EJERCICIOS CAPÍTULO 3

3.1 Determine la transformada z de las siguientes señales:

(a) $x(n) = \{3, 0, \underset{\uparrow}{0}, 0, 6, 1, -4\}$

(b) $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^n, n \geq 3 \\ 0, n \leq 2 \end{cases}$

3.2 Determine la transformada Z de las siguentes señales y bosqueje los patrones correspondientes a los polos y ceros.

(a) $x(n) = (2+n)u(n)$

(b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n+1)$

(c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n+1)$

(d) $x(n) = (na^n \sin 2\omega_0 n)u(n+1)$

(e) $x(n) = (na^n \cos 2\omega_0 n)u(n+1)$

(f) $x(n) = Ar^n \cos(2\omega_0 n + \phi)u(n+2), 0 < r < 1$

(g) $x(n) = \frac{1}{3}(n^2+n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-2)$

(h) $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n [u(n) - u(n-5)]$

3.3 Determine la transformada Z y boqueje la ROC (o región de convergencia) de las siguientes señales.

(a) $x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-n}, n < 0 \end{cases}$

(b) $x_2(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$

(c) $x_3(n) = x_1(n+3)$

(d) $x_4(n) = x_1(-n+1)$

3.4 Determine la trasnsformada z de las siguientes señales.

(a) $x(n) = n(-2)^n u(n)$

(b) $x(n) = n^n u(n+1)$

(c) $x(n) = -na^n u(-n-2)$

(d) $x(n) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) u(n+1)$

(e) $x(n) = (-1)^n u(n-1)$

(f) $x(n) = \left\{1, 0, -1, 0, \underset{\uparrow}{1}, -1, \ldots\right\}$

3.5 Determine la región de converge de lado derecho , lado izquierdo y la duración finita de secuencias de dos lados.

3.6 Exprese la transformada z de

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

En términos de X(z).[Hint: encuentra la diferencia y(n)-y(n-1).]

3.7 Calcule la convolución de las siguientes señales por medio de la transformada Z.

(a) $$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, n < 0 \end{cases}$$

(b) $$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

3.8 Use la propiedad de la convolución para.

a) Expresar la transformada z de

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

En terminos de X(z).

b) Determine la trasnformada z de x(n)=n(n+2)u(n).[Hint: demuestre primero que x(n)=u(n)*u(*n)]

3.9 La transformada z X(z) de una señal real x(n) incluye un par de ceros complejos conjugados y un par de polos complejos conjugados. ¿Qué sucede a estos pares si multiplicamos x(n) por $e^{j\omega 0n}$?[Hint: Utilice el teorema de escala en el dominio Z].

3.10 Aplique el teorema del valor final para determinar $x(\infty)$para la señal

$$x(n) = \begin{cases} 1, si-n-es-par \\ 0, en-otro-caso \end{cases}$$

3.11 Usando la division larga, determine la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

Si **(a)** es causal y **(b)** x(n) es anticausal

3.12 Determine la señal causal x(n) teniendo la transformada de

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})2}$$

3.13 Sea x(n) una secuancia con transformada z X(z). Determine, en terminos de X(z), la transformada z de las siguientes señales.

(a) $x_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{4}\right), si-n-es-par \\ 0, si-n-es-impar \end{cases}$

(b) $x_1(n) = x(3n)$

3.14 Determine la señal causal x(n) si su transformada z X(z) está dada por:

(a) $$X(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$$

(b) $$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

(c) $$X(z)=\frac{z^{-6}+z^{-7}}{1-z^{-1}}$$

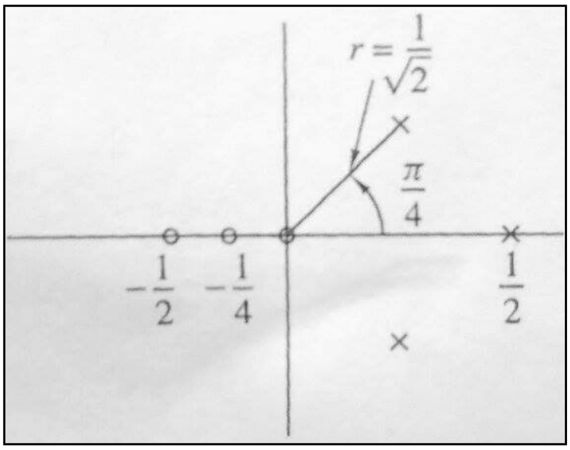
(d) $$X(z)=\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-2}}$$

(e) $$X(z)=\frac{1}{4}\frac{1+6z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)}$$

(f) $$X(z)=\frac{2-1.5z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

(g) $$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}$$

(h) X(z) se especifica por el patrón de polos y ceros de la figura 14. La constante G=1/2



(i) $$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

(j) $$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}$$

3.15 Determine todas las posibles señales x(n) asociados a la transformada z.

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(3 - z^{-1}\right)}$$

3.16 Determine la convolución de los pares de señales por medio de la transformada z.

(a) $$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2), x_2(n) = \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$

(b) $$x_1(n) = u(n-1), x_2(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n (n+1)$$

(c) $$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n+1), x_2(n) = \cos 2\pi n u(n)$$

(d) $$x_1(n) = 2nu(n), x_2(n) = 2^n u(n-2)$$

3.17 Asumiendo señales de lado derecho, encontrar los valores final e inicial sin utilizar la transformada inversa.

(a) $$X(z) = \frac{3}{z^2 + \frac{1}{5}z - \frac{1}{5}}$$

(b) $$Y(z) = \frac{4z^2}{z^2 + z + 0.5}$$

(c) $$Y(z) = \frac{3z^2 + 0.125}{(z-2)(z+0.125)}$$

[**Sugerencias:** para encontrar los valores iniciales , prepara cada transformada como la relación de polinomios en z^{-1} . El valor final es diferente de cero si solo hay un polo en z=1 y todos los otros polos están dentro del circulo]

3.18 Encontrar la función de transferencia y la ecuación diferencial para los siguientes sistemas causales. Investiga sus estabilidad, usando la representación de cada sistema.

(a) $$h[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(b) $$h[n] = \delta[n] - n\left(\frac{1}{6}\right)^n u[n]$$

(c) $$h[n] = 0.25\delta[n]$$

(d) $$h[n] = \left[(2)^n - (3)^n\right]u[n]$$

[**Sugerencias:** para encontrar la ecuación diferencial prepara H(z) como una relación polinomial en z^{-1} equipara con Y(z)/X(z), haz una multiplicación cruzada y encuentra la transformada inversa].

3.19 Encontrar la repuesta estado-cero de los siguientes sistemas, usando la transformada-z.

(a) $$y[n] - 0.45y[n-1] = (0.4)^n u[n]$$

(b) $$y[n] - 0.5y[n-1] = (0.5)^n u[n]$$

(c) $$y[n] - 0.6y[n-1] = \cos(n\pi/2)$$

[**Sugerencias:** usar la transformada-Z para obtener Y(z) asumiendo las condiciones iniciales cero. Después encuentra la inversa].

3.20 Considera el sistema y[n]-0.5[n-1]=x[n], con y[-1]=-1.
Encuentra la respuesta y[n] de este sistema para los siguientes entradas, usando la transformada-Z.

$$x[n]=(0.125)^n u[n] \qquad \textbf{(a)}$$

$$x[n]=(j)^n u[n-1] \qquad \textbf{(b)}$$

$$x[n]=\cos\left(n\pi/2\right)u[n-1] \qquad \textbf{(c)}$$

$$x[n]=(0.25)^n \cos(0.5n\pi) \qquad \textbf{(d)}$$

[**Sugerencias:** en la parte (b), y[n] será compleja porque la señal de entrada es compleja. En la parte (d) usando $e^{j\pi/2}$ y la relación de Euler, x[n] se simplifica a una sinusoidal. Por lo tanto. La respuesta $y_F[n]$ con y[-1]=0 .

3.21 Sea y[n]-0.4y[n-1]=x[n], con y[-1]=-1. Encuentra la respuesta y[n] de este sistema para las siguientes señales de entrada, usando la transformada -Z.

(a) $x[n]=(0.25)^n u[n]$

(b) $x[n]=n(0.125)^n$

(c) $x[n]=n(0.5)^n u[n]$

(d) $x[n]=(0.4)^n \cos(0.5n\pi)$

3.22

(a) Encuentre a respuesta al sistema y[n] usando la transformada-Z.

(1) $y[n]+0.15y[n-1]-0.3y[n-2]=3u[n]$

(2) $y[n]-0.8y[n-1]+0.2y[n-2]=(0.25)^n$

(3) $y[n]-0.2y[n-2]=(0.5)^n$

(4) $y[n]-0.3y[n-2]=(0.6)^n$

(b)

(1) $y[n]-0.45y[n-2]=2x[n]+x[n-1]$ $x[n]=(0.25)^n u[n]--y[-1]=5$

(2) $y[n]-0.6y[n-2]=x[n]-x[n-1]$ $x[n]=(0.25)^n u[n]--y[-1]=2$

(3) $y[n]-0.6y[n-2]=x[n]+x[n-1]$ $x[n]=(-0.25)^n u[n]--y[-1]=0$

(c)

(1) $y[n]-0.4y[n-2]=2(0.25)^{n-1}+u[n-1]$ $y[-1]=2$

(2) $y[n]-0.4y[n-2]=(0.5)^n u[n]+2(0.25)^{n-1}u[n-1]$ $y[-1]=2.5$

(3) $y[n]-0.4y[n-2]=n(0.25)^n u[n]+2(0.4)^{n-1}u[n-1]$ $y[-1]=2.5$

3.23 La función de transferencia de un sistema es H(z).

$$H(z)=\frac{z(z-1)}{3+3z+z^2}$$

Encuentre su respuesta y[n] de la siguientes entradas.

(a) $x[n]=\delta[n]$

(b) $x[n]=(-2)^n u[n]$

(c) $x[n]=3\delta[n]+\delta[n+1]$

(d) $x[n]=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)u[n]$

3.24 El filtro $H(z)=A\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{4}\alpha}$

(a) Está diseñado para respuesta de estado estacionario de la unidad, si la señal de entrada es u[n] y una respuesta de estado estacionario de cero si la entrada es cos(nπ). ¿Cuáles son lo valores de A y α?

(b) Está diseñado para respuesta de estado estacionario cero, si la señal de entrada es u[n] y una respuesta de estado estacionario de la unidad si la entrada es cos(nπ). ¿Cuáles son lo valores de A y α?

3.25 Encuentra la respuesta de los siguientes filtros para el escalón unitario x[n]=u[n] y para un escalón unitario alterno x[n]=(-1)^{n}u[n]

(a) $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$

(b) $h[n] = \left\{ \overset{\Downarrow}{0.5}, 0.5 \right\}$

(c) $h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\delta[n-k]$

(d) $h[n] = \frac{1}{N(N+1)}\sum_{k=0}^{N-1}(N-k)\delta[n-k]$

(e) $y[n] = \alpha y[n-1] = (1-\alpha)x[n] \quad \alpha = \frac{N-1}{N+1}, N = 3$

3.26 Considere el filtro

$$y[n] = 0.4x[n] + x[n-1] + 0.3x[n-2]$$

(a) $x[n] = \left\{ 2, 4, \overset{\Downarrow}{6}, 8 \right\}$

(b) $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

(c) $x[n] = \cos\left(\frac{2n\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{3n\pi}{6}\right)$

3.27 Considere un sistema de el cual su respuesta al impulso es h[n]=n(0.5)^{n}u[n].
¿Cuál señal de entrada x[n] en cada uno de las siguientes señales de salida en estado estacionario?

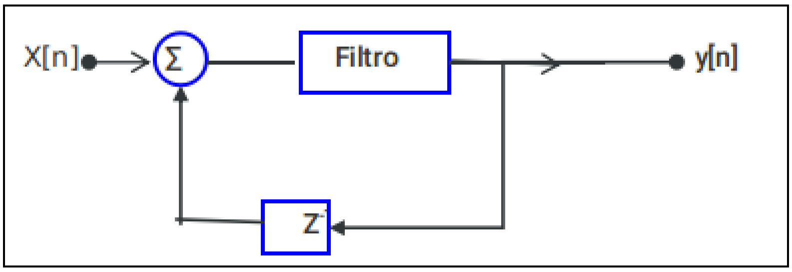
(a) $y[n] = \cos\left(\frac{2n\pi}{4}\right)$

(b) $y[n] = 4 + \cos\left(\frac{2n\pi}{4}\right)$

(c) $y[n] = \cos^2\left(\frac{2n\pi}{4}\right)$

3.28 Considera la realización del filtro de la siguiente figura. Encuentra la función de transferencia H(z) del total de sistemas si la respuesta al impulso del filtro está dada por

(a) h[n]=δ[n]-δ[n-2] (b)h[n]=0.4δ[n]+0.4δ[n+1]



EJEMPLOS CON RESPUESTAS.

3.1

(a)

$$X(z)=\sum x(n)z^{-n}$$
$$=3z^{5}+6+z^{-1}-4z^{-2}$$
$$ROC:0<|z|<\infty$$

(b)

$$X(z)=\sum x(n)z^{-n}=\sum_{n} x(n)z^{-n}$$
$$=\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}=\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}=\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{m+5}$$
$$=\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^{5}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\left(\frac{1}{32}\right)\frac{z^{-5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$
$$ROC:|z|>\frac{1}{2}$$

3.2

(a)

$$X(z)=\sum x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}$$

$$Pero\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}ROC:|z|>1$$

$$y\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}=\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}ROC:|z|>1$$

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}+\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}$$

(b)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a^{n}+a^{-n}\right)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n}z^{-n}$$

$$Pero\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}ROC:|z|>|a|$$

$$y\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n}z^{-n}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{a}z^{-1}\right)^{2}}ROC:|z|>\left|\frac{1}{a}\right|$$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$$

$$=\frac{2-\left(a-\frac{1}{a}\right)z^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{a}z^{-1}\right)}ROC:|z|>maz\left(|a|,\frac{1}{|a|}\right)$$

(c)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}},|z|>\frac{1}{2}$$

(d)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na\sin\omega_{0}nz^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}na^{n}\left[\frac{e^{j\omega_{0}n}-e^{-j\omega_{0}n}}{2j}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{ae^{j\omega_{0}n}z^{-1}}{\left(1-ae^{j\omega_{0}n}z^{-1}\right)^{2}}-\frac{ae^{-j\omega_{0}n}z^{-1}}{\left(1-ae^{-j\omega_{0}n}z^{-1}\right)^{2}}\right]$$

$$=\frac{\left[az^{-1}-\left(az^{-1}\right)^{3}\right]\sin\omega_{0}n}{\left(1-2a\cos\omega_{0}z^{-1}+a^{2}z^{-2}\right)^{2}},|z|>a$$

(e)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} na\cos\omega_0 nz^{-n} =\sum_{n=0}^{\infty} na^n\left[\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{ae^{j\omega_0 n}z^{-1}}{\left(1-ae^{j\omega_0 n}z^{-1}\right)^2}+\frac{ae^{-j\omega_0 n}z^{-1}}{\left(1-ae^{-j\omega_0 n}z^{-1}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{\left[az^{-1}+\left(az^{-1}\right)^3\right]\sin\omega_0 n-2a^2z^{-2}}{\left(1-2a\cos\omega_0 z^{-1}+a^2z^{-2}\right)^2},|z|>a$$

(f)

$$X(z)=A\sum_{n-0}^{\infty} r^n\cos\left(n\omega_0+\phi\right)z^{-n} =A\sum_{n-0}^{\infty} r^n\left[\frac{e^{j\omega_0 n}e^{j\phi}+e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi}}{2}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{A}{2}\left[\frac{e^{j\phi}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{e^{-j\phi}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]=A\left[\frac{\cos\phi-r\cos\left(\omega_0-\phi\right)z^{-1}}{\left(1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}\right)^2}\right],|z|>r$$

(g)

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(n^2+n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}z^{-n}$$

$$Pero\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}z^{-n}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}=\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$$

$$\sum_{n-1}^{\infty} n^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}z^{-n}=\frac{z^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^3}$$

$$X(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}+\frac{z^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^3}\right]=\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^3},|z|>\frac{1}{3}$$

(h)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n}-\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},|z|>\frac{1}{2}$$

Los patrones de polos y ceros son como siguen:

(a)Polo doble en z=1 y el cero en z=0.

(b)Polos en z=a y z=1/a, los Ceros en z=0 y z=1/2(a+1/a)

(c)El polo en z=-1/2 y zero en z=0

(d)Polos dobles en $z=ae^{jwo}$ y $z=ae^{-jwo}$ y Ceros en z=0, z=±a

(e)Polos dobles en $z=ae^{jwo}$ y los Ceros son obtenidos resolviendo la ecuación cuadrática: $a\cos\omega_0 z^2-2a^2z+a^3\cos\omega_0=0$

(f)Los polos en $z=re^{jwo}$ y $z=ae^{-jwo}$ y Ceros en z=1/3. Por lo tanto hay se cancela un cero-polo que en realidad hay solo un polo doble de orden 9 en z=0. Para nueve ceros donde de los cuales encontramos raíces de

$$1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}=0$$

$$o-equivalentemente,\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-z^{10}=0$$

Por lo tanto

$$z_n=\frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi n}{10}},n=1,2,\ldots,k.$$

Notar que el Cero-Polo se cancela z=1/2.

3.3

(a)

$$X_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n}-1$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} z^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}-1$$

$$=\frac{\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$$

La ROC es 1/3<|z|<2

(b)

$$X_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{-\frac{5}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

La ROC es |z|>2

(c)

$$X_3(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n+4)z^{-n}=z^4X_1(z)$$

$$=\frac{\frac{5}{6}z^4}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$$

La ROC es 1/3<|z|<2

(d)

$$X_4(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(-n)z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)z^{m}$$

$$=X_1\left(z^{-1}\right)=\frac{\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

3.4

(a)

$$X_4(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(-n)z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)z^{m}$$

$$=X_1\left(z^{-1}\right)=\frac{\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

(b)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n} = z^2 \frac{d^2}{dz^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z^2 \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right]$$

$$= -\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} + \frac{2z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^3} = \frac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3}, |z|>1$$

(c)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} -na^n z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} a(n) z^{-n}$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}\right] = \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}, |z|<|a|$$

(d)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) z^{-n} = \frac{1+z^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1+2z^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+z^{-2}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}}, ROC: |z|>1$$

(e)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$$

(f)

$$x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},0,-1,0,1,-1\right\}$$

$$X(z)=1-z^{-2}+z^{-4}-z^{-5}, z\neq 0$$

3.5

Secuencia de lado derecho:

$$x_r(n)=0, n<n_0$$

$$X_r(z)=\sum_{n=n_0}^{-1} x_r(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x_r(n) z^{-n}$$

El termino $\sum_{n=n_0}^{-1} x_r(n) z^{-n}$ converge para todas las z excepto en z=∞

El termino $\sum_{n=0}^{\infty} x_r(n)z^{-n}$ converge para todas $|z|>r_0$, Por lo tanto $X_r(z)$ converge para $r_0<|z|<\infty$ cuando $n_0<0$ y $|z|>r_0$ para $n_0>0$

La secuencia para el lado izquierdo:

$$x_l(n) = 0, n < n_0$$

$$X_l(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} x_l(n)z^{-n} + \sum_{n=1}^{n_0} x_l(n)z^{-n}$$

El primer termino converge para algunas $|z|<r_l$ .el segundo termino converge para todas las z, excepto en z=0.

Por lo tanto $X_l(z)$converge para $0<|z|<r_l$cuando $n_0>0$ y para $|z|<r_l$ cuando $n_0<0$

La duración finita para secuencias en ambos lados:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_0} x(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=n1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{n_0} x(n)z^{-n}$$

El primer termino converge en cuanquier punto excepto en $z=\infty$

El segundo termino converge en cualquier punto excepto para z=0.

Por lo tanto X(z) converge para $o<|z|<\infty$

3.6

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

$$\Rightarrow y(n) - y(n-1) = x(n)$$

$$por - lo - tanto, Y(z)z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

3.7

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, n < 0 \end{cases}$$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} - 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$Asi, Y(z) = \frac{-2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{-4}{3}}{1-2z^{-1}}$$

$$Asi, y(n) = \begin{cases} -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0 \\ \frac{4}{3}(2)^n, n < 0 \end{cases}$$

3.8

(a)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)u(n-k) = x(n) * u(n)$$

$$Y(z) = X(z)U(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

3.9

$y(n) = x(n)e^{jw_0 n}$ Del teorema deescalamiento , tenemos que

$$Y(z) = x(e^{jw_0}z)$$

Por lo tanto , los polos y ceros tienen la fase rotada con un angulo ω_0

3.10

$$x(n) = \frac{1}{2}\left[u(n) + (-1)^n u(n)\right]$$

$$X^+(z) = \frac{\left(\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+z^{-1}}\right)}{2}$$

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1}(z+1)X^+(z) = \lim_{z\to 1}\left(z + \frac{z(z-1)}{z+1}\right) = \frac{1}{2}$$

3.11

(a)

$$x(n) = \frac{1+2z^4}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = \{\underset{\uparrow}{1}, 4, 7, 10, \ldots, 3n+1, \ldots\}$$

(b)

$$X(z) = 2z + 5z^2 + \rightarrow 8z^3 + \ldots$$

$$Por - lo - \text{tanto}, x(n) = \left\{\ldots, -(3n+1), \ldots, 11, 8, 5, 2, \underset{\uparrow}{0}\right\}$$

3.12

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^2} = \frac{A}{\left(1-2z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1-z^{-1}\right)} + \frac{Cz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$A = 4, B = -3, C = -1$$

$$Por - lo - \text{tanto}, x(n) = \left[4(2)^n - 3 - n\right]u(n)$$

3.13

(a)

$$x_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), n - par \\ 0, n - impar \end{cases}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\frac{n}{2})z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-2k} = X(z^2)$$

(b)

$$x_1(n) = x(2n)$$

$$X2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-\frac{k}{2}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{x(k) + (-1)^k x(k)}{2}\right] z^{-\frac{k}{2}}, k - par$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)^{-k} - = \frac{1}{2}\left[X\left(\sqrt{z}\right) + X\left(-\sqrt{z}\right)\right]$$

3.14

(a)

$$X(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{A}{\left(1+z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1+2z^{-1}\right)}$$

$$A = 2, B = -1$$

$$Por - lo - \text{tanto}, x(n) = \left[2(-1)^n - (-2)^n\right]u(n)$$

(b)

$$X(z)=\frac{1}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{A\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)+B\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$A=1, B=1$

$Por-lo-\text{tanto},$

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)z^{-1}}{1-2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)z^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}z^{-2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)z^{-1}}{1-2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)z^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}z^{-2}}$$

$$Asi, x(n)=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\cos\frac{\pi}{4}n+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\sin\frac{\pi}{4}n\right]u(n)$$

(c)

$$X(z)=\frac{z^{-6}}{1+z^{-1}}+\frac{z^{-7}}{1+z^{-1}}$$

$$x(n)=u(n-6)+u(n-7)$$

(d)

$$X(z)=\frac{1}{1+z^{-2}}+2\frac{z^{-2}}{1+z^{-2}}=2-\frac{1}{1+z^{-2}}$$

$$x(n)=\cos\frac{\pi}{2}nu(n)+2\cos\frac{\pi}{2}(n-2)u(n-2)$$

$$x(n)=2\delta(n)-\cos\frac{\pi}{2}nu(n)$$

$$X(z)=\frac{1}{4}\frac{1+6z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{A\left(1-z^{-1}\right)}{1-2z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{Bz^{-1}}{1-2z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{C}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

(e)

$$A=-\frac{3}{5}, B=\frac{23}{10}, C=\frac{17}{20}$$

$Por-lo-\text{tanto}$

$$x(n)=\left[-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\cos\frac{\pi}{4}n+\frac{23}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\sin\frac{\pi}{4}n+\frac{17}{20}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\right]u(n)$$

(f)

$$X(z)=\frac{2-1.5z^{-1}}{\left(1-1.5z^{-1}+1.5z^{-2}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$x(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+1\right]u(n)$$

(g)

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}=1-\left(\frac{2z^{-1}+3z^{-2}}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}\right)=1-\frac{2z^{-1}}{1+2z^{-1}}+\frac{z^{-2}}{\left(1+2z^{-1}\right)^{2}}$$

$$x(n)=\delta(n)-2(-2)^{n-1}u(n-1)+(n+1)(-2)^{n-1}u(n-1)=\delta(n)-2(-2)^{n-1}u(n-1)$$

(h)

$$X(z)=\frac{1}{4}\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}\right)\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)}=\frac{1}{4}\frac{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}\right)z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{A\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}+\frac{B\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}+\frac{Cz^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$A=-\frac{1}{2},B=\frac{7}{8},C=\frac{3}{4}$$

$Por-lo-tanto$

$$x(n)=\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{\pi}{4}(n-1)+\frac{7}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{4}(n-1)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u(n-1)$$

(i)

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{4}\frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

(j)

$$X(z)=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}-\frac{az^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\right)$$

$$x(n)=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}u(n)+\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u(n-1)=\left(-\frac{1}{a}\right)^{n+1}u(n)+\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u(n-1)$$

3.15

$$X(z)=\frac{5z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(3-z^{-1}\right)}=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Si\,|z|>2, x(n)=\left[2^{n}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u(n)$$

$$Si\,\frac{1}{3}<|z|<2, x(n)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(-n-1)-2^{n}u(-n-1)$$

$$Si\,|z|<\frac{1}{3}, x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(-n-1)-2^{n}u(-n-1)$$

3.16

(a)

$$x_1(n)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{4}$$

$$x_2(n)=\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u(n)$$

$$\Rightarrow X_2(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>1$$

$$Y(z)=X_1(z)X_2(z)$$

$$=\frac{-\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y(n)=\left[-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u(n)$$

(b)

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x_2(n) = \cos \pi n u(n)$$

$$\Rightarrow X_2(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)}$$

$$= \frac{A\left(1+z^{-1}\right)}{1-2z^{-1}+z^{-2}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},$$

$$A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}$$

$$y(n) = \left[\frac{2}{3}\cos \pi n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

(d)

$$x_1(n) = nu(n)$$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$x_2(n) = (2)^n u(n-1)$$

$$\Rightarrow X_2(z) = (2)^n \frac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z) =$$

$$= \frac{2z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1-2z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{-2z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} + \frac{2}{1-2z^{-1}}$$

$$y(n) = \left[-2(n+1) + (2)^{n+1}\right]u(n)$$