



عنوان: تمرین سری چهار

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری راد

مبحث تمرین: انتگرال گاوسی

مهلت تحویل: ۳ آذر

## فهرست مطالب

۱	سوال اول	۳
۲	سوال دوم	۳
۳	سوال سوم	۳
۴	سوال چهارم	۳
۵	سوال پنجم	۳
۶	سوال ششم	۳
۷	سوال هفتم	۳
۸	سوال هشتم	۴
۹	سوال نهم	۴

## ۱ سوال اول

نشان دهید که

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-n-1} dz, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

با مسیر بسته‌ای که یک بار مبدأ را احاطه می‌کند، نمایشگر دلتا کرونکر  $\delta_{mn}$  است.

## ۲ سوال دوم

انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1}, \quad \text{است. } 1 = |z - 1| \text{ دایره } C$$

## ۳ سوال سوم

فرض کنید  $f(z)$  روی و داخل مسیر بسته  $C$  تحلیلی باشد و نقطه  $z_0$  داخل  $C$  قرار داشته باشد. نشان دهید که

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_C \frac{dz}{z - z_0}.$$

## ۴ سوال چهارم

اگر  $f(z)$  روی و داخل مسیر بسته  $C$  تحلیلی باشد، نشان دهید که مشتق  $n$ -ام آن در  $z_0$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

با استفاده از استقراء ریاضی، اثبات کنید که این رابطه صحیح است.

## ۵ سوال پنجم

(الف) تابع  $f(z)$  داخل مسیر بسته  $C$  تحلیلی و روی  $C$  پیوسته است. اگر  $f(z) \neq 0$  داخل  $C$  و  $|f(z)| \leq M$  روی  $C$ ، نشان دهید که  $|f(z)| \leq M$  برای تمام نقاط داخل  $C$ . راهنمایی: تابع  $w(z) = 1/f(z)$  را در نظر بگیرید.

(ب) اگر  $f(z) = 0$  داخل مسیر بسته  $C$  باشد، نشان دهید که نتیجه بالا برقرار نیست و ممکن است  $|f(z)| = 0$  در یک یا چند نقطه داخلی باشد در حالی که  $|f(z)| > 0$  روی کل مسیر مرزی. یک مثال مشخص از تابع تحلیلی که این رفتار را دارد ذکر کنید.

## ۶ سوال ششم

انتگرال

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

را برای مسیر مربعی با طول ضلع  $a > 1$  و مرکز در  $z = 0$  محاسبه کنید.

## ۷ سوال هفتم

انتگرال

$$\oint_C \frac{\sin^2 z - z^2}{(z - a)^3} dz,$$

را محاسبه کنید، که مسیر بسته  $C$  نقطه  $z = a$  را احاطه می‌کند.

## ۸ سوال هشتم

انتگرال

$$\oint_C \frac{dz}{z(2z+1)},$$

را برای مسیر دایره واحد محاسبه کنید.

## ۹ سوال نهم

انتگرال

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{z(2z+1)^2},$$

را برای مسیر دایره واحد محاسبه کنید.

راهنمایی: ابتدا تجزیه به کسره‌های جزئی انجام دهید.

موفق باشید.