1. Основные понятия и определения:

1.1. Дифференциальное уравнение теплопроводности:

Согласно закону Фурье, уранение описывающие теплопроводность выглядит так (с его выводом, границами применимости и тому подобным можно ознакомиться в Сивухине):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 T = D\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

Причём оно всегда имеет единственное решение $T(x, y, z)$, с этим фактом тоже можно ознакомиться в Сивухине.

1.2. Начальные и граничные условия:

Начальные условия в терминах нашей задачи - это задание температуры во всех точках тела в нулевой момент времени.

Граничные условия - это задание температуры во всех граничных точка во все моменты времени.

2. Разностные схемы:

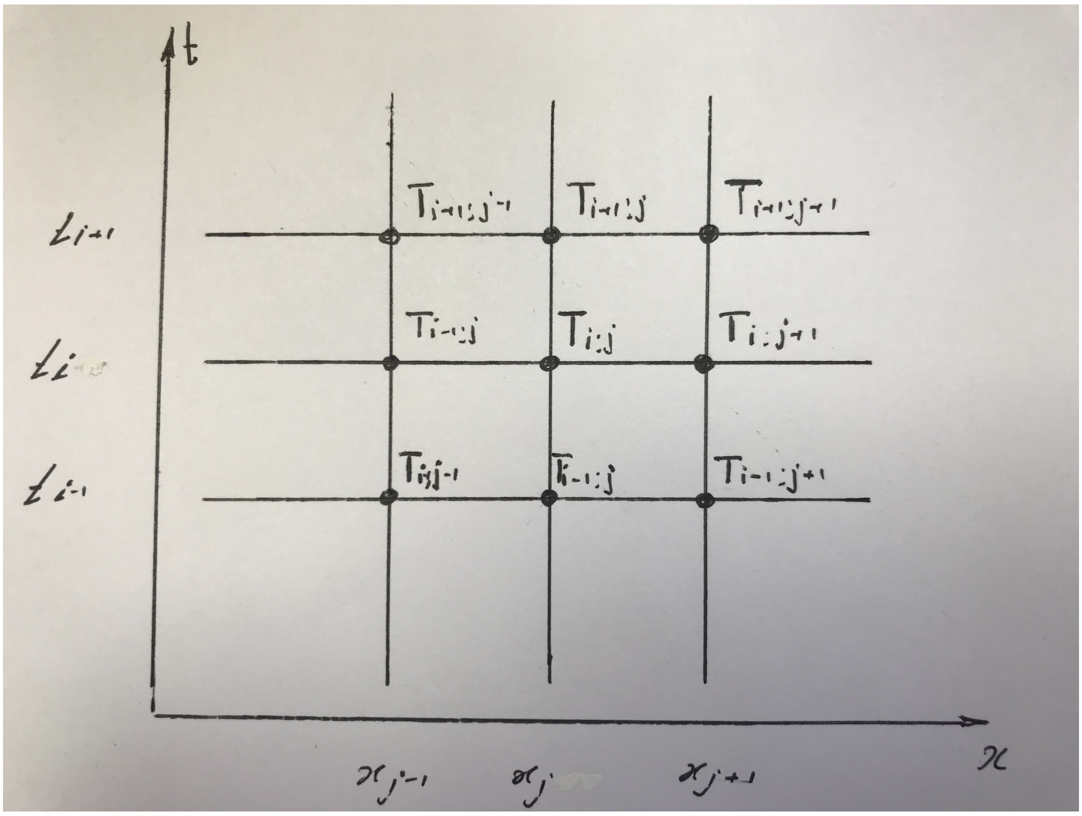
Разностная схема - это система уравнений, которая ставится в соответсвтие какой либо задаче, с помощью перехода о непрерывного случая к дискретному.

2.1. Постороение разностной схемы в одномерном случае:

Приведу разбор одномерного случая, чтобы проще было разобраться в трёхмерном случае. Преположим у нас есть какой-то цилиндр, который мы разобьём на N одинаковых кусочков Δx. У каждого кусочка мы хотим найти температуру через время Δt в течении времени $M\Delta t$. В итоге если мы изобразим полученные точки таким образом, как на картинке 1:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

В этом есть два основых спосбо получения искомого распределния температр.



2.2. Явный метод Эйлера:

Производные можно апроксимировать соотвествующими приращениями, с учётом того, что мы будем брать малленький шаг по пространтсву и времени, тогда получится уравнени:

$$\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta t} = D\frac{T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1} - 2T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{1}$$

Это уранение можно составить для любых i от 1 до N и любых 1 от $M-1$ до N, значит мы имеет $(M-1)N$ уравнений, неизвестных же у нас $(M+1)(N+1)$, с учётом того, что уравнение теплопроводности имеет единственное решение, дискретное распределение с точность до ошибки в вычислениях тоже будет единственным, значит должны быть ещё уравнения. На помощь приходят начальные условия и граничные условия, которые в вместе дадут ещё $2N+M+1$ уравнений. Теперь мы имеем равное количество уравнений (причём уранвения линейно независисмое - как доказать хз) и неизвестных, а так как по условию существует единственное решение, тогда система совместна, причём реашается она итеративно, потомуч то из i решений легко находятся $i+1$ решения.

2.3. Неявный метод Эйлера:

Производные можно апроксимировать другими приращениями:

$$\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta t} = D\frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta x^2} \tag{2}$$

Количество уравнений и неизвестных сохранятся, а так же совместсность системы, тогда её можно решить. Но уже не сохранятся прежней структуры, поэтому нужно по-честному решать систему линейных алгебраических уравнений, на кажой итерации придётся решать СЛАУ размером $(M-1)(M-1)$ Только стоит обратить на важную характеристику этой системы, она разреженная, кроме того матрица системы представляет собой диагонольную матрицу с двумя "поддиагоналями"ниже главной (возможно это, что может дать и слау можно будет решить эффективнее).

2.4. Построение разностной схемы в трёхмерном случае:

Будем ориентироваться на неявный метод Эйлера, потому что он более устойчив чем явный, то есть ошибка вычисления в компьютере накапливается меньшая, чем в явном методе.

Разобьём на N одинаковых кусочков Δl все пространсвенные координаты. У каждого кусочка мы хотим найти температуру через время Δt в течении времени $M\Delta t$.

Теперь строим разностую схему приводящую к неявному методу Эйлера (2):

$$\frac{T_{i,j,k,p+1} - T_{i,j,k,p}}{\Delta t} = D\frac{T_{i-1,j,k,p+1} + T_{i+1,j,k,p+1} - 2T_{i,j,p+1}}{\Delta l^2} + ... \tag{3}$$

Это уравнение верно для любых i, j и k от 1 до $N-1$,а для p от 1 до M, значит имеется $(N-1)^3M$ уравнений, $(N+1)^3(M+1)$ неизвестных и $(N+1)^3(M+1) - M(N-1)^3)$ начальных и граничных условий в совокусноти. Если всё посчитать, то легко заметить что можно сделать вывод о совсесмемтности системы. Выходит, что на одной итерации будет решаться СЛАУ размером $(N-1)^3$ на $(N-1)^3$, причём она будет разреженной, то есть в каждом строке будет храниться по 7 чисел, как конкретно они расположены сказать мне сложнова-то, возможно кто-то из вас мне подскажет).