

عنوان: تمرین سری یک

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر محمد انصاری فرد

مبحث تمرین: مروری بر فیزیک پایه

مهلت تحویل: ۱۴ مهر

فهرست مطالب

۱	سوال اول	۳
۲	سوال دوم	۳
۳	سوال سوم	۳
۴	سوال چهارم	۳
۵	سوال پنجم	۴
۶	سوال ششم	۴
۷	سوال امتیازی	۵

۱ سوال اول

جرم جسمی با زمان طبق رابطه زیر تغییر می کند:

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$$

که در آن α یک ثابت است. جرم جسم در لحظه $t = 0$ برابر m_0 است. اگر سرعت جسم در لحظه $t = 0$ برابر v_0 باشد و هیچ نیروی خارجی به جسم وارد نشود، سرعت آن در لحظه t چگونه خواهد بود؟

۲ سوال دوم

متحرکی بر روی محور x حرکت می کند. رابطه بین مکان و زمان این متحرک به صورت زیر است:

$$t = ax^2 + bx + 1$$

که در آن a و b مقادیر ثابتی هستند. شتاب این متحرک کدام است؟

۳ سوال سوم

گویی به جرم M بر روی یک سطح افقی قرار دارد. گوی می تواند روی سطح بلغزد و ارتفاع ضلع قائم آن برابر با H است. مطابق شکل، جسم کوچکی به جرم $m = \alpha M$ بر روی سطح افقی با سرعت اولیه v به سمت گوی حرکت می کند. کمترین مقدار v چقدر باشد تا جسم کوچک به بالای گوی برسد؟ (تمام سطوح بدون اصطکاک هستند و α مقداری ثابت است).



شکل ۱:

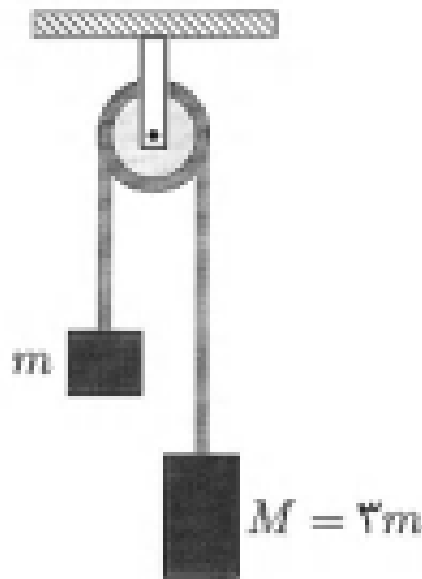
۴ سوال چهارم

دو جرم m و $M = 3m$ به دو انتهای یک ریسمان سبک بسته شده اند. ریسمان از روی یک قرقره ثابت، بدون جرم و بدون اصطکاک، عبور می کند، به گونه ای که m و M در دو طرف قرقره آویزان هستند. سیستم را از حال سکون رها می کنیم:

(الف) شتاب هر کدام از جسم هارا بدست آورید.

(ب) نیروی وارد بر ریسمان را بدست آورید.

(ج) اندازه شتاب مرکز جرم این سیستم کدام است؟



شکل ۲:

۵ سوال پنجم

معادله حرکت ذره‌ای به جرم m که در راستای x حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$x = -t + 2t^3$$

که در آن x بر حسب متر و زمان بر حسب ثانیه است. توانی که در لحظه $t = 2$ ثانیه به این ذره منتقل می‌شود، چند وات است؟

۶ سوال ششم

در فضای سه‌بعدی، یک میدان اسکالر و دو میدان برداری پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

$$\Phi(x, y, z; \alpha, \beta) = e^{\alpha x} \sin(\beta y) + xz$$

$$\mathbf{F}(x, y, z; \alpha, \beta) = (\alpha xy, e^{\alpha x} \cos(\beta y), \beta zx)$$

$$\mathbf{G}(x, y, z; \alpha, \beta) = (y^2 + \beta z, \alpha x^2, e^{\beta y} - z)$$

برای میدان‌های بالا، همه محاسبات را به صورت نمادین (با نگه داشتن α و β به عنوان پارامتر) انجام دهید و اگر امکان دارد نتایج را تا حد ممکن ساده کنید.

(الف) گرادیان اسکالر $\nabla \Phi(x, y, z; \alpha, \beta)$ را بیابید.

(ب) دیورژانس $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

(پ) کرل $\nabla \times \mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

(ت) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$ را محاسبه کنید و تفسیر نمایید (آیا صفر است؟ چرا؟).

(ث) $\nabla \times (\nabla \Phi)$ را محاسبه کنید و تفسیر کنید.

(ج) لاپلاسیان اسکالر $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi)$ را بیابید.

(د) حاصل ضرب داخلی $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ را محاسبه و ساده کنید.

(ذ) حاصل ضرب خارجی $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ را محاسبه کنید.

(ر) ضرب سه‌تایی اسکالر $(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \cdot \nabla \Phi$ را محاسبه کنید (گام مهم: ابتدا $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ را بیابید سپس آن را در $\nabla \Phi$ نقطه‌ای ضرب کنید).

(ز) هویت برداری زیر را برای میدان‌های \mathbf{F} و \mathbf{G} بررسی کنید (سمت چپ و راست را جداگانه محاسبه و با هم مقایسه کنید):

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \stackrel{?}{=} (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})$$

۷ سوال امتیازی

فرض کنید میدان برداری زیر در فضای سه بعدی داده شده است:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\hat{i} + (y^2 + z)\hat{j} + (z^2 + x)\hat{k}$$

الف) مختصات استوانه‌ای: مختصات

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z$$

را در نظر بگیرید.

□ بردار \mathbf{F} را به صورت مولفه‌های (F_ρ, F_ϕ, F_z) بنویسید.

□ دیورژانس $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را در مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

□ کرل $\nabla \times \mathbf{F}$ را در مختصات استوانه‌ای بنویسید.

□ لاپلاسیان $\nabla^2 \Phi$ را برای $\Phi = x^2 + y^2 + z^2$ در مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

ب) مختصات کروی: مختصات

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

را در نظر بگیرید.

□ بردار \mathbf{F} را به صورت مولفه‌های (F_r, F_θ, F_ϕ) بنویسید.

□ دیورژانس $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را در مختصات کروی محاسبه کنید.

□ کرل $\nabla \times \mathbf{F}$ را در مختصات کروی بنویسید.

□ لاپلاسیان $\nabla^2 \Phi$ را برای $\Phi = \frac{1}{r}$ در مختصات کروی محاسبه کنید.

ج) آیا برای عملگرهای فوق تعاریفی مستقل از اینکه در چه مختصاتی هستند وجود دارد؟ اگر بله فرمول آنها را بنویسید و با آن به تعاریف در مختصات های مورد نظر برسید.

موفق باشید.