



عنوان: تمرين سري هفتم

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱:

مدرس: دکتر امین نصیری راد

مبحث تمرين: حساب مانده ها

مهلت تحویل: ۱۴ آذر

فهرست مطالب

۳	۱ سوال اول
۳	۲ سوال دوم
۳	۳ سوال سوم
۳	۴ سوال چهارم
۳	۵ سوال پنجم
۳	۶ سوال ششم
۳	۷ سوال هفتم
۴	۸ سوال هشتم
۴	۹ سوال نهم
۴	۱۰ سوال دهم
۴	۱۱ سوال یازدهم
۴	۱۲ سوال دوازدهم
۴	۱۳ سوال سیزدهم

۱ سوال اولنشان دهيد که برای $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}.$$

۲ سوال دوم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^4}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p \ln x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4} \frac{\sin(\pi p/2)}{\cos^2(\pi p/2)}, \quad 0 < p < 1.$$

همچنین

۳ سوال سوم

محاسبه کنيد:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$$

(الف) با استفاده از بسط سري مناسب مخرج:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

(ب) و با استفاده از انتگرال گيری روی کانتور برای به دست آوردن:

$$\frac{\pi^3}{8}.$$

۴ سوال چهارم

اثبات کنيد که

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \ln 2.$$

۵ سوال پنجمنشان دهيد که برای $-1 < a < 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{x+1} dx = \frac{\pi a}{\sin \pi a}.$$

۶ سوال ششم

نشان دهيد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 2x^2 \cos 2\theta + 1} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos 2\theta)^{1/2}}.$$

۷ سوال هفتم

نشان دهيد که

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

سوال هشتم ۸

(الف) نشان دهيد که

$$f(z) = z^4 - 2z^2 \cos 2\theta + 1$$

داراي صفرهای

$$e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -e^{i\theta}, -e^{-i\theta}$$

است.

(ب) نشان دهيد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 2x^2 \cos 2\theta + 1} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos 2\theta)^{1/2}}.$$

سوال نهم ۹نشان دهيد که برای $0 < a < 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

سوال دهم ۱۰نشان دهيد که برای $|b| < 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh(bx)}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\pi b/2)}.$$

سوال یازدهم ۱۱

نشان دهيد که:

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

سوالدوازدهم ۱۲

نشان دهيد که:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}} = \frac{2\pi}{3}.$$

سوال سیزدهم ۱۳

محاسبه کنيد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(x^2 + b^2)} dx,$$

برای $a, b > 0$ و $ab < 1$. توضیح دهید که چرا انتگرال در $x = 0$ قطعی ندارد.

موفق باشید.