Problèmes paraboliques et hyperboliques

*Mahdi Boukrouche**

*Professeur membre de ICJ UMR-5208, 23 rue du Dr. Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne, France. Mahdi.Boukrouche@univ-st-etienne.fr

Table des matières

1 Problèmes paraboliques

1.1 Modélisation des problèmes de réaction-diffusion

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de bord régulier et $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$. Pour modéliser le comportement de la diffusion d'une population (cellules, insectes) ou de particules (substances chimiques), on suppose l'existence d'une source de particules (naissance, ou décès). On note

$(x,t) \mapsto u(x,t)$ la fonction densité ou concentration de particules,

$(x,t) \mapsto q(x,t)$ la densité de flux de particules,

$q \cdot \nu$ est le flux de particules (par unité de temps) à travers le bord du domaine, ν étant le vecteur normal au bord unitaire et sortant du domaine.

$(x,t) \mapsto f(x,t)$ la source (taux de naissance ou de décès de particules).

Pour déterminer u nous écrivons la **loi de conservation** de quantité de la masse. Dans un volume élémentaire $W \subset \Omega$, la variation de la quantité de la masse de particules est le bilan de ce qui est produit par la source et de ce qui sort ou rentre à travers la frontière ∂W, donc

$$\frac{d}{dt}\left(\int_W u(x,t)dx\right) = \int_W f(x,t)dx - \int_{\partial W} q(x,t)\cdot \nu d\sigma \qquad (1)$$

ν est le vecteur unitaire normal à ∂W et extérieur à W. $d\sigma$ est l'élément de surface. En appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradsky (ou de la divergence) il vient

$$\int_{\partial W} q(x,t)\cdot \nu d\sigma = \int_W \mathrm{div} q(x,t)dx$$

Le volume élémentaire W étant quelconque et indépendant du temps, on obtient alors

$$u_t(x,t) + \mathrm{div} q(x,t) = f(x,t) \qquad \text{dans} \qquad \Omega \times \mathbb{R}^+. \qquad (2)$$

Pour relier le flux q à u, on utilise maintenant une **loi constitutive**

Dans le cas où $u = c\theta$, θ est la température et c est la chaleur spécifique (une constante physique qui dépend du type de matériau) c'est **la loi de Fourier**

$$q = -k\nabla\theta, \qquad (3)$$

où k est la conductivité thermique une autre constante positive (physique u qui dépend du type du matériau utilisé) d'où **l'équation de la chaleur**

$$c\theta_t(x,t) - k\Delta\theta(x,t) = f(x,t) \qquad \text{dans} \qquad \Omega \times \mathbb{R}^+. \qquad (4)$$

Dans le cas où u est la fonction densité ou concentration de particules, la loi consitutive est **la loi de Fick** elle s'écrit aussi (3) mais ici k est dit **coefficient de diffusion** et l'équation

$$u_t(x,t) - k\Delta u(x,t) = f(x,t) \qquad \text{dans} \qquad \Omega \times \mathbb{R}^+. \qquad (5)$$

est dite de **réaction diffusion**.

1.2 Formulation variationnelle

Trouver $u : (x,t) \mapsto u(x,t)$ qui vérifie le problème parabolique linéaire suivant

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \qquad dans \quad \Omega\times]0,+\infty[, && (6)\\ u(x,t) &= 0 \qquad sur \quad \partial\Omega\times]0,+\infty[, && (7)\\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad dans \quad \Omega. && (8) \end{aligned}$$

Les équations (6), (7) et (8) sont respectivement équation de la chaleur (5) avec $k = 1$, condition au bord de type Dirichlet et condition initiale.

Pour donner une formulation faible du problème parabolique linéaire (6)-(8), nous multiplions les deux cotés de l'équation (6) par une fonction test $v \in V = H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, en utilisant la formule de Green, nous obtenons l'équation variationnelle suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (9)$$

En considérant que

$$u :]0,+\infty[\to V = H_0^1(\Omega) \quad \text{tel que} \quad t \mapsto u(t)$$

et en utilisant les notations suivantes

$$a(u(t),v) = \int_\Omega \nabla u(t)\nabla v\,dx, \quad (u(t),v) = \int_\Omega u(t)v\,dx$$

l'équation variationnelle (9) devient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad t > 0, && (10)\\ &u(t) = u_0 \quad pour \quad t = 0. && (11) \end{aligned}$$

Il nous reste a préciser les régularités des données f et u_0, de l'inconnu u, puis de donner le sens de la dérivée en t dans (10) et de la condition initiale (11). Pour cela on rappelle la

Définition 1.1. *Soit X un espace de Banach de norme $\|\cdot\|_X$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{R}$ et $T \in]0,+\infty]$, on a les espaces*

$$\mathcal{C}([0,T],X) = \{t \mapsto v(t) : \quad continu \quad \|v\|_{\mathcal{C}([0,T],X)} = \sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_X\}$$

$$L^p([0,T],X) = \{t \mapsto v(t) : \quad \|v\|_{L^p([0,T],X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

Exercice 1.1. *Montrer que ces espaces sont des Banach.*

Remarque 1.1. *Pour* $X = L^p(\Omega)$*, on a* $L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(]0,T[\times\Omega)$*, car par le Théorème de Fubini*

$$\|v\|^p_{L^p([0,T],L^p(\Omega))} = \int_0^T \left(\int_\Omega |v(t)|^p(x)dx\right) dt = \int_0^T \int_\Omega |v(x,t)|^p dxdt = \|v\|^p_{L^p(]0,T[\times\Omega))}$$

Remarque 1.2. *Donc pour* $f \in L^2((]0,T[\times\Omega))$*, on cherchera*

$$u \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \quad \textit{(espace d'énergie)}$$

vérifiant le problème (10)-(11)*. La continuité en temps de* u *donne un sens à la contition initiale. Quant à la dérivée* $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$*, on montrera qu'elle est* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$*.*

1.3 Résultats d'existence et d'unicité

Soient V et H deux espaces de Hilbert de produits scalaires respectifs $((\cdot,\cdot))$ et $(\cdot,\cdot)$ tels que $V \subset H$ avec injection compacte et V est dense dans H.
Exemple du théorème de Rellich $V = H^1_0(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$. Soit $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$\begin{aligned} &\exists M \in \mathbb{R}^+ : \quad |a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall u,v \in V, \quad \text{continue.}\\ &\exists \alpha > 0 : \quad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2_V \quad \forall v \in V \quad \text{coercive.}\end{aligned}$$

Théorème 1.1. *Soit* $a(\cdot\,,\,\cdot)$ *est une forme bilinéaire symétrique continue et coercive. Alors pour tout* $f \in L^2(]0,T[,H)$ *et tout* $u_0 \in H$*, le problème*

$$u \in \mathcal{C}([0,T],H) \cap L^2((]0,T[,V)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((]0,T[,H)) \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \qquad \forall v \in V, \quad t > 0, \tag{13}$$

$$u(t) = u_0 \quad \textit{pour} \quad t = 0 \tag{14}$$

admet une solution unique. De plus il existe une constante C *telle que*

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} + \|u\|_{L^2(0,T;V)} \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;H)}). \tag{15}$$

cette estimation traduit la continuité de la solution u *par rapport au données, qui implique que le problème est bien posé au sens d'Haddamard.*

Démonstration. La preuve se décompose des sous-sections (1.3.1) à (1.3.5).

1.3.1 Construction de solutions approchées

Par la méthode de Galerkine, construction de la solution approchée.

V étant un Hilbert donc séparable alors il existe une partie $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de V dénombrable et dense dans V. De cette partie, on peut construire une famille $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans V, qui soit orthogonale dans H (procédé d'orthogonalité de Gramm-Schmit).

De l'hypothèse $u_0 \in H$, il existe donc une suite de nombres $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$u_0 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i w_i \qquad dans \quad H. \tag{16}$$

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i(t) w_i \tag{17}$$

et on cherche les fonctions $t \mapsto x_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, telles que pour $j \in \mathbb{N}$

$$(u_n'(t), w_j) + a(u_n(t), w_j) = (f(t)\,,\, w_j) \quad p.p \quad t \in]0,T[, \tag{18}$$
$$x_j(0) = x_j, \tag{19}$$
$$x_j(t) = 0, \quad \forall t < 0. \tag{20}$$

Comme

$$(u_n'(t), w_j) = \sum_{i=0}^{n} x_i'(t)(w_i, w_j) = \sum_{i=0}^{n} x_i'(t)\delta_i^j = x_j'(t)$$

ainsi avec les notations

$$a_{i,j} = a(w_i\,,\, w_j) \quad et \quad f_j(t) = (f(t)\,,\, w_j),$$

le système (17)-(20) se ramène, pour tout $j = 1, \cdots, n$, à

$$x_j'(t) + \sum_{i=0}^{n} x_i(t) a_{ij} = f_j(t) \quad p.p \quad t \in]0,T[, \quad x_j(0) = x_j, \quad x_j(t) = 0, \quad \forall t < 0.$$

C'est un système différentiel de premier ordre de la forme

$$x'(t) + Ax(t) = F(t) \quad \text{avec } A = (a_{ij}), \quad x = (x_j), \quad F = (f_j)$$

et admet l'unique solution

$$x(t) = x(0)e^{-At} + \int_0^t F(s)e^{A(s-t)}\, ds \tag{21}$$

la fonction (17) est une solution approchée de la solution du problème variationnel (12)-(14). Comme $f \in L^2(]0,T[, H)$ on a $F \in L^2(]0,T[)^n$, de (21) $x \in \mathcal{C}(]0,T[)^n$, donc de (17) on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continu en temps.

Il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}(]0,T[; H)$ et $L^2(0,T;V)$ qui sont des Banach, puis de montrer que sa limite est la solution du problème (12)-(14).

1.3.2 Estimations sur les solutions approchés

De (18) pour $n = p$ puis $n = q$ on a

$$(u_p'(t)\,,\, x_j(t)w_j) + a(u_p(t)\,,\, x_j(t)w_j) = (f(t), x_j(t)w_j)$$

$$(u_q'(t)\,,\, x_j(t)w_j) + a(u_q(t)\,,\, x_j(t)w_j) = (f(t)\,,\, x_j(t)w_j)$$

par soustraction

$$(u_p'(t) - u_q'(t)\,,\, x_j(t)w_j) + a(u_p(t) - u_q'(t)\,,\, x_j(t)w_j) = 0$$

par sommation sur j entre 0 et p puis entre 0 et q, on obtient

$$(u_p'(t) - u_q'(t)\,,\, u_p(t)) + a(u_p(t) - u_q(t)\,,\, u_p(t)) = 0$$

$$(u_p'(t) - u_q'(t)\,,\, u_q(t)) + a(u_p(t) - u_q(t)\,,\, u_q(t)) = 0$$

d'où par soustraction

$$(u_p'(t) - u_q'(t)\,,\, u_p(t) - u_q(t)) + a(u_p(t) - u_q(t)\ , u_p(t) - u_q(t)) = 0$$

ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|u_p(t) - u_q(t)\|_H^2\right) + a(u_p(t) - u_q(t)\,,\, u_p(t) - u_q(t)) = 0$$

par intégration, en utilisant la coercivité de la forme $a(\cdot,\cdot)$ découle

$$\frac{1}{2}\|u_p(t) - u_q(t)\|_H^2 + \alpha \int_0^T \|u_p(t) - u_q(t)\|_V^2 dt \le \frac{1}{2}\|u_p(0) - u_q(0)\|_H^2. \qquad (22)$$

1.3.3 Compacité, passage à la limite

De (16) $\lim_{p\to+\infty} u_p(0) = \lim_{q\to+\infty} u_q(0) = u_0$ alors de (22) on a

$$\lim_{p,q\to+\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_p(t) - u_q(t)\|_H^2 = 0 \quad et \quad \lim_{p,q\to+\infty} \|u_p - u_q\|_{L^2(0,T;V)} = 0.$$

donc la suite (u_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}(0,T;H)$ et dans $L^2(0,T;V)$, qui sont complets, donc converge vers une limite $u^\star = \lim_{n\to+\infty} u_n$ dans $\mathcal{C}(0,T;H)$ et une limite $u = \lim_{n\to+\infty} u_n$ dans $L^2(0,T;V)$. Et comme $\mathcal{C}(0,T;H) \subset L^2(0,T;H)$

$$\int_0^T (u_n(t), v)dt \to_{n\to+\infty} \int_0^T (u^\star(t), v)dt \quad \forall v \in H$$

et comme V est dense dans H, l'injection de V dans H *est compacte* alors

$$\int_0^T (u_n(t), v)dt \to_{n\to+\infty} \int_0^T (u(t), v)dt \quad \forall v \in H.$$

Donc par unicité de la limite dans H on a $u^\star = u$. Ainsi

$$t \mapsto u(t) = \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i(t) w_i \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V).$$

De la continuité en temps des u_n on obtient que sa limite uniforme u est continue en temps. Et de (16) on obtient $u(0) = u_0$.

Montrons maintenant que cette limite u est bien solution du problème (12)-(14). Pour cela soit $v \in V$. Il existe alors (séparabilité de V) une suite définie ainsi

$$v_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^n w_j, \quad \alpha_j^n \in \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \text{dans} \quad V.$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$

$$\varphi(t) v_n \to \varphi(t) v \qquad dans \quad L^2(0,T;V)$$

en multipliant chaque équation du système (18) par $\varphi(t)\alpha_j^n$,

$$(u_n'(t)\,,\, \varphi(t)\alpha_j^n w_j) + a(u_n(t)\,,\, \varphi(t)\alpha_j^n w_j) = (f(t)\,,\, \varphi(t)\alpha_j^n w_j)$$

en sommant de $j = 0$ à n et en intégrant en 0 à T, et après une intégration par parties en t, on obtient

$$\int_0^T -(u_n(t)\,,\, \varphi'(t) v_n) + a(u_n(t)\,,\, \varphi(t) v_n)\, dt = \int_0^T (f(t)\,,\, \varphi(t) v_n)\, dt.$$

En passant à la limite ($n \to +\infty$) on aura

$$\int_0^T -(u(t)\,,\, v)\varphi'(t)\, dt + \int_0^T a(u(t)\,,\, v)\varphi(t)\, dt = \int_0^T (f(t)\,,\, v)\varphi(t)\, dt. \tag{23}$$

alors par dérivation aux sens de $D'(]0,T[)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t)\,,\, v) + a(u(t)\,,\, v) = (f(t)\,,\, v) \quad dans \quad D'(]0,T[) \quad \forall v \in V. \tag{24}$$

qui est l'edp (13). Remarquons que (23) peut être écrite sous la forme

$$-\int_0^T (u(t)\,,\, v)\varphi'(t)\, dt = \int_0^T \{(f(t)\,,\, v) - a(u(t)\,,\, v)\}\varphi(t) dt \quad \forall v \in V, \forall \varphi \in D(]0,T[)$$

d'où $\frac{\partial}{\partial t}\{((u(t)\,,\, v)\} \in L^2(]0,T[)$, ce qui permet de considérer l'edp (13) presque partout dans $\Omega\times]0,T[$. Ce qui termine la preuve de l'existence de solution.

1.3.4 Unicité de la solution

Supposons que u_1, u_2 sont deux solutions de (12)-(14), d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1(t) - u_2(t)\,,\, v) + a(u_1(t) - u_2(t)\,,\, v) = 0 \quad \textit{pour} \quad (x,t) \in \Omega\times]0,+\infty[, \quad v \in V$$

en posant $v = (u_1 - u_2)(t)$ on aura :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}||(u_1 - u_2)(t)||_H^2 + a((u_1 - u_2)(t)\,,\,(u_1 - u_2)(t)) = 0,$$

par intégration en temps entre 0 et $s > 0$, on obtient

$$\|(u_1 - u_2)(s)\|_H^2 + \int_0^s a((u_1 - u_2)(t)\,,\,(u_1 - u_2)(t))\,dt = 0$$

en utilisant la coercivité de $a(,)$,

$$\|(u_1 - u_2)(s)\|_H^2 + \alpha \int_0^s \|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2\,dt \leq 0$$

d'où en passant au sup sur $s \in [0,T]$, on obtient

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{C}(0,T;H)}^2 + \alpha\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;V)}^2 = 0,$$

ainsi on a bien $u_1 = u_2$ dans $\mathcal{C}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, ce qui termine la preuve de l'unicité.

1.3.5 Estimation d'énergie

En posant $v = u(t)$ dans (24), avec la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + \alpha\int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds \leq \left(\int_0^t ||f(t)||_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t ||u(t)||_V^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2$$

donc

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + \alpha\int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds \leq \frac{2}{\alpha}\int_0^t ||f(t)||_H^2 ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^t ||u(t)||_V^2 ds + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2$$

on finallement

$$\|u\|_{\mathcal{C}(0,T;H)}^2 + \alpha||u||_{L^2(0,T;V)}^2 \leq \frac{4}{\alpha}||f||_{L^2(0,T;H)}^2 + \|u_0\|_H^2$$

Cette estimation d'énergie donne la continuité de la solution u par rapport aux données f et u_0, donc le problème est bien posé aux sens d'Hadamard. Ce qui termine la preuve du théorème. □ □

2 Problèmes hyperboliques

2.1 Modélisation

Considérons *un liquide*, qui se propage a une *vitesse* $V(x,t)$ où $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}^+$, et dans lequel *des particules polluant* sont introduit. Notons par

— $(x,t) \mapsto u(x,t)$ la *concentration* des particules polluant dans le liquide,

— $(x,t) \mapsto g(x,t)$ la *source* des particules polluant,

— $(x,t) \mapsto U(x,t) = u(x,t)V(x,t)$ représente le *flux* des particules polluant.

La *quantité des particules polluant* dans $W \subset \Omega$ à l'instant t est donner par

$$F(t) = \int_W u(x,t)dx$$

et sa *variation en temps*

$$F'(t) = \int_W u_t(x,t)dx.$$

due à la *perte de polluant* à travers ∂W

$$\int_{\partial W} U(x,t) \cdot \nu(x)d\sigma(x)$$

ou bien *l'apparition de particules* dans W à travers la source

$$\int_W g(x,t)dx.$$

En utilisant la formule *d'Ostrogradsky* (dite aussi de la divergence) on a

$$\int_W div(U(x,t))dx = \int_{\partial W} U(x,t) \cdot \nu(x)d\sigma(x),$$

où $\nu(x)$ est le vecteur unitaire normal à la tangente à ∂W au point x, et sortant de W. Donc la variation s'écrit

$$\begin{aligned}\int_W u_t(x,t)dx &= \int_W g(x,t)dx - \int_{\partial W} U(x,t) \cdot \nu(x)d\sigma(x) \\ &= \int_W \{g(x,t) - div(U(x,t))\}\, dx.\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $W \subset \Omega$ d'où *la loi d'équilibre du polluant* est décrite par *l'équation de transport horizontal ou d'advection*

$$u_t + \operatorname{div}(U(x,t)) = u_t + V \cdot \nabla u + u \operatorname{div}(V) = g \qquad dans \quad \Omega, \tag{25}$$

avec la donnée u_0 de la *distribution initiale du polluant*,

$$u(x,0) = u_0 \qquad dans \quad \Omega. \tag{26}$$

Si V est constant, l'équation de transport horizontal ou d'advection devient

$$u_t + V\nabla u = g \qquad dans \quad \mathbb{R}^n \quad t > 0, \qquad u(x,0) = u_0 \qquad dans \quad \mathbb{R}^n. \tag{27}$$

Dans le cas d'un transport dû à une différence de température on parle de *convection* c'est à dire les fluides chauds ont une faible densité montent, tandis que les fluides froids ont une forte densité descendent.

2.2 Problème hyperbolique scalaire linéaire

Position du problème : On cherche $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui à $(x,t) \mapsto u(x,t)$ vérifiant

$$\begin{aligned} u_t + vu_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, & (28)\\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, & (29) \end{aligned}$$

où sont données $v \in \mathbb{R}$ la vitesse de transport, $u_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la condition initiale.

Définition 2.1. *On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est solution* **classique** *du problème (*(28)-(29)*) si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et vérifie (*(28)-(29)*).*

2.2.1 Méthode des caractéristiques, solution classique

Une condition nécessaire pour avoir une solution classique du problème (28)-(29) est que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Pour ce problème le système caractéristiques s'écrit :

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = v, \quad \frac{dz}{ds} = 0$$

où $z(s) = u(x(s), t(s))$, et les conditions initiales

$$t(0) = 0, \quad x(0) = y, \quad z(0) = u_0(y).$$

Résoudre le système caractéristiques en éliminant s on trouve

$$x - vt = x_0 \quad \text{équation des courbes caractéristiques}$$

De plus u est constante le long des courbes caractéristiques en effet

$$\frac{d}{dt}\left(u(vt + x_0, t)\right) = \frac{dx}{dt}u_x + u_t = vu_x + u_t = 0.$$

On obtient alors la solution classique

$$(t,x) \mapsto u(x,t) = u(x,0) = u_0(x - vt).$$

Dans les cas où u_0 n'est même pas continue, on on cherche des solutions faibles.

2.3 Notion de solution faible

Définition 2.2. *Pour $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on dit que u est solution faible du problème (*(28)-(29)*) si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et vérifie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} [u(x,t)\varphi_t(x,t) + vu(x,t)\varphi_x(x,t)]dtdx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\varphi(x,0)dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad (30)$$

où $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, désigne l'ensemble des restrictions à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ des fonctions de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Théorème 2.1. *Pour $u_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, donnée, il existe une fonction u solution faible du du problème (*28)-(29*)*

Démonstration. On va prouver que

$$(x,t) \mapsto u(x,t) = u_0(x - vt)$$

est solution faible du problème (28)-(29). En effet comme $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on veut montrer que u vérifie (30).

Notons

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [u(x,t)\varphi_t(x,t) + vu(x,t)\varphi_x(x,t)]dtdx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(x,t)[\varphi_t(x,t) + v\varphi_x(x,t)]dtdx \end{aligned}$$

utilisons $u(x,t)$ avec son expression ci-dessus on obtient

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_0(x - vt)(\varphi_t(x,t) + v\varphi_x(x,t))dtdx$$

du changement de variable $y = x - vt$ et le théorème de Fubini, il vient

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_0(y) \left(\varphi_t(y + vt, t) + v\varphi_x(y + vt, t)\right) dtdy$$

On pose $\varphi(y + vt, t) = \phi_y(t)$ d'où

$$\frac{d}{dt}(\phi_y(t)) = \frac{d}{dt}(\varphi(y + vt, t)) = \varphi_t(y + vt, t) + v\varphi_x(y + vt, t)$$

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_0(y) \left(\frac{d}{dt}(\phi_y(t))\right) dtdy = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(\phi_y(t))dtdy \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\phi_y(0))dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\varphi(y,0)dy \end{aligned}$$

comme $\phi_y(0)) = \varphi(y, 0)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$

ainsi

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [u(x,t)\varphi_t(x,t) + vu(x,t)\varphi_x(x,t)]dtdx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\varphi(x,0)dx \end{aligned}$$

D'où u est bien solution du problème (28)-(29). □

Lemme 2.1. *Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$, alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $\varphi_t + v\varphi_x = g$*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$, et $T > 0$ tel que $g(x,t) = 0$ si $t \geq T$. On considère le problème

$$\varphi_t + v\varphi_x = g, \quad \text{et } \varphi(x,T) = 0. \tag{31}$$

Par la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{d}{dt}(\varphi(vt + x_0, t)) = v\varphi_x + \varphi_t = g(vt + x_0, t)$$

par intégration en temps entre t et T on a

$$\varphi(vT + x_0, T) - \varphi(vt + x_0, t) = \int_t^T g(vs + x_0, s)ds$$

En posant $x = vt + x_0$ c'est à dire aussi $x_0 = x - vt$ on obtient que ce problème admet une solution classique

$$\varphi(x,t) = -\int_t^T g(x - v(s-t), s)ds$$

Et avec ce choix de φ, on a

$$\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R}), \text{ et } \varphi_t + v\varphi_x = g.$$

De plus comme g est à support compact, φ l'est aussi. $\square$

Théorème 2.2. *Pour $u_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, donnée, la solution u faible du problème (*28*)-(*29*) est unique.*

Démonstration. Soit u et v deux solutions faibles du problème (28)-(29). On pose $w = u - v$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} w(x,t)(\varphi_t(x,t) + v\varphi_x(x,t))dtdx = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$$

le résultat découlera du lemme 2.1 : Pour tout $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $\varphi_t + v\varphi_x = g$. donc on a

$$\int_{-\infty}\int_0^{+\infty} w(x,t)g(x,t)dtdx = 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$$

en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$, et que le dual de ce dernier est $L^\infty(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$, d'où $w = 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$. $\square$

2.4 Cas hyperbolique non linaire

On cherche u vérifiant

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x &= 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, & (32) \\ u(x,0) &= u_0(x) & (33) \end{aligned}$$

où f et u_0 sont données.

2.4.1 Méthode des caractéristiques,

Dans chaque sous partie $I \subset \mathbb{R}$ où $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ la méthode est applicable. On peut alors définir les courbes caractéristiques dans $I \times [0, +\infty[$ comme étant les courbes $t \mapsto x(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f'(u),$$

or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(x(t),t)) &= \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x(t),t)) \\ &= f'(u)u_x(x(t),t) + u_t(x(t),t) = 0. & (34) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que u est constante le long des courbes caractéristiques.

Considérons alors le système caractéristiques :

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = f'(u) = f'(u_0), \quad \frac{dz}{ds} = 0$$

où $z(s) = u(x(s), t(s))$, avec les conditions initiales

$$t(0) = 0, \quad x(0) = y, \quad z(0) = u_0(y),$$

on a donc

$$t(s) = s, \quad x(s) = sf'(u_0) + y,$$

en éliminant s on obtient l'équation des courbes caractéristiques

$$x - tf'(u_0) = x_0 = x(0) \tag{35}$$

et de (34) et (35), la solution est

$$u(x,t) = u(x_0, 0) = u_0(x - tf'(u_0)).$$

2.5 Solutions faibles, condition de Rankine-Hugoniot

Définition 2.3. *Pour $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on appelle solution faible de* (32)-(33) une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(x,t)\varphi_t(x,t) + f(u(x,t))\varphi_x(x,t)dtdx \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\varphi_x(x,0)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{36}$$

Considérons le problème faible (36) associée à une donnée particulière

$$u_0(x) = \begin{cases} u_d \text{ si } x > 0, \\ u_g \text{ si } x < 0, \end{cases} \tag{37}$$

l'équation $u_t + (f(u))_x = 0$ est dite de Burger et le problème avec une donnée initiale (37) discontinue est dit **de Riemann**.

Proposition 2.1. *Soient $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. La fonction u donnée par*

$$u(x,t) = \begin{cases} u_d \textit{ si } x > \sigma t, \\ u_g \textit{ si } x < \sigma t, \end{cases} \tag{38}$$

est une solution faible du problème faible (36) *si et seulement si la condition*

$$\sigma[u] = [f(u)] \tag{39}$$

où $[u] = u_d - u_g$ et $[f(u)] = f(u_d) - f(u_g)$, dite de **Rankine-Hugoniot** *soit satisfaite.*

Démonstration. En effet supposons que $\sigma > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx \\ &= \int_{-\infty}^{0} u_g \int_{t=0}^{+\infty} \varphi_t(x,t)dtdx + \int_{x=0}^{+\infty} u_d \left(\int_{t=0}^{x/\sigma} \varphi_t dt \right) dx + \int_{x=0}^{+\infty} u_g \left(\int_{t=x/\sigma}^{+\infty} \varphi_t dt \right) dx \\ &= -\int_{x=-\infty}^{0} u_g \varphi(x,0)dx + \int_{x=0}^{+\infty} u_d(\varphi(x, \frac{x}{\sigma}) - \varphi(x,0))dx - \int_{x=0}^{+\infty} u_g \varphi(x, \frac{x}{\sigma})dx \\ &= -\int_{x=-\infty}^{+\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx + \int_{x=0}^{+\infty} (u_d - u_g)\varphi(x, \frac{x}{\sigma})dx \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{t=0}^{+\infty} f(u(x,t))\varphi_x(x,t)dxdt \\
&= \int_{t=0}^{+\infty} f(u_g)\int_{x=-\infty}^{\sigma t}\varphi_x(x,t)dxdt + \int_{t=0}^{+\infty} f(u_d)\int_{x=\sigma t}^{+\infty}\varphi_x(x,t)dxdt \\
&= \int_{t=0}^{+\infty}(f(u_g)-f(u_d))\varphi(\sigma t,t)dt
\end{aligned}
$$

on a donc

$$
\begin{aligned}
I_1+I_2 &= -\int_{x=-\infty}^{+\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx + \int_{x=0}^{+\infty}(u_d-u_g)\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx \\
&\quad + \int_{t=0}^{+\infty}(f(u_g)-f(u_d))\varphi(\sigma t,t)dt
\end{aligned}
$$

Comme (t,x) : $\quad t = x/\sigma$ sont sur le bord on a

$$
\int_{x=0}^{+\infty}(u_d-u_g)\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx = \int_{t=0}^{+\infty}(u_d-u_g)\varphi(\sigma t,t)\sigma dt
$$

Ainsi en notant $u_d - u_g = [u]$ et $f(u_d) - f(u_g) = [f(u)]$ on a

$$
I_1 + I_2 + \int_{x=-\infty}^{+\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx \;=\; \int_{t=0}^{+\infty}(\sigma[u]-[f(u)])\varphi(\sigma t,t)\sigma dt.
$$

On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution faible du problème (36)-(37) est que la condition dite de **Rankine-Hugoniot** (39) soit satisfaite. □

2.6 Non unicité de la solution faible

Considérons la fonction u définie par

$$
u(x,t) = \begin{cases} u_d \text{ si } x > \sigma t, \\ \xi(x,t) \text{ si } x = \sigma t, \quad u_g < \xi < u_d, \\ u_g \text{ si } x < \sigma t, \end{cases} \tag{40}
$$

Remarquons que cette fonction u est de classe $\mathcal{C}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1(D_i,\mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$, où

$$
D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ : \, x < \sigma t\}
$$

$$
D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ : \, x > \sigma t\}
$$

et vérifie le problème

$$
u_t + (f(u))_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad (x,t) \in D_1 \cup D_2. \tag{41}
$$

Vérifions qu'elle est aussi solution faible du problème faible (36)-(37). Ainsi il n'y a pas unicité de solution du problème faible (36)-(37).

Théorème 2.3. *Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ deux fonctions données. Et soit $\sigma \in \mathbb{R}$, on note*

$$D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \,:\, x < \sigma t\} \text{ et } D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \,:\, x > \sigma t\}.$$

Alors si $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ est telle que $u_{|D_i} \in \mathcal{C}^1(D_i,\mathbb{R})$, $i = 1,2$, et que (36)-(37) *est vérifié pour tout $(x,t) \in D_i$, $i = 1,2$, alors u est solution du problème faible* (36)-(37)*.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $u_{|D_i}$ vérifie le problème (41). Montrons que u est solution du problème faible (36)-(37).

Notons

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dtdx$$

comme u n'est de classe $\mathcal{C}^1$ que sur D_i pour $i = 1,2$, on doit décomposer les deux intégrales précédentes sur D_1 et D_2 on suppose que $\sigma < 0$ (le cas $\sigma > 0$ se traite de manière semblable) on donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{x=-\infty}^{0}\int_{t=0}^{x/\sigma} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx + \int_{x=-\infty}^{0}\int_{t=x/\sigma}^{+\infty} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx \\
&\quad + \int_{x=0}^{+\infty}\int_{t=0}^{+\infty} u(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx
\end{aligned}$$

u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des trois domaines (le premier $= D_1$, les deux autres $= D_2$) on peut donc intégrer par parties, d'où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{x=-\infty}^{0} u(x,\frac{x}{\sigma})\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx - \int_{x=-\infty}^{0} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{x=-\infty}^{0}\int_{t=0}^{x/\sigma} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\
&\quad - \int_{x=-\infty}^{0} u(x,\frac{x}{\sigma})\varphi(x,\frac{x}{\sigma})dx - \int_{x=-\infty}^{0}\int_{t=x/\sigma}^{+\infty} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\
&\quad - \int_{x=0}^{+\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{x=0}^{+\infty}\int_{t=0}^{+\infty} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx \\
&= -\int_{x=-\infty}^{+\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int_{D_1} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx - \int_{D_2} u_t(x,t)\varphi(x,t)dtdx.
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{t=0}^{+\infty}\int_{x=-\infty}^{\sigma t} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt + \int_{t=0}^{+\infty}\int_{x=\sigma t}^{+\infty} f(u)(x,t)\varphi_x(x,t)dxdt \\
&= -\int_{D_1} (f(u))_x(x,t)\varphi(x,t)dxdt - \int_{D_2} (f(u))_x(x,t)\varphi(x,t)dxdt
\end{aligned}$$

en additionnant $I_1 + I_2$ et en utilisant $u_t + (f(u))_x = 0$ dans $D_1 \cup D_2$ on obtient

$$I_1 + I_2 = -\int_{x=-\infty}^{+\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx$$

ainsi u est solution du problème faible (36)-(37), $\square$

2.7 Solution entropique et unicité

Une technique pour choisir la solution faible au problème hyperbolique (36)-(37) est de considérer à la place de l'équation hyperbolique :

$$u_t + (f(u))_x = 0,$$

l'équation parabolique : (ou de viscosité) assosciée suivante

$$u_t + (f(u))_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{42}$$
$$u = u_0 \quad (x,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}. \tag{43}$$

On cherche la solution u_ε faible au problème parabolique, puis on établit des estimations independantes de ε, puis on passe à la limite, la solution limite u sera la solution faible du problème hyperbolique (36)-(37).

Cette solution faible u est dite **"solution entropique"** du problème hyperbolique (36)-(37) définie par

Définition 2.4. *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dit que $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$* **est solution entropique** *de* (36)-(37) *si pour toute function $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ convexe, appelée* **entropie**, *et pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\phi' = f'\eta'$, appelé "flux d'entropie", on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(x,0) dx \geq 0,$$
$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+). \tag{44}$$

Théorème 2.4. *(Kruskov 1955) Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors il existe une unique solution entropique de* (42).

Proposition 2.2. *Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit u solution classique de*

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad u(x,0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors u est solution entropique.

Démonstration. Soit une fonction (dite entropie) $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe , et soit la fonction (dite flux associé) ϕ telle que $\phi' = f'\eta'$. On a de

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \text{ et } u(x,0) = u_0(x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \text{ et } t > 0$$

$$\eta'(u)u_t + \eta'(u)f'(u)u_x = 0,$$

puis de $\phi' = f'\eta'$ on a

$$(\eta(u))_t + \phi'(u)u_x = 0$$

et de $u(x,0) = u_0$ donc

$$(\eta(u))_t + (\phi(u))_x = 0 \tag{45}$$
$$\eta(u(x,0)) = \eta(u_0) \tag{46}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, on a alors l'égalité d'entropie :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x) dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(x,0)dx = 0.$$

$\square$

Proposition 2.3. *Toute solution u entropique du problème donné dans la proposition précédante, est une solution faible du même problème.*

Démonstration. S'obtient pour $\eta(u) = u$ puis $\eta(u) = -u$ dans (47). $\square$

Proposition 2.4. *Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe, u_g et $u_d \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Riemann :*

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{47}$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_d & \forall x > 0, \\ u_g & \forall x < 0. \end{cases}$$

Si $u_g < u_d$, alors son unique solution entropique et continue est donnée par

$$u(x,t) = \begin{cases} u_d & si\ x > f'(u_d)t, \\ \xi & si\ x = f'(\xi)t\ avec\ u_g < \xi < u_d, \\ u_g & si\ x < f'(u_g)t, \end{cases}$$

où ξ est une fonction de (x,t), cette solution est dite une "détente".

Démonstration. Remarquons que cette fonction u est continue pour tout $(x,t) \in]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$, et vérifie $u_t + (f(u))_x = 0$, sur

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,t)\ : t > 0,\ x < f'(u_g)t\}, \\ D_2 &= \{(x,t)\ : t > 0,\ f'(u_g)t < x < f'(u_d)t\}, \\ D_3 &= \{(x,t)\ : x > f'(u_d)t\}. \end{aligned}$$

Du Théorème 2.3 u est une solution faible. Elle n'est pas solution classique car elle n'est pas $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.

Soit $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction convexe (une entropie), et ϕ tel que $\phi' = f'\eta'$ le flux d'entropie associé, comme

$$u_t + (f(u))_x = 0, \text{ dans } D_i,\ i = 1, 2, \text{ ou } 3.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, par intégration par parties dans D_i, $i = 1, 2,$ ou 3, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x) dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(x, 0)dx = 0.$$

Donc u est une solution entropique. □

Proposition 2.5. *Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe, u_g et $u_d \in \mathbb{R}$. Considérons le problème de Riemann :*

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{48}$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_d & \forall x > 0, \\ u_g & \forall x < 0. \end{cases}$$

Si $u_g > u_d$, alors l'unique solution entropique est donnée par

$$u(x,t) = \begin{cases} u_d & \forall x > \sigma t, \\ u_g & \forall x < \sigma t, \end{cases}$$

Cette solution est dite un "choc".

Démonstration. Soit donc une fonction convexe $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ "dite entropie", et soit une fonction $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ "dite flux d'entropie associé", telle que $\phi' = f'\eta'$. On doit montrer que (47) ait lieu. Avec le même calcul que pour la sous-section (2.3.2) où on remplace u par $\eta(u)$ et $f(u)$ par $\phi(u)$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x) dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(x,0)dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+} (\sigma[\eta(u)] - [\phi(u)])\varphi(\sigma t, t)dt.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, il faut et il suffit d'avoir

$$\sigma[\eta(u)] \geq [\phi(u)]$$

avec le même σ de la condition de Rankine-Hugoniot, c'est à dire

$$\sigma = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} = \frac{[f(u)]}{[u]}.$$

Reste donc a vérifier que

$$\frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}(\eta(u_d) - \eta(u_g)) \geq [\phi(u)] = \phi(u_d) - \phi(u_g)$$

ou

$$(f(u_d)-f(u_g))(\eta(u_d)-\eta(u_g)) \leq (u_d-u_g)(\phi(u_d)-\phi(u_g)). \tag{49}$$

Or on a

$$\begin{aligned}\int_{u_d}^{u_g}\phi'(s)ds=\int_{u_d}^{u_g}f'(s)\eta'(s)ds &= \int_{u_d}^{u_g}f'(s)(\eta'(s)-\eta'(z))ds\\ &\quad+\int_{u_d}^{u_g}f'(s)\eta'(z)ds \quad \forall z\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

puis en intégrant en z entre u_d et u_g on a

$$\begin{aligned}(u_g-u_d)\int_{u_d}^{u_g}\phi'(s)ds &= \int_{u_d}^{u_g}\int_{u_d}^{u_g}f'(s)(\eta'(s)-\eta'(z))dsdz\\ &\quad+\int_{u_d}^{u_g}f'(s)ds\int_{u_d}^{u_g}\eta'(z)dz.\end{aligned}$$

Comme

$$\int_{u_d}^{u_g}\int_{u_d}^{u_g}f'(s)(\eta'(s)-\eta'(z))dsdz=\int_{u_d}^{u_g}\int_{u_d}^{u_g}f'(z)(\eta'(z)-\eta'(s))dsdz$$

donc

$$\begin{aligned}2(u_g-u_d)\int_{u_d}^{u_g}\phi'(s)ds &= \int_{u_d}^{u_g}\int_{u_d}^{u_g}f'(z)(\eta'(z)-\eta'(s))dzds\\ &\quad+\int_{u_d}^{u_g}\int_{u_d}^{u_g}f'(s)(\eta'(s)-\eta'(z))dsdz\\ &\quad+\ 2\int_{u_d}^{u_g}f'(s)ds\int_{u_d}^{u_g}\eta'(z)dz\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}2(u_g-u_d)\int_{u_d}^{u_g}\phi'(s)ds &= \int_{u_d}^{u_g}\int_{u_d}^{u_g}(f'(z)-f'(s))(\eta'(z)-\eta'(s))dzds\\ &\quad+\ 2\int_{u_d}^{u_g}f'(s)ds\int_{u_d}^{u_g}\eta'(z)dz\end{aligned}$$

en utilisant que f, η sont $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et convexes, on a f' et η' sont croissantes. Donc la première intégrale du second membre est positive ou nulle. D'où le résultat. $\square$

Exercice 2.1. Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$, et $T > 0$ tel que $g(x,t) = 0$ pour $t \geq T$. On considère le problème

$$u_t + vu_x = g, \quad \text{et } u(x,T) = 0. \tag{50}$$

En utilisant la méthode des caractéristiques montrer que la solution est

$$\mathrm{u(x,t) = -\int_t^T g(x - v(s-t), s)ds.} \tag{51}$$

Déduire que $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$.