Problemas capítulo 2

2.1 Una señal discreta $x(n)$ se define como

$$\begin{cases} 1+\dfrac{n}{2}, & -3 \le n \le -1 \\ 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$

(a) Determine sus valores y dibuje $x(n)$

(b) Dibuje las señales que resultan si:

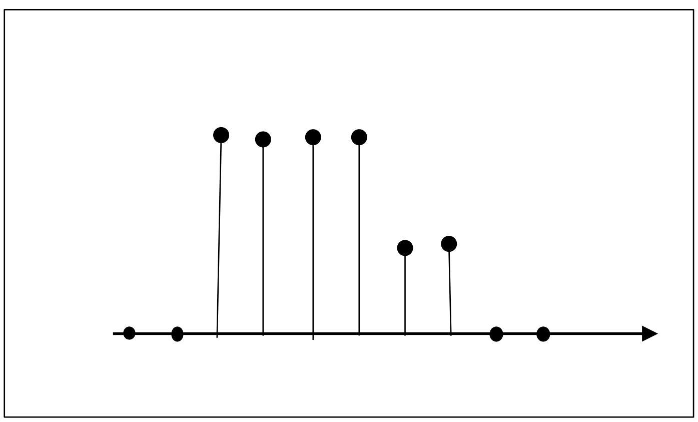
- **(a)** Primero reflejamos $x(n)$ y después desplazamos la señal tres muestras.
- **(b)** Primero desplazamos $x(n)$ tres muestras y después reflejamos la señal resultante

(c) Dibuje la señal discreta $x(-n+3)$

(d) Compare los resultados de los apartados (b) y (c) y deduzca una regla para obtener $x(-n+k)$ de $x(n)$

(e) ¿Puede expresar $x(n)$ en términos de $\delta(n)$ y $u(n)$?

2.2 La figura que sigue muestra una señal discreta $x(n)$. Dibuje cada una de las señales indicadas.



(a) $x(n-3)$, **(b)** $x(3-n)$ **, (c)** $x(n+3)$ **, d)** $x(n)\,u(-n+3)$,

(e) $x(n-2)$, **(f)** $x(n^2)$ **,** **(g)** la parte par de $x(n)$,

(h) la parte impar de $x(n)$.

2.3 Demuestre que

(a) $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

(b) $u(n) = \sum_{k=-1}^{n} \delta(k) = \sum_{k=-1}^{\infty} \delta(n-k) =$

2.4 Demuestra que cualquier señal ser descompuesta en una parte par y una impar ¿Es esta descomposición única? Ilustre sus resultados con la señal

$$x(n) = \left\{0,1,2,3,\underset{\uparrow}{4},5,6,7,8\right\}$$

2.5 Demuestre que la energía (potencial) de una señal real es igual a la suma de las energías (potencial) de sus partes par e impar.

2.6 Considere el sistema

$$y(n) = \mathcal{T}|x(n)| = nx(n)$$

(a) Determine si es invariante en el tiempo.

(b) Para ilustrar el resultado del apartado (a) considere que la señal

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & en\, el\, resto \end{cases}$$

Es aplicada al sistema

(1) Dibuje la señal $x(n)$.
(2) Determine y dibuje la señal $y(n) = \mathcal{T}|x(n)|$.
(3) Dibuje la señal $y_2{}'(n) = y(n-1)$.
(4) Determine y dibuje la señal $x_2(n) = (n-3)$.
(5) Determine y dibuje la señal $y_2(n) = \mathcal{T}|x_2(n)|$.
(6) Compare las señales $y_2(n)$ e $y(n-1)$.

(c) Repita el apartado (b) para el sistema $y(n) = x(n) - x(n-2)$

¿Puede usar este resultado para sacar alguna conclusión sobre la invarianza en el tiempo del sistema? ¿Por qué?

(d) Repita los apartado (b) y (c) para el sistema

$$y(n) = \mathcal{T}|x(n)| = nx(n)$$

2.7 Un sistema discreto puede ser

(1) Lineal o no lineal.
(2) Estático o dinámico.
(3) invariante o variante en el tiempo.
(4) Causal o no causal.
(5) Estable o no estable.

Estudie las propiedades anteriores en los siguientes sistemas.

(a) $y(n) = sen[x(n)]$.
(b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$.
(c) $y(n) = x(n)cos(\omega_0 n)$.
(d) $y(n) = x(-n+3)$.
(e) $y(n) = Trun[x(n)]$, donde $Trun[x(n)]$ denota la parte entera de $x(n)$, obtenida por truncamiento.

(f) $y(n) = Round[x(n)]$, donde $Round[x(n)]$ denota la parte entera de $x(n)$, obtenida por redondeo.

Nota: Los Sistemas de los apartados (e) y (f) son cuantificadores que realizan truncamiento y redondeo respectivamente.

(g) $y(n) = |x(n)|$

(h) $y(n) = x(n)u(n)$

(i) $y(n) = x(n) + nx(n+2)$

(j) $y(n) = x(3n)$

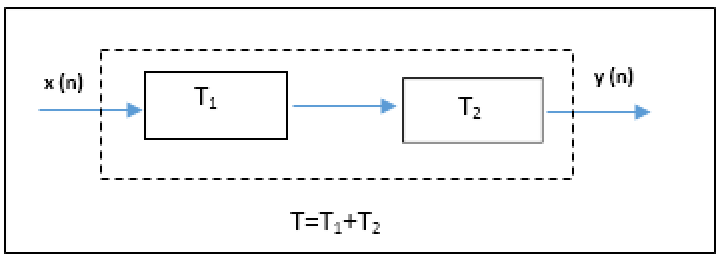
(k) $y(n) = \begin{cases} x(n), & si \;\; x(n) \geq 0 \\ 0, & si \;\; x(n) < 0 \end{cases}$

(l) $y(n) = x(-n)$

(m) $y(n) = sing|x(n)|$

(n) El sistema de muestreo ideal con entrada $x_a(t)$ y salida $x(n) = x_a(nT)$, $-\infty < n < \infty$

2.8 Dos sistemas discretos $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ se conectan en serie para formar un nuevo sistema $\mathcal{T}$, como se muestra en la Figura2. Demuestre si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.



(a) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son lineales, entonces $\mathcal{T}$ es lineal (es decir, la conexión en serie de dos sistemas lineales es lineal).

(b) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son invariantes en el tiempo, entonces $\mathcal{T}$ es invariante en el tiempo.

(c) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son causales, entonces $\mathcal{T}$ causal.

(d) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son lineales e invariantes en el tiempo, entonces también lo es $\mathcal{T}$.

(e) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son lineales e invariantes en el tiempo, entonces si se intercambia su orden, el sistema global $\mathcal{T}$ no cambia.

(f) Como en el apartado (e) excepto que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son ahora variantes en el tiempo. (*Pista*: Use un ejemplo)

(g) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son no lineales, entonces $\mathcal{T}$ es no lineal

(h) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son estables, entonces $\mathcal{T}$ es estable.

(i) Demuestre mediante un ejemplo que lo contrario de lo enunciados en los apartados (c) y (h) no es cierto en general.

2.9 Sea $\mathcal{T}$ un sistema LTI, estable, BIBO en reposo con entrada $x(n)$ y salida $y(n)$. Demuestre que:

(a) Si $x(n)$ es periódica en el periodo N [i.e., $x(n) = \mathrm{x(n+N) para\ todo\ n \geq 0}$], la salida $y(n)$ tiende a una señal periódica con el mismo periodo.

(b) Si $x(n)$ es acotada y tiende a una constante, la salida tiende también a una constante.

(c) Si $x(n)$ es una señal de energía la salida $y(n)$ será también una señal de energía.

2.10 Para un sistema invariante en el tiempo se han observado las siguientes parejas de entrada-salida:

$$x_1(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 0, 3\right\} \quad \overset{T}{\longleftrightarrow} \quad y_1(n) = \left\{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2\right\}$$
$$x_2(n) = \left\{\underset{\uparrow}{0}, 0, 2\right\} \quad \overset{T}{\longleftrightarrow} \quad y_2(n) = \left\{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 0\right\}$$
$$x_3(n) = \left\{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 1\right\} \quad \overset{T}{\longleftrightarrow} \quad y_3(n) = \left\{2, \underset{\uparrow}{3}, 2\right\}$$

¿Puede extraer alguna conclusión acerca de la linealidad del sistema? ¿Cuál es la respuesta impulsional del sistema?

2.11 Para un sistema lineal se han observados las siguientes parejas de entrada y salida

$$x_1(n) = \left\{-1, \underset{\uparrow}{2}, 0, 3\right\} \quad \overset{T}{\longleftrightarrow} \quad y_1(n) = \left\{1, \underset{\uparrow}{2}, -1, 2, 0\right\}$$
$$x_2(n) = \left\{1, \underset{\uparrow}{-1}, , 2\right\} \quad \overset{T}{\longleftrightarrow} \quad y_2(n) = \left\{-1, \underset{\uparrow}{1}, 2, 0\right\}$$
$$x_3(n) = \left\{1, \underset{\uparrow}{0}, 1\right\} \quad \overset{T}{\longleftrightarrow} \quad y_3(n) = \left\{\underset{\uparrow}{3}, 1, 2\right\}$$

2.12la única información disponible sobre un sistema consiste en N parejas de entrada- salida de señales $y_i(n) = \mathcal{T}|x_i(n)|, i = 1, 2, \ldots, N$

(a) si se sabe que el sistema es lineal, usando la información dada. ¿Para qué clase de señales de entrada es posible determinar la salida?

(b) ¿Y si se sabe que el sistema es invariante en el tiempo?

2.13 Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que un sistema LTI en reposo sea estable BIBO es

$$\sum_{\boldsymbol{n}=-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{n})| \leq \boldsymbol{M_h} < \infty$$

Para cualquier constante $\boldsymbol{M_n}$

2.14 Demuestra que:

(a) un sistema lineal en reposo es causal si y solo si para cualquier entrada $x(n)$ si

$$x(n) = 0 \;\; para\; n < n_0 \Longrightarrow \; y(n) = 0\; para\; n < n_0$$

(b)

Un sistema LTI en reposo es causal si y sólo si

$$h(n) = 0 \;\; para\; n < 0$$

2.15(a) Demuestre que para cualquier constante a, real o compleja, y cualesquiera números My N, tenemos

$$\sum_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{a^n} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{a^M} - \boldsymbol{a^{N+1}}}{\boldsymbol{1} - \boldsymbol{a}} & \\ \boldsymbol{N} - \boldsymbol{M} + \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{si\; a \neq 1} \end{cases} \quad , \boldsymbol{si\; a \neq 1},$$

(b) Demuestre que si $|\boldsymbol{a}| < \boldsymbol{1}$**,** entonces

$$\sum_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{a^n} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1} - \boldsymbol{a}}$$

2.16 Si $y(n) = x(n) * h(n)$, demuestre que $\sum y = \sum x \sum h$, donde $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$.

b)Calcule la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$, de las siguientes señales y compruebe los resultados usando el solucionario.

(1) $x(n) = \{\, 0,1,2\}$, $h(n) = \{1,1,1,1\}$

(2) $x(n) = \{\, 1,4,1\}$, $h(n) = x(n)$

(3) $x(n) = \{\, 0,1,3,-2,4\}$, $h(n) = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

(4) $x(n) = \{\, 0,1,-2,4,3,-5\}$, $h(n) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(5) $x(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 0, 2\right\}$, $h(n) = \left\{\underset{\uparrow}{0}, 1,1,1,1,0\right\}$

(6) $x(n) = \left\{\underset{\uparrow}{0}, 1,1,1,1,0\right\}$, $h(n) = \left\{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\right\}$

(7) $x(n) = \left\{\underset{\uparrow}{2}, 3,1,0\right\}, h(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1,1\right\}$

(8) $x(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, -1, 2\right\}$, $h(n) = u(n)$

(9) $x(n) = \left\{-1, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1,1\right\}$, $h(n) = \left\{1, \underset{\uparrow}{2}, -3, -4\right\}$

(10) $x(n) = \left\{-2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1,2\right\}$, $h(n) = x(n)$

(11) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $h(n) = x(n)\left(\frac{1}{16}\right)^n u(n)$

2.18 Determine y dibuje la convolución $y(n)$ de las señales.

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} n, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$

$$H(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} n, & -4 \le n \le 4 \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$