



عنوان: تمرین سری هفتم

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری راد

مبحث تمرین: حساب مانده ها

مهلت تحویل: ۱۴ادی

فهرست مطالب

۱	سوال اول	۳
۲	سوال دوم	۳
۳	سوال سوم	۳
۴	سوال چهارم	۳
۵	سوال پنجم	۳
۶	سوال ششم	۳
۷	سوال هفتم	۳
۸	سوال هشتم	۴
۹	سوال نهم	۴
۱۰	سوال دهم	۴
۱۱	سوال یازدهم	۴
۱۲	سوال دوازدهم	۴
۱۳	سوال سیزدهم	۴

۱ سوال اول

نشان دهید که برای $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}.$$

۲ سوال دوم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^4}} = \frac{\pi}{2}.$$

همچنین

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p \ln x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi \sin(\pi p/2)}{4 \cos^2(\pi p/2)}, \quad 0 < p < 1.$$

۳ سوال سوم

محاسبه کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$$

(الف) با استفاده از بسط سری مناسب مخرج:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

(ب) و با استفاده از انتگرال گیری روی کانتور برای به دست آوردن:

$$\frac{\pi^3}{8}.$$

۴ سوال چهارم

اثبات کنید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \ln 2.$$

۵ سوال پنجم

نشان دهید که برای $-1 < a < 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{x+1} dx = \frac{\pi a}{\sin \pi a}.$$

۶ سوال ششم

نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 2x^2 \cos 2\theta + 1} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos 2\theta)^{1/2}}.$$

۷ سوال هفتم

نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

۸ سوال هشتم

(الف) نشان دهید که

$$f(z) = z^4 - 2z^2 \cos 2\theta + 1$$

دارای صفرهای

$$e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -e^{i\theta}, -e^{-i\theta}$$

است.

(ب) نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 2x^2 \cos 2\theta + 1} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos 2\theta)^{1/2}}.$$

۹ سوال نهم

نشان دهید که برای $0 < a < 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

۱۰ سوال دهم

نشان دهید که برای $|b| < 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh(bx)}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\pi b/2)}.$$

۱۱ سوال یازدهم

نشان دهید که:

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

۱۲ سوال دوازدهم

نشان دهید که:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}} = \frac{2\pi}{3}.$$

۱۳ سوال سیزدهم

محاسبه کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(x^2 + b^2)} dx,$$

برای $a, b > 0$ و $ab < 1$. توضیح دهید که چرا انتگرال در $x = 0$ قطبی ندارد.

موفق باشید.