



عنوان: تمرین سری چهار

نیم‌سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری‌راد

مبحث تمرین: بسط لوران

مهلت تحویل: ۱۱ آذر

فهرست مطالب

- | | |
|---|--------------|
| ۳ | ۱ سوال اول |
| ۳ | ۲ سوال دوم |
| ۳ | ۳ سوال سوم |
| ۳ | ۴ سوال چهارم |
| ۳ | ۵ سوال پنجم |

۱ سوال اول

بسط تیلور تابع $\ln(1 + z)$ را بیابید.

۲ سوال دوم

تابع $f(z)$ رو و داخل دایره واحد تحلیلی است، $|z| < 1$. نشان دهید که $|f(z)| < |z|$ برای $|z| \leq 1$. راهنمایی: نشان دهید $|f(z)/z|$ تحلیلی است و سپس با استفاده از فرمول انتگرال کوشی، $[f(z_0)/z_0]^n$ را بیان کنید و نهایتاً قدر مطلقها و ریشه n -ام را در نظر بگیرید (این تمرین گاهی «قضیه شوارتز» نامیده می‌شود).

۳ سوال سوم

اگر $f(z)$ تابع حقیقی متغیر مختلط $z = x + iy$ باشد، یعنی $f(x) = f^*(x)$ و بسط لوران آن حول مبدأ، $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n z^n$ ، تمام ضرایب a_n حقیقی هستند. راهنمایی: نشان دهید $f(z)$ تحلیلی است (با استفاده از قضیه موررا، بخش ۴.۱۱).

۴ سوال چهارم

اثبات کنید که بسط لوران یک تابع حول یک نقطه مشخص یکتا است؛ یعنی اگر

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-N}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

آنگاه $a_n = b_n$ برای همه n ها یکتا است. راهنمایی: از فرمول انتگرال کوشی استفاده کنید.

۵ سوال پنجم

□ بسط لوران تابع $\frac{e^z}{z^2}$ حول $z = 0$ را به دست آورید.

□ بسط لوران تابع $\frac{ze^z}{z-1}$ حول $z = 1$ را به دست آورید.

□ بسط لوران تابع $(z-1)e^{1/z}$ حول $z = 0$ را به دست آورید.

موفق باشید.