# Processus stochastiques et EDPs

**1. Rappels de calcul différentiel (ordinaire)**
**2. Equation de la chaleur et mouvement brownien**
**3. Processus de diffusion et EDPS**
**4. Formule de Feynman-Kac**
**5. Applications en Physique, Finance, …**
**6. Ce qu'il faut retenir…**

☞ A l'issue du §2, il sera nécessaire d'apprendre à « différencier » des courbes aléatoires, cela relève du « **Calcul stochastique** » (intégrale stochastique et formule d'Itô).

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction de n variables, de classe $C^1$, $C^2$ (voire $C^\infty$) :

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \; ; \; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$$

$\Omega$ désigne le *domaine* de la fonction f (ouvert connexe…)

**Formules de Taylor à l'ordre 1 et à l'ordre 2.**

(1) $f(x+h) = f(x) + < \nabla f(x) \mid h > + \| h \| \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) = o(1)$

(2) $f(x+h) = f(x) + < \nabla f(x) \mid h > + \frac{1}{2} < Hf(x)h \mid h > + \| h \|^2 \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) = o(1)$

**Règle de dérivation des fonctions composées.** $f : \Omega \to I \subset \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^2 \Rightarrow h = g \circ f$ de classe $C^2$ de dérivées partielles :

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = g'(f(x)) \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \textbf{ etc.}$$

**Exercice 1.1** $\nabla f(x) \equiv 0 \Rightarrow f = \text{constante}$ ; $Hf(x) \equiv 0 \Rightarrow f = ?$

**Exercice 1.2** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On écrit : $f(z) = f(x+iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$

On suppose f dérivable au sens complexe (f est dite holomorphe ou analytique).

1. Prouver les conditions dites de Cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.
2. On admet que P et Q sont de classe $C^\infty$. En déduire $\Delta P = 0$ et $\Delta Q = 0$.
3. Vérifier ces résultats d'analyse complexe sur quelques exemples simples (polynômes, exponentielle, …).

**Exercice 1.3** On considère le prix d'un *call* d'échéance T, de strike K : $\mathbf{C_t = N(d_1)S_t - KN(d_2)B(t, T)}$ avec :

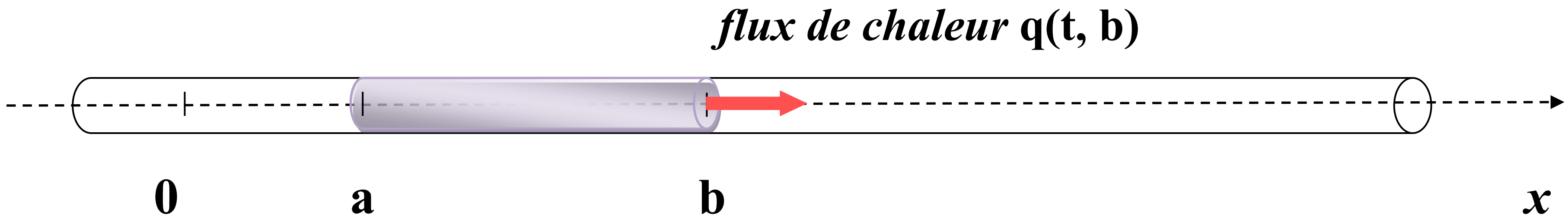
$S_t$ prix en date t de l'actif sous-jacent (action) ; $d_1 = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ ;
$B(t, T) = e^{-r(T-t)}$ taux d'actualisation et enfin N(.) la fonction de répartition de la loi N(0, 1).

Soit $C_t = f(t, S_t)$ où $f : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Expliciter $f(t, x)$ et calculer la « grecque » $\mathbf{\Delta_t = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)}$.
Vérifier que f est solution de l'**EDP dite de Black&Scholes (1973) :**

$$\mathbf{0 < t < T, x > 0 :} \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - rf(t, x) + \frac{(\sigma x)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + rx\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0$$

Condition « initiale » ?

On s'intéresse à l'équation de la chaleur sur une barre infinie homogène et parfaitement isolée (hypothèses physiques usuelles…).




Bilan d'énergie (chaleur) sur le tronçon [a, b] (**loi de conservation**)

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b \rho c\theta(t, x)dx\right) = -(q(t, b) - q(t, a))$$

où $\rho$ densité de masse linéique ($kg.m^{-1}$), c capacité calorifique du matériau ($J.K^{-1}.kg^{-1}$).

**Loi de Fourier (1822, J.-B. Biot 1804):**

$$q(t, x) = -\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}(t, x)$$ où $\lambda$ conductivité thermique ($m.J.s^{-1}.K^{-1}$)

$\Rightarrow$ **(équation de la chaleur)** $\quad \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ avec $\boldsymbol{\sigma^2 = 2D\ ;\ D = \dfrac{\lambda}{\rho c}}$

$D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ **diffusivité thermique** du matériau en $m^2.s^{-1}$ (quelques valeurs à 20 °C : fonte de 10 à $12\times10^{-6}$, acier 12 à $15\times10^{-6}$, laine de verre $0.58\times10^{-6}$, air $20\times10^{-6}$…)

Plus intéressant : $\sigma^2 = 2D$ en $m^2.s^{-1}$ et donc $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{2D}}$ **en** $\boldsymbol{m.s^{-1/2}}$

**$\rightarrow$ $\sigma$ coefficient de diffusion « presque homogène à une vitesse »**

Pour déterminer la solution (si existence et unicité), il faut une condition initiale (**problème de Cauchy**) :

$\theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$ avec $\boldsymbol{\theta_0}$ **donnée du problème**

On parle d'**EDP d'évolution de type parabolique** avec condition initiale $\theta_0(x)$. A-t-on des conditions aux bords ou limites (si oui, lesquelles ?).

**Principe de superposition :**

- l'EDP de la chaleur est linéaire
- si $\theta_1$ est solution associée à la condition initiale $\theta_{1,0}(x)$ et $\theta_2$ solution associée à $\theta_{2,0}(x)$, alors $\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2$ est solution avec CI :

$$x \to \lambda_1\theta_{1,0}(x) + \lambda_2\theta_{2,0}(x)$$

**Notion de solution élémentaire :** $p(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t\sigma^2}\right)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$

Lorsque $t \downarrow 0$,

$p(t, x) \to \delta_0(x)$ = « fonction » de Dirac au point $x = 0$ (**distribution**)

De même, $p(t, x - y)$ solution associée à $\delta_y(x)$

**Conséquence.** On écrit formellement $\theta_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y)\delta_y(x)\,dy$ et on utilise le principe de superposition pour obtenir « la »

**Solution générale :**

(SG) $$\theta(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y)\, p(t, x-y)\, dy$$ **(produit de convolution)**

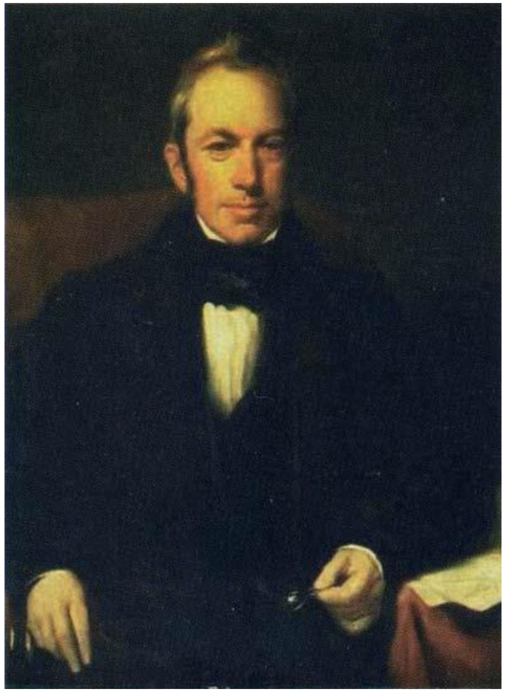
**Remarque :** l'énergie (chaleur) est conservée au cours du temps puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho c\theta(t, x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c\theta_0(y) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x-y)\, dx \right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c\theta_0(y)dy\,.$$

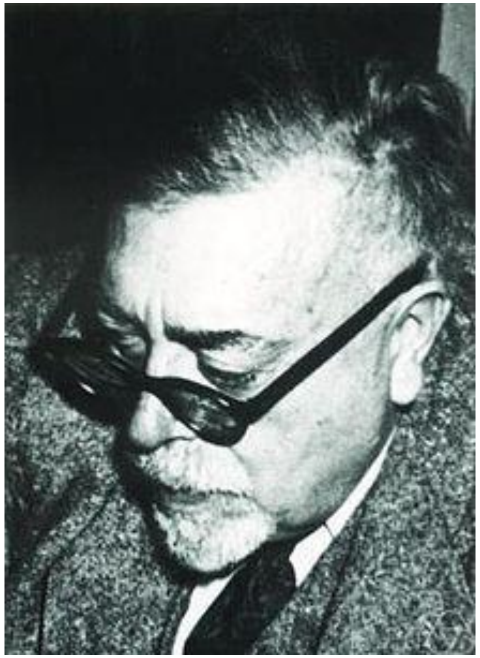
**Exercice 2.1** On suppose **$\theta_0$ continue positive nulle à l'infini et** $0 < Q_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c\theta_0(y)dy < +\infty$.

Montrer que (SG) définit une fonction $\theta(t, x)$ de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ solution (forte) de l'EDP et nulle à l'infini pour tout $t > 0$.

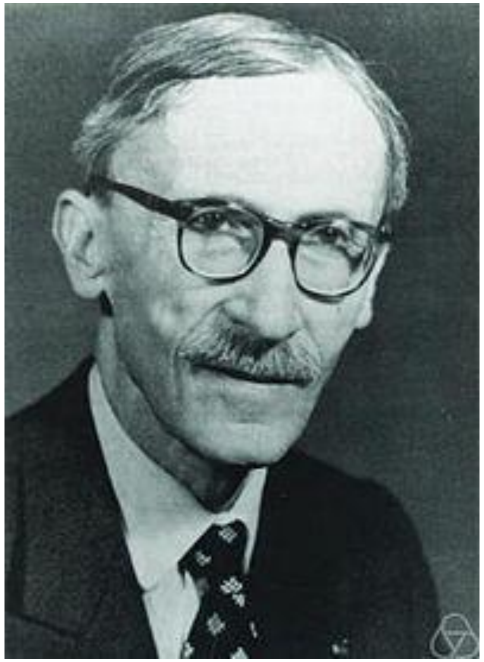
☺ $x \in \mathbb{R} \to p(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t\sigma^2})$ est la densité de probabilité de présence au point $x$ et en date t d'une particule brownienne issue de $x = 0$ et qui diffuse avec le coefficient $\sigma$ ! (cf. **A. Einstein** et ses "*Investigations on the theory of the Brownian Movement*", **réf. (5]**). (voir aussi la vidéo en **réf. [6]**)
Dit autrement (**N. Wiener, P. Lévy**) : $x \in \mathbb{R} \to p(t, x)$ est la densité de probabilité de la v.a. $\sigma B_t$ où $t \to B_t$ désigne un mouvement brownien standard (appelé encore processus de Wiener).



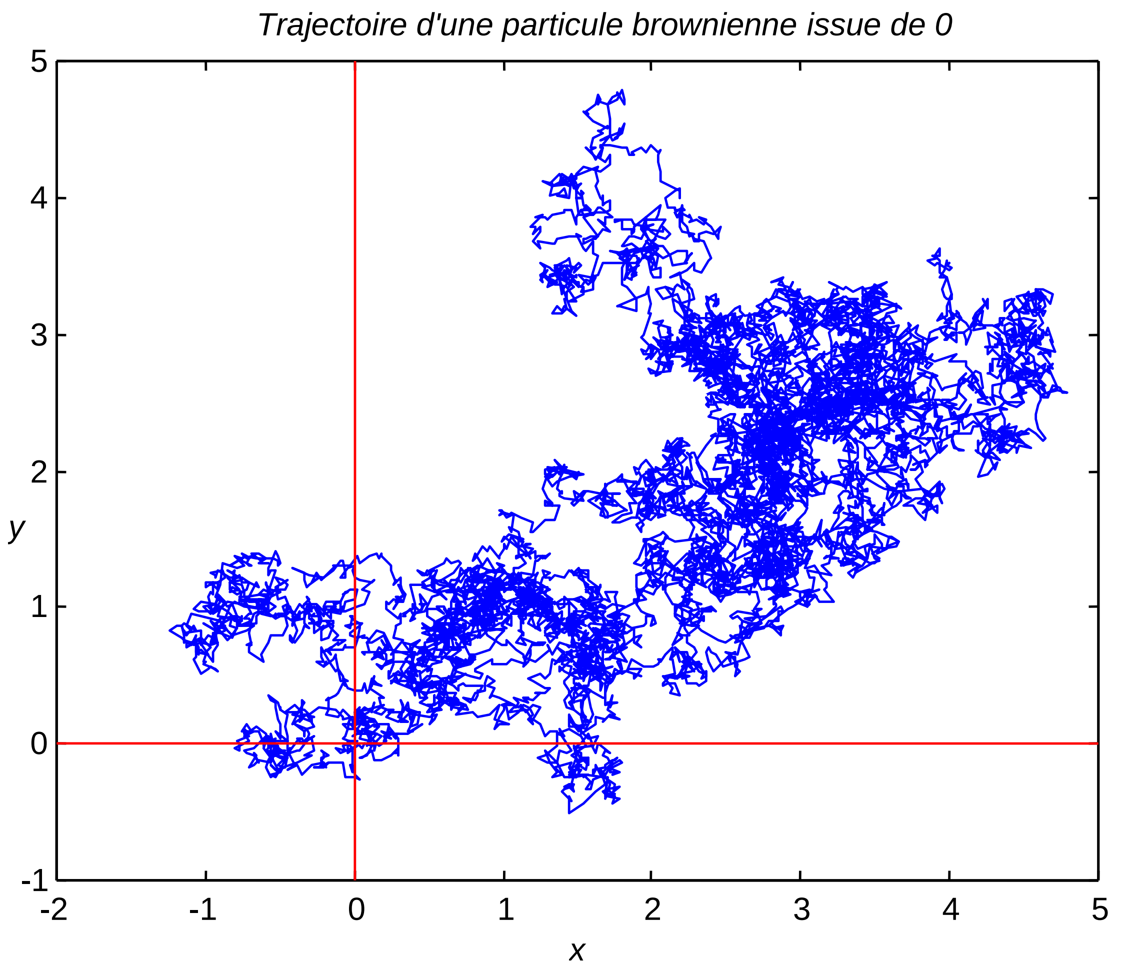
**Robert Brown, botaniste, 1773-1858**



**Norbert Wiener, 1894-1964**



**Paul Lévy, 1886-1971**


Trajectoire d'une particule brownienne issue de 0
5
4
3
2
1
0
-1
y
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x

**Théorème ou formule de représentation probabiliste de la solution de l'équation de la chaleur** (pour une barre infinie…)

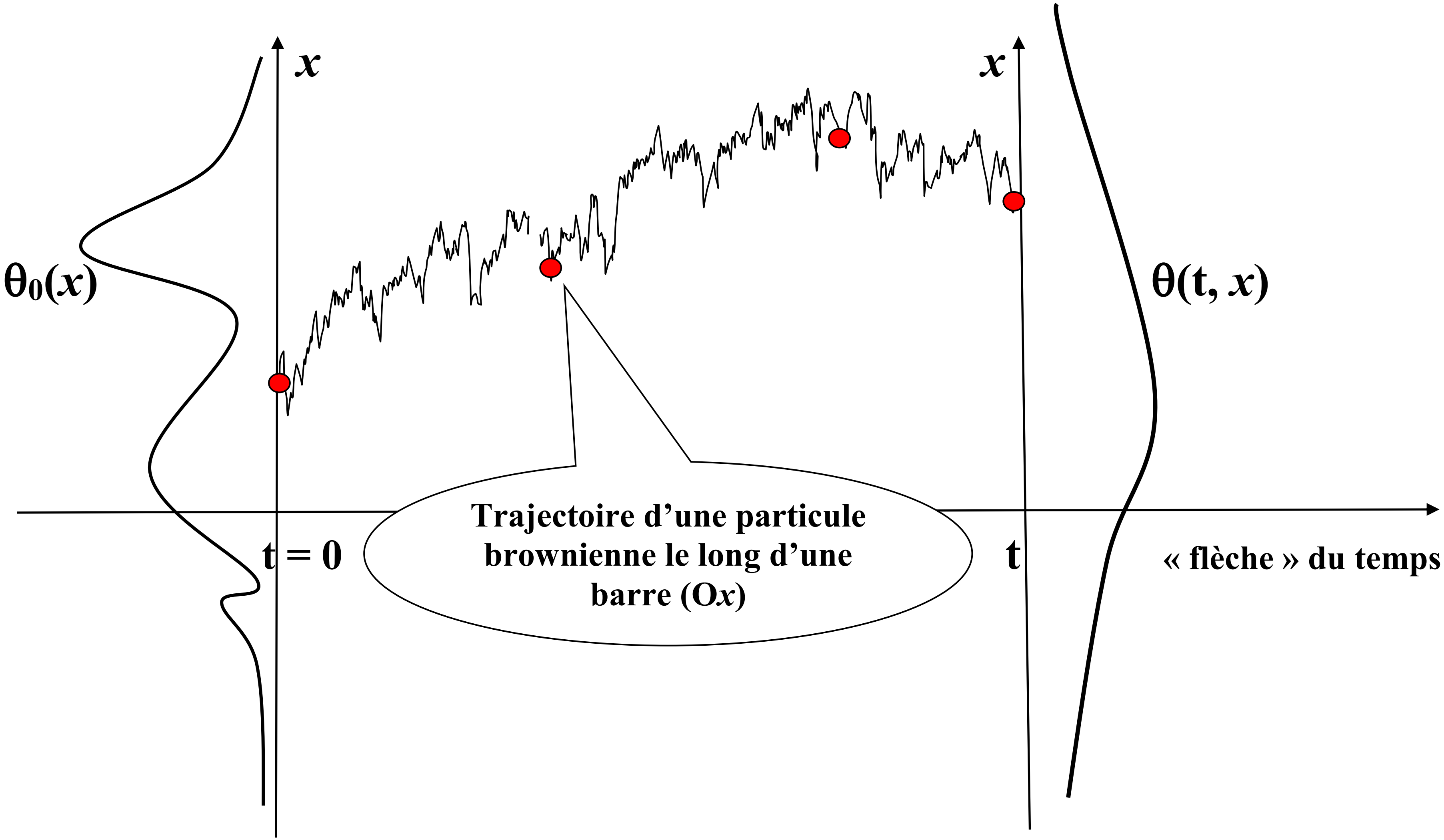
$$\theta(t, x) = E[\ \theta_0(x + \sigma B_t)\ ] \qquad \text{avec } (B_t)_{t \geq 0} \text{ MB standard, } \boldsymbol{\sigma = \sqrt{2D} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c}}\ (m.s^{-1/2})}$$

**Exercice 2.2** Prouver le théorème précédent.

**Exercice 2.3** Par utilisation simple de la méthode de Monte-Carlo, obtenir une estimation statistique de la température $\theta(t, x)$ en un point $x$ quelconque de la barre et pour une date t quelconque. On précisera également une fourchette d'estimation en donnant un intervalle de confiance à 95%.

☞ Mise en œuvre : **problème 1 du TP 1**

## Interprétation probabiliste de l'équation de la chaleur : diffusion de « grains de chaleur »



Densité initiale (t = 0) de particules : $y \to d_0(y) = k^{-1} \times \theta_0(y)$ où k est une constante de normalisation.

Ecrivons $d_0(x)dx \approx \dfrac{n_0(x)}{N}$ où N est le nombre total de particules et $n_0(x)$ le nombre d'entre elles dans l'intervalle $[x, x + dx]$. En date t, la densité de particules au point $x$ s'écrit en vertu de la **loi des grands nombres** (et sous hypothèse d'indépendance des différentes trajectoires)

$$\frac{n(t, x)}{N} \approx \sum_{dy} \frac{n_0(y)}{N} \times P(y+\sigma B_t \in [x, x+dx])$$

(N = +∞)

$$d(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_0(y)\, p(t, x-y)\, dy = k^{-1} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y)\, p(t, x-y)\, dy$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{d(t, x) = k^{-1} \times \theta(t, x) = \frac{\theta(t, x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(x)dx}}$$

**Exercice 2.4** Soit $X_0$ une variable aléatoire de densité

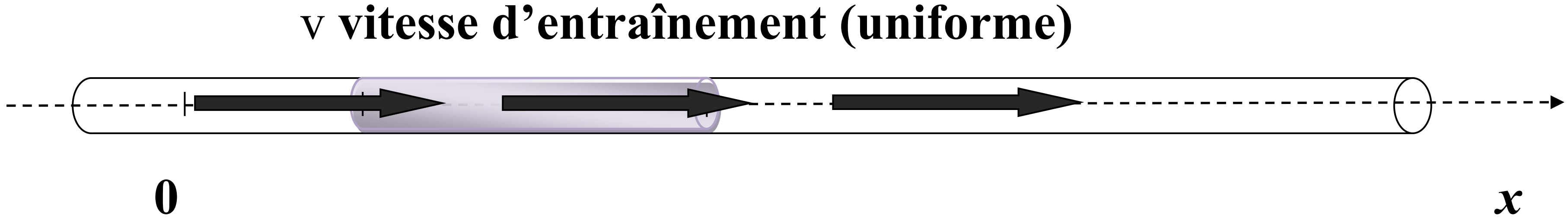
$$x \to d_0(x) = k^{-1}\times\theta_0(x) \text{ où } k = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(x)dx\ .$$

1. Montrer que $d(t, x) = k^{-1}\times\theta(t, x)$ est bien la densité de probabilité de la v.a. $X_0 + \sigma B_t$ où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un MB standard indépendant de $X_0$.

2. En déduire une méthode Monte-Carlo (méthode particulaire) pour estimer la solution $\theta(t, x)$ pour $(t, x)$ dans un rectangle de la forme $[0, T]\times \mathbb{R}$.

☞ Mise en œuvre : **problème 1, partie 2 du TP 1**

**Cas plus général :** barre infinie contenant un « fluide » en mouvement et présence d'un terme « source »




Nouvelle EDP de bilan (**équation d'advection-diffusion**) :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + f(t, x) - \rho c v \frac{\partial \theta}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + f_0(t, x) - v \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

avec $\sigma^2 = 2D$ ; $D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ ; $f_0(t, x) = \dfrac{1}{\rho c} \times f(t, x)$

**Formule de représentation probabiliste de la solution de l'équation de advection-diffusion**

$$\theta(t, x) = E[\ \theta_0(x - vt + \sigma B_t)\ ] + E[\int_0^t f_0(t - s, x - vs + \sigma B_s)ds\ ]$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ MB standard, $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{2D} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c}}}$ **(m.s$^{-1/2}$)**

**Exercice 2.5** Prouver le résultat précédent dans le cas v = 0 et $f(t, x) = f(x)$.

☞ **La preuve générale sera obtenue facilement grâce au calcul stochastique…**

On revient à une situation plus « réelle » où la barre est supposée « finie » :


On considère le problème classique de Dirichlet :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad \textbf{pour } t > 0 \textbf{ et } x \textbf{ dans } ]-a, b[$$

**$\theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$ avec $\theta_0$ donnée (condition initiale de type Cauchy)**

**$\theta(t, x = b) = \theta_b$ et $\theta(t, x = -a) = \theta_a$ (conditions de type Dirichlet)**

**Théorème ou formule de représentation probabiliste de la solution de l'équation de la chaleur pour une barre finie**

$$\theta(t, x) = E[\ \theta(t - t\wedge T_x\ , x + \sigma B_{t\wedge T_x})\ ]$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ MB standard, $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{2D} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c}}}$ **(m.s$^{-1/2}$)**

et où $T_x = \inf(\ t > 0\ ;\ x + \sigma B_t \in \{-a, b\}\ )$ est le premier instant (aléatoire) où le mouvement brownien $t \to x + \sigma B_t$ « sort » de la barre…

**preuve :** à nouveau grâce au calcul stochastique! Donc patience…

**Exercice 2.6.** Expliciter cette formule et montrer en quoi elle permet bien de résoudre le problème en fonction des données!

Mise en œuvre : **problème 2, TP 1**

## Exercice 2.7

Etudier le cas stationnaire ($t = +\infty$) et en déduire une décomposition de la solution de la forme

$$\theta(t, x) = \theta_s(t, x) + \theta_b(t, x)$$

où $\theta_s(t, x)$ est un terme transitoire (qui tend vers 0 en $t = +\infty$) et $\theta_b(t, x)$ un terme qui converge vers la température en régime stationnaire.

Proposer une méthode Monte-Carlo pour estimer la température en un point $x$ quelconque et à une date t future.

## Exercice 2.8

Obtenir une interprétation probabiliste du terme $\theta_s(t, x)$ analogue à celle vue dans le cas d'une barre infinie. En déduire une nouvelle procédure Monte-Carlo pour estimer ce terme qui utilise une population de « grains de chaleur ».

En considérant la différence $\theta(t, x) - \theta(t = +\infty, x)$, proposer une procédure globale d'estimation de $\theta(t, x)$ qui consiste à utiliser une population de grains qui diffusent au cours du temps…

On a établi le lien suivant

$$\text{EDP : } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad \leftrightarrow \qquad \text{MB : } (t \to \sigma B_t)$$

$\theta(t, x) = E[\ \theta_0(x + \sigma B_t)\ ]$ est solution de

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\ ;\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$

Par ailleurs, si $X_0$ est de loi de densité $d_0(x)$ indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$, alors la densité $d_t(x)$ de la v.a. $X_0 + \sigma B_t$ est (encore!) solution de

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\ ;\ \theta(t = 0, x) = d_0(x)$$

On va considérer une classe plus large de processus aléatoires appelés processus de diffusion. Un tel processus est solution d'une **équation différentielle stochastique** (e.d.s.) du type

$$\mathbf{t > 0, \quad dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t}$$

Par exemple, dans le cas $b(x) = v$ et $\sigma(x) = \sigma$ constants, on a

$$X_t = X_0 + vt + \sigma B_t$$

c'est-a-dire un MB avec dérive linéaire!

Dans ce cas particulier, on généralise sans difficulté les résultats obtenus, voir exercices qui suivent.

**Exercice 3.1** $\theta(t, x) = E[\,\theta_0(x + vt + \sigma B_t)\,]$ est solution de

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + v\times\frac{\partial\theta}{\partial x}\ ;\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$

**Exercice 3.2** Lorsque $X_0$ est une v.a. de loi de densité $d_0(x)$ indépendante du processus $(B_t)_{t\geq 0}$, la densité $d_t(x)$ de $X_t = X_0 + vt + \sigma B_t$ est solution de l'EDP

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - v\times\frac{\partial\theta}{\partial x}\ ;\ \theta(t = 0, x) = d_0(x)$$

Cela reste vrai en dimension supérieure…

**Richard Phillips Feynman (1918-1988)** : physicien américain parmi les plus influents au XXème siècle

**Mark Kac (1914-1984) :** mathématicien américain d'origine polonaise spécialiste de théorie des probabilités

On considère un **processus de diffusion** quelconque solution de l'e.d.s.

$$t > 0,\ dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t\ ;\ X_0 = x$$

<u>Attention</u> au fait que le processus $t \to X_t$ démarre du point $x$, donc qu'il dépend de $x$. Pour rappeler cette dépendance, on notera $E_x$ (au lieu de E) lorsque le calcul d'espérance en question est relatif à ce processus.

On pose (!) $$\boxed{\theta(t, x) = e^{ct}\times E_x[\theta_0(X_t)\,] + E_x[\int_0^t e^{cs}\times f_0(t - s, X_s)ds\,]}\ .$$

Alors, θ(t, *x*) est solution de l'EDP suivante (**équation dite de Kolmogorov rétrograde**)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(t, x) - c\theta(t, x) = \frac{\sigma(x)^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, x) + b(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}(t, x) + f_0(t, x)$$

$$\theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$

Si maintenant **$X_0$ est de loi de densité $d_0(x)$ indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$**, alors la **densité $d_t(x)$ du processus de diffusion X** est solution de l'EDP (**équation dite de Fokker-Planck ou Kolmogorov progressive**)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\,\sigma(x)^2\theta(t, x)\,)}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial(\,b(x)\theta(t, x)\,)}{\partial x}(t, x)$$

$$\theta(t = 0, x) = d_0(x)$$

Considérons enfin le cas de l'EDP avec **condition terminale**

$$0 < t < T, \frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) - c\theta(t, x) + \frac{\sigma(x)^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x) + b(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, x) + f_0(t, x) = 0$$

$$\theta(t = T, x) = \theta_T(x)$$

On considère le processus de diffusion solution de l'e.d.s.

$$t > 0,\ dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

L'expression probabiliste de la solution

$$\theta(t, x) = E[e^{-c(T-t)}\times\theta_T(X_T) + \int_t^T e^{-c(s-t)}\times f_0(s, X_s)ds \mid X_t = x]$$

est appelée **formule de Feynman-Kac**.

Considérons le problème classique en physique (***équation de Laplace***)

$$\boldsymbol{\Delta\theta(x) = 0} \textbf{ sur un domaine } \boldsymbol{\Omega \subset \mathbb{R}^n} \textbf{ (}\boldsymbol{\theta}\textbf{ est dite harmonique sur }\boldsymbol{\Omega}\textbf{)}$$

$$\boldsymbol{\theta(x) = \theta_0(x)} \textbf{ pour } \boldsymbol{x \in \partial\Omega} \textbf{ (« bord » de } \boldsymbol{\Omega} \textbf{ supposé régulier)}$$

La fonction $\theta_0$ est supposée <u>continue</u> et connue. On montre que la solution (au sens usuel) existe et est unique. De plus, on a

$$\boldsymbol{\theta(x) = E[\ \theta_0(x + W_{T_x})\ ]}$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien n-dimensionnel standard et

$$T_x = \inf(\ t > 0\ ;\ x + W_t \in \partial\Omega\ )$$

le premier temps d'atteinte de la frontière $\partial\Omega$ du domaine (« hitting time ») du processus $X_t = x + W_t$ !

On rappelle l'EDP de B&S (voir exercice 1.3, slide 4)

$$(0 < t < T, x > 0) \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - rf(t, x) + \frac{(\sigma x)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + rx\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0$$

$$(\text{condition terminale}) \qquad f(T, x) = (x - K)^+$$

On considère le processus de diffusion

$$dS_t = b(S_t)dt + \sigma(S_t)dB_t \text{ avec } b(x) = rx \text{ et } \sigma(x) = \sigma x$$

D'après la formule de Feynman-Kac, la valeur $C_t$ en date t du call est de la forme :

$$C_t = f(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \times E[\,(S_T - K)^+ \mid S_t = x\,] \text{ si } S_t = x$$

Or le cours de calcul stochastique enseigne que la loi de $S_T$ sachant $S_t = x$ est la loi de la v.a.

$$S = x \times \exp\left( \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\, U \right) \quad \text{avec U de loi normale N(0, 1)}$$

La formule de transfert conduit après calcul à la **formule dite de Black & Scholes** (obtenue en 1973 en ramenant directement l'EDP initiale à l'équation de la chaleur par un changement de variables) :

$$\mathbf{C_t = N(d_1) \times S_t - KN(d_2) \times e^{-r(T-t)}} \quad \textbf{où :}$$

1. $S_t$ = prix en date t de l'actif sous-jacent (action)

2. $d_1 = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$ ; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$

3. N(.) la fonction de répartition de la loi N(0, 1)

**Retour sur le 1er objectif du cours :** représentation probabiliste de la solution de certaines EDPs et méthodes Monte-Carlo de résolution

Cela a été vu sur le cas simple de l'équation 1D de la chaleur dans deux situations classiques :

- EDP parabolique (évolution dans le temps à partir d'une condition initiale) avec conditions aux bords de type Dirichlet pour le cas d'une barre « finie »
- EDP elliptique (équation stationnaire) dans le cas d'une barre finie ($\Rightarrow$ théorème de la ruine du joueur)

Mise en œuvre de la méthode Monte-Carlo de deux manières différentes :

- En un point particulier (t, $x$) du domaine via une représentation de type Kolmogorov rétrograde ($\Rightarrow$ souplesse de la méthode) (TP 1 et 3)
- Globalement sur une région $\{t \leq T, x\}$ via une représentation de type Kolmogorov progressive (ou Fokker-Planck) ($\Rightarrow$ méthode particulaire…) (TP 2 et TP 3 facultatif)

**Retour sur le 2ème objectif du cours :** faire du lien entre les différents cours (Monte-Carlo, Calcul Sto. et Info)

L'extension des résultats précédents à des EDPs linéaires du second ordre de type parabolique ou elliptique quelconques a été possible grâce au calcul stochastique qui a permis de considérer des courbes aléatoires caractéristiques qui ont la propriété de martingale!

## Lien « intime » entre EDPs et Probabilités :

**(correspondance)** EDPs paraboliques/elliptiques $\leftrightarrow$ Processus de diffusion

**Lien « intime »** car on a vu la cohérence entre une vision macroscopique et une vision microscopique d'une équation de diffusion d'une population de particules

$\Rightarrow$ la nature (« physique ») suggère des méthodes de type Monte-Carlo pour des équations de diffusion quelconques

## Pour aller plus loin :

- **Dimension 2, 3, 4 et grande dimension, domaine compliqué et conditions aux bords quelconques**
- **Aspects théoriques : processus de diffusion, processus de Markov, e.d.s.**
- **Equations non linéaires, EDPs hyperboliques…**

1. B. Lapeyre, Etienne Pardoux, Rémi Sentis, *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, SMAI, Springer, 1998

2. Jean-Pierre Fouque, *Relations entre probabilités et équations aux dérivées partielles*, Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences Fondamentales

3. G. Debeaumarché, *Introduction aux équations aux dérivées partielles*, Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences Fondamentales

4. Bertrand Duplantier, Le mouvement brownien, divers et ondoyant, Séminaire Poincaré, 1 (2005), 155-212 - www.bourbaphy.fr/avril2005.html

5. A. Einstein, *Investigations on the theory of the Brownian Movement,* Dover Publications, 1905 - http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gold/pdfs/teaching/einstein_brownian05.pdf

6. Jean Perrin et le mouvement brownien, Gérard Rumebe, UPMC (2001) http://www.canal-u.tv/video/science_en_cours/jean_perrin_et_le_mouvement_brownien_2001.8

Reprenons le cas de l'équation de la chaleur. Soit $\theta$ vérifiant

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \text{ et } \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) \text{ (CI)}$$

Pour t dans [0, T], on a d'après la formule d'Itô

$$d(\ \theta(T - t, x + \sigma B_t)\ ) = -\frac{\partial \theta}{\partial t}dt + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial x} dB_t + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dt = \sigma \frac{\partial \theta}{\partial x} dB_t$$

ce qui prouve que le processus $t \to M_t = \theta(T - t, x + \sigma B_t)$ est une martingale.

En particulier, $E(M_0) = E(M_T)$, i.e. $\theta(T, x) = E[\theta(0, x + \sigma B_T)]$, et en tenant compte de la CI, on obtient :

$$\theta(T, x) = E[\ \theta_0(x + \sigma B_T)\ ]$$