



عنوان: تمرین سری دو

نیم‌سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری‌راد

مبحث تمرین: کوشی ریمان

مهلت تحویل: آبان ۹۶

فهرست مطالب

| | |
|---|--------------|
| ۳ | ۱ سوال اول |
| ۳ | ۲ سوال دوم |
| ۳ | ۳ سوال سوم |
| ۳ | ۴ سوال چهارم |
| ۳ | ۵ سوال پنجم |
| ۳ | ۶ سوال ششم |
| ۳ | ۷ سوال هفتم |
| ۴ | ۸ سوال هشتم |
| ۵ | ۹ سوال نهم |

۱ سوال اول

نشان دهید که آیا تابع $f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ تحلیلی است یا خیر.

۲ سوال دوم

تابع تحلیلی $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را بیابید:

$$(الف) \text{ اگر } u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

$$(ب) \text{ اگر } v(x, y) = e^{-y} \sin x$$

۳ سوال سوم

اگر منطقه مشترکی وجود داشته باشد که در آن $w_2 = w_1^* = u(x, y) - iv(x, y)$ و $w_1 = u(x, y) + iv(x, y)$ هر دو تحلیلی باشند، نشان دهید که $v(x, y)$ ثابت هستند.

۴ سوال چهارم

با شروع از $f(z) = \frac{1}{x+iy}$ ، نشان دهید که $z/1$ در کل صفحه مختلط متناهی به جز نقطه $0 = z$ تحلیلی است. این مسئله بحث ما درباره تحلیلی بودن z^n را برای توان‌های صحیح منفی n گسترش می‌دهد.

۵ سوال پنجم

نشان دهید که با توجه به معادلات کوشی-ریمان، مشتق $f'(z)$ برای $f(z) = a dx + ib dy$ با $a \neq 0$ و $b \neq 0$ همان مقداری را دارد که برای $dz = dx + idy$ دارد.

۶ سوال ششم

با استفاده از $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r, \theta)}$ ، که در آن $f(r, \theta)$ و $\Theta(r, \theta)$ توابع واقعی قابل مشتق‌گیری از r و θ هستند، نشان دهید که شرایط کوشی-ریمان در مختصات قطبی به صورت زیر در می‌آید:

$$(الف) \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$$

$$(ب) \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} = -R \frac{\partial \Theta}{\partial r}$$

راهنمایی: ابتدا مشتق را با δz شعاعی و سپس با δz مماسی تنظیم کنید.

۷ سوال هفتم

برای هر یک از توابع زیر $f(z)$ ، $f'(z)$ را بیابید و بزرگ‌ترین ناحیه‌ای که در آن $f(z)$ تحلیلی است مشخص کنید:

$$(الف) f(z) = \sin z$$

$$(ب) f(z) = \frac{1}{z}$$

$$(پ) f(z) = \frac{1}{z+1}$$

$$(ت) f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$$

$$(ث) f(z) = e^{-1/z}$$

$$(ج) f(z) = z^2 - 3z + 2$$

$$(ج) f(z) = \tan(z)$$

$$(ج) f(z) = \tanh(z)$$

۸ سوال هشتم

- برای چه مقادیر مختلط، هر یک از توابع زیر مشتق دارند؟ (الف) $f(z) = z^{3/2}$
 (ب) $f(z) = z^{-3/2}$
 (پ) $f(z) = \tan^{-1}(z)$
 (ت) $f(z) = \tanh^{-1}(z)$

۹ سوال نهم

جريان سیال دو بعدی غیرچرخشی با پتانسیل مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ توصیف می شود. قسمت حقیقی $u(x, y)$ پتانسیل سرعت و قسمت موهومی $v(x, y)$ تابع جريان است. سرعت سیال $\mathbf{V} = \nabla u$ است. اگر $f(z)$ تحلیلی باشد:

- (الف) نشان دهید که $\frac{df}{dz} = V_x - iV_y$
 (ب) نشان دهید که $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ (منبع یا چاه ندارد)
 (پ) نشان دهید که $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ (جريان غیرچرخشی و بدون آشفتگی است)
 موفق باشید.