Corrigé de la PC2 : Résolution analytique d'équations hyperboliques linéaires et non linéaires en 1D

29 mars 2021

Les corrigés des exercices sont volontairement très détaillés pour que les explications données au lecteur soient les plus précises et complètes possibles. Nous n'attendrons évidemment pas autant de détails à l'examen.

EXERCICE 1 (EQUATION DE TRANSPORT À VITESSE VARIABLE)
On considère l'équation de transport à vitesse variable

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) \end{cases}$$

où $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$ *et* $c(x,t)$ *sera définie dans chaque question.*

Question 1. *On suppose que* $c(x,t) = x$*. Est ce que le problème est bien posé dans* $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ *? Tracer les caractéristiques dans le plan* (x,t)*. Calculer la solution classique en tout point* x *et tout temps* t*.*

Corrigé de la question 1. On est dans le cadre du théorème vu en cours : la vitesse c est bien lipchitzienne par rapport à x et ce indépendamment de t et $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R})$ donc d'après le cours il existe bien une unique solution dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Toujours d'après le cours, la stabilité dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ n'est pas claire. Nous verrons ce que nous arrivons à obtenir dans ce cas.

Cherchons les courbes caractéristiques, notées $X(t)$, associées au problème. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x}\right](X(t),t) &= \frac{d}{dt}\left[u\left(X(t),t\right)\right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}\left(X(t),t)\right) + X'(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}\left(X(t),t\right). \end{aligned}$$

Par identification, on obtient donc $X'(t) = c(X(t),t)$. En ajoutant la donnée d'une position initiale, nous notons X_{x_0} la courbe caractéristique de pied x_0, définie par :

$$\begin{cases} X'_{x_0}(t) = c\left(X_{x_0}(t),t\right) = X_{x_0}(t), \\ X_{x_0}(0) = x_0, \end{cases}$$

d'équation $X_{x_0}(t) = x_0\, e^t$.

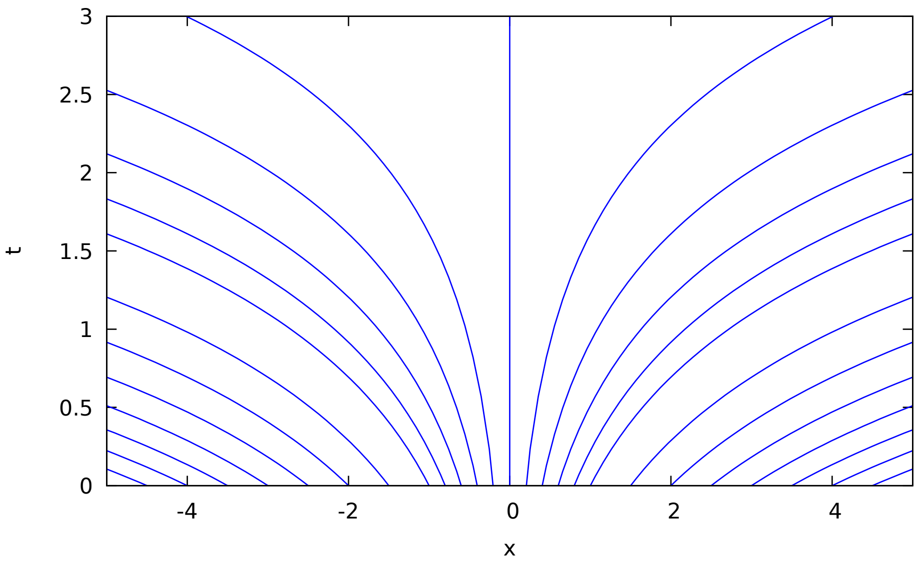

FIGURE 1 – Courbes caractéristiques d'équation $X_{x_0}(t) = x_0\, e^t$

Ces courbes caractéristiques sont tracées sur la figure 1, dans le plan habituel (x, t). La courbe caractéristique de pied $x_0 = 0$ a pour équation $x = 0$; les autres courbes caractéristiques sont données par :

$$x = x_0\, e^t \quad \Leftrightarrow \quad t = ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \text{ si } x_0 \neq 0.$$

Revenons à l'expression de la solution. Si l'on note $U_{x_0}(t) := u\,(X_{x_0}(t), t)$ la valeur de la solution le long de la courbe caractéristique de pied x_0, on a d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
U'_{x_0}(t) &= \frac{d}{dt}\left[u\,(X_{x_0}(t), t)\right] \\
&= \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x}\right](X_{x_0}(t), t) && \textit{(par déf. des caractéristiques)} \\
&= 0, \qquad\qquad \forall (x_0, t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, && \textit{(car } u \textit{ est solution classique)} \\
\Rightarrow \quad U_{x_0}(t) &= U_{x_0}(0), \qquad\qquad \forall (x_0, t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\
\Rightarrow \quad u(X_{x_0}(t), t) &= u(X_{x_0}(0), 0) = u^0(x_0), \quad \forall (x_0, t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

On connaît donc la solution u le long des courbes caractéristiques. On cherche maintenant l'expression de $u(x, t), \forall (x, t)$. D'après le théorème de Cauchy Lipchitz, les courbes remplissent tout le demi plan et elles ne se rencontrent jamais. Autrement dit :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad \exists!\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = X_{x_0}(t).$$

Suivant les notations du cours, on note $x_0 = X(0;x,t)$. Dans le cas qui nous occupe ici, on peut déterminer $X(0;x,t)$ explicitement :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad x = X_{x_0}(t) \Leftrightarrow x = x_0\, e^t$$
$$\Leftrightarrow x_0 = x\, e^{-t},$$

d'où on conclut

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad X(0;x,t) = x\, e^{-t}.$$

Finalement, la solution prend donc nécessairement la forme suivante :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = u(X_{x_0}(t),t) = u^0(X(0;x,t)) = u^0(xe^{-t}).$$

Si il existe une solution, on vient donc de montrer avec la méthode des caractéristiques qu'elle est nécessairement donnée par l'expression ci-dessus.

Montrons maintenant que cette fonction est bien solution classique de l'équation. Tout d'abord, c'est une fonction C^1 qui vérifie bien la condition initiale : $u(x,t) = u^0(x)$. De plus on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = e^{-t}(u^0)'(xe^{-t}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -xe^{-t}(u^0)'(xe^{-t}),$$

l'EDP est donc bien vérifiée. Etudions maintenant la stabilité. Nous avons de manière évidente

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} = \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

et

$$\|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} \leq \|(u^0)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Par contre, le contrôle de la dérivée en temps de u est moins claire sauf si u^0 est à support compact. En effet, dans ce cas, nous montrons facilement qu'il existe une constante $C > 0$ qui dépend du support de u^0 telle que

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} \leq C\|(u^0)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Question 2. *On suppose que $c(x,t) = 1$ pour $x \leq 1$ et $c(x,t) = x$ pour $x \geq 1$. Est ce que le problème est bien posé ? Tracer les caractéristiques dans le plan (x,t). Calculer la solution classique en tout point x et tout temps t.*

Corrigé de la question 2. On est toujours dans le cadre du théorème vu en cours : même si la vitesse $c(x)$ n'est pas C^1, elle est lipchitzienne. Tout ce qui a été dit à la question précédente reste vrai, et on peut affirmer sans calcul qu'il existe une unique solution, la stabilité n'étant pas toujours assurée globalement

La courbe caractéristique issue de x_0 est toujours donnée par

$$\begin{cases} X'_{x_0}(t) = c\left(X_{x_0}(t), t\right), \\ X_{x_0}(0) = x_0, \end{cases}$$

On remarque que $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, c\,(x,t) \geqslant 0$. Les courbes caractéristiques sont donc strictement croissantes (elles "avancent vers la droite"). Étudions maintenant plus précisément la forme que peuvent prendre ces courbes en fonction de la valeur de x_0.

Cas 1 : $x_0 \geqslant 1$
Dans ce cas, on a $\forall t > 0, X_{x_0}(t) \geqslant X_{x_0}(0) \geqslant x_0 \geqslant 1$, d'où on peut conclure que l'équation des courbes caractéristiques est donnée par la même expression qu'à la question 1 puisque $c(X_{x_0}(t), t) = X_{x_0}(t)$. On a donc

$$\begin{aligned} & X'_{x_0}(t) = X_{x_0}(t) && \text{(car } X_{x_0}(t) \geqslant 1\text{)}, \\ \Rightarrow\quad & X_{x_0}(t) = x_0\, e^t. \end{aligned}$$

Cas 2 : $x_0 \leqslant 1$
Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} & X'_{x_0}(t) = 1 && \text{tant que } X_{x_0}(t) \leqslant 1, \\ \Rightarrow\quad & X_{x_0}(t) = x_0 + t && \text{tant que } X_{x_0}(t) \leqslant 1, \textit{ i.e.} \text{ pour } t \leqslant 1 - x_0 \end{aligned}$$

A $t_1 = 1 - x_0$, on obtient donc $X_{x_0}(1 - x_0) = 1$. A partir de ce moment, l'équation vérifiée par la courbe caractéristique est donnée par :

$$\begin{cases} X'_{x_0}(t) = c\left(X_{x_0}(t), t\right) = X_{x_0}(t), & \text{(car } X_{x_0}(t) \geqslant 1\text{)} \\ X_{x_0}(t_1) = 1, \end{cases}$$

d'où on tire

$$X_{x_0}(t) = X_{x_0}(t_1)\, e^{t - t_1} = e^{t + x_0 - 1} \qquad \text{(pour } t \geqslant t_1 = 1 - x_0\text{)}.$$

Si on utilise les notations du cours (c'est à dire avec le flot caractéristique $X(t; x_s, s)$), on peut aussi écrire $X_{x_0}(t) := X(t; x_0, 0) = X(t; 1, 1 - x_0)$: la courbe caractéristique qui passe par le point $(x_0, 0)$ passe aussi par le point $(1, 1 - x_0)$.

Récapitulatif : En regroupant tous les cas, on obtient :

$$X_{x_0}(t) = \left| \begin{array}{ll} x_0 + t & \text{si } x_0 \leqslant 1 \text{ et } t \leqslant 1 - x_0, \\ e^{t + x_0 - 1} & \text{si } x_0 \leqslant 1 \text{ et } t \geqslant 1 - x_0, \\ x_0\, e^t & \text{si } x_0 \geqslant 1. \end{array} \right.$$

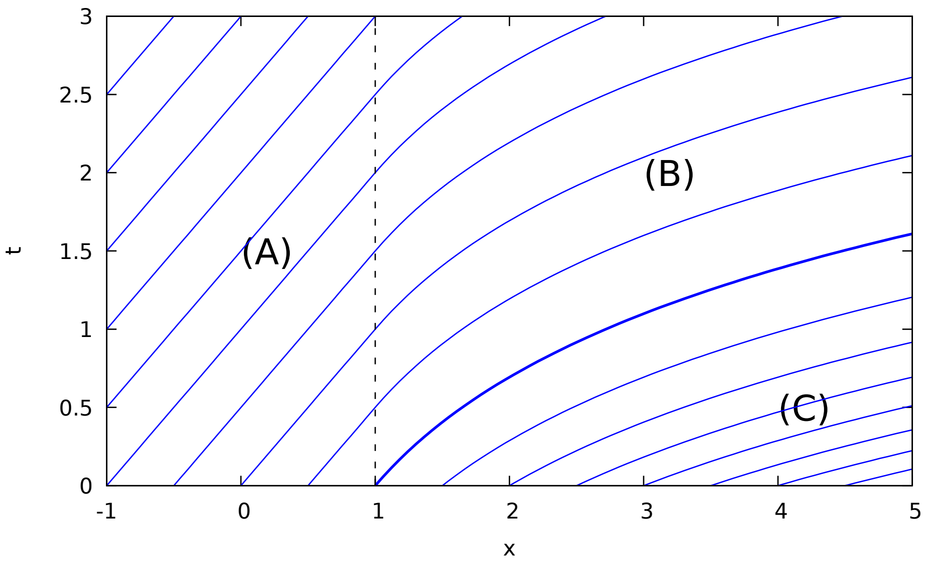

FIGURE 2 – Courbes caractéristiques dans le cas de la question 2.

Toutes ces courbes peuvent s'exprimer sous la forme $t = f(x)$, ce qui est plus pratique pour les tracer dans le plan (x,t) (cf. figure 2) :

$$t_{x_0}(x) = \left| \begin{array}{ll} x - x_0 & \text{si } x \leqslant 1 \text{ (zone A),} \\ \ln(x) + 1 - x_0 & \text{si } x \geqslant 1 \text{ et } x_0 \leqslant 1 \text{ (zone B),} \\ \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right) & \text{si } x \geqslant 1 \text{ et } x_0 \geqslant 1 \text{ (zone C).} \end{array} \right.$$

Là encore, d'après le théorème de Cauchy Lipchitz, les courbes remplissent tout le demi plan et elles ne se rencontrent jamais. Autrement dit, pour tout (x,t), il existe une et une seule caractéristique qui passe par (x,t) :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \exists ! x_0, \quad X_{x_0}(t) = x,$$

et, si on note $x_0 = X(0; x, t)$ comme à la question précédente, la solution de l'équation prend donc nécessairement la forme

$$u(x,t) = u^0(X(0; x, t)).$$

Plus précisément,

$$\begin{array}{lll} \text{Zone (A) : si } x \leq 1, & \text{alors} & X_{x_0}(t) = x \ \Rightarrow \ x_0 = x - t \ (\leq 1) \\ \text{Zone (B) : si } 1 \leq x \leq e^t & \text{alors} & X_{x_0}(t) = x \ \Rightarrow \ x_0 = \ln x - t + 1 \ (\leq 1) \\ \text{Zone (C) : si } x \geq e^t & \text{alors} & X_{x_0}(t) = x \ \Rightarrow \ x_0 = x\, e^{-t} \ (\geq 1) \end{array}$$

On en déduit l'expression de $u(x,t)$ pour tout (x,t) :

$$u(x,t) = \left| \begin{array}{ll} u^0(x - t) & \text{si } x \leqslant 1 \text{ (zone A)} \\ u^0(\ln x + 1 - t) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant e^t \text{ (zone B)} \\ u^0(x\, e^{-t}) & \text{si } x \geqslant e^t \text{ (zone C)} \end{array} \right.$$

Nous avons, comme d'habitude, que s'il existe une solution classique, elle est donnée par cette expression, d'où l'unicité. On peut montrer également qu'elle est bien C^1 puisque qu' elle est C^1 dans chaque zone et qu'à la traversée des interfaces entre les zones, $\{(x,t), x=1\}$ et $\{(x,t), x=e^t\}$, elle est bien C^1 (notons qu'il suffit de vérifier la continuité de la dérivée en temps à la traversée des interfaces, la continuité de la dérivée en espace étant assurée par l'EDP.)On peut montrer enfin que cette fonction vérifie la condition initiale et l'EDP, les calculs sont laissés au lecteur. Enfin le résultat de stabilité est le même que celui de la question précédente, il suffit de raisonner zone par zone !

Question 3. *On va considérer maintenant un cas où la fonction $c(x)$ est discontinue en $x=0$. On sort alors du cadre du cours. Plus précisément, on suppose maintenant que $c(x,t)=1$ pour $x \leq 0$ et $c(x,t)=x$ pour $x>0$.*

Question 3a. *On cherche une solution $u(x,t)$ qui soit une solution classique dans chacun des demi-espaces $x<0$ et $x>0$. Montrer, à l'aide de la méthode des caractéristiques que la fonction u est alors entièrement déterminée. Montrer que cette fonction est discontinue en général.*

Corrigé de la question 3a. Appliquons la méthode des caractéristiques comme précédemment, mais en se restreignant à chaque quart de plan.

Cas 1 : $x<0$
Les courbes caractéristiques sont définies par :

$$\begin{cases} X'_{x_0}(t) = 1, \quad \text{(car } X_{x_0}(t) < 0) \\ X_{x_0}(0) = x_0, \end{cases}$$

c'est à dire

$$X_{x_0}(t) = x_0 + t,$$

ou encore, pour faciliter le tracé dans le plan (x,t) :

$$t = x - x_0.$$

En tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^{-,*} \times \mathbb{R}^{+,*}$ passe une et une seule courbe caractéristique, dont le pied $x_0 \in \mathbb{R}^{-,*}$ est donné par :

$$x = X_{x_0}(t) \Leftrightarrow x_0 = x - t.$$

L'expression de la solution dans ce quart de plan est donc nécessairement :

$$u(x,t) = u^0(x-t), \qquad \forall x<0, \forall t>0$$

Cas 2 : $x>0$
Les courbes caractéristiques sont définies par :

$$\begin{cases} X'_{x_0}(t) = X_{x_0}(t), \quad \text{(car } X_{x_0}(t) > 0) \\ X_{x_0}(0) = x_0, \end{cases}$$

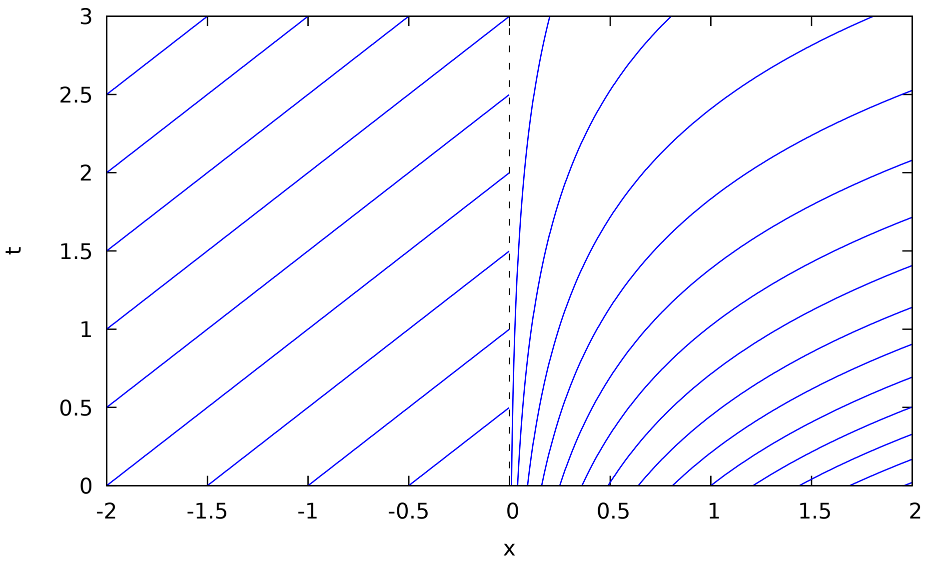

FIGURE 3 – Courbes caractéristiques dans le cas de la question 3.

c'est à dire

$$X_{x_0}(t) = x_0\, e^t,$$

ou encore, pour faciliter le tracé dans le plan (x,t) :

$$t = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

En tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}^{+,*}$ passe une et une seule courbe caractéristique, dont le pied $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ est donné par :

$$x = X_{x_0}(t) \Leftrightarrow x_0 = x\, e^{-t}.$$

L'expression de la solution dans ce quart de plan est donc nécessairement :

$$u(x,t) = u^0\left(x\, e^{-t}\right), \qquad \forall x > 0, \forall t > 0.$$

Récapitulatif : En regroupant les deux quarts de plan, on obtient les courbes caractéristiques présentées sur la figure 3. La solution ne peut être donnée par une autre expression que :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+,*}, u(x,t) = \left| \begin{array}{ll} u^0(x-t) & \textbf{si } x < 0, \\ u^0\left(x\, e^{-t}\right) & \textbf{si } x > 0. \end{array} \right.$$

On remarque alors que

$$u(0^-,t) = u^0(-t), \quad u(0^+,t) = u^0(0), \qquad \forall t > 0.$$

En général, la fonction ainsi construite est discontinue en $x = 0$. Bien qu'il s'agisse d'une solution classique de l'équation dans chacun des quarts de plan, on ne peut pas considérer cette fonction comme une solution classique de l'équation dans tout le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Question 3b. *A quelle condition sur la donnée initiale u^0, la fonction est-elle continue à travers $x = 0$? Montrer que dans ce cas, il s'agit d'une solution "classique" au sens où $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ et où l'égalité*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

est satisfaite en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Corrigé de la question 3b. On voit que la fonction u construite à la question précédente est continue sur $\mathbb{R}\hat{}-$ et sur $\mathbb{R}^+$ car u^0 est de classe C^1. Elle est continue en 0 si et seulement si

$$\forall x > 0, \quad u^0(-x) = u^0(0),$$

autrement dit, si et seulement si u^0 est constante dans $]-\infty, 0]$. Dans ce cas, la solution donnée précédemment :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+,*}, u(x,t) = \left| \begin{array}{ll} u^0(x-t) & \text{si } x < 0, \\ u^0\left(x\, e^{-t}\right) & \text{si } x > 0, \end{array} \right.$$

est continue en $x = 0$, $\forall t > 0$.

De plus, on peut aussi remarquer que u est alors aussi C^1 en $x = 0$, puisque $\forall t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0^-,t) = u^{0\prime}(-t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0^+,t) = e^{-t}\, u^{0\prime}(0) \equiv 0.$$

En effet, étant donné que u^0 est constante dans $\mathbb{R}^-$, $u^{0\prime}(x) = 0, \forall x < 0$ et, comme u^0 est C^1, on a par conséquent aussi $u^{0\prime}(0) = 0$.

Pour les mêmes raisons, on a également

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0^-,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(0^+,t) = 0, \forall t > 0.$$

Finalement, la fonction u ainsi construite est globalement C^1 ; c'est donc une solution classique.

Question 4. *On reprend la question précédente avec $c(x,t) = -1$ pour $x \leq 0$ et $c(x,t) = x$ pour $x > 0$.*

Question 4a. *Montrer que la recherche d'une solution classique par morceaux ne la détermine entièrement que dans une zone du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ que l'on précisera. Donner la forme générale d'une telle fonction.*

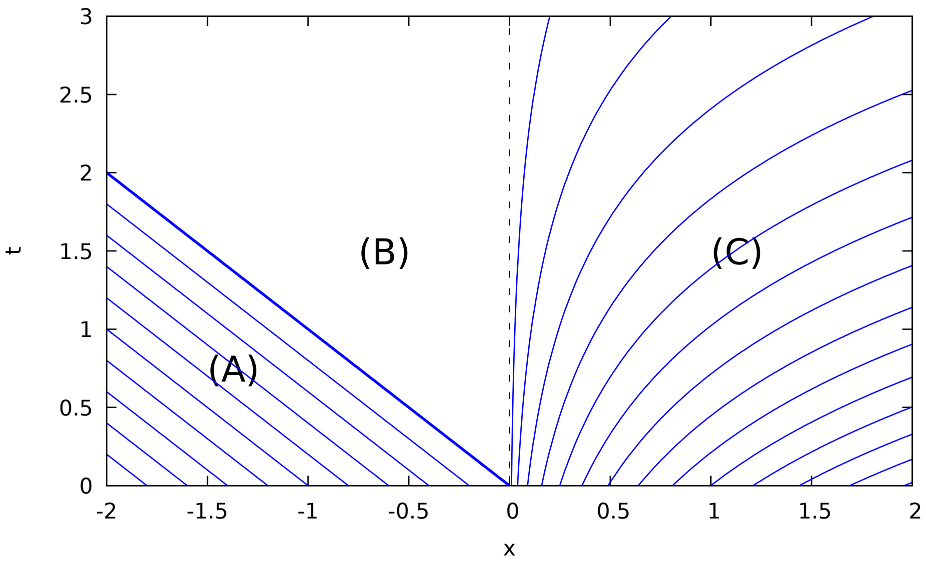

FIGURE 4 – Courbes caractéristiques dans le cas de la question 4.

Corrigé de la question 4a. Les courbes caractéristiques sont toujours données par :

$$\begin{cases} X'_{x_0}(t) = c\,(X_{x_0}(t), t) \\ X_{x_0}(0) = x_0, \end{cases}$$

Cas 1 : $x_0 > 0$
On obtient comme précédemment $\forall t > 0,\ X_{x_0}(t) = x_0\, e^t > 0$. La solution s'exprime nécessairement comme

$$u(x,t) = u^0\left(x\, e^{-t}\right) \text{ si } x > 0.$$

Cas 2 : $x_0 < 0$
On obtient dans ce cas $\forall t > 0,\ X_{x_0}(t) = x_0 - t < -t$. Les courbes caractéristiques sont tracées dans la figure 4. On voit clairement que seule une partie du quart de plan $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ est recouverte par les caractéristiques.

Pour chaque point $(x,t) \in A$ (*i.e.* tel que $x < -t$), il existe une et une seule courbe caractéristique passant par ce point, dont le pied est donné par : $x_0 = x + t < 0$. La solution est nécessairement donnée dans cette zone par l'expression :

$$u(x,t) = u^0(x+t) \text{ si } x < -t.$$

En revanche, en chaque point $(x,t) \in B$ (*i.e.* tel que $-t < x < 0$) il ne passe aucune caractéristique de pied $x_0 < 0$. Dans cette région du quart de plan, on pourrait construire une infinité de solutions, de la forme

$$u(x,t) = f(t+x), \quad \forall (x,t) \text{ t.q. } -t < x < 0,$$

avec f régulière quelconque telle que $f(0) = u^0(0)$ et $f'(0) = u^{0\prime}(0)$ (cf. PC 1).

Question 4b. *Montrer que la fonction u est entièrement définie si on lui impose d'être globalement continue. Montrer que cette fonction est de classe C^1 si la dérivée de u^0 est nulle à l'origine et qu'il s'agit alors bien d'une solution classique au sens défini à la question 3.b.*

Corrigé de la question 4b. On suppose que la solution u prend la forme

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, u(x,t) = \left| \begin{array}{ll} u^0(x+t) & \text{si } x < -t, \\ f(x+t) & \text{si } -t < x < 0, \\ u^0\left(x\, e^{-t}\right) & \text{si } x > 0. \end{array} \right.$$

On a alors

$$\forall t > 0, \quad u(0^-, t) = f(t), \quad u(0^+, t) = u^0(0).$$

La continuité de u en $x = 0$ impose donc

$$\forall t > 0, \quad u(0^-, t) = u^+(0^+, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t > 0, \quad f(t) = u^0(0),$$

ce qui entraine que $u(x,t)$ est constante égale à $u^0(0)$ pour $-t \leq x \leq 0$. Elle est donc entièrement définie.

Par ailleurs

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) = e^{-t}\, \frac{du^0}{dx}(0),$$

alors que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0^-, t) = f'(t) \equiv 0.$$

On en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue si et seulement si

$$\frac{du^0}{dx}(0) = 0$$

Enfin, il est facile, comme dans la question 3, de vérifier que dans ce cas $\frac{\partial u}{\partial t}$ est aussi continue, et qu'on a ainsi construit une solution classique (c'est à dire de classe C^1 et vérifiant l'équation en tout point du domaine).

<u>EXERCICE</u> 2 (SOLUTION CLASSIQUE)
On considère l'équation de Bürgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

où $f(u) = \dfrac{1}{2}u^2$, avec la condition initiale suivante : $u^0(x) = x$.

Question. *Calculer la solution classique. On tracera les caractéristiques dans le plan (x,t) puis la solution en fonction de x à différents temps.*

Corrigé de la question. La condition initiale $u^0(x) = x$ est croissante et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après les théorèmes du cours, le problème admet donc une solution classique pour tout $t > 0$, et la méthode des caractéristiques permet de construire cette solution.

On peut récrire l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

où l'on a noté $a(u) = f'(u) = u$.

De manière similaire à l'exercice 1, les courbes caractéristiques, notées $X(t)$, sont définies par la relation :

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right](X(t),t) &= \frac{d}{dt}\left[u\left(X(t),t\right)\right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}\left(X(t),t)\right) + X'(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}\left(X(t),t\right).\end{aligned}$$

Par identification, on obtient donc $X'(t) = u(X(t),t)$. En ajoutant la donnée d'une position initiale, nous notons X_{x_0} la courbe caractéristique de pied x_0, définie par :

$$\begin{cases} X'_{x_0}(t) = u\left(X_{x_0}(t),t\right), \\ X_{x_0}(0) = x_0, \end{cases}$$

Comme auparavant, la solution est constante le long des caractéristiques. En effet, en notant $U_{x_0}(t) := u\left(X_{x_0}(t),t\right)$ la valeur de la solution le long de la courbe caractéristique de pied x_0, on a d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
U'_{x_0}(t) &= \frac{d}{dt}\left[u\left(X_{x_0}(t),t\right)\right] \\
&= \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]\left(X_{x_0}(t),t\right) && \textit{(par déf. des caractéristiques)} \\
&= 0, \qquad \forall (x_0,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, && \textit{(car } u \textit{ est solution classique)} \\
\Rightarrow U_{x_0}(t) &= U_{x_0}(0), \qquad \forall (x_0,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\
\Rightarrow u(X_{x_0}(t),t) &= u(X_{x_0}(0),0) \\
&= u^0(x_0) = x_0, \qquad \forall (x_0,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Les courbes caractéristiques vérifient donc $X'_{x_0}(t) = u(X_{x_0}(t),t) = x_0$: leur équation est donnée par

$$X_{x_0}(t) = x_0\,(1+t).$$

Comme dans le cas de l'équation du transport, ce sont des droites. Mais dans ce cas non linéaire, elles ne sont plus parallèles !

Soit $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$. Il existe une unique caractéristique passant par (x,t), dont le pied x_0 est donné par

$$X_{x_0}(t) = x \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{x}{1+t}.$$

Finalement (cf. figure 5), on a donc nécessairement :

$$u(x,t) = u(X_{x_0}(t),t) = x_0 = \frac{x}{1+t}.$$

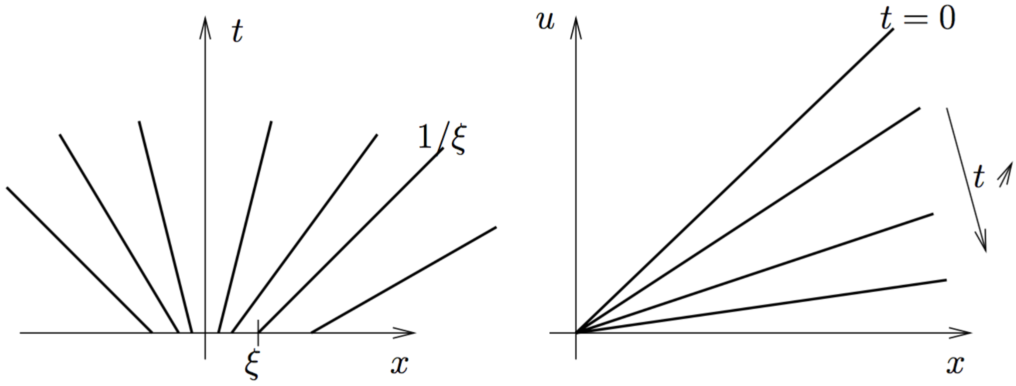

FIGURE 5 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

EXERCICE 3 (NAISSANCE DE L'ONDE DE CHOC)
On considère l'équation de Bürgers avec la condition initiale suivante : $u^0(x) = \sin x$.

Question 1. *Montrer que les caractéristiques ne se croisent pas avant* $t = 1$.

Corrigé de la question 1. u^0 n'est pas une fonction croissante. D'après les théorèmes du cours, il existe donc un temps maximal t^* au delà duquel on ne peut plus appliquer la méthode des caractéristiques.

Seule la condition initiale u^0 change par rapport à l'exercice 2. Les droites caractéristiques sont tracées sur la figure 6. Leur équation est donnée par :

$$X_{x_0}(t) = \sin(x_0)t + x_0.$$

Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Appliquer la méthode des caractéristiques nécessite de savoir s'il existe une caractéristique passant par (x,t) et le cas échéant, si elle est unique. Autrement dit, il convient d'étudier si la question suivante :

$$\exists ?!\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } X_{x_0}(t) = x.$$

Pour étudier ce problème, nous introduisons la fonction $h_t(x_0) := X_{x_0}(t)$ qui associe à chaque x_0 la valeur prise à l'instant t par la courbe caractéristique de pied x_0.

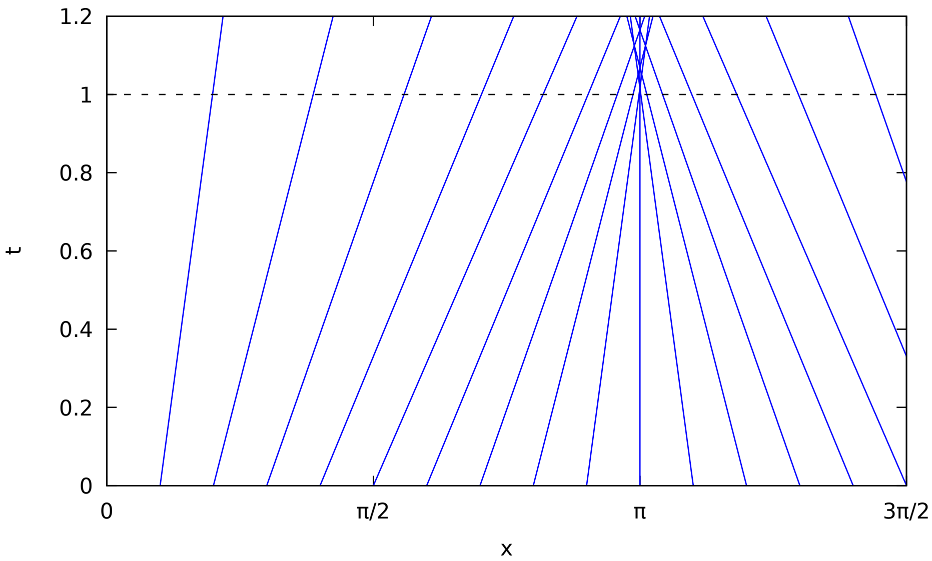

FIGURE 6 – Droites caractéristiques dans le cas de l'exercice 3 : équation de Bürgers avec $u^0 = \sin$.

Ainsi, l'image de h_t est l'ensemble des valeurs prises les caractéristiques à l'instant t. Si $h_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (c'est à dire si h_t est surjective), alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe au moins une caractéristique passant par le point (x, t).

Réciproquement, si h_t est injective, cela signifie que pour chaque position $x \in \mathbb{R}$, il ne peut pas exister plus d'une caractéristique passant par le point (x, t). La question devient donc celle de l'inversibilité de $h_t, \forall t > 0$:

$$\exists ?! \ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } h_t(x_0) = x.$$

La fonction h_t est définie par

$$h_t(x_0) = x_0 + \sin(x_0)\, t;$$

elle est donc continue, et on a de plus

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} h(x_0) = \pm\infty,$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, h_t est surjective, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Par ailleurs, h_t est dérivable, et sa dérivée est définie par

$$h_t'(x_0) = 1 + t\ \cos(x_0) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t < 1.$$

Donc h_t est strictement croissante si $t < 1$, ce qui assure qu'elle est injective.

Finalement, sous la condition $t < 1$, h_t est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$, il existe une unique droite caractéristique passant par (x, t), dont le pied x_0 est donné par :

$$x_0 = h_t^{-1}(x).$$

La valeur prise par la solution au point (x,t) est donnée par

$$u(x,t) = u(X_{x_0}(t),t) = u^0(x_0) = u^0(h_t^{-1}(x)).$$

Remarquons que dans ce cas, h_t^{-1} (et par conséquent l'expression de la solution) n'est pas explicite.

Question 2. *Calculer l'instant t_ε auquel se croisent les caractéristiques issues des points $\pi - \varepsilon$ et $\pi + \varepsilon$.*

Corrigé de la question 2. Notons $X_\pm$ les caractéristiques issues des points $\pi \pm \varepsilon$. Ces caractéristiques sont d'équations :

$$X_\pm(t) = \pi \pm \varepsilon + t\,\sin(\pi \pm \varepsilon).$$

Si t_ε est le temps où se croisent ces deux droites caractéristiques, alors on a :

$$\begin{aligned}
& X_-(t_\varepsilon) = X_+(t_\varepsilon) \\
\Leftrightarrow\quad & \pi - \varepsilon + t_\varepsilon\,\sin(\pi - \varepsilon) = \pi + \varepsilon + t_\varepsilon\,\sin(\pi + \varepsilon) \\
\Leftrightarrow\quad & t_\varepsilon\,(\sin(\pi - \varepsilon) - \sin(\pi + \varepsilon)) = 2\,\varepsilon \\
\Leftrightarrow\quad & t_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On note que $t_\varepsilon > 1$, conformément aux résultats de la question précédente.

Question 3. *En déduire qu'il n'existe pas de solution classique après $t = 1$.*

Corrigé de la question 3. On a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} t_\varepsilon = 1,$$

ce qui montre qu'il n'existe pas de solution classique au delà du temps $t^* = 1$.

Notons que ce temps maximal d'existence aurait pu être trouvé en appliquant la formule du cours :

$$t^* = -\left(\inf_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(a \circ u^0)\right)^{-1}.$$

<u>EXERCICE</u> 4 (CONSTRUCTION DE L'ONDE DE DÉTENTE)

On considère l'équation de Bürgers avec la condition initiale :

$$u^0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 0, \\ x/\alpha, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \alpha, \\ 1, & \text{si} \quad x \geq \alpha, \end{cases}$$

pour $\alpha > 0$.

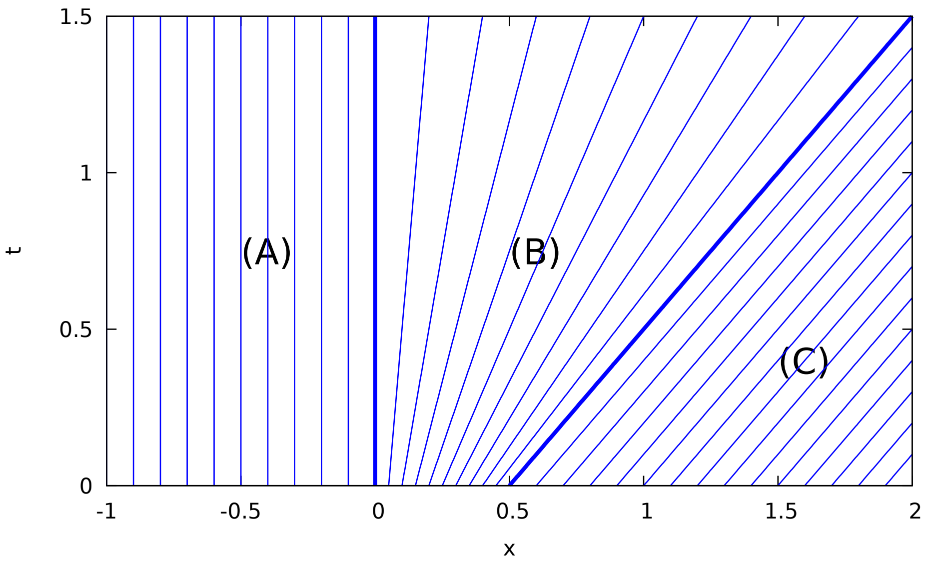

FIGURE 7 – Droites caractéristiques dans le cas de l'exercice 4, pour $\alpha = 1/2$.

Question 1. *Construire la solution à l'aide des caractéristiques.*

Corrigé de la question 1. La condition initiale est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, croissante et continue. La méthode des caractéristiques permet de construire une fonction u continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux vérifiant l'équation de Bürgers point par point dans tout ouvert où elle est $\mathcal{C}^1$. C'est une solution faible du problème.

Comme précédemment, l'équation des droites caractéristiques est déterminée par :

$$X'_{x_0}(t) = u^0(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \leqslant 0, \\ x_0/\alpha & \text{si } 0 \leqslant x_0 \leqslant \alpha, \\ 1 & \text{si } \alpha \leqslant x_0. \end{cases}$$

Ceci donne lieu à 3 formes différentes que peuvent prendre les droites caractéristiques, valides chacune dans un sous-domaine du demi-plan (figure 7).

Cas 1 (zone A) : $x_0 \leqslant 0$
La courbe caractéristique issue de x_0 a pour équation $X_{x_0}(t) = x_0$. On en déduit que, dans ce cas :

$$X_{x_0}(t) \leqslant 0.$$

On définit donc $A = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$. Pour chaque point $(x,t) \in A$, il existe une et une seule droite caractéristique passant par ce point, dont le pied x_0 est donné par :

$$X_{x_0}(t) = x \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = x.$$

Cas 2 (zone B) : $0 \leqslant x_0 \leqslant \alpha$
La courbe caractéristique issue de x_0 a pour équation $X_{x_0}(t) = x_0 + \frac{x_0}{\alpha} t$. On en déduit que, dans ce cas :

$$0 \leqslant X_{x_0}(t) \leqslant \alpha + t.$$

On définit donc $B = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant \alpha + t\}$. Pour chaque point $(x,t) \in B$, il existe une et une seule droite caractéristique passant par ce point, dont le pied x_0 est donné par :

$$X_{x_0}(t) = x \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \left(1 + \frac{t}{\alpha}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{\alpha\, x}{\alpha + t}.$$

Cas 3 (zone C) : $\alpha \leqslant x_0$
La courbe caractéristique issue de x_0 a pour équation $X_{x_0}(t) = x_0 + t$. On en déduit que, dans ce cas :

$$\alpha + t \leqslant X_{x_0}(t).$$

On définit donc $C = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \; ; \; x \geqslant \alpha + t\}$. Pour chaque point $(x,t) \in C$, il existe une et une seule droite caractéristique passant par ce point, dont le pied x_0 est donné par :

$$X_{x_0}(t) = x \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = x - t.$$

Récapitulatif :
La solution u est constante le long des caractéristiques, et sa valeur est donnée par

$$u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)\,,$$

soit, en regroupant tous les cas étudiés ci-dessus (fig. 8) :

$$u(x,t) = \begin{cases} u^0(x) = 0, & \text{si } x \leq 0, \\ u^0\left(\dfrac{\alpha\, x}{\alpha + t}\right) = \dfrac{x}{\alpha + t}, & \text{si } 0 \leq x \leq t + \alpha, \\ u^0(x - t) = 1, & \text{si } x \geq t + \alpha. \end{cases}$$

Question 2. *Est-ce une solution classique ?*

Corrigé de la question 2. La solution n'est pas une solution classique puisqu'elle n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Question 3. *Que se passe-t-il lorsque $\alpha \longrightarrow 0$?*

Corrigé de la question 3. Lorsque $\alpha \longrightarrow 0$, la condition initiale tend vers un échelon (fonction discontinue).

Cependant, tant que $\alpha > 0$, les résultats précédents restent valides. Si on passe à la limite dans l'expression de la solution, on obtient la fonction suivante, qui est continue dès que $t > 0$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{t}, & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ 1, & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

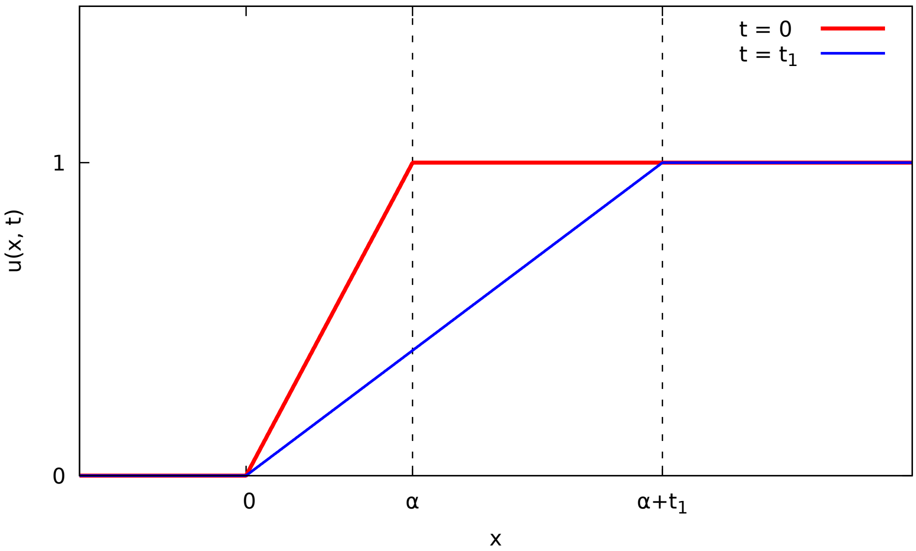

FIGURE 8 – Allure de la solution à différents instants.

Cette fonction est également uns solution classique du problème dans les domaines où elle est C^1. En effet, pour $x \leq 0$ et $x \geq t$, elle est constante donc elle est solution de l'EDP. Si $0 \leq x \leq t$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{x}{t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{t}$$

soit

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right](x,t) = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t}\frac{1}{t} = 0$$

Comme elle est C^1 par morceaux, solution classique là où elle est C^1 et continue, c'est une solution faible de l'équation de Burgers avec la condition initiale discontinue.

EXERCICE 5 (NON UNICITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES)
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = a. \end{cases} \tag{1}$$

où a est une constante réelle donnée. Le but de l'exercice est de montrer qu'on peut construire d'autres solutions faibles de (1) que la solution constante $u(x,t) = a$.

Pour ce faire, on va s'intéresser à une classe de solutions constantes par morceaux définies de la manière suivante :

a) On se donne $N \geq 1$ réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$ qui définissent $N+1$ zones du demi-plan plan $\mathcal{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$

$$\mathcal{Z}_0 = \big\{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, x < \lambda_1\, t\big\}, \quad \mathcal{Z}_N = \big\{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, \lambda_N\, t < x\big\},$$
$$\mathcal{Z}_j = \big\{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, \lambda_j\, t < x < \lambda_{j+1}\, t\big\}, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad (\textit{si } N \geq 2)$$

b) On cherche u constante dans chacune des zones

$$u(x,t) = u_j, \quad \forall\, (x,t) \in \mathcal{Z}_j, \quad 0 \leq j \leq N. \tag{2}$$

Question 1. *On suppose que u donnée par (2) est solution faible de (1). Calculer u_1 et u_N et montrer que les nombres λ_j sont entièrement déterminés par les u_j.*

Corrigé de la question 1. Comme précédemment, l'équation des droites caractéristiques est donnée par :

$$X_{x_0}(t) = x_0 + u^0(x_0)\, t = x_0 + a\, t.$$

La donnée initiale (constante) se propage le long de ces caractéristiques dans les zones $\mathcal{Z}_0$ et $\mathcal{Z}_N$, seules à "toucher" la condition initiale $t = 0$. On a donc nécessairement (cf. figure 9) :

$$u_0 = u_N = a.$$

D'autre part, la ligne séparant les zones $\mathcal{Z}_{i-1}$ et $\mathcal{Z}_i$ marque une discontinuité si $u_{i-1} \neq u_i$: il s'agit dans ce cas d'une ligne de choc. Notons $\sigma_i(t) := \lambda_i\, t$ l'équation de cette ligne de choc ; l'application des relations de Rankine-Hugoniot le long de cette ligne donne :

$$\begin{aligned} & \sigma'(t)\,(u_i - u_{i-1}) = \frac{u_i^2 - u_{i-1}^2}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_i = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \qquad\qquad \forall i = 1 \ldots N. \end{aligned}$$

Ainsi, si les valeurs $(u_1, \ldots, u_{N-1})$ sont connues, ces N relations permettent de déterminer les $\lambda_i, \forall i \in [\![1, N]\!]$. Comme la fonction u ainsi définie est évidemment une solution classique partout où elle est régulière (puisqu'elle y est constante), il s'agit bien d'une solution faible de (1).

Question 2. *Montrer que si $N = 1$ ou $N = 2$, la seule solution possible est la solution constante.*

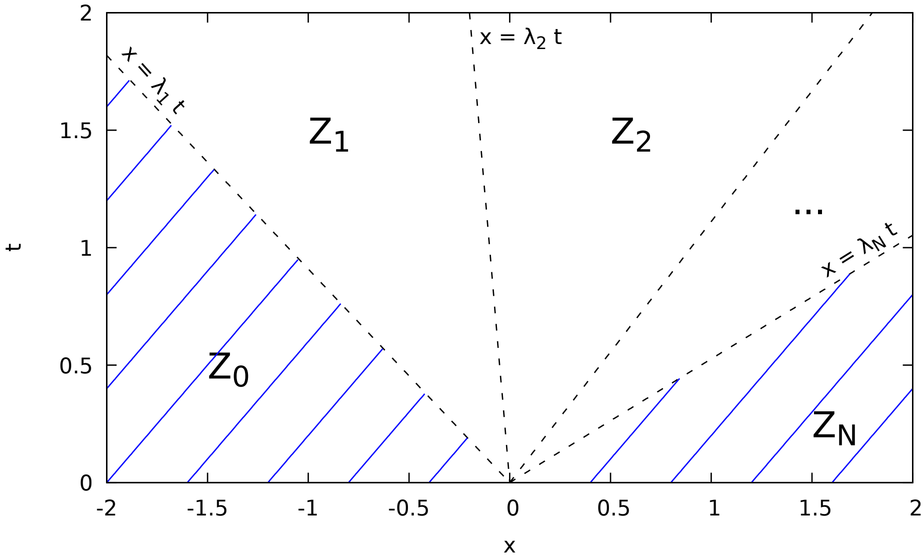

FIGURE 9 – Non unicité des solutions faibles constantes par morceaux. Les limites entres zones sont représentées par des lignes pointillées noires ; les droites caractéristiques sont tracées en bleu (ici dans un cas où $a > 0$).

Corrigé de la question 2. Le cas $N = 1$ est évident : $u_0 = u_1 = a$ impose la valeur (constante) de la solution dans tout le demi-plan. La ligne de séparation entre $\mathcal{Z}_0$ et $\mathcal{Z}_1$ n'est par conséquent pas une ligne de choc.

Pour $N = 2$, ce n'est guère plus compliqué : puisque $u_0 = u_2 = a$, la seule valeur restant à fixer est u_1. Or on a

$$\lambda_1 = \frac{u_1 + u_0}{2} = \frac{u_1 + a}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{u_2 + u_1}{2} = \frac{a + u_1}{2},$$

ce qui impose $\lambda_1 = \lambda_2$, et est incompatible avec les hypothèses $\lambda_2 > \lambda_1$.

Question 3. *On suppose que $N = 3$. Montrer qu'il existe une infinité de solutions non constantes paramétrées par deux réels (par exemple λ_1 et λ_3) dont on précisera le domaine de variation.*

Corrigé de la question 3. Il nous faut déterminer (u_1, u_2) ainsi que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ à partir des 3 équations

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{u_1 + a}{2}, \\ \lambda_2 = \dfrac{u_2 + u_1}{2}, \\ \lambda_3 = \dfrac{a + u_2}{2}. \end{cases}$$

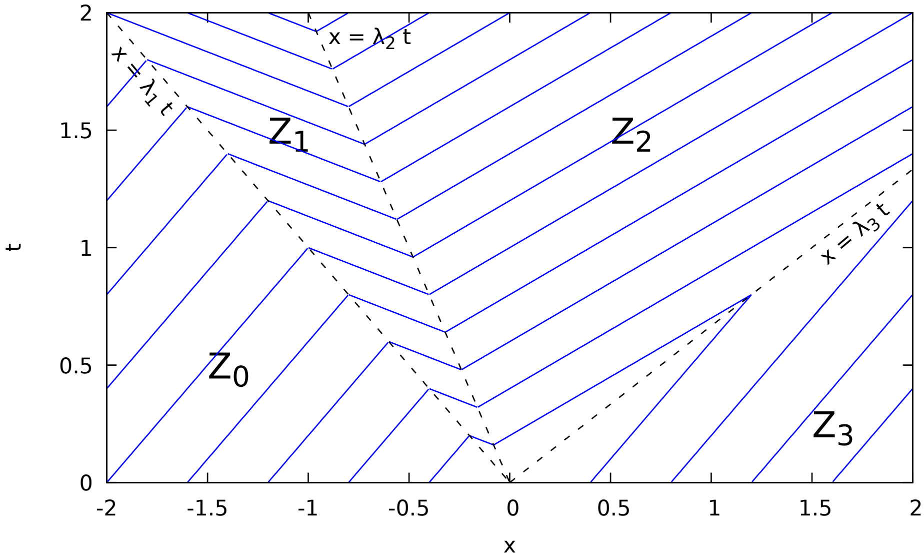

FIGURE 10 – Exemple de solution faible dans le cas $N = 3$. Les paramètres λ_1 et λ_3 peuvent être choisis librement (en respectant la contrainte $\lambda_1 < a < \lambda_3$) pour construire d'autres solutions faibles.

Notons alors qu'on a nécessairement $u_1 = 2\lambda_1 - a$ et $u_2 = 2\lambda_3 - a$, ainsi qu'une relation supplémentaire entre les λ_i :

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3 - a.$$

Si $a < \lambda_1$, alors $\lambda_2 > a + \lambda_3 - a = \lambda_3$, ce qui est incompatible avec la contrainte $\lambda_2 < \lambda_3$. De même, la situation $\lambda_3 < a$ aboutit à une contradiction avec la contrainte $\lambda_1 < \lambda_2$. Il est donc nécessaire d'imposer la condition $\lambda_1 < a < \lambda_3$.

Finalement, pour tout $(\lambda_1, \lambda_3) \in \,]-\infty, a\,[\times]\,a, +\infty[$, on a construit la solution illustrée sur la figure 10 et correspondant à

$$u_1 = 2\lambda_1 - a, \quad u_2 = 2\lambda_3 - a \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3 - a.$$

Question 4. *Montrer que pour $N = 4$, on ne peut pas trouver de solution non constante de la forme* (2).

Corrigé de la question 4. On a cette fois les quatre équations suivantes :

$$\lambda_1 = \frac{u_1 + a}{2}, \tag{a}$$

$$\lambda_2 = \frac{u_2 + u_1}{2}, \tag{b}$$

$$\lambda_3 = \frac{u_3 + u_2}{2}, \tag{c}$$

$$\lambda_4 = \frac{a + u_3}{2}. \tag{d}$$

Pour que $\lambda_2 > \lambda_1$, il faut que $u_2 > a$ et pour que $\lambda_4 > \lambda_3$ il faut que $u_2 < a$, ce qui est incompatible.