



عنوان: تمرین سری سه

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری راد

مبحث تمرین: انتگرال گاووسی

مهلت تحویل: ۲۳ آبان

فهرست مطالب

- | | |
|---|--------------|
| ۳ | ۱ سوال اول |
| ۳ | ۲ سوال دوم |
| ۳ | ۳ سوال سوم |
| ۳ | ۴ سوال چهارم |
| ۳ | ۵ سوال پنجم |
| ۳ | ۶ سوال ششم |

۱ سوال اول

نشان دهید که

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = - \int_{z_2}^{z_1} f(z) dz.$$

۲ سوال دوم

تاثبات کنید که

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq |f|_{\max} \cdot L,$$

که در آن $|f|_{\max}$ بزرگ‌ترین مقدار $|f(z)|$ در طول مسیر C و L طول مسیر است.**۳ سوال سوم**

نشان دهید که انتگرال

$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz) dz$$

روی دو مسیر زیر یک مقدار دارد:

(الف) خط مستقیم بین نقاط ابتدا و انتهای

(ب) قوس دایره‌ای با شعاع $5 = |z|$.**۴ سوال چهارم**

اگر

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz,$$

نشان دهید که $F(z)$ به مسیر بین حدود انتگرال وابسته نیست و مقدار $F(\pi i)$ را محاسبه کنید.**۵ سوال پنجم**

انتگرال

$$\int_C (x^2 - iy^2) dz$$

را محاسبه کنید، که مسیر انتگرال‌گیری به صورت:

(الف) حول دایره واحد در جهت ساعتگرد

(ب) روی مربعی با رؤوس $i \pm 1 \pm 1$ است.

توضیح دهید چرا نتایج قسمت‌های (الف) و (ب) یکسان یا متفاوت هستند.

۶ سوال ششم

اثبات کنید که

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + z} = 0,$$

که مسیر C دایره‌ای با $|z| = R > 1$ است.راهنمای استفاده مستقیم از قضیه انتگرال کوشی مجاز نیست. انتگرال را با تجزیه به کسرهای جزئی محاسبه کنید؛ این مقدار برای $R > 1$ صفر و برای $R < 1$ برابر $2\pi i$ می‌شود.

موفق باشید.