TP n°2
Mouvement brownien et équations différentielles stochastiques

PARTIE 1 – Une série de type Fourier-Wiener

On considère le processus $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ défini par

$$B_t = \xi_0 \times t + \sum_{n \geq 1} \xi_n \times \sqrt{2}\, \frac{\sin \pi n t}{\pi n}$$

où les v.a. ξ_n $(n \geq 0)$ sont supposées i.i.d. de loi $N(0, 1)$.

Simuler un tel processus (en tronquant la série) et l'identifier à un processus bien connu par ailleurs.

PARTIE 2 - On reprend le modèle de Black & Scholes pour le prix d'une action :

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dB_t$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien standard. On rappelle que la solution d'une telle équation différentielle stochastique (eds) est obtenue grâce à la formule d'Itô et s'écrit

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t) \text{ pour } t \geq 0$$

1. En utilisant un schéma numérique de type Euler suivant (pas de temps h)

$$S_{t+h} = S_t + \mu S_t \times h + \sigma S_t \times (B_{t+h} - B_t)$$

simuler un échantillon de la loi de S_T pour une échéance T donnée. Estimer la densité correspondante par technique de lissage déjà vue au TP précédent.

On pourra prendre les valeurs numériques $S_0 = 100$, $T = 1$, $\mu = 10\%$ et $\sigma = 50\%$.

2. Quelle est la densité de la v.a. $S_0 \exp(\mu T + \sigma B_T)$?

3. Et celle de la v.a. $S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)T + \sigma B_T)$?

4. Comparer les 3 densités en question sur une même figure pour h assez petit. On pourra aussi faire la comparaison pour la densité du logarithme des prix…

5. Conclusion.