



عنوان: تمرین سری چهار

نیم سال تحصیلی: ۴۰۴۱

مدرس: دکتر امین نصیری راد

مبحث تمرین: انتگرال گاووسی

مهلت تحویل: ۳ آذر

فهرست مطالب

۳	۱ سوال اول
۳	۲ سوال دوم
۳	۳ سوال سوم
۳	۴ سوال چهارم
۳	۵ سوال پنجم
۳	۶ سوال ششم
۳	۷ سوال هفتم
۴	۸ سوال هشتم
۴	۹ سوال نهم

۱ سوال اول

نشان دهید که

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-n-1} dz, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

با مسیر بسته‌ای که یک بار مبدأ را احاطه می‌کند، نمایشگر دلتا کرونکر δ_{mn} است.**۲ سوال دوم**

انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1}, \quad \text{که } C \text{ دایره } |z - 1| = 1 \text{ است.}$$

۳ سوال سومفرض کنید $f(z)$ روی و داخل مسیر بسته C تحلیلی باشد و نقطه z_0 داخل قرار داشته باشد. نشان دهید که

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_C \frac{dz}{z - z_0}.$$

۴ سوال چهارماگر $f(z)$ روی و داخل مسیر بسته C تحلیلی باشد، نشان دهید که مشتق n -ام آن در z_0 به صورت زیر داده می‌شود:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

با استفاده از استقراء ریاضی، اثبات کنید که این رابطه صحیح است.

۵ سوال پنجم(الف) تابع $f(z)$ داخل مسیر بسته C تحلیلی و روی C پیوسته است. اگر $0 < |f(z)| \leq M$ روی C باشد، نشان دهید که $|f(z)| \leq M$ برای تمام نقاط داخل C . راهنمایی: تابع $w(z) = 1/f(z)$ را در نظر بگیرید.(ب) اگر $f(z) = 0$ باشد، نشان دهید که نتیجه بالا برقرار نیست و ممکن است $0 < |f(z)|$ در یک یا چند نقطه داخلی باشد در حالی که $0 < |f(z)|$ روی کل مسیر مرسی. یک مثال مشخص از تابع تحلیلی که این رفتار را دارد ذکر کنید.**۶ سوال ششم**

انتگرال

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

را برای مسیر مربعی با طول ضلع $a > 1$ و مرکز در $z = 0$ محاسبه کنید.**۷ سوال هفتم**

انتگرال

$$\oint_C \frac{\sin^2 z - z^2}{(z - a)^3} dz,$$

را محاسبه کنید، که مسیر بسته C نقطه $a = z$ را احاطه می‌کند.

۸ سوال هشتم

انتگرال

$$\oint_C \frac{dz}{z(2z+1)},$$

را برای مسیر دایره واحد محاسبه کنید.

۹ سوال نهم

انتگرال

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{z(2z+1)^2},$$

را برای مسیر دایره واحد محاسبه کنید.

راهنمایی: ابتدا تجزیه به کسرهای جزئی انجام دهید.

موفق باشید.