Université Abdelmalek Essaadi,
ENSA D'AL-Hoceima
GI-1, Première année
Année universitaire 2020/2021

Épreuve de Mathématiques de l'Ingénieur : Méthodes Numériques

Examen, Durée : à rendre avant le 08 avril 2021.

N.B. : Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.
La rédaction doit être faite sur des feuilles A4 de l'imprimante.
Envoyer vos comptes-rendus à l'adresse mail : **m.addam@uae.ac.ma**

Exercice 1

Nous avons utilisé la méthode de Gauss pour résoudre des systèmes linéaires réels du type $Ax = b$ où $A \in \mathbb{R}^{(n\times n)}$ et $b \in \mathbb{R}^n$. L'objectif de cet exercice est, de résoudre des systèmes linéaires $Az = b$ où $A \in \mathbb{C}^{(n\times n)}$ et $b \in \mathbb{C}^n$, par la méthode de Gauss.

1. Montrer que si $A \in \mathbb{C}^{(n\times n)}$ et $b \in \mathbb{C}^n$, alors $A = A_{\mathrm{r}} + \mathrm{i}A_{\mathrm{i}}$ et $b = b_{\mathrm{r}} + \mathrm{i}b_{\mathrm{i}}$ où $A_{\mathrm{r}}, A_{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}^{(n\times n)}$ et $b_{\mathrm{r}}, b_{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que résoudre le système linéaire complexe $Az = b$ est équivalent à résoudre le système linéaire réel suivant
$$\begin{pmatrix} A_{\mathrm{r}} & -A_{\mathrm{i}} \\ A_{\mathrm{i}} & A_{\mathrm{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\mathrm{r}} \\ b_{\mathrm{i}} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$
où $z = x + \mathrm{i}y$.
3. Présenter une analyse sur le stockage des deux systèmes linéaires (complexe et réelle) dans la mémoire de votre machine.
4. Soit A la matrice à coefficients complexe suivante
$$A = \begin{pmatrix} 2+4\mathrm{i} & -1 & 7\mathrm{i} \\ -2-3\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & -3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 5+3\mathrm{i} \\ 7-\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer A_{r}, A_{i}, b_{r} et b_{i}, puis préciser leurs tailles.
   (b) Écrire le système linéaire réel équivalent, de type (1.1), à résoudre.
   (c) En utilisant la méthode de Gauss, triangulariser le système linéaire réel et le résoudre au même temps. (Écrire les matrices $L_1, L_2, \ldots, L_5$, puis les matrices L et U de la factorisation LU du système réel équivalent).
   (d) En déduire la solution z du système linéaire complexe.

Exercice 2

On propose de résoudre le système d'équations linéaire suivant :
$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \end{cases}$$
Soit $b = (5 + x_4, 3 + 2x_4, 1 - x_4)^T$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$

1. Écrire le système $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $Ax = b$ équivalente où A et x sont à déterminer.
2. Montrer que la matrice A est symétrique et définie positive, puis trouver le rayon spectral de A.

3. Quelle est la méthode numérique proposée pour la résolution du système linéaire équivalent ? *Justifier*
4. On procède maintenant à résoudre le système linéaire $Ax = b$.
   (a) Déterminer la matrice B telle que l'on a la factorisation de Cholesky $A = BB^T$.
   (b) Rappeler l'expression générale des solutions d'un système triangulaire, résoudre les systèmes trinagulaires linéaires $By = b$ et $B^T x = y$.
   (c) En déduire l'ensemble E des solutions du système linéaire $(\mathcal{S})$, puis montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

Exercice 3

On souhaite calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ par une méthode de point fixe utilisant la fonction

$$g(x) = \left(1 - \frac{\omega}{3}\right) x + (1-\omega)x^3 + \frac{2\omega}{3x^2} + 2(\omega - 1),$$

où ω est un paramètre réel.

1. Déterminer les valeurs de ω pour lesquelles le zéro de f soit un point fixe de la méthode g.
2. Déterminer les valeurs de ω pour lesquelles la convergence de la méthode soit d'ordre 1.
3. Existe-t-il une valeur du paramètre ω telle que l'ordre de la méthode soit supérieur à deux ?

Exercice 4

Soit A une matrice carrée de taille $(n \times n)$, à coefficient dans $\mathbb{R}$, symétrique et définie-positive. On décompose A sous la forme $A = D + H + V$ avec :

- (H_1) : $D = \alpha\, I_n$, où I_n est la matrice identité et $\alpha > 0$.
- (H_2) : H et V sont deux matrices symétriques qui vérifient : $D+V$ et $D+H$ sont inversibles.

Pour résoudre le système linéaire $A\,x = b$, où x et b sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on considère la méthode itérative suivante :

$$(E_1) \begin{cases} (D+H)x^{(k+\frac{1}{2})} = -V\,x^{(k)} + b, \\ \\ (D+V)x^{(k+1)} = -H\,x^{(k+\frac{1}{2})} + b. \end{cases}$$

1. Exprimer $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$. En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)} = x$ si, et seulement si $\rho(F) < 1$ où F est une matrice à déterminer.
2. On pose $B = D^{-1}H$ et $C = D^{-1}V$.
   (a) Vérifier que $\rho(F) = \rho\left(B(I+B)^{-1}C(I+C)^{-1}\right)$.
   (b) Vérifier que la matrice B commute avec la matrice $(I-B)^{-1}$. De même, vérifier que la matrice C commute avec la matrice $(I+C)^{-1}$.
   (c) Montrer que les matrices $B(I+B)^{-1}$ et $C(I+C)^{-1}$ sont symétriques.
   (d) Déduire que $\rho(F) \leq \rho\left(B(I+B)^{-1}\right)\rho\left(C(I+C)^{-1}\right)$.
3. Montrer que l'on a

$$\rho\left(B(I+B)^{-1}\right) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}I_n + B \quad \text{est symétrique et définie-positive}$$

4. Déduire que la méthode itérative (E_1) converge dès que les matrices $\frac{1}{2}D + H$ et $\frac{1}{2}D + V$ sont symétriques et définies-positives.

Exercice 5

Soit la matrice réelle A d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On suppose que A est diagonalisable et que ses valeurs propres $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ vérifient

$$|\lambda_1| \le \ldots \le |\lambda_{n-1}| \le |\lambda_n|.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Soient $X^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ les n vecteurs propres indépendants de A et les $X_j^{(i)}$ leurs composantes dans la base canonique $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$; soit v un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Exprimer $W^{(p)} = A^p v$ en fonction de $X_1, \ldots, X_n$ où $p \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que pour tout $j = 1, \ldots, n$ on a
   $$\lim_{p\to+\infty} \frac{W_j^{(p+1)}}{W_j^{(p)}}$$
   où $(W_j^{(p)})_{1\le j\le n}$ sont les composantes du vecteur W_p dans la base canonique β de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit le polynôme suivant $P(x) = x^3 - 4.82\,x^2 + 1.66\,x + 2.16$.
   (a) Calculer $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$; puis localiser les racines de $P(x)$.
   (b) Prendre $v = (0, 0, 1)^T$ et approcher la racine de plus grand module de $P(x)$.