



عنوان: تمرین سری سه

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری راد

مبحث تمرین: انتگرال گاوسی

مهلت تحویل: ۲۳ آبان

## فهرست مطالب

۱	سوال اول	۳
۲	سوال دوم	۳
۳	سوال سوم	۳
۴	سوال چهارم	۳
۵	سوال پنجم	۳
۶	سوال ششم	۳

## ۱ سوال اول

نشان دهید که

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = - \int_{z_2}^{z_1} f(z) dz.$$

## ۲ سوال دوم

تاثبات کنید که

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq |f|_{\max} \cdot L,$$

که در آن  $|f|_{\max}$  بزرگترین مقدار  $|f(z)|$  در طول مسیر  $C$  و  $L$  طول مسیر است.

## ۳ سوال سوم

نشان دهید که انتگرال

$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz) dz$$

روی دو مسیر زیر یک مقدار دارد:

(الف) خط مستقیم بین نقاط ابتدا و انتها

(ب) قوس دایره‌ای با شعاع  $|z| = 5$ .

## ۴ سوال چهارم

اگر

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz,$$

نشان دهید که  $F(z)$  به مسیر بین حدود انتگرال وابسته نیست و مقدار  $F(\pi i)$  را محاسبه کنید.

## ۵ سوال پنجم

انتگرال

$$\int_C (x^2 - iy^2) dz$$

را محاسبه کنید، که مسیر انتگرال‌گیری به صورت:

(الف) حول دایره واحد در جهت ساعتگرد

(ب) روی مربعی با رئوس  $\pm 1 \pm i$  است.

توضیح دهید چرا نتایج قسمت‌های (الف) و (ب) یکسان یا متفاوت هستند.

## ۶ سوال ششم

اثبات کنید که

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + z} = 0,$$

که مسیر  $C$  دایره‌ای با  $|z| = R > 1$  است.

راهنما: استفاده مستقیم از قضیه انتگرال کوشی مجاز نیست. انتگرال را با تجزیه به کسرهای جزئی محاسبه کنید؛ این مقدار برای  $R > 1$  صفر و برای  $R < 1$  برابر  $2\pi i$  می‌شود.

موفق باشید.