



عنوان: تمرین سری چهار

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری راد

مبحث تمرین: بسط لوران

مهلت تحویل: ۱۱ آذر

فهرست مطالب

۱	سوال اول	۳
۲	سوال دوم	۳
۳	سوال سوم	۳
۴	سوال چهارم	۳
۵	سوال پنجم	۳

۱ سوال اول

بسط تیلور تابع $\ln(1+z)$ را بیابید.

۲ سوال دوم

تابع $f(z)$ رو و داخل دایره واحد تحلیلی است، $|f(z)| < 1$ برای $|z| \leq 1$ و $f(0) = 0$. نشان دهید که $|z| < |f(z)|$ برای $|z| \leq 1$. راهنما: نشان دهید $f(z)/z$ تحلیلی است و سپس با استفاده از فرمول انتگرال کوشی، $[f(z_0)/z_0]^n$ را بیان کنید و نهایتاً قدر مطلقها و ریشه n -ام را در نظر بگیرید (این تمرین گاهی «قضیه شوارتز» نامیده می شود).

۳ سوال سوم

اگر $f(z)$ تابع حقیقی متغیر مختلط $z = x + iy$ باشد، یعنی $f(x) = f^*(x)$ ، و بسط لوران آن حول مبدأ، $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n z^n$ باشد، نشان دهید که اگر $a_n = 0$ برای $n < -N$ ، تمام ضرایب a_n حقیقی هستند. راهنمایی: نشان دهید $z^N f(z)$ تحلیلی است (با استفاده از قضیه موررا، بخش ۴.۱).

۴ سوال چهارم

اثبات کنید که بسط لوران یک تابع حول یک نقطه مشخص یکتا است؛ یعنی اگر

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-N}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

آنگاه $a_n = b_n$ برای همه n ها یکتا است. راهنمایی: از فرمول انتگرال کوشی استفاده کنید.

۵ سوال پنجم

□ بسط لوران تابع $\frac{e^z}{z^2}$ حول $z = 0$ را به دست آورید.

□ بسط لوران تابع $\frac{ze^z}{z-1}$ حول $z = 1$ را به دست آورید.

□ بسط لوران تابع $(z-1)e^{1/z}$ حول $z = 0$ را به دست آورید.

موفق باشید.