



عنوان: تمرین سری دو

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری راد

مبحث تمرین: کوشی ریمان

مهلت تحویل: ۹ آبان

فهرست مطالب

۱	سوال اول	۳
۲	سوال دوم	۳
۳	سوال سوم	۳
۴	سوال چهارم	۳
۵	سوال پنجم	۳
۶	سوال ششم	۳
۷	سوال هفتم	۳
۸	سوال هشتم	۴
۹	سوال نهم	۵

۱ سوال اول

نشان دهید که آیا تابع $f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ تحلیلی است یا خیر.

۲ سوال دوم

تابع تحلیلی $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را بیابید:

(الف) اگر $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(ب) اگر $v(x, y) = e^{-y} \sin x$

۳ سوال سوم

اگر منطقه مشترکی وجود داشته باشد که در آن $w_1 = u(x, y) + iv(x, y)$ و $w_2 = w_1^* = u(x, y) - iv(x, y)$ هر دو تحلیلی باشند، نشان دهید که $u(x, y)$ و $v(x, y)$ ثابت هستند.

۴ سوال چهارم

با شروع از $f(z) = \frac{1}{x+iy}$ ، نشان دهید که $1/z$ در کل صفحه مختلط متناهی به جز نقطه $z = 0$ تحلیلی است. این مسئله بحث ما درباره تحلیلی بودن z^n را برای توان‌های صحیح منفی n گسترش می‌دهد.

۵ سوال پنجم

نشان دهید که با توجه به معادلات کوشی-ریمان، مشتق $f'(z)$ برای $dz = a dx + ib dy$ (با $a \neq 0$ و $b \neq 0$) همان مقداری را دارد که برای $dz = dx$ دارد.

۶ سوال ششم

با استفاده از $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r, \theta)}$ ، که در آن $R(r, \theta)$ و $\Theta(r, \theta)$ توابع واقعی قابل مشتق‌گیری از r و θ هستند، نشان دهید که شرایط کوشی-ریمان در مختصات قطبی به صورت زیر درمی‌آید:

(الف) $\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$

(ب) $\frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} = -R \frac{\partial \Theta}{\partial r}$

راهنمایی: ابتدا مشتق را با δz شعاعی و سپس با δz مماسی تنظیم کنید.

۷ سوال هفتم

برای هر یک از توابع زیر $f(z)$ ، $f'(z)$ را بیابید و بزرگ‌ترین ناحیه‌ای که در آن $f(z)$ تحلیلی است مشخص کنید:

(الف) $f(z) = \sin z$

(ب) $f(z) = \frac{1}{z}$

(پ) $f(z) = \frac{1}{z+1}$

(ت) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$

(ث) $f(z) = e^{-1/z}$

(ج) $f(z) = z^2 - 3z + 2$

(چ) $f(z) = \tan(z)$

(ح) $f(z) = \tanh(z)$

۸ سوال هشتم

برای چه مقادیر مختلط، هر یک از توابع زیر مشتق دارند؟ (الف) $f(z) = z^{3/2}$

(ب) $f(z) = z^{-3/2}$

(پ) $f(z) = \tan^{-1}(z)$

(ت) $f(z) = \tanh^{-1}(z)$

۹ سوال نهم

جریان سیال دو بعدی غیرچرخشی با پتانسیل مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ توصیف می‌شود. قسمت حقیقی $u(x, y)$ پتانسیل سرعت و قسمت موهومی $v(x, y)$ تابع جریان است. سرعت سیال $\mathbf{V} = \nabla u$ است. اگر $f(z)$ تحلیلی باشد:

(الف) نشان دهید که $\frac{df}{dz} = V_x - iV_y$

(ب) نشان دهید که $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ (منبع یا چاه ندارد)

(پ) نشان دهید که $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ (جریان غیرچرخشی و بدون آشفتگی است)

موفق باشید.