عنوان:تمرین سری‌یک

نیم‌سال تحصیلی:۴۰۴۱

مدرس: دکتر احسان نوروزی‌فر

مبحث تمرین:احتمالات و گرما

مهلت تحویل:۱۹مهر

فهرست مطالب

۱ سوال اول

ثابت کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \exp\left(\frac{\Delta}{4a}\right) \tag{۱}$$

۲ سوال دوم

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گاوسی با ممان‌های اول صفر و انحراف معیار آن‌ها $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ باشد. متغیر تصادفی جدیدی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z = X^2 + Y^2$$

ممان‌های اول و دوم و سوم متغیر تصادفی Z را به‌دست آورید.

۳ سوال سوم

تابع توزیع دوجمله‌ای (Binomial) را معرفی کنید. به‌طور ویژه فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p باشد، یعنی

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

تابع توزیع پواسن (Poisson) را معرفی کنید. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع پواسن با پارامتر $\lambda > 0$ باشد، به‌گونه‌ای که:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

تابع توزیع گاوسی (Gaussian) را معرفی کنید. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد. تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad -\infty < x < \infty.$$

برای توزیع های بالا :
الف) ممان اول $E[X]$ را به‌دست آورید.
ب) ممان دوم $E[X^2]$ را به‌دست آورید.
ج) واریانس $\mathrm{Var}(X)$ را محاسبه کنید.
د) نشان دهید که توزیع ها نرمال‌شده اند.

۴ سوال چهارم

یک دستگاه شامل n اتم است که هر اتم تنها می‌تواند یکی از دو حالت انرژی را داشته باشد: یا هیچ کوانتایی از انرژی نداشته باشد (0)، یا دارای یک کوانتای انرژی باشد (1) حال می‌خواهیم بدانیم چند روش مختلف برای توزیع r کوانتای انرژی میان این n اتم وجود دارد، در صورتی که:

۱. $n = 2$، $r = 1$
۲. $n = 20$، $r = 10$
۳. $n = 2 \times 10^{23}$، $r = 10^{23}$

۵ سوال پنجم

دو جسم با ظرفیت‌های گرمایی C_1 و C_2 (که فرض می‌شود مستقل از دما هستند) و با دماهای اولیه‌ی به‌ترتیب T_1 و T_2، در تماس گرمایی با یکدیگر قرار داده می‌شوند. نشان دهید که دمای نهایی آن‌ها T_f از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$T_f = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}$$

همچنین اگر C_1 بسیار بزرگ‌تر از C_2 باشد، نشان دهید که تقریباً داریم:

$$T_f \approx T_1 + \frac{C_2(T_2 - T_1)}{C_1}$$

۶ سوال ششم

فرض کنید تابع چگالی احتمال انرژی E به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(E) = AE^2 e^{-E/(kT)}, \quad E \geq 0,$$

که k ثابت بولتزمن و T دما است.

الف) ضریب A را بیابید
ب) ممان اول $E[E]$ را محاسبه کنید
ج) ممان دوم $E[E^2]$ را محاسبه کنید
د) ممان سوم $E[E^3]$ را محاسبه کنید
ه) واریانس $\mathrm{Var}(E)$ را به دست آورید

۷ سوال امتیازی

تابع چگالی مشترک دو متغیر واقعی x و y را در نظر بگیرید:

$$p(x,y) = \mathcal{N}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(ax^2 + b\,xy + c\,y^2\right) + 2x + y\right] \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

که $\mathcal{N}$ ضریب نرمال‌سازی و a, b, c پارامترهای معلوم هستند.
هدف:

۱. ضریب نرمال‌سازی $\mathcal{N}$ را بیابید (نرمال‌سازی روی $\mathbb{R}^2$ انجام شود).

۲. ممان‌های اول $\langle x\rangle$ و $\langle y\rangle$ را محاسبه کنید.

۳. ممان‌های دوم $\langle x^2\rangle$ و $\langle y^2\rangle$ را محاسبه کنید.

۴. کوواریانس $\mathrm{Cov}(x,y) = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle$ را بیابید.

نکته: این تابع یک توزیع دومتغیره (bivariate) گاوسی است؛ بنابراین همه انتگرال‌ها در صفحه $\mathbb{R}^2$ گرفته می‌شوند و ماتریس ضرایب مربعی نقش مهمی در محاسبات دارد.

۸ پیوست: تابع مولد و راهنمای استفاده

این پیوست روشی نسبتاً کارا برای محاسبه میانگین و واریانس توزیع‌های احتمالی معرفی می‌کند. تابع مولد ممان (Moment Generating Function) یا به‌اختصار $M(t)$ را برای یک متغیر تصادفی x به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M(t) = \langle e^{tx} \rangle$$

نشان داده می‌شود که این تعریف دلالت بر آن دارد که:

$$\langle x^n \rangle = M^{(n)}(0)$$

که در آن داریم:

$$M^{(n)}(t) = \frac{d^n M}{dt^n}$$

همچنین نتیجه می‌شود که میانگین و واریانس به‌ترتیب عبارتند از:

$$\langle x \rangle = M^{(1)}(0), \qquad \sigma_x^2 = M^{(2)}(0) - \left(M^{(1)}(0)\right)^2$$

موفق باشید.