בלולאה

1. $RR(\sigma, c^2)$

הפעם סוכן 2 בא ראשון לבחור ונותן לו m_3

$V_1(m_3)=7$, $V_2(m_3)=1$ לכן לא נוצר עוד פתרונות

עכשיו, נצייר את גרף הקנאה החדש

סוכן 1 — סוכן 2

$V(X_2)$

$V_1(X_2) = V_1(m_1) + V_1(m_3) = 2 + 7 = 9$

$V_2(X_2) = V_2(m_1) + V_2(m_3) = 2 + 1 = 3$

$V_1(X_2) > V_1(X_1)$ עכשיו סוכן 1 מקנא ב2

$V_2(X_1) = 8$

$V_2(X_1) > V_2(X_2)$

יש לנו מעגל בגרף הקנאה

לכן אלגוריתם סילוק מעגלי קנאה נותנים לסוכן 2 את חבילת סוכן 1 ולהפך לכן

$X_1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2 = \{m_2\}$

בגרף כעת:

סוכן 1 — סוכן 2

אין קשתות

סוכן \ חבילה	X_1	X_2
1	9	8
2	8	3

דוגמה 2 : 3 סוכנים 2 מפגשים

קטגוריה אחת $C_1 = \{m_1, m_2, m_3\}$

העדפות לכל סוכן כאן שונה לעומת הקודמת.

$[3] = Agents = \{1, 2, 3\}$ 3 סוכנים

וסדר לפי אינדקס $\cancel{\sigma = (1,2,3)}$ $\sigma = (1,3,2)$

טבלת הערכות שנרצה לשייך אותה כפי לכל 2 מפגשים

~~מכיוון שהוגדר כפי שאמרנו לכל~~

סוכן \ מפגש	$\cancel{m_1}$	$\cancel{m_2}$	$\cancel{m_3}$
סוכן 1	5	6	5
סוכן 2	6	5	6
סוכן 3	5	6	5

מסקנות כדי לבנות את הדוגמה (קשה לעבור מדוגמה לדוגמה)

1) סוכן 2 : בחר אחרון מהפרספקטיבה שלו

2) סוכן 1+3 לא משנה מי מהם בחר ראשון
אך סוכן 2 בחר לפניהם / בלולאה אחת

נעשה כך :

1) סוכן 1,3 בוחרים לפני 2 באיטרציה ראשונה (C^1)

2) סוכן 2 בוחר ראשון באיטרציה שנייה (C^2)

$C^1 = \{m_1, m_3\}$

$C^2 = \{m_2\}$ $\qquad \sigma = (1,3,2)$

loop I

לולאה 1 - נריץ עד הקטגוריה 1 נפעיל $RoundRobin(\sigma, C^1)$

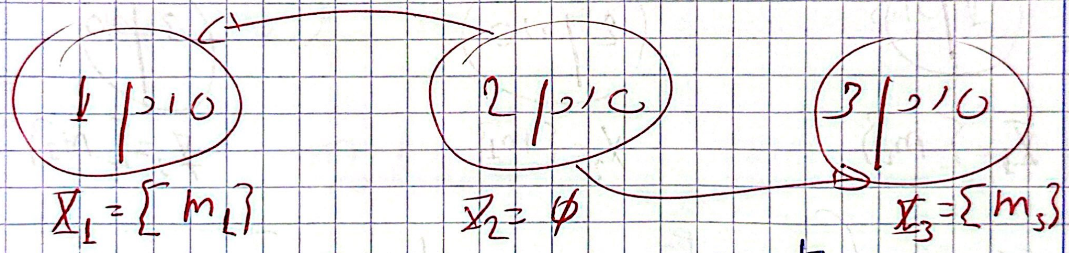
סוכן 1 בוחר ב m_1 $V_1(m_1) = 5$

סוכן 3 בוחר ב m_3 $V_3(m_3) = 5$

סוכן 2 אין לו אופציה לבחור כי אין פריטים

(לכן גם מבטיח לנו את EF1)

~~אחר~~ גרף הקנאה :



אין מעגלים,

סדר טופולוגי →

1) $(2,1,3)$

או

2) $(2,3,1)$

ניקח את 1

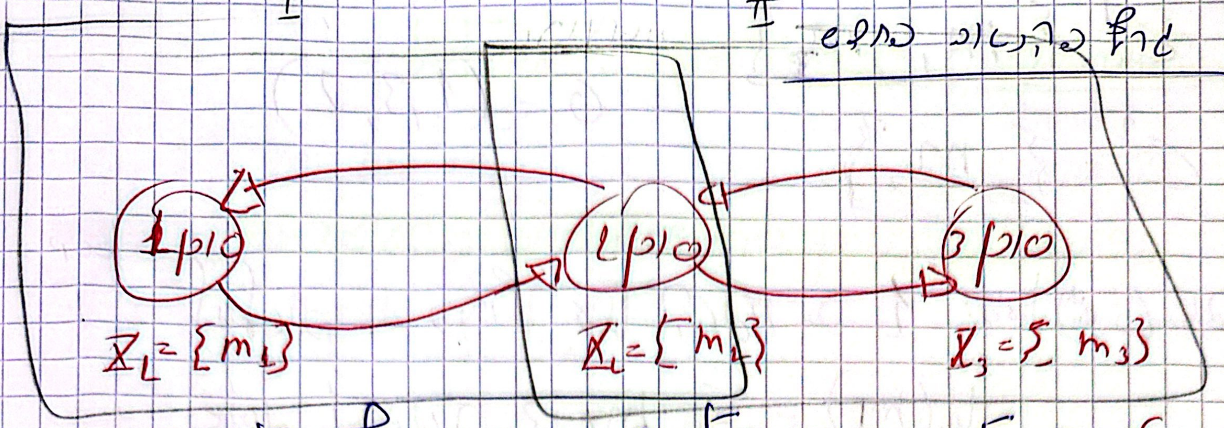
loop II

$RoundRobin((2,1,3), C^2)$, $C^2 = \{m_2\}$, $h=2$

אין לנו יותר מפריט אחד m_2 , והקטגוריה נגמרה

שכבר סוכן 2 $V_2(m_2)=5$,

גרף הרכיבים החזקים

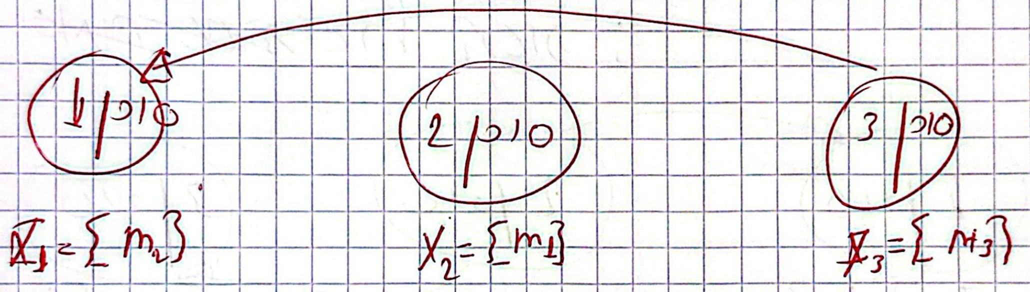


לכן קיבלנו 2 מעגלים קשירים בגרף שלנו

ונצטרך לטפל בעניין נבחר את מעגל I

ונחליף תכולות של סוכן 1 וסוכן 2

נקבל



כתוצאה אחרי שפתרנו אחד במעגל I אין לנו מעגלים עוד יותר, עכשיו נסדר טופולוגית topological Sort

1) נבחר צומת שאין צלעות שמצביעות אליה:
{סוכן 3, סוכן 2}

2) נמחק אותם ואת הצלעות ונחזור על התהליך

בהתחלה את סוכן 3 ואז סוכן 2 ואז סוכן 1

לכן הסדר המתקבל הוא $(3,2,1)$

(הערה - כל אחד שסדר שונה לא משנה בתוצאה הסופית.)

Output $X_1=\{m_2\}$ $X_2=\{m_1\}$ $X_3=\{m_3\}$ סופי

דוגמה 3: [redacted] עם 4 סוכנים 4 פריטים

$[4] = \text{Agents} = \{1,2,3,4\}$

לכל סוכן i: $V_i(m) = 1 \quad m \in C^1$

לכל סוכן i: $V_i(m) = 10 \quad m \in C^2$

$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$

	m_1	m_2	m_3	m_4
סוכן 1	1	1	1	10
סוכן 2	1	1	1	10
סוכן 3	1	1	1	10
סוכן 4	1	1	1	10

$C = \{C^1, C^2\}$

$\sigma = (1,2,3,4)$

$\forall_{j,i \in [4]}$
$k \in [|M|]$ $\quad V_i(m_k) = V_j(m_k)$ הערכות זהות לכולם

loop 1: נריץ $\text{Round Robin}((1,2,3,4), C^1)$

לכן כל סוכן מקבל פריט אחד לפי σ ונניח שבסוף

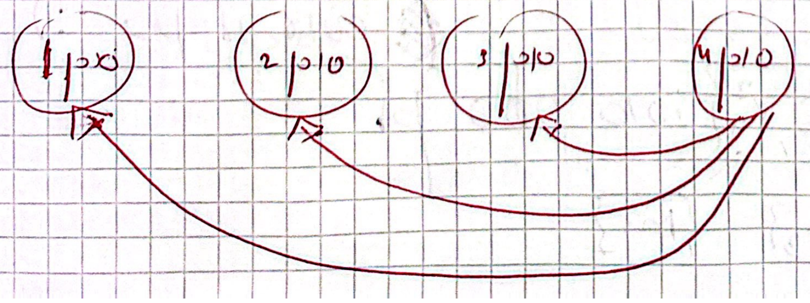
סוכן אחד קיבל המתאים לאינדקס שלו

(סוכן i קיבל את m_i), הגענו לסיטואציה שבה

קיבלו את כל הפריטים מכיוון שלא נשאר עוד פריטים

בקטגוריה. לכן

גרף הקנאה: Envy graph



דוגמה 3: 4 סוכנים 4 פריטים

$[4] = \text{Agents} = \{1,2,3,4\}$

לכל פריט $v_i(m) = 1 \quad m \in C^1$

לכל פריט $v_i(m) = 10 \quad m \in C^2$

$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$

$C = \{C^1, C^2\}$ $\quad C^1 = \{m_1, m_2, m_3\}$

$\sigma = (1,2,3,4)$ $\quad C^2 = \{m_4\}$

$\boxed{X_i = \emptyset \quad \forall i \in [4]}$

הערכות זהות לכולם $V_i(m_k) = V_j(m_k)$ $\quad \forall j,i \in [4]$, $k \in [|M|]$

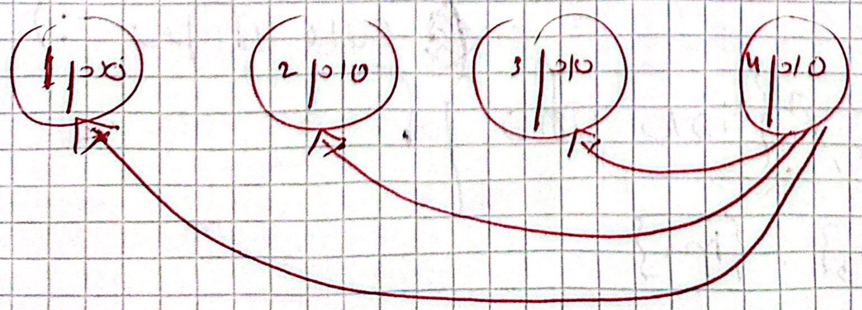
loop 1 נריץ $\text{Round Robin}((1,2,3,4), C^1)$

לכן כל סוכן מקבל פריט בסבב של σ ונניח שכל סוכן בחר בפריט המתאים לאינדקס שלו (סוכן i בוחר ב m_i), בהתאם לסימטריות שכתבנו

קיבלנו תוך מספר סבבים מכיוון שלא נשאר עוד פריטים

חלוקה. לכן

גרף הקנאה: Envy graph



אין מעגלים, סדר טופולוגי קיים במקרה
וכדאי את סוכן 4 בראשון יש לנו גם
אופציה לסדר, ניקח את זה

$(4,1,2,3)$

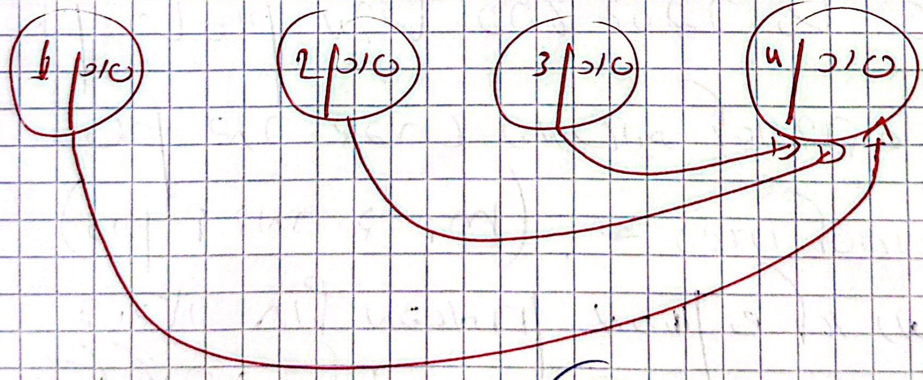
$V_1(m_4)=10$ $\quad C^2=\{m_4\}$ $\quad \sigma(4,1,2,3)$ Loop II

נריץ RoundRobin(σ, C^2)

לכן סוכן 4 יקח את הפריט m_4 ובאיטרציית RR
כי לא נותר עוד פריטים,

גרף הקנאה

Envy graph II



אין עוד הקשתות, אין לולאות עוד יותר
סדר טופולוגי, קיים בדיוק יחיד שסוכן 4 הוא האחרון
נתן לו עונש :)

לכן הפלט סופי $X=\{X_1^1, X_2^1, X_3^1, \cancel{X_4^1}, X_4^2\}$
$=\{m_1\}\ \{m_2\}\ \{m_3\}\ \{m_4\}$

Algorithm 2 :- CRR ~~[illegible]~~

Single category + Different capacities

דוגמה 1 — 2 סוכנים אחד מהם $k_1^h=0$ שלו

$[2]$ = Agents $= \{1, 2\}$

$L = C^h = \{m_1\}$ $\quad K^h = \{k_1^h = 0, k_2^h = 1\}$ ~~[illegible]~~

$P = \{i : k_i^h = 0\} = \{1\}$

$t = 0, \quad X_1^h = \emptyset \quad X_2^h = \emptyset \qquad \sigma(1, 2)$

~~[illegible]~~ נריץ את CRR

$L \neq \emptyset \quad (L = C^h = \{m_1\})$

$i = \sigma[0] = 1$

$(1 \in P)$ לכן לא נכניס אותו לאף

$t = t + 1 \bmod (2) = 1$

נחזור לאף

$L \neq \emptyset$ ✓

$i = \sigma[1] = 2$

$2 \notin P$

נכניס לשלב שלו: פריטים לסוכן 2

פונקציה את המקסימום: קיבלנו מקסימום ערך לפי מכיוון שרק

פריט אחד יש אז אין תחרות

$X_2^h = \{m_2\}$

לא נשכח להוסיף את $i=2$ לרשימה

שמסומנים כי $1 = k_1^h = |X_1^h|$

① $\varphi \to \varphi \cup \{2\}$ ② $L \to L \setminus \{m_1\} = \emptyset$

While

עוד יש i שמכסתן מספיק מוגדרת | אין לנו עוד פריטים | לכן $L=\emptyset$ ויוצאים מהלולאה

פלט סופי

$X^h = \{X_1^h, X_2^h\}$

$\quad\quad = \emptyset \quad\quad = \{m_1\}$

הלוקה סופית היא F-EF1 (בגלל סוכן 1 לא מקנא כי גם לא מקנא בפריטים) | היא אינה F-EF

דוגמה 2 :- 3 סוכנים, 4 חפצים

$M = \{m_i \mid i \in [4]\} = C^h = L$

$Agents = [3] = \{1,2,3\}$ $\sigma = (1,2,3)$

$\forall_{i\in[3]}\ k_i^h = 2$, $\forall_{i\in[3], m\in M}\ v_i(m) = 1$

$\forall_{i\in[3]}\ X_i^h = \emptyset$, $t=0$ $\varphi = \emptyset$

מתחילים :)

$L \neq \emptyset$

$i = \sigma[0] = 1$

$1 \notin \varphi$ ✓

Agent	m1	m2	m3
Agent1	10	1	1
Agent2	1	10	1
Agent3	1	1	10

לכל קטגוריה

סוכן 1	2
סוכן 2	2
סוכן 3	2

לכן נותנים לסוכן 1 לבחור את הפריט המקסימלי בערכו עבורו, משום שלסוכן יש את ערך $=1$
נמצא לו לבחור, נותנים לסוכן את m_1
לכן

$$X_1^h = \{m_1\}$$

$$L = L \setminus \{m_1\} = \{m_2, m_3, m_4\}$$

$$|K_1^h| \neq |X_1^h|$$

$$2 \neq 1$$

לכן לא מכניסים לרשימת המסומנים

$$t = t+1 \mod(3) = \underline{\underline{1}}$$

Loop II

בלולאה $L \neq \emptyset$, $i = \sigma[1] = 2$, $i \notin P$

סוכן 2 בוחר, נתן לו m_2 (מאוותנים סוכנים שמם ערך$=1$)

$$L = L \setminus \{m_2\} = \{m_3, m_4\}$$

$$X_2^h = \{m_2\}$$

בלולאה

$$|X_2^h| \neq |K_2^h|$$

$$1 \neq 2$$

$$t = t+1 \mod 3 = \underline{2}$$

Loop II

בלולאה $L \neq \emptyset$ $i = \sigma[2] = 3$ $i \notin P$

סוכן 3 נתן לו את m_3

$$L = L \setminus \{m_3\} = \{m_4\}$$

$$X_3^h = \{m_3\}$$

$$|X_3^h| \neq |K_3^h|$$

$$1 \neq 2$$

$$t = t+1 \mod 3 = \underline{\underline{0}}$$

Scanned with CamScanner

Loop III

$i \notin P \quad i = \sigma[0] = 1 \;,\; L \neq \emptyset = \{m_4\}$ פלוג

אפרגו לסוכן 1, כיוון שמכן יש לו עוד קודקוד לעוד פריט נתן לו את הפריט שנותר m_4

$$X_1^h = \{m_1, m_4\}$$

$$L = L \setminus \{m_4\} = \emptyset$$

$$|X_1^h| = k_1^h = 2$$

לכן מוסיפים אותו לרשימת המסומנים

$$P = P \cup \{1\}$$

$L = L+1 \quad mal3 = 1$

Loop IV

$L = \emptyset$ הערה ~~$L = \emptyset$~~

לכן סיימנו לחלק

ולכולם מקבלים מתוכם את X^h סיימנו

$$X^h = \{\underbrace{\{m_1, m_4\}}_{X_1^h}, \underbrace{\{m_2\}}_{X_2^h}, \underbrace{\{m_3\}}_{X_3^h}\}$$

דוגמא 3 להראות שמקרה כזה אפשר להגיע FEF

$M = \{m_1, m_2\} = L = C^h$

$[2] = Agents = \{1, 2\}$ $\quad \forall_{i \in Agents}\ k_i^h = 1$

$\underset{Blocked}{P} = \emptyset \quad \underset{iterator}{t} = 0 \quad \forall_{i \in Agents}\ x_i^h = \emptyset \quad \sigma = (1, 2)$

טבלת הערכות

Agent \ item	m_1	m_2
1	10	5
2	5	10

נריץ את CRR :)

Loop I

$L = \{m_1, m_2\}$

$L \neq \emptyset$

$i = \sigma[0] = 1$

$i \notin P$

לכן $g = \arg\max_{g \in L}(V_1(\{g\})) = \underline{m_1}$

לכן $x_1^h = \{m_1\}$

$L = L \setminus \{m_1\} = \{m_2\}$

$P = P \cup \{1\} \Leftarrow |x_1^h| = k_1^h = 1$ כמו ש

$t = 1$

Loop II

$i = \sigma[1] = 2 \notin P,\ L \neq \emptyset$

לכן מעדיף של סוכן 2 $g = \{m_2\}$

$L = L \setminus \{m_2\} = \emptyset$

$X_2^h = \{m_2\}$

$P = P \cup \{2\} = \{1, 2\}$ מכיוון ש $|X_2^h| = k_2^h$
$= 1$

$t = 0$

מכיוון ש $L = \emptyset$ לכן סיימנו terminates Loop

return X^h

$$\begin{array}{cc} & X_1^h \quad\quad X_2^h \\ X^h = & [\{m_1\}, \{m_2\}] \end{array}$$

במקרה שלנו כל סוכן רואה ש $\hat{v}_i(X_i) \ge \hat{v}_i(X_j)$ לכן

קיבלנו F-EF שזה יותר חזק מ F-EF1

סיימנו (:

Algorithm 3 : CRR 2 categories

דוגמה 1

~~[illegible]~~, 2 קטגוריות, 2 סוכנים

Agent	m1	m2	m3
Agent1	10	1	1
Agent2	1	1	1

$[2] = Agents = \{1, 2\}$

$\forall_{i \in Agents} \; k_i^h = 2$

$C^1 = \{m_1, m_2\} \quad C^2 = \{m_3\} \quad \sigma = (1, 2)$

1) נריץ את $CRR(\sigma, C^1)$ (פירטנו בהרחבה על איך האלגוריתם מתנהג בדוגמאות הקודמות, פה נקצר וניתן פלט סופי תחת CRR)

Output 1 $\rightarrow \quad X_1^1 = \{m_1\} \quad X_2^1 = \{m_2\}$

2) נהפוך סדר של σ $\quad \sigma = (2, 1)$ $\quad Reverse(\sigma) = (2, 1)$

נריץ $CRR(\sigma, C^2)$

Output 2 $\rightarrow \quad X_1^2 = \emptyset \quad X_2^2 = \{m_3\}$

$$\forall_{i \in Agents} \; X_i^1 \cup X_i^2 = \underset{\text{סוכן 1}}{\{m_1\}} \quad \underset{\text{סוכן 2}}{\{m_2, m_3\}}$$

בדוגמא הזו קל לראות כי א F-EF1 מכיוון ש

$$\hat{V}_1(X_1) \geq \hat{V}_1(X_2 \setminus \{m_3\})$$

דוגמה 2 + מקרה פרטי של CRR להגדרה:

יש לנו קבוצת $C^2=\emptyset$

$\cancel{M=\{m_1, m_2\}}$ $C^1=\{m_1, m_2, m_3\}$ $C^2=\emptyset$

$\sigma=(1,2,3)$ $[3]=Agents=\{1,2,3\}$

$k_1^1=1$ $k_2^1=2$ $k_3^1=0$

1) נריץ $CRR(\sigma, C^1)$ (כמובן הסוכנים יותר מפי שלי לכן נעבור רק על הפרט C)

Output → $X_1^1=\{m_1\}$

$X_2^1=\{m_2, m_3\}$

$X_3^1=\emptyset$

Item / Agent	m_1	m_2	m_3
1	10	3	3
2	3	1	1
3	∞	∞	∞

לא מקבל רלוונטי כי $k_3^1=0$

נהפוך סדר $\sigma_{new}=(3,2,1)$

אבל $C^2=\emptyset$ לכן סיימנו

$CRR(\sigma_{new}, \emptyset)=\emptyset$

~~Output →~~

$X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2, m_3\}$ ת. סופית:

$X_3=\emptyset$

דוגמא 3   4 סוכנים , 6 פריטים

$[4] = Agents = \{1, 2, 3, 4\}$ $\forall_{i \in [4],\, k \in m}$

$C^1 = \{m_1, m_2\}$ $C^2 = \{m_3, m_4, m_5, m_6\}$

Agent	m1	m2	m3	m4	m5	m6
Agent1	1	1	1	10	1	1
Agent2	10	1	1	1	1	1
Agent3	1	1	10	1	1	1
Agent4	1	1	1	1	10	1

$\forall_{i \in [4]}\ k_i^2 = 1$

$\forall_{i \in [4]}\ k_i^1 = 1$

$\sigma = (2, 4, 1, 3)$

1) נריץ $CRR(\sigma, C^1)$

output $\rightarrow$ $X_2^1 = \{m_1\}$ $X_3^1 = \emptyset$

$X_4^1 = \{m_2\}$ $X_1^1 = \emptyset$ כי קיים EF1

$\sigma = (3, 1, 4, 2)$ 2) נבחר סדר

נריץ $CRR(\sigma, C^2)$

output $\rightarrow$ $X_3^2 = \{m_3\}$ $X_4^2 = \{m_5\}$

$X_1^2 = \{m_4\}$ $X_2^2 = \{m_6\}$

$X_1 = \{m_4\}$ $X_2 = \{m_1, m_6\}$ לכן בסוף

$X_3 = \{m_3\}$ $X_4 = \{m_2, m_5\}$

מכיון שכולם קיבלו את הפריט שהכי טוב להם אין קנאה EF

Algorithm 1- Different capacities (Identical Valuations)

(With Identical Valuations, there is no envy cycles in the Envy graph)

<u>דוגמא 1</u>

2 סוכנים, קטגוריה אחת (כפי שכתוב) שאין מעגלים בגרף קנאה

$Agents = [2] = \{1,2\}$ $\quad \forall_{i \in Agents, k \in M} \; V_i(k) = 1$

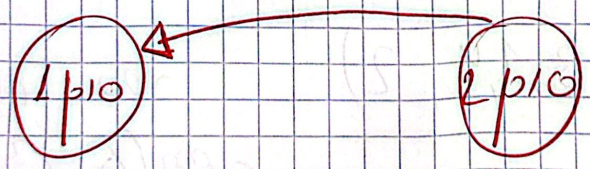
$C^1 = \{m_1, m_2, m_3\}$ $\quad \forall_{i \in Agents} \; k_i^1 = 2, \; k_i^2 = 2$

$\sigma = (1,2)$ $\quad C^2 = \{m_4\}$

$CRR(\sigma, C^1)$ נריץ — Loop I

Output $\to$ $X_1^1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2^1 = \{m_2\}$



Envy graph

$\sigma = \text{topological sort}(\sigma) = (2,1)$

מפעילים את CRR עם 2 קטגוריות

~~$\sigma = C^2 + 1$~~ $CRR(\sigma, C^2)$ — Loop II

~~Output $\to$ $X_2^2 = \{\}$~~

output $\rightarrow X_2^2 = \{m_4\}$

לכן אחרי אותו הזוג של גרף-תלויות

$$X_1 = \{m_1, m_3\} \qquad V(X_1) = V(X_2) = 2$$

$$X_2 = \{m_2, m_4\}$$

לכן התוצאה הסופית היא הקצאה והיא מקיימת F-EF1

כי הקצאה F-EF

דוגמה 2 3 סוכנים, 3 קטגוריות, הדוגמה שלנו

$$M = C^1 \cup C^2 \cup C^3$$

$[3] = Agents = \{1, 2, 3\}$

$C^1 = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$

$C^2 = \{m_5, m_6, m_7\}$

$C^3 = \{m_8, m_9\}$

$$\boxed{\begin{matrix} k_1^1 = 0 \\ k_2^2 = 0 \\ k_3^3 = 0 \end{matrix}}$$

$\forall_{i,j}\ k_i^j = 4$
$i \neq j$
$i \in Agents$
$j \in [3]$

$\forall_{i \in Agents,\ k \in M}\ V_i(k) = 1$ (Same Valuations for simplicity we assume all equal to 1)

$\sigma = (1, 2, 3)$

מתחילים :

I) $CRR(\sigma, C^1)$

output $\rightarrow X_1^1 = \emptyset \quad X_2^1 = \{m_1, m_3\} \quad X_3^1 = \{m_2, m_4\}$

k_i^j	C^1	C^2	C^3
סוכן 1	0	4	4
סוכן 2	4	0	4
סוכן 3	4	4	0

Envy graph

סוכן 1   סוכן 2   סוכן 3

אין קנאה

$\cancel{V_3(X_2^1) = 2 > V_3(X_3^1) = 1}$

בגלל שאפשר כל אופציה כי אין קנאה

Topological Sort

נבחר קודקוד שלא נכנסו לו צלע.

יש לנו 2 אופציות $\{1, 3\}$

ניקח 1, נמחק אותו ונחזור על התהליך עם שנשארים

$\sigma = (1, 3, 2) \rightarrow$ אבל יש עוד אופציות כמו $(3, 2, 1)$ $(3, 1, 2)$

Loop II

$CRR(\sigma, C^2)$

ניזכר כי $k_2^2 = 0$ לכן רק $(1,3)$ יקחו פריטים

לפי CRR

Output $\rightarrow$ $X_2^2 = \emptyset$ $X_1^2 = \{m_5, m_7\}$

$X_3^2 = \{m_6\}$

$\cancel{X_1 = \{m_5, m_7\}}$

$\cancel{X_2 = \{m_1, m_3\}}$

$\cancel{X_3 = \{m_3, m_6\}}$

$X_1 = \{m_5, m_7\}$ $V(X_1) = 2$

$X_2 = \{m_1, m_3\}$ $V(X_2) = 2$

$X_3 = \{m_2, m_4, m_6\}$ $V(X_3) = 3$

Scanned with CamScanner

Envy graph

1 | סל   2 | סל   3 | סל

אין קשתות

$$\sigma = (3, 2, 1)$$

$$CRR(\sigma, \subset^3)$$ III

output $\rightarrow$ $X_3^3 = \emptyset \quad X_2^3 = \{m_8\} \quad X_1^3 = \{m_9\}$

כתר

$$X_1 = \{m_5, m_7, m_9\}$$

$$X_2 = \{m_1, m_3, m_8\}$$

$$X_3 = \{m_2, m_4, m_6\}$$

Envy graph

1 | סל   2 | סל   3 | סל

אין קשתות

סיום

F-EF כלומר זה

דוגמה 3 :- 3 סוכנים, 3 קטגוריות, פריט אחד
לכל קטגוריה (

~~$V_1(m_1)=7$~~
~~$V(m_2)=8$~~

$V(k)=7$

$$M=\{m_1, m_2, m_3\}$$

$$C^1=\{m_1\}$$
$$C^2=\{m_2\}$$
$$C^3=\{m_3\}$$

$$\forall_{\substack{i\in[3]\\ h\in|C|}} k_i^h=1$$

$$\sigma=(1,2,3)$$

$V(m_1)=7$
$V(m_2)=8$
$V(m_3)=9$

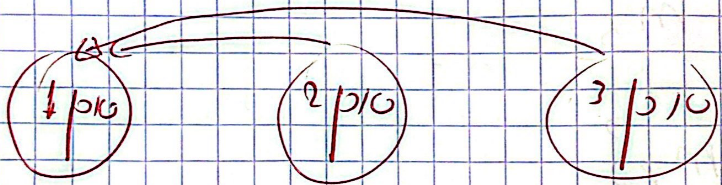
מתחילים לולאה

loop I

$CRR(\sigma, C^1)$

output → $X_1^1=\{m_1\}$

לכן שאר $X_1^1=\emptyset$



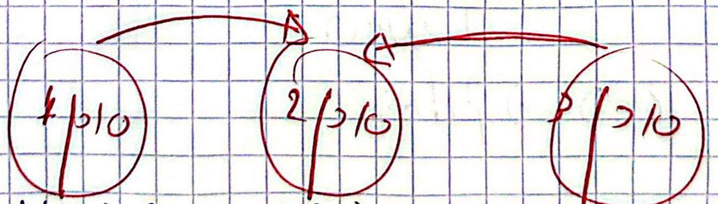
$\sigma=(2,3,1)$ סדר טופולוגי

loop II

$CRR(\sigma, C^2)$

output → $X_2^2=\{m_2\}$

לכן שאר $X_1^2=\emptyset$



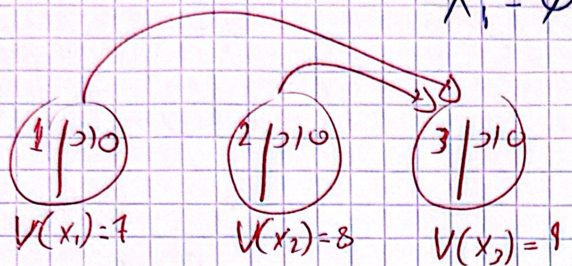
$V(x_1)=7$ $V(x_2)=8$ $V(x_3)=0$

$\sigma=(3,1,2)$ ← סדר טופולוגי ~~סדר~~

$CRR(\sigma, C^3)$ Loop III

Output $\rightarrow X_3^3 = \{m_3\}$

$X_1^3 = \emptyset$ [illegible] [illegible]



$X = \{\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}\}$ כל סוכן

$X_1 \quad X_2 \quad X_3$

F-EF1

Algorithm 5: Different capacities + Binary Valuations (same partition constraints)

דוגמה 1

$J_i \rightarrow$ Desired item set

$Agents = \{1, 2\} \quad C^1 = [m_1, m_2, m_3]$

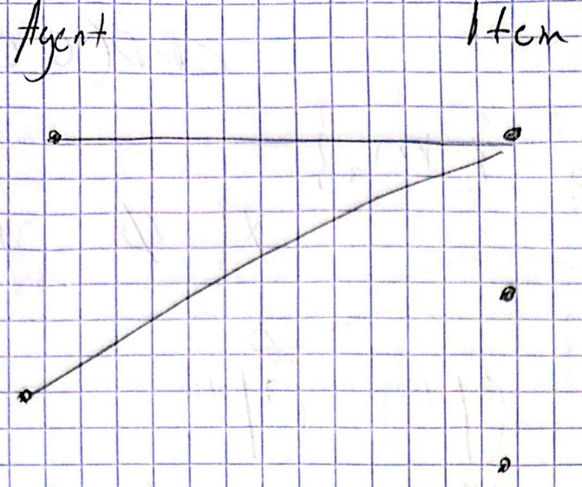
$V_1(m_1) = 1 \quad V_2(m_2) = 1$ the rest is $V_i(m_k) = 0$

$k_1^1 = 1 \quad k_2^1 = 2 \rightarrow T^h = 2$

$h = 1 \quad X_i^h = \emptyset$ לכל סוכן

$T^1 = 2$

V_i	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	1	0	0
סוכן 2	0	1	0



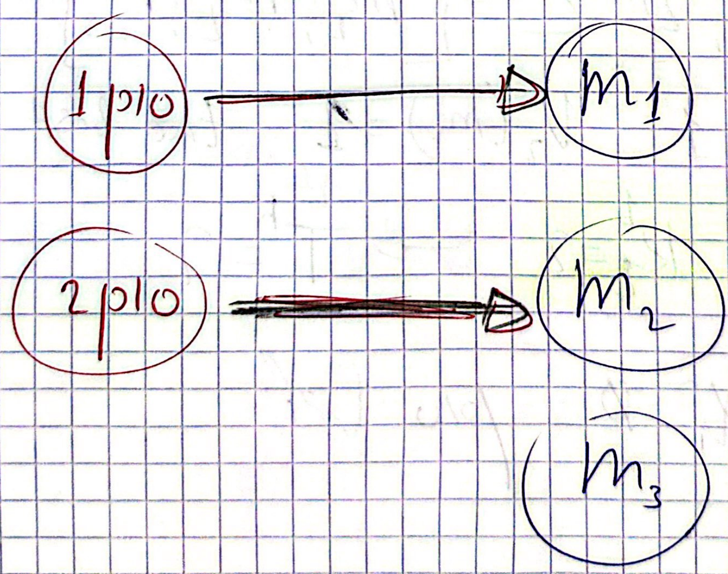
גלכה שנלך
Matching

Matching is a subset of edges in which there is no 2 edges sharing 1 node

= 1) 2 Agents same Item
2) 2 items 1 agent (We need item at a time)

Agent-Item Graph

$n=1$ Loop I



Envy graph

סוכן 1 סוכן 2

!אין קנאה

topological order $\sigma=(1,2)$

Priority Matching

לפי G_t^h שבנינו במצב קודקוד של להראות שיכול ממקסם.
כל אחד יקבל $\underset{\text{סוכן 1}}{1}, \underset{\text{סוכן 2}}{1}$ כי שסוכן 1 יקח m_1
סוכן 2 יקח m_2

$X_1^1=\{m_1\}$ $X_2^1=\{m_2\}$

אז

$h=2$ Loop II

Agent-Item graph

סוכן 2 m_3

$V_2(m_3)=0$ (not desirable)

Envy graph

סוכן 1 סוכן 2

אין קנאה

$G=(2,1)$

Priority Matching

אין לנו התאמה כי מכיוון שסוכן 2 אין לו אינטרס ב m_3

לכן התאמה מקסימלית פירושו (סוכן 1 O)

Loop terminated (T^h loop) (inner loop)

~~Loop terminated (h loop)~~

מקצים כל פריט שלא הותאם

לסוכן הלקסי שיש לו ערך חיובי למרות שלא

סוכן 2 מקבל את m_3 (למרות שסוכן לא שווה לו 1 עבורו)

$X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2,m_3\}$

Loop terminated (h loop) (outer loop)

$$X_1=\{m_1\} \quad X_2=\{m_2,m_3\}$$ סיכום

כמובן התוצאה הזו אינה הוגנת כי הסוכן לא

מעוניין במה שיש לסוכן האחר (לא ה.כ. לגבי תפיסה

של אורגנים ב G_h^+ ועבור $V_2(m_3)=0$)

דוגמה ל 3 סוכנים, תמונת אלגוריתם ב G_h^t

$$Agents = \{1, 2, 3\} = [3]$$

$\forall_{i \in [3],\ k \in M}$ $V_i(k) = 1$ (כולם מעוניינים בכל
הפריטים)
$i \neq 3$ חוץ מסוכן 3
$i \neq 2$ שבפועל רק מעוניין ב m_3
סוכן 2 רוצה רק m_1, m_2

	m_1	m_2	m_3
סוכן 1	1	1	1
סוכן 2	1	1	0
סוכן 3	0	0	1

$$M = \{m_1, m_2, m_3\}$$

$$C^1 = \{m_1\} \quad C^2 = \{m_2, m_3\}$$

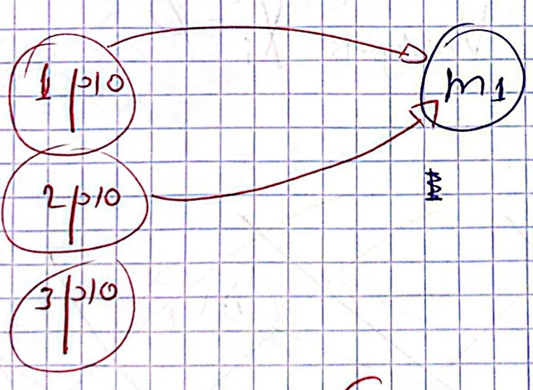
$$\forall_{i \in Agents}\ k_i^h = 2$$

מתחילים

$$h = 1 \quad X_i^h = \emptyset \quad T^h = 1$$

enter
|
Loop
enter
|
Loop

G_t^h



גרף הושלם ו- אין טעם לבנות כי אין הצעות נוספות

$$G = (1, 2, 3)$$

Priority Matching

אופטימליות G_t^1 ! G | תכונות

שניהם רוצים את m_1 אז

אחד לוקח, ספר לו G סוכן 1 $(1,0)$ סוכן 1 (1

ניקח את m_1 $(0,1)$ סוכן 2 (2

$X_1^1 = \{m_1\}$ לכן

$X_2^1 = \emptyset$

$X_3^1 = \emptyset$

End for

$X_1 = \{m_1\}$

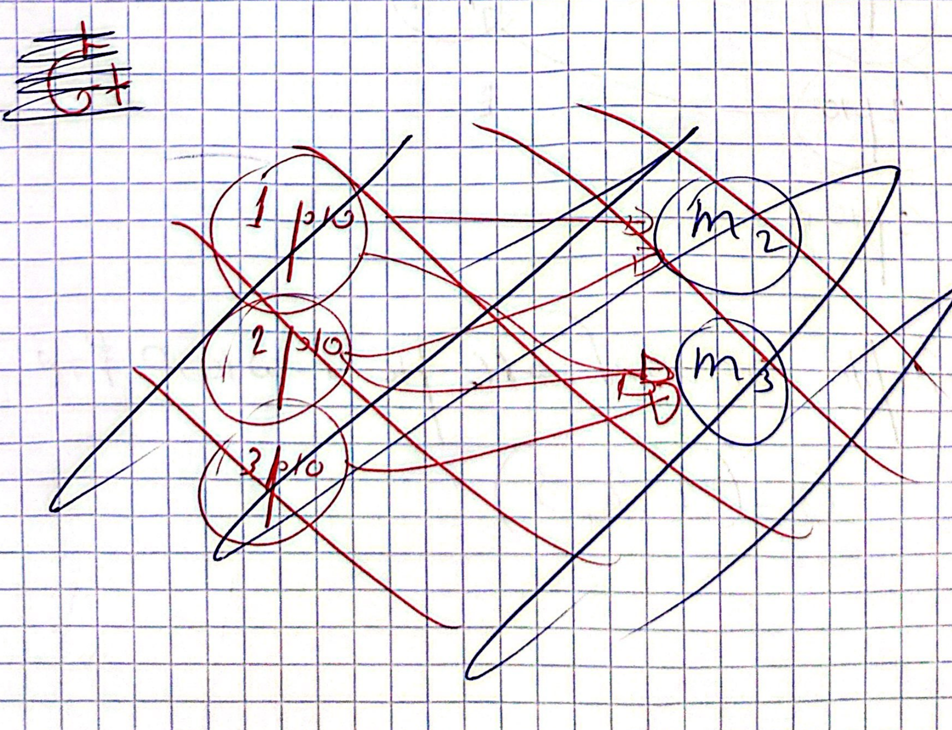
$X_2 = X_3 = \emptyset$

End for

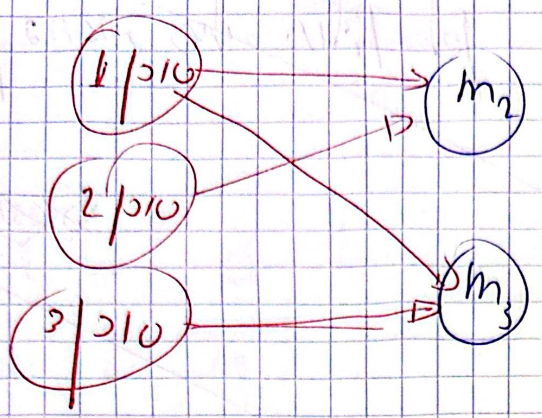
$T^h = 1$ $\forall i \in Agents\ X_i^2 = \emptyset$ $h = 2$

until loop

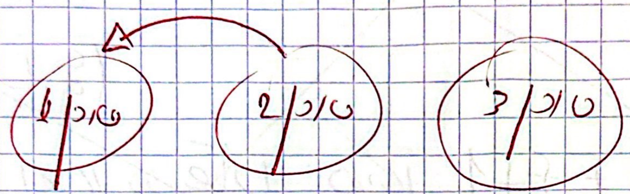
inner loop



G_4^h



Envy graph



$\hat{V}_2(X_1) > V_2(X_2)$

סדר אופטימלי.

1) נניח ~~2 אח~~ אחר כך 3 {2,3} (אין ל3 עוד משודך, רק אופציה

~~נניח 2 אחר 3 אחר 1~~ ~~נניח 3 אחר 2 אחר 1~~

~~$G=(3,2,1)$~~

$G=(2,1,3)$ נניח 2 אחר 1 אחר 3

Max Priority Matching נמס

לכן הוקטור שלנו הוא

לא

$$\begin{array}{cccc} & \text{סוכן 2} & \text{סוכן 1} & \text{סוכן 3} \\ \text{Vector} & (m_2, & m_3, & \emptyset) \end{array}$$

$(1, 1, 0)$

$X_1^2 = \{m_3\}$

$X_2^2 = \{m_2\}$

$X_3^2 = \emptyset$

End for

אין פריטים שלא הוקצו לכן

$X_1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2 = \{m_2\}$

$X_3 = \emptyset$

End for

סיימנו :)

התוצאה שלנו היא F-EF1 מכיוון ש

End for

אין חפצים שלא הוקצו לכן

$X_1 = \{m_1, m_3\}$

$X_2 = \{m_2\}$

$X_3 = \emptyset$

End for

סיימנו :)

התוצאה שלנו היא F-EF1 מכיוון ש סוכן 3
ו2 מקנא ב 1 עד-כדי פריט אחד

סוכן 2 מקנא עד-כדי m_1

סוכן 3 מקנא עד-כדי m_3

דוגמא 3

3 סוכנים 3 קטגוריות, העדפות אוניברסליות
, פריטים שאלו מתוארים שלא ניתן לחת ~~[illegible]~~
(מכיוון שכולם $|X_i^h| = k_i^h$)

$Agents = \{1, 2, 3\} = [3]$

$C^1 = \{m_1, m_2, m_3\}$

$C^2 = \{m_4, m_5\}$

$C^3 = \{m_6\}$

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
סוכן 1	1	1	0	1	1	1
סוכן 2	0	1	0	1	1	1
סוכן 3	0	0	0	0	0	1

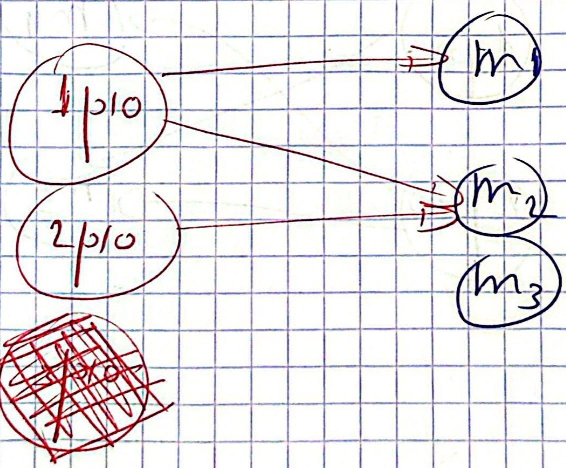
$K_3^1 = 0 \quad K_2^1 = K_1^1 = 1$

$T^h = 1$

מתחילים ב $\forall i \in Agents\ X_i^h = \emptyset$

loop
I
loop2
I

~~Agent~~ G_+^1



לגבי גרף הקנאה: אין קנאה! לכן סדר טופולוגי
כמו למשל $\sigma = (1, 2, 3)$,
ועבור הסיבוב
$(1, 1)$

~~$(1, 1, 0)$~~

סוכן 1 לוקח m_1 — למצוא maximal matching
סוכן 2 לוקח m_2

לכן $X_1^1=\{m_1\}$ $X_3^1=\emptyset$

$X_2^1=\{m_2\}$

End loop 2

הפריטים שעוד לא חולקו בקטגוריה 1

$\{m_3\}$, אין אפשרות לתת לסוכן אחר. למישהו

שעדיין יש לו קיבולת כי בסוף כולם נשארו למעט

של $|X_i^1| = k_i^1$ לכן $\underline{m_3}$ נשאר ללא סוכן

$X_1=\{m_1\}$ $X_2=\{m_2\}$ $X_3=\emptyset$

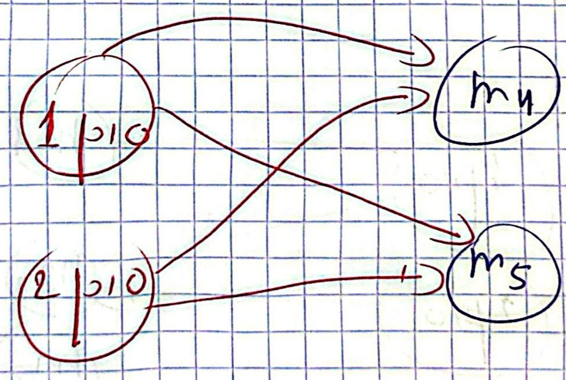
Ex.

$k_3^2=0$ $k_2^2=k_2^1=\underline{1}$ $T^h=\underline{1}$ $h=2$

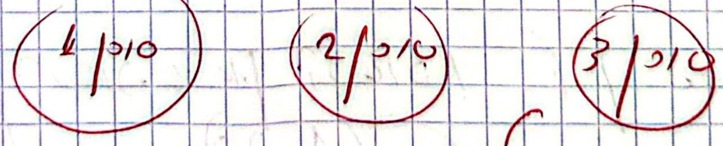
Loop1 $\underline{II}$

Loop2 $\underline{I}$

G_T^h



Envy graph



אין קשתות לכן נסדר יפה איך שנרצה!

$\sigma=(2,1,3)$

Max Priority Matching

לכן הראשון ש סוכן 1 ו 2 רוצים את כל הפריטים

ניתן לכל אחד אחד מהם וכמו , לסוכן 2 m_5 ! סוכן 1 m_4 , פורקנו רק בסיבוב שלנו יפה $(1,1)$

(סוכן 3 לא נכנס לחשבון כי בסיבוב $k_3^2=0$ כלומר לא מופיע
בגרף סוכן - פריט בכלל)

לכן

End for 2

אין פריטים לא מחולקים לכן

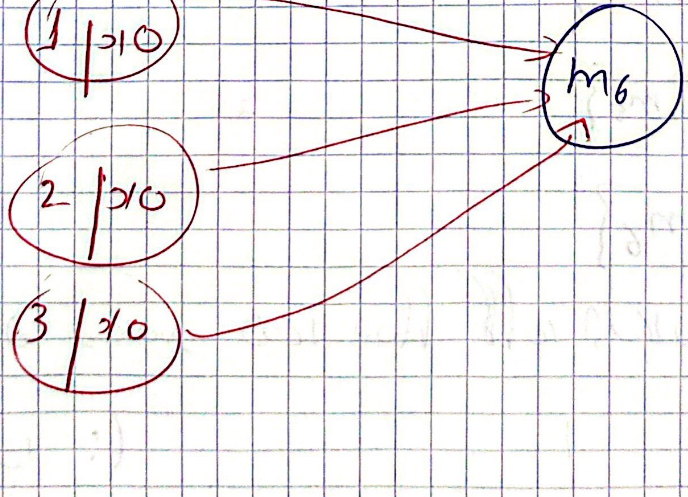
$X_1=\{m_1, m_4\}$

$X_2=\{m_2, m_5\}$

$X_3=\emptyset$

$T^h=1$ $\quad h=3$ $\quad$ for 1 III

G_+^h



Envy graph

סוכן 1 סוכן 2 סוכן 3

אין מעגל !

נבחר $\sigma(3,2,1)$

לכן לפי סדר לסוכן 1 מגיע תמיד
כי הוא מוסר את הפריט שהוא מעדיף
לכן את m_6 לסוכן 3 ופריט ...
רק $(1,0,0)$

לכן $X_1^3 = X_2^3 = \emptyset \quad X_3^3 = \{m_6\}$

End for 2

~~אין פריטים לחלק~~

אין פריטים שלא חולקו לכן

$X_1 = \{m_1, m_4\}$

$X_2 = \{m_2, m_5\}$

$X_3 = \{m_6\}$

בחלוקה הסופית היא ללא הנאה F-EF

סיימנו :)