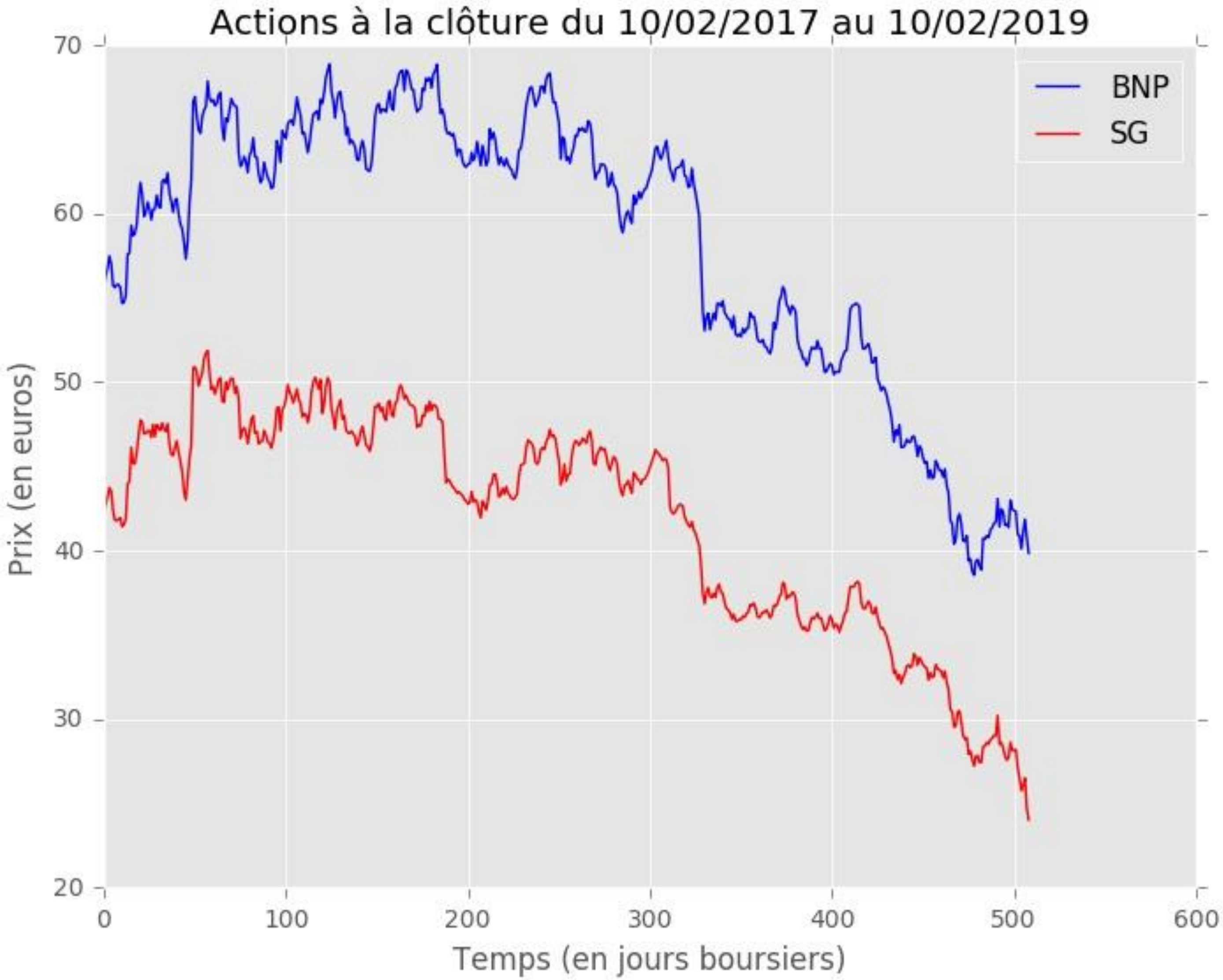
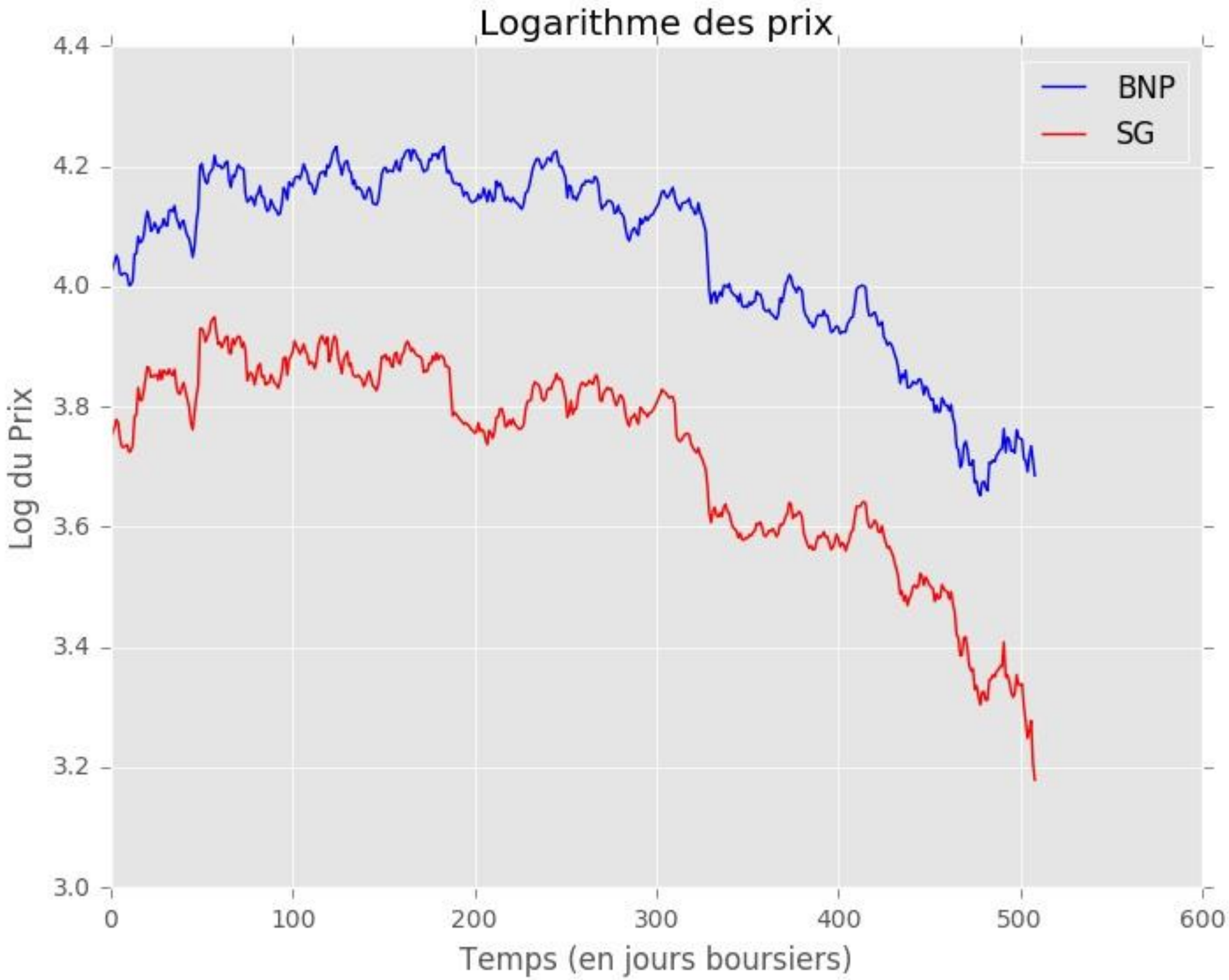
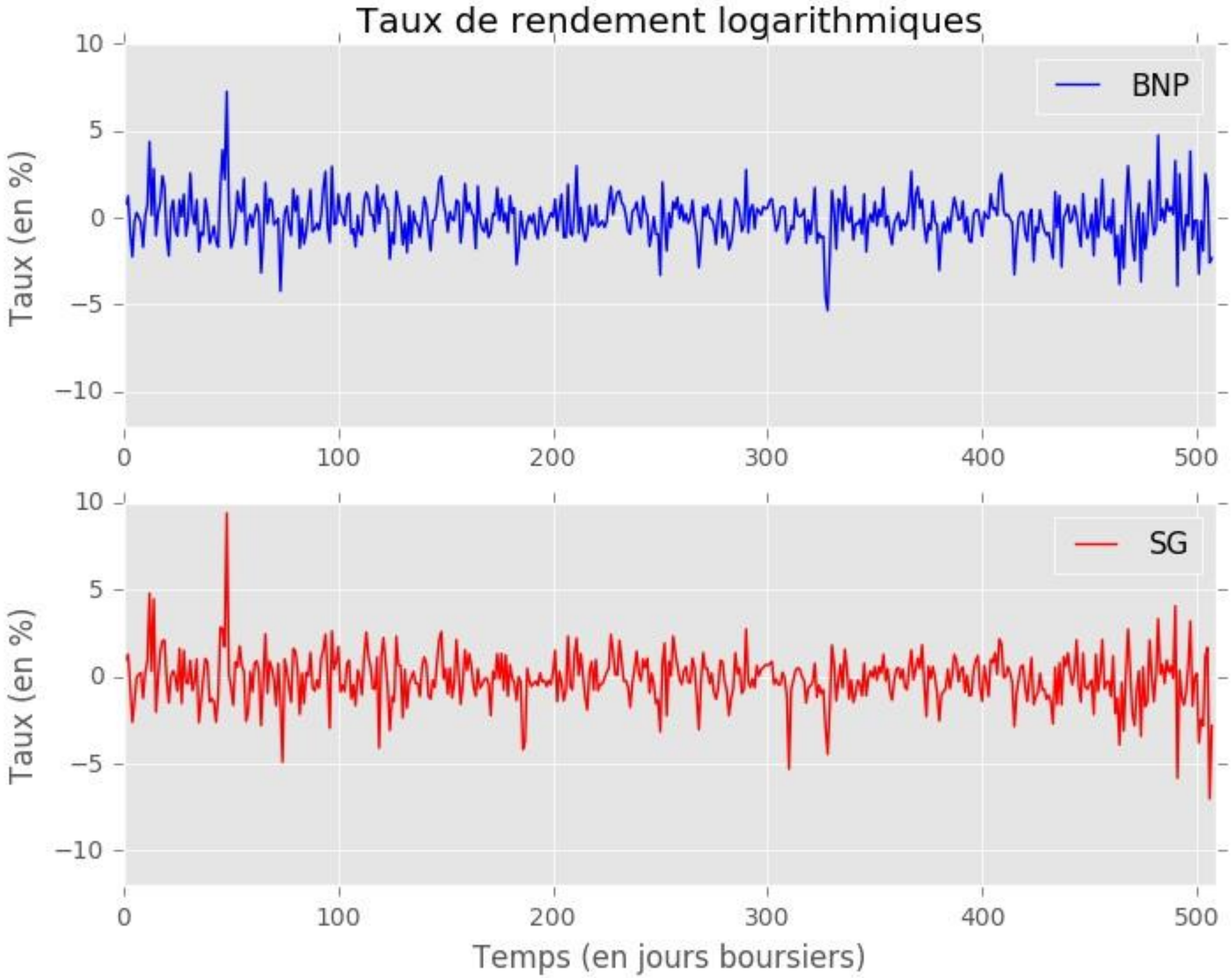
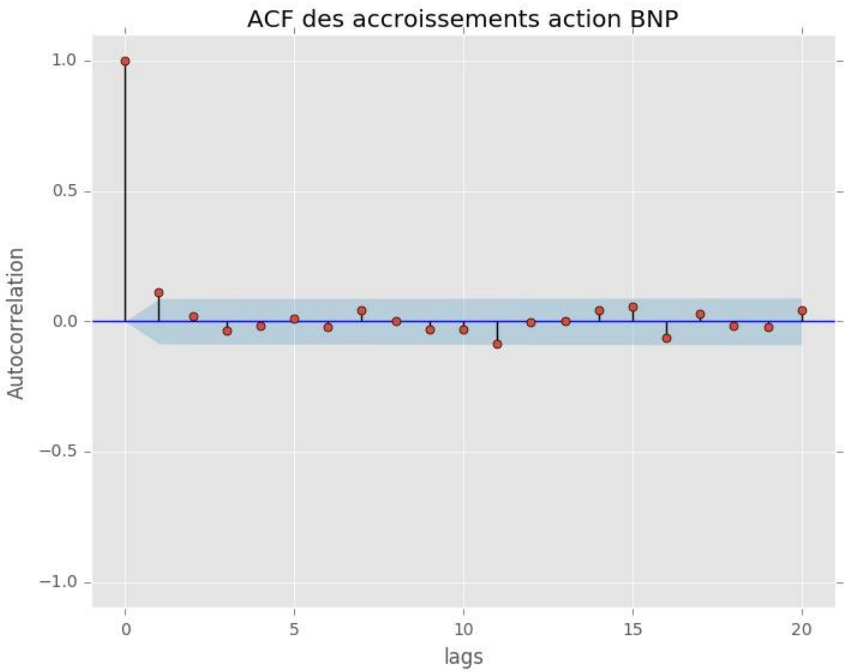
Calcul stochastique

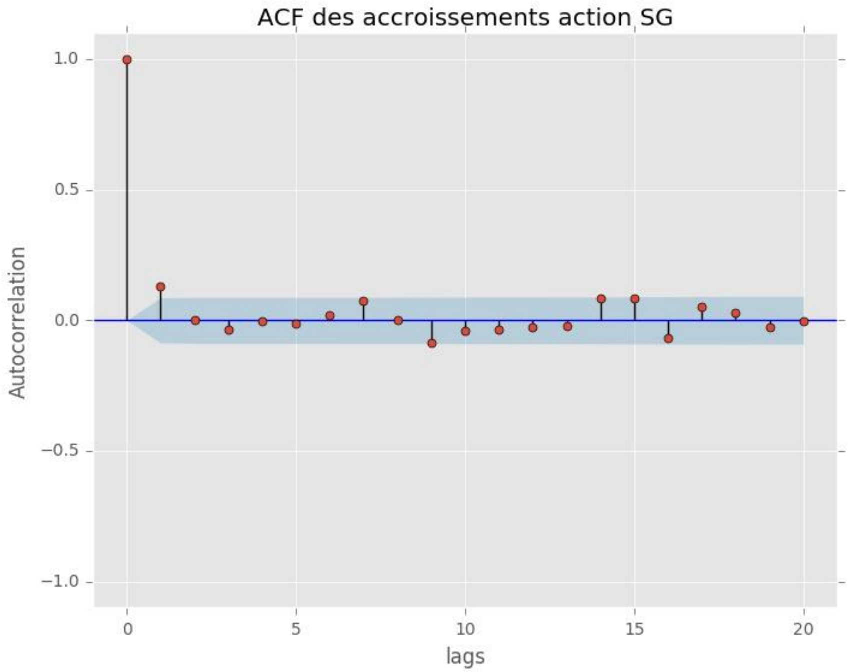
1. **Introduction – fluctuations du cours d’une action**
2. **Marche aléatoire et mouvement brownien**
3. **Intégrale stochastique**
4. **Calcul stochastique**
5. **Modèle de Black&Scholes du prix d’une action**

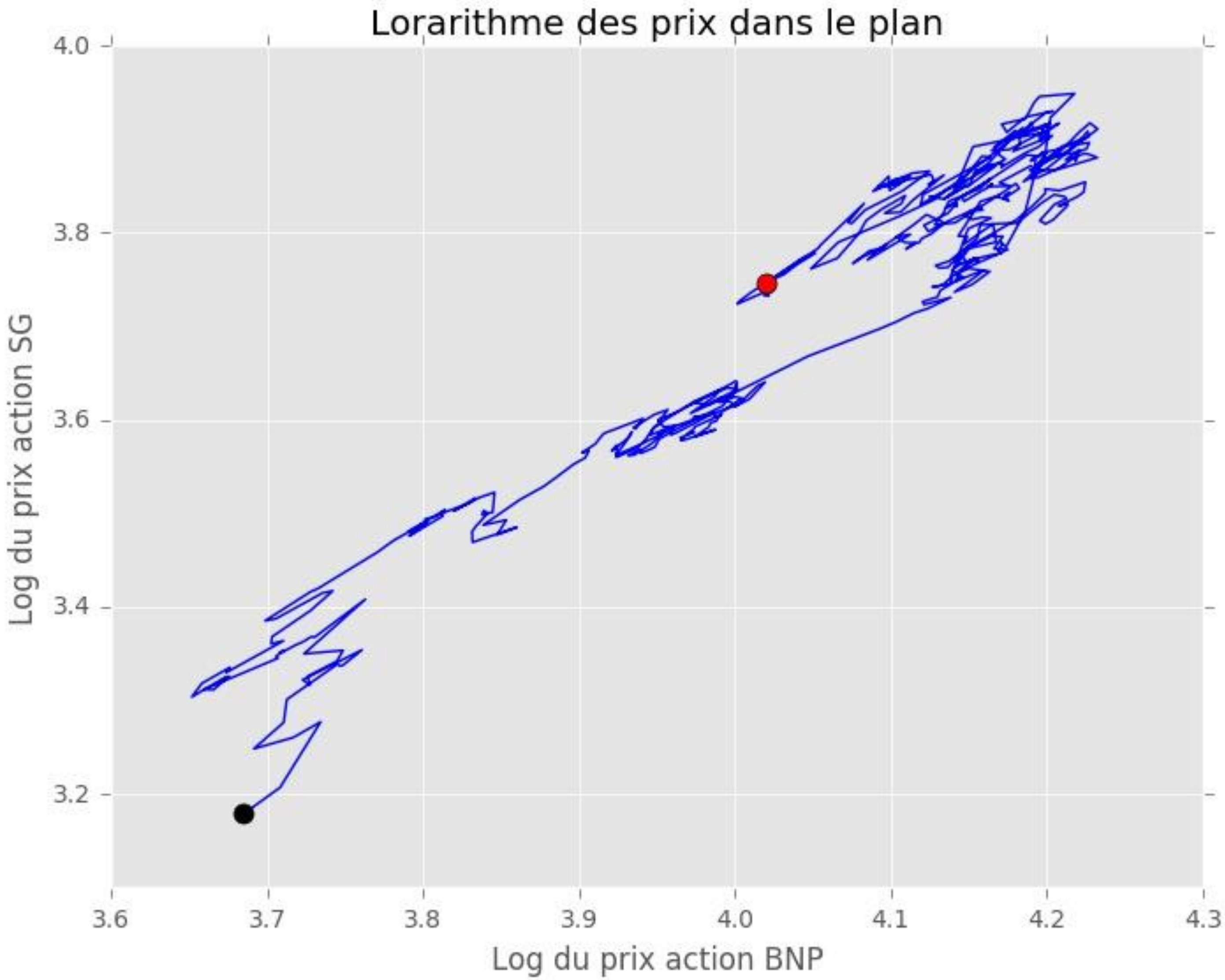

Actions à la clôture du 10/02/2017 au 10/02/2019
70
60
50
40
30
20
0
100
200
300
400
500
600
Prix (en euros)
Temps (en jours boursiers)
BNP
SG


Logarithme des prix
BNP
SG
Log du Prix
Temps (en jours boursiers)
4.4
4.2
4.0
3.8
3.6
3.4
3.2
3.0
0
100
200
300
400
500
600

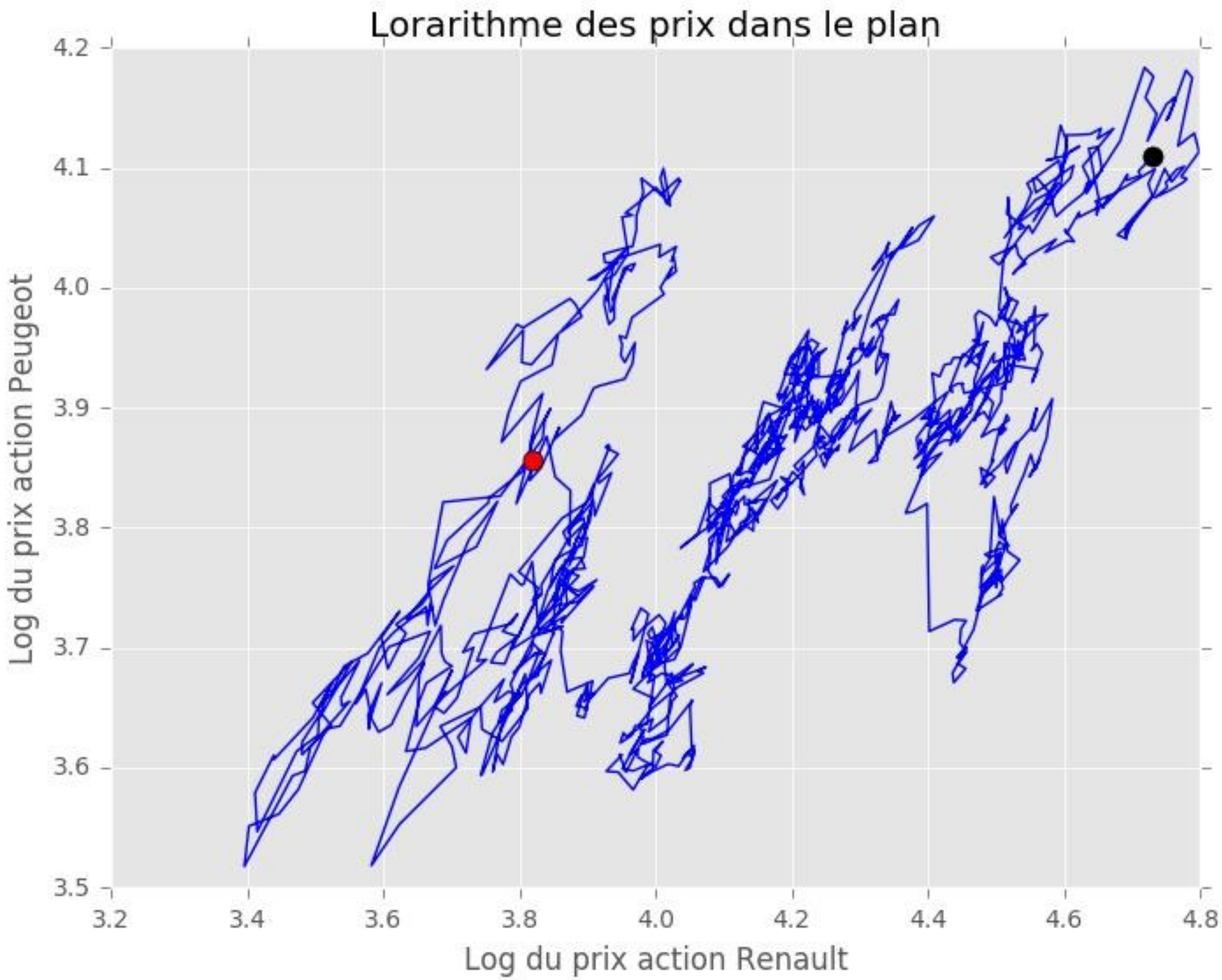

Taux de rendement logarithmiques
BNP
SG
Taux (en %)
Taux (en %)
Temps (en jours boursiers)
10
5
0
−5
−10
0
100
200
300
400
500


ACF des accroissements action BNP
Autocorrelation
lags
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20


ACF des accroissements action SG
Autocorrelation
lags
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20


Lorarithme des prix dans le plan
4.0
3.8
3.6
3.4
3.2
3.6
3.7
3.8
3.9
4.0
4.1
4.2
4.3
Log du prix action BNP
Log du prix action SG

Un autre exemple (dans le secteur de l'automobile) :



Analyse de données financières $\Rightarrow$ taux de rendement de la forme :

$$R_j = \mu + \sigma\varepsilon_j \quad \text{avec } \varepsilon_j \text{ v.a. non corrélées centrées réduites…}$$

D'où la dynamique des prix : $j \geq 0,\ S_{j+1} - S_j = \mu S_j + \sigma S_j \varepsilon_{j+1}$

On pose $\quad Z_0 = 0\ ;\ Z_j = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j \quad$ pour $j \geq 1$

Le cours du titre suit l'équation différentielle « stochastique » discrète

$$dS_j = \mu S_j dj + \sigma S_j dZ_j$$

$\Leftrightarrow$ équation intégrale stochastique discrète

$$S_j = S_0 + \mu \sum_{i=0}^{j-1} S_i di + \sigma \sum_{i=0}^{j-1} S_i dZ_i$$

Solution : $S_j = S_0(1+\mu+\sigma\varepsilon_1)\times\ldots\times(1+\mu+\sigma\varepsilon_j)$

Par analogie ou similitude, on est bien tenté d'écrire en temps continu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

ou encore

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dB_u$$

où $B = (B_t)_{t \geq 0}$ désigne le (fameux!) mouvement brownien.

♦ Mais, peut-on donner un sens à l'intégrale « stochastique » $\int_0^t S_u dB_u$ et, si oui, lequel ?

♦ Peut-on résoudre l'équation différentielle stochastique (e.d.s.) ou l'équation intégrale stochastique (e.i.s.) ci-dessus et, si oui, comment ?

Définition. On appelle marche aléatoire en temps discret tout processus Z de la forme

$$Z_0 = 0 \; ; \; Z_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$$

où les ε_k sont i.i.d. (sous-entendu ici que la position initiale est repérée par 0).

On parlera de **marche aléatoire standard** lorsque les ε_k sont de loi normale N(0, 1). Elle correspond à un bruit blanc gaussien normalisé et c'est le prototype de MA.

Propriétés de la marche aléatoire standard (notée Z).

1. $Z_0 = 0$ (elle démarre de 0)

2. Z est un PAIS (Processus à Accroissements Indépendants et Stationnaires)

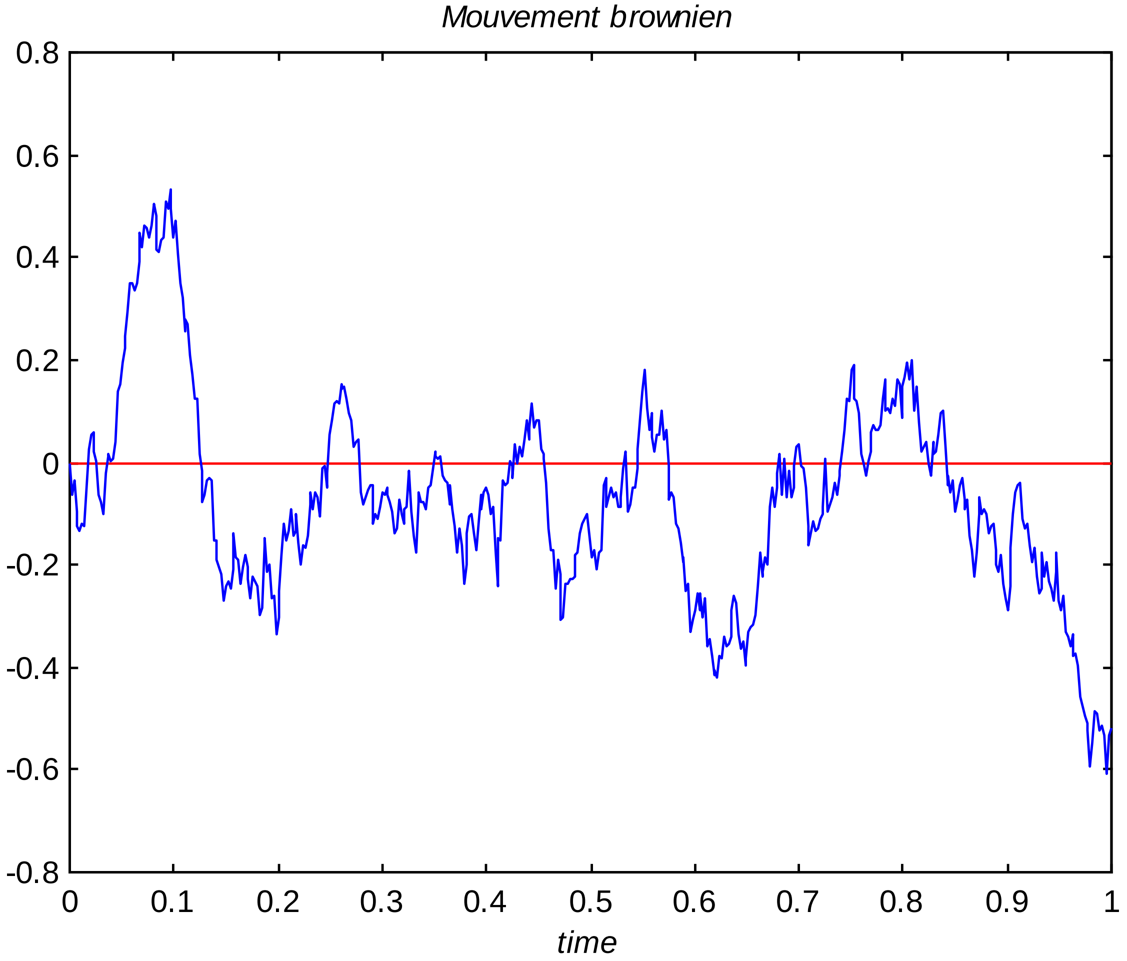
3. Z_n de loi normale N(0, n) : $E(Z_n) = 0$ et $Var(Z_n) = n$

4. Z est un processus gaussien de covariance $cov(Z_n, Z_m) = n \wedge m$

Le MB est la version en temps continu de la marche aléatoire standard.

Définition du mouvement brownien standard. On appelle ***mouvement brownien standard ou processus de Wiener*** **(*Brownian motion* or *Wiener process*)** le processus aléatoire $B = (B_t)_{t \geq 0}$ vérifiant :

- $B_0 = 0$
- B est un PAIS (**P**rocessus à **A**ccroissements **I**ndépendants et **S**tationnaires)
- B_t est de loi $N(0, t)$ pour tout $t > 0$. En particulier, $E(B_t) = 0$ et $Var(B_t) = t$
- Les trajectoires de B sont continues



Mouvement brownien
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
time

Propriétés du MB standard.

- C'est un processus gaussien centré de covariance $\mathrm{cov}(B_t, B_s) = t \wedge s$
- C'est un processus de Markov
- C'est une **martingale**, i.e. vérifie pour tout $t \geq 0$ et tout horizon $h > 0$:

$$E(B_{t+h} \mid B_s , s \leq t) = B_t$$

Propriétés des trajectoires.

- Continuité par définition (construction)
- Non dérivabilité en <u>tout</u> point
- Variation non bornée sur tout intervalle $[0, T]$:

$$\sup\left(\sum_{k=0}^{n} | B_{t_k} - B_{t_{k-1}} | \; ; \; 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T \right) = +\infty$$

- Auto-similarité d'ordre ½ : $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} B_{\lambda t}\right)_{t \geq 0}$ est encore un MB ($\forall \lambda > 0$) !

Variation quadratique (probabiliste) du MB.

Soit $t > 0$ fixé. On considère la suite des subdivisions dyadiques de l'intervalle $[0, t]$:

$$0 = t_0 < t_1 = \frac{t}{2^n} < \ldots < t_k = \frac{kt}{2^n} < \ldots < t_{2^n} = t \; ; \; n \geq 1$$

puis la suite des variations quadratiques du MB qui y est associée :

$$V_n^{(2)}(t) = \sum_{k=0}^{2^n - 1} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2$$

Alors, pour tout t, $V_n^{(2)}(t)$ tend vers t lorsque n tend vers $+\infty$.

On appelle $V^{(2)}(t) = t$ **variation quadratique** du MB et on note encore $\langle B \rangle_t$ au lieu de $V^{(2)}(t)$.

Extensions.

- MB avec dérive linéaire (drift) : $X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$
- **MB géométrique** : $\log(X_t)$ MB avec dérive ou $X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)$

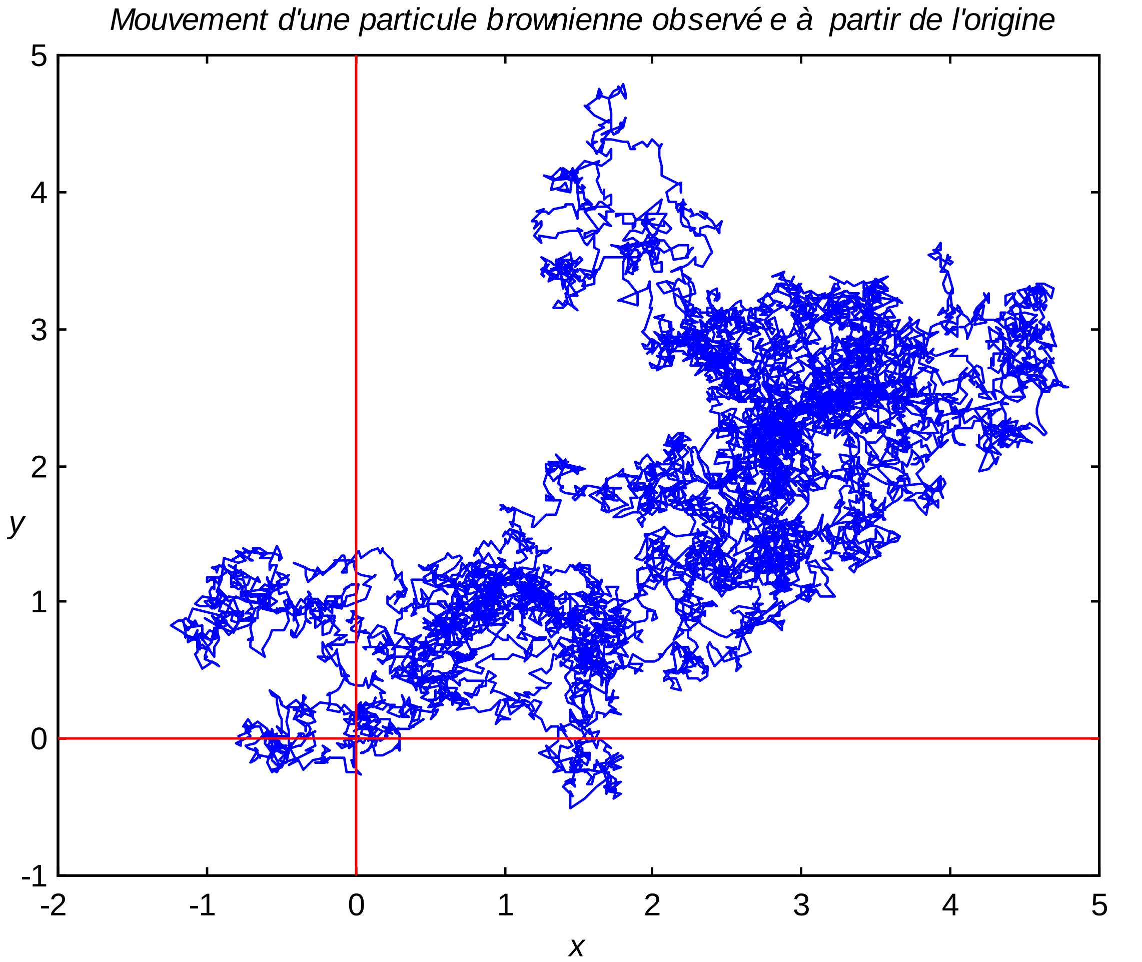
SIMULATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN STANDARD

- choisir la durée T ou intervalle [0, T] de simulation
- choisir le pas de temps de discrétisation h selon $h = \frac{T}{N}$, N nombre d'intervalles de discrétisation ou (N+1) nombre d'instants de discrétisation
- **initialiser** $b_0 = 0$
- **pour** $k = 1$ à N **faire**

  simuler ε de loi $N(0, 1)$

  poser $b_{k+1} = b_k + \sqrt{h}\,\varepsilon$

  fin pour
- **sortir** $b_0, \ldots, b_N$


Mouvement d'une particule brownienne observée à partir de l'origine
y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5

On cherche à définir $\int_0^t S_u dB_u$ où $(S_u)_{u\geq 0}$ est un processus aléatoire (prix…).

On commence par définir $\int_0^t B_s dB_s = ?$

Idée n°1 : $d(\tfrac{1}{2} B_t^2) = B_t dB_t$, ce qui conduit à

$$\int_0^t B_s dB_s = B_t^2/2$$

Idée n°2 : sommes de Riemann avec choix $t_k^* = t_k$ à gauche de $[t_k , t_{k+1}[$,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}$$

Idée n°3 : sommes de Riemann avec choix $t_k^* = t_{k+1}$ à droite de $[t_k , t_{k+1}[$,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 + t}{2}$$

On appelle *processus simple* tout processus X de la forme

$$X_t = \sum_{k \geq 0} Z_k \, 1_{[t_k,\, t_{k+1}[}(t)$$

avec, pour tout t, X_t v.a qui ne dépend que de $s \to B_s$, $s \leq t$. On dit que X est **adapté (prévisible, non anticipatif)**, ce qui revient encore à dire que

$$Z_k \text{ ne dépend que de } s \to B_s,\ s \leq t_k \text{ pour tout } k \geq 0$$ [1]

On pose (intégrale stochastique de X relativement au MB standard B)

$$I_t(X) = \int_0^t \mathbf{X_s \, dB_s} = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right) + Z_m\left(B_t - B_{t_m}\right) \quad \text{lorsque } t \in [t_m, t_{m+1}[$$

[1] On peut introduire la filtration $F = (F_t = \sigma(B_s, s \leq t))_t$ et dire que X est F-adapté…

X processus adapté peut être approché (dans un certain sens) par une suite $(X_n)_n$ de processus simples, par exemple en pratique par :

$$X_n = \sum_{i=0}^{+\infty} X(t_i) 1_{[t_i,\ t_{i+1}[} \quad ; t_i = i/2^n$$

On peut alors définir l'intégrale stochastique de X par prolongement :

$$I_t(X) = \int_0^t \mathbf{X_s\, dB_s} = \lim(\ I_t(X_n)\ ) \text{ pour tout t}$$

Propriétés de l'intégrale stochastique.

- $(I_t(X))_{t\geq 0}$ est une **<u>martingale</u>** à trajectoires continues, **centrée**, de **variance** :

$$t \to E([I_t(X)]^2) = E\left(\int_0^t X_s^2\, ds\right) \qquad \textbf{(isométrie d'Itô)}$$

- Pour $s < t$, on a

$$E([I_t(X) - I_s(X)]^2 \mid B_u, u \leq s) = E\left(\int_s^t X_u^2\, du \mid B_u, u \leq s\right)$$

En particulier, le processus $(I_t(X)^2 - \langle I(X)\rangle_t)_t$ est une martingale où

$$\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2\, du$$

- $\langle I(X)\rangle$ est la **variation quadratique** du processus X.

L'intérêt des semi-martingales va apparaître avec le calcul stochastique.

Définition. on appelle **semi-martingale** tout processus X de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s ds + \int_0^t K_s dB_s$$

avec H et K processus prévisibles convenables…

Interprétation. Le processus X s'écrit comme la **somme d'une partie régulière** (de classe C^1 si H est à trajectoires continues) **et d'une partie "martingale"** (intégrale stochastique!).

Propriétés. X semi-martingale est de variation quadratique finie égale à

$$<X>_t = \int_0^t K_s^2\, ds$$

ou (sous forme différentielle) $d<X>_t = K_t^2 dt$; $<X>_0 = 0$

Si X et Y sont deux semi-martingales alors, pour tout intervalle [0, t], on peut définir la **covariation** entre X et Y comme limite de sommes du type

$$\sum_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})\,(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) \ \ ; (t_k) \text{ subdivision dyadique de } [0, t]$$

En effet, en notant <X, Y> le processus de covariation (ou crochet de variation croisée), on a facilement (avec des notations évidentes)

$$\mathbf{<X, Y>_t = \frac{1}{4}\ (<X+Y>_t - <X - Y>_t) = \int_0^t K^X_s\, K^Y_s\, ds}$$

1ère formule d'Itô. Soit f de IR dans IR au moins de classe C^2.
Alors, pour tout t,

$$\mathbf{f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds}$$

2ème formule d'Itô. Soit X une semi-martingale avec

$$dX_t = H^X_t dt + K^X_t dB_t$$

Variation quadratique $\langle X \rangle$ du processus X : $\langle X \rangle t = \int_0^t (K^X_s)^2 ds$

Soit f de IR dans IR de classe C^2. Alors, pour tout t,

$$\mathbf{f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X \rangle s}$$

3ème formule d'Itô. Soient X et Y deux semi-martingales

$$dX_t = H^X_t dt + K^X_t dB_t$$
$$dY_t = H^Y_t dt + K^Y_t dB_t$$

Le **crochet de variation croisée** entre X et Y vérifie $\langle X,Y\rangle_t = \int_0^t K^X_s K^Y_s \, ds$

ou, sous forme différentielle, $d\langle X,Y\rangle_t = K^X_t K^Y_t \, dt$; $\langle X,Y\rangle_0 = 0$. Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Alors, pour tout t,

$$\mathbf{f(X_t, Y_t) = f(X_0, Y_0) + \int_0^t \partial_x f\,(X_s,Y_s)dX_s + \int_0^t \partial_y f\,(X_s,Y_s)dY_s}$$

$$\mathbf{+ \frac{1}{2}\left(\int_0^t \partial^2_{xx} f(X_s,Y_s)d\langle X\rangle s + 2 \int_0^t \partial^2_{xy} f(X_s,Y_s)d\langle X, Y\rangle s + \int_0^t \partial^2_{yy} f(X_s,Y_s)d\langle Y\rangle s \right)}$$

Cas particulier. $dX_t = dt$

Le modèle de Black&Scholes consiste à supposer que le cours d'une action est solution de l'e.d.s.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

En utilisant le calcul stochastique (formule d'Itô), on montre que

$$S_t = S_0 \, e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}$$

Le cours d'un actif est un **mouvement brownien géométrique** avec dérive linéaire. De plus, à l'instant t, le prix de l'actif est de **loi log-normale**

$$LN(\ln(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$$

La figure ci-dessous illustre le modèle de B&S après estimations des paramètres μ (**taux de rendement moyen annuel instantané**) et σ (**la fameuse volatilité**) :