UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

MAT 070: Introducción al Cálculo

Clase 16

Coordinación MAT 070

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Contenidos

1 Modelos exponenciales

2 Ejercicios

Modelos exponenciales

Ejemplo

Si P_0 es el tamaño inicial de una población y D su tiempo de duplicación, entonces el tamaño de la población en el tiempo t viene dada por la función $P(t) = P_0 \cdot 2^{t/D}$. Tanto t como D se miden en la misma unidad de tiempo.

Cierta población de bacterias, que inicialmente tenía P_0 bacterias, se duplica cada 3 horas. Se sabe que luego de 3 horas habían 6 bacterias.

a) *¿Cuántas bacterias habían inicialmente?*

b) *Determine el número de bacterias luego de 9 horas.*

c) *¿Luego de cuántas horas, aproximadamente, habrán al menos 51000 bacterias?*

   (Suponga que $\log_2(17000) \approx 14$.)

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

(a) En este problema el tiempo es medido en horas. Tenemos que $D = 3$. Entonces, el modelo queda $P(t) = P_0 \cdot 2^{t/3}$. Evaluando en $t = 3$ llegamos a que $P(3) = 2P_0$, y como $P(3) = 6$, entonces concluimos que $P_0 = 3$. En consecuencia, inicialmente habían 3 bacterias.

(b) De la parte (a) obtenemos que el modelo queda $P(t) = 3 \cdot 2^{t/3}$. Entonces, evaluando en $t = 9$ llegamos a que $P(9) = 3 \cdot 2^{9/3} = 3 \cdot 8 = 24$. En consecuencia, luego de 9 horas habían 24 bacterias.

(c) Debemos resolver la inecuación $P(t) \geq 51000$, es decir, $3 \cdot 2^{t/3} \geq 51000$. Teniendo en cuenta que las funciones exponencial y logaritmo en base 2 (una es la función inversa de la otra y viceversa) son funciones estrictamente crecientes, obtenemos que

$$2^{t/3} \geq 17000 \;\Leftrightarrow\; t/3 \geq \log_2(17000) \;\Leftrightarrow\; t \geq 3\log_2(17000).$$

Se mantuvo el símbolo $\geq$ debido a que las funciones exponencial y logaritmo en base 2 son funciones estrictamente crecientes. Por lo tanto, como $3\log_2(17000) \approx 3 \cdot 14 = 42$, concluimos que luego de aproximadamente 42 horas habrán al menos 51000 bacterias.

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Ejemplo

Sea T_0 *la temperatura inicial de un cuerpo y* T_m *la temperatura del medio que lo contiene. La temperatura del cuerpo en el tiempo* t *puede ser modelada por la ley de Newton de enfriamiento, obteniendo la función* $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-Kt}$*, en donde* $K > 0$ *depende del cuerpo en cuestión.*

Una taza de café tiene una temperatura de $70\ [^\circ C]$ *y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de* $20\ [^\circ C]$*. Después de* 5 *minutos la temperatura del café es de* $60\ [^\circ C]$*. Entonces, según el modelo presentado, se tiene que la temperatura del café viene dada por* $T(t) = 20 + 50e^{-Kt}$*.*

a) *Determine el valor de* $K > 0$*.*

b) *¿Luego de cuántos minutos, aproximadamente, la temperatura del café será menor que* $30\ [^\circ C]$*?*
(Suponga que $\dfrac{\ln(1/5)}{\ln(4/5)} \approx 7,2$*.)*

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

(a) En este problema el tiempo es medido en minutos. Evaluando en $t = 5$ llegamos a que $60 = T(5) = 20 + 50e^{-5K}$. Luego, aplicando la función logaritmo en base e, que es la función inversa de la función exponencial en base e, obtenemos que

$$40 = 50e^{-5K} \Leftrightarrow 4/5 = e^{-5K} \Leftrightarrow \ln(4/5) = -5K \Leftrightarrow K = -(1/5)\ln(4/5).$$

Sigue que $K > 0$ ya que $\ln(4/5) < 0$.

(b) Debemos resolver la inecuación $T(t) < 30$, es decir, $20 + 50e^{-Kt} < 30$. Teniendo en cuenta que las funciones exponencial y logaritmo en base e (una es la función inversa de la otra y viceversa) son funciones estrictamente crecientes, obtenemos que

$$50e^{-Kt} < 10 \Leftrightarrow e^{-Kt} < 1/5 \Leftrightarrow -Kt < \ln(1/5) \Leftrightarrow t > -(1/K)\ln(1/5).$$

Se mantuvo el símbolo $<$ debido a que las funciones exponencial y logaritmo en base e son funciones estrictamente crecientes. Entonces, como $K = -(1/5)\ln(4/5)$, concluimos que

$$t > 5\frac{\ln(1/5)}{\ln(4/5)} \approx 5 \cdot 7,2$$

Por lo tanto, como $5 \cdot 7,2 = 36$, concluimos que luego de aproximadamente 36 minutos la temperatura del café será menor que 30 $[^\circ C]$.

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Ejercicio

1. *Usted discute con un amigo respecto de depositar una importante suma de dinero como depósito a plazo, con plazo de* 1 *año, a una tasa de interés del* 2% *anual. Su amigo lo insta a que duplique la cantidad a depositar, puesto que argumenta que, mientras más alto el depósito, menos tiempo se tardará en duplicar la cantidad inicial, ¿es esto correcto?*
2. *Un microbiólogo tiene una placa petri con bacterias, las cuales se duplican cada minuto. Luego de una hora, la placa petri está completamente llena de bacterias. Determinar el tiempo en el que la placa estaba llena a la mitad.*

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Ejercicio

3. *Una población de bacterias en un cultivo puede ser modelada por $P(t) = P_0 e^{kt}$, donde P_0 es la población inicial de bacterias, k es la constante de crecimiento, en [1/s], y t es el tiempo de duplicación, en $[s]$. Si inicialmente hay 10^4 bacterias, y pasado 4[s] hay 10^{56} bacterias, estimar la población de bacterias luego de 1[min].*

4. *Se ha determinado que un modelo que describe la concentración de un fármaco en un tumor cancerígeno, supuesto esférico de radio R, tiene la forma:*

$$C(r) = \alpha e^{\beta r}$$

donde α, β son parámetros a determinar, y $C(r)$ es la concentración del fármaco a una distancia r del centro del tumor.

   a) *Si se inyecta un fármaco de concentración C_0 justo en el centro del tumor, y se sabe que la concentración de dicho fármaco en la frontera del tumor es C_R ($C_0 > C_R$), determinar los parámetros α y β del modelo.*

   b) *Determinar la distancia al centro del tumor donde existirá una concentración de $\frac{2}{3}C_0$.*

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Ejercicio

5. *Si D_0 es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y sus alrededores, y si es posible suponer que la temperatura de los alrededores es constante e igual a T_s, entonces la temperatura de un cuerpo en un instante t viene dada por:*

$$T(t) = T_s + D_0 e^{-ht}$$

donde h es una constante positiva a determinar que depende del proceso.

Luego de un proceso industrial, un pellet metálico tiene una temperatura de 200[$\circ$C]. Posteriormente, se enfría en una cámara a 70[$\circ$C]. Luego de 10[min], la temperatura del pellet es de 150[$\circ$C].

   a) *Determinar la temperatura del pellet luego de 15[min].*

   b) *Determinar el tiempo en el que la temperatura del pellet será de 100[$\circ$C].*

Ejercicio

6. *Usted tiene una hoja cuyo espesor es de $0{,}1$[mm]. ¿Cuántas veces debe doblarla para que sea lo suficientemente alta para llegar a la Luna terrestre? (Suponga que todas las proezas físicas pueden ser logradas por usted).*

7. *En cierto país europeo, la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad son de $\frac{1}{33}$ y de $\frac{1}{46}$, respectivamente. Si no hay emigración, determinar la cantidad de años que le tocaría a ese país duplicar su población.*