

# Тестовое задание БЮРО 1440

Евгений Ильин

14 октября 2025 г.

## Обозначения

$i$ ,  $\Omega$ ,  $u$  – наклонение, долгота восходящего узла, аргумент широты рассматриваемой орбиты  
 $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  – орты инерциальной системы отсчета  
 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  – орты орбитальной системы отсчета  
 $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  – орты собственной системы отсчета

## Материалы

Расчеты проводились с помощью написанной программы на языке Python. Ссылка на исходный код:  
[https://github.com/Abrackadabrr/solar\\_illuminance](https://github.com/Abrackadabrr/solar_illuminance).

Код, который проводит непосредственный расчет необходимых величин, расположен в файлах `modeling.ipynb` (первые два пункта задачи) и `optimizing.ipynb` (третий пункт). В файлах с расширением .py лежит код с реализацией алгоритма. В `testing.ipynb` лежит код, сравнивающий написанный алгоритм с библиотекой `poliastro`. Я использовал библиотечный код для отладки и тестирования своих классов и функций.

## 1 Инерциальная система и параметры орбиты в ней

В инерциальной системе координат выберем центр Земли в качестве точки отсчета, в качестве базиса выберем направление на Солнце (орт  $\mathbf{x}$ ), перпендикулярный к нему орт  $\mathbf{y}$  в плоскости эклиптики и перпендикуляр к плоскости эклиптики  $\mathbf{z}$ . Таким образом мы получим (квази) инерциальную систему отсчета, чем-то напоминающую GCRS. В этой системе  $\mathbf{x}$  есть направление на Солнце, как требуется в условиях задачи.

В такой системе ось Земли имеет постоянный наклон к плоскости  $\mathbf{xy}$  (обозначим его за  $\alpha$ ), при этом проекция оси на плоскость  $\mathbf{xy}$  имеет некоторый угол с осью  $\mathbf{x}$ . Обозначим этот угол на  $\theta$  – он зависит от орбитального положения Земли при движении вокруг Солнца. Положим этот угол нулем, когда в северном полушарии лето (то есть ось Земли, орт  $\mathbf{x}$  и орт  $\mathbf{z}$  находятся в одной плоскости, ось Земли и  $\mathbf{x}$  составляют острый угол).

Наклонение полярной орбиты (относительно небесного экватора наклонение составляет  $\pi/2$ ) в инерциальной системе можно вычислить через ДВУ  $\Omega$  (см. рисунок 1а). Нормаль к плоскости орбиты выражается через векторное произведение оси Земли и линии узлов, то есть

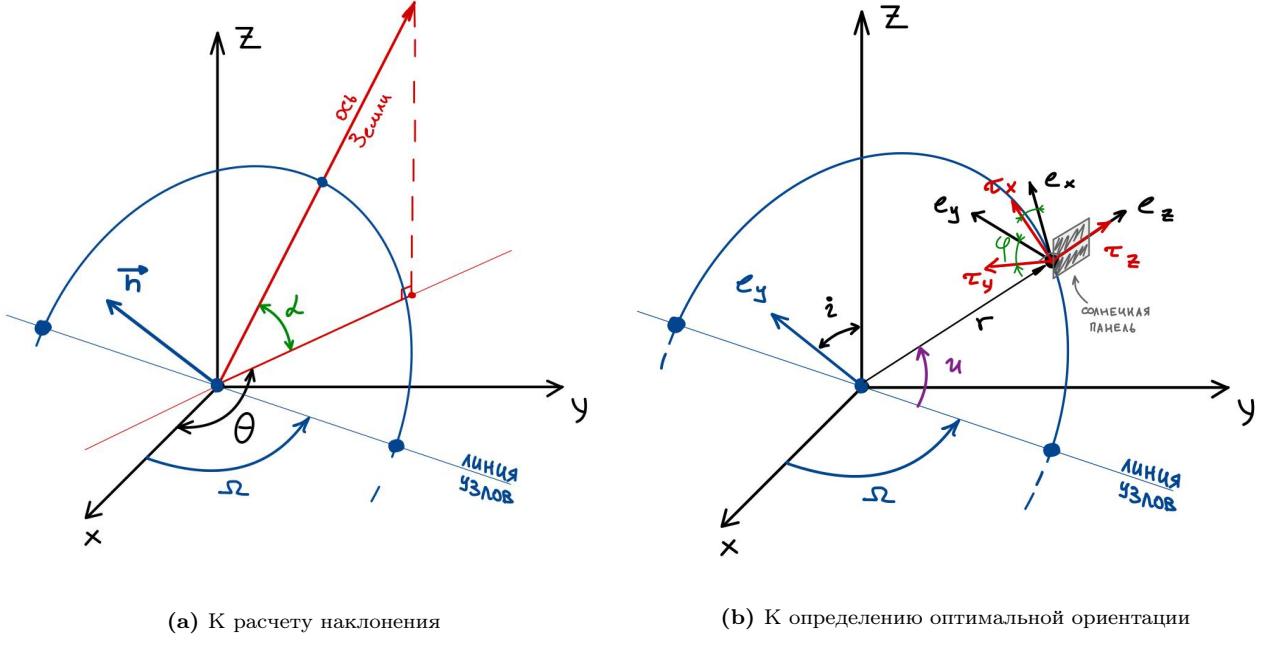


Рисунок 1. Геометрия полёта КА

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \theta \\ \cos \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \Omega \\ -\sin \alpha \cos \Omega \\ \sin(\theta - \Omega) \cos \alpha \end{bmatrix},$$

откуда наклонение орбиты можно вычислить как  $i = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \left| \frac{\sin(\theta - \Omega)}{\tan \alpha} \right| \right)$ . Так все параметры плоскости полярной орбиты аппарата могут быть определены в инерциальной системе.

## 2 Ориентация для оптимальной освещённости солнечной панели

Задаваемая ориентация аппарата имеет следующие характеристики: плоскость  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  совпадает с плоскостью  $\tau_x, \tau_y$ , вектора  $\mathbf{e}_z$  и  $\tau_z$  совпадают. Переход между этими двумя системами задается поворотом вокруг оси  $\mathbf{e}_z$  на некоторый угол  $\varphi$ , который будет также являться углом между векторами  $\mathbf{e}_y, \tau_y$ . Таким образом,  $\varphi$  есть угол между нормалью  $\tau_y$  к плоскости солнечной панели и нормалью  $\mathbf{e}_y$  к плоскости орбиты (см. рисунок 1b).

В задаче необходимо найти оптимальный с точки зрения освещённости пластины Солнцем угол  $\varphi$ . Освещённость есть отношение светового потока к площади. В предположении, что у пластины только одна рабочая сторона, а поток энергии от Солнца однородный, получаем выражение для освещенности, нормированной на плотность потока:

$$E = \langle \mathbf{x}, \tau_y \rangle = \langle \mathbf{x}, \tau_y(\varphi) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_y \cos \varphi - \mathbf{e}_x \sin \varphi \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_y \rangle \cos \varphi - \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_x \rangle \sin \varphi, \quad (1)$$

$$E(i, \Omega, u, \varphi) = -A \sin \varphi + B \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $A = A(i, \Omega, u) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_x \rangle$ ,  $B = B(i, \Omega, u) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_y \rangle$ . Для простоты в качестве временной переменной взят аргумент широты, далее это везде используется.

Важно, что коэффициенты A и B в предположении имеющейся ориентации не зависят от угла  $\varphi$ , а только от параметров орбиты  $i, \Omega, u$ . Тогда точка максимума для функции  $E(\varphi)$  может быть вычислена независимо в каждой точке орбиты:

$$\varphi_{opt} = -\arctan \frac{A}{B} = -\arctan \frac{A(i, \Omega, u)}{B(i, \Omega, u)} \quad (3)$$

Опустим вывод для вычисления коэффициентов A и B в предположении круговой орбиты, они получаются просто из геометрии движения по окружности. Приведу итоговые выражения:

$$A = (-1)(\sin u \cos \Omega + \cos u |\cos i| \sin \Omega),$$

$$B = |\sin i| \sin \Omega,$$

$$\varphi_{opt} = \arctan \left( \frac{\cos \Omega}{|\sin i \sin \Omega|} \sin u + |\cot i| \cos u \right)$$

Таким образом, получена оптимальная ориентация аппарата в орбитальной системе. Тогда кватернион  $\mathbf{q}_{o2e}$  перехода из орбитальной системы в собственную систему КА будет равен

$$\mathbf{q}_{o2e} = \cos(\varphi_{opt}/2) + \sin(\varphi_{opt}/2)\mathbf{e}_z,$$

Кватернион  $\mathbf{q}_{i2e}$  перехода из инерциальной системы в собственную систему будет выражаться как произведение

$$\mathbf{q}_1 = \cos(\Omega/2) + \sin(\Omega/2)\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{q}_2 = \cos(i/2) + \sin(i/2)\mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{q}_3 = \cos(u/2) + \sin(u/2)\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{q}_4 = \cos(\pi/3) + \sin(\pi/3) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^T,$$

$$\mathbf{q}_{i2e} = \mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_2 \odot \mathbf{q}_3 \odot \mathbf{q}_4 \odot \mathbf{q}_{o2e},$$

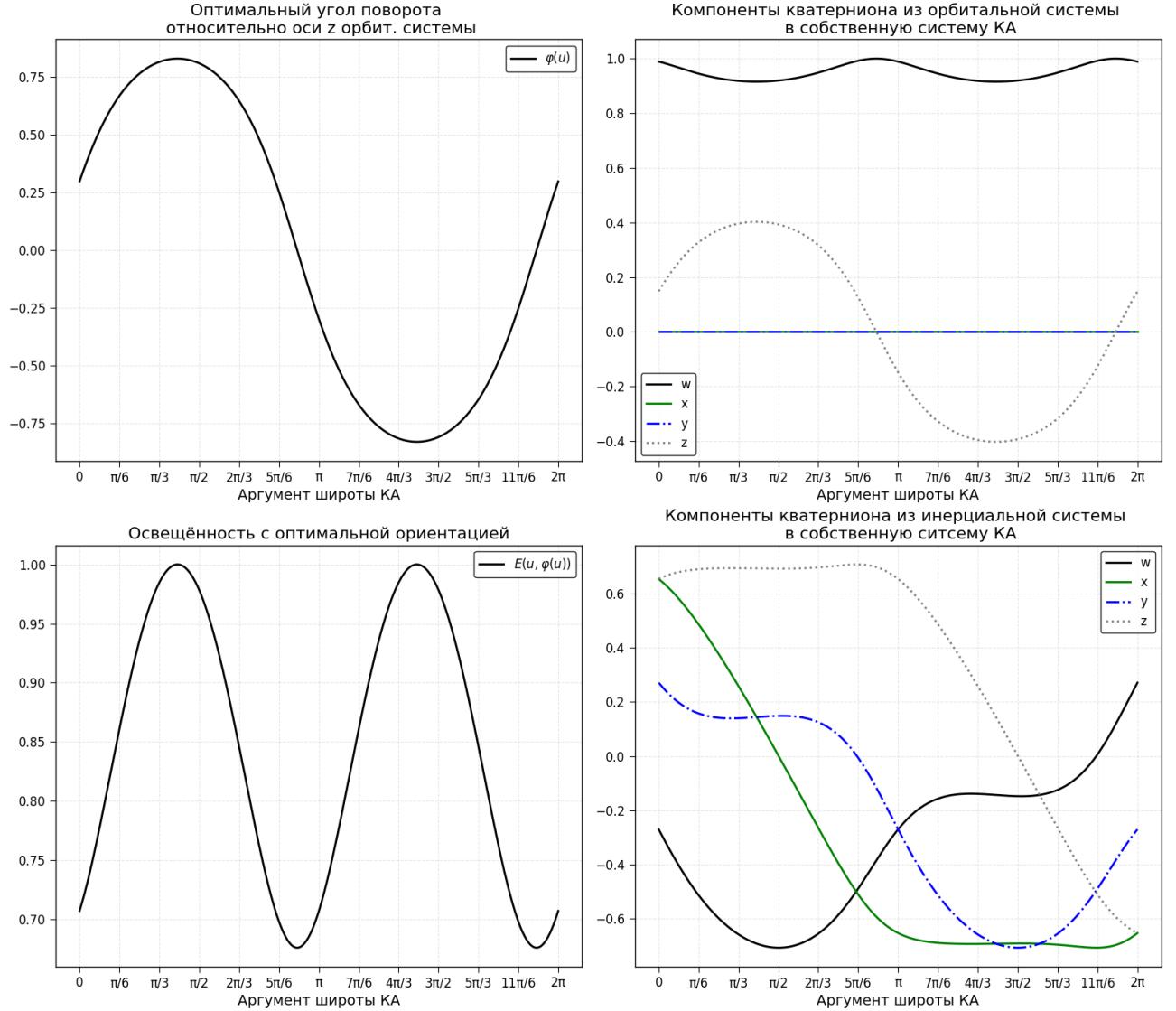
где  $\mathbf{e}_i$  – i-й базисный вектор в собственной системе, а все кватернионы заданы в параметрах Родрига-Гамильтона. Кватернион  $\mathbf{q}_4$  появляется в силу того, что орбитальная система в условии задачи не совпадает с орбитальной системой, задаваемой углами  $\Omega, i, u$  (фактически углы Эйлера).

Пример расчета угла между нормально к панели и ортом  $\mathbf{x}$  и обоих кватернионов вдоль орбиты представлен на графике ???. В качестве входных параметров брались  $\theta = 90^\circ, \Omega = 45.0 \rightarrow i = 72.96^\circ$

### 3 Ограничение на угловую скорость

При значениях  $\Omega$ , близких к нулю функция (3) будет иметь большую производную в окрестности точек  $u \in \{0, \pi\}$ , и, следовательно, угловая скорость аппарата может выйти за ограничение (пример на графике 3а).

Для начала разберёмся с ограничением на угловую скорость. КА претерпевает «сложное движение»: есть неподвижная система  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ , есть подвижная система  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , которая вращается вокруг своей оси  $\mathbf{e}_y$  с угловой скоростью  $\omega_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ , и в этой системе аппарат вращается вокруг оси  $\mathbf{e}_z$ . Тогда итоговая скорость вращения КА в инерциальной системе имеет вид:  $\vec{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_y + \omega_2 \mathbf{e}_z$ , а ввиду ортогональности



**Рисунок 2.** Пример расчета параметров ориентации на одном витке

векторов  $\mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{e}_z$  модуль угловой скорости равен  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \dot{\varphi}^2}$ . Отсюда мы получаем ограничение на производную  $\dot{\varphi} \leq \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}$ .

Для нахождения оптимальной  $\varphi$ , удовлетворяющей ограничению нужно поставить задачу оптимизации. Функция (3) получалась из условия максимума для функции освещённости  $E$  в каждой точке орбиты. Эта постановка не учитывает динамику процесса по аргументу широты, так как для каждой точки орбиты решается своя задача. Далее сделаю предположение, что максимальная освещённость панели нужна для оптимизации суммарного потока энергии, поступающего на аппарат от Солнца. Тогда можно

рассматривать вариационную задачу для функции  $\varphi(u)$  о максимизации суммарного потока излучения:

$$\int_0^{2\pi} \max(0, E(u, \varphi(u))) du \longrightarrow \max$$

$$\|\varphi'_u\|_{C[0,2\pi]} \leq C,$$

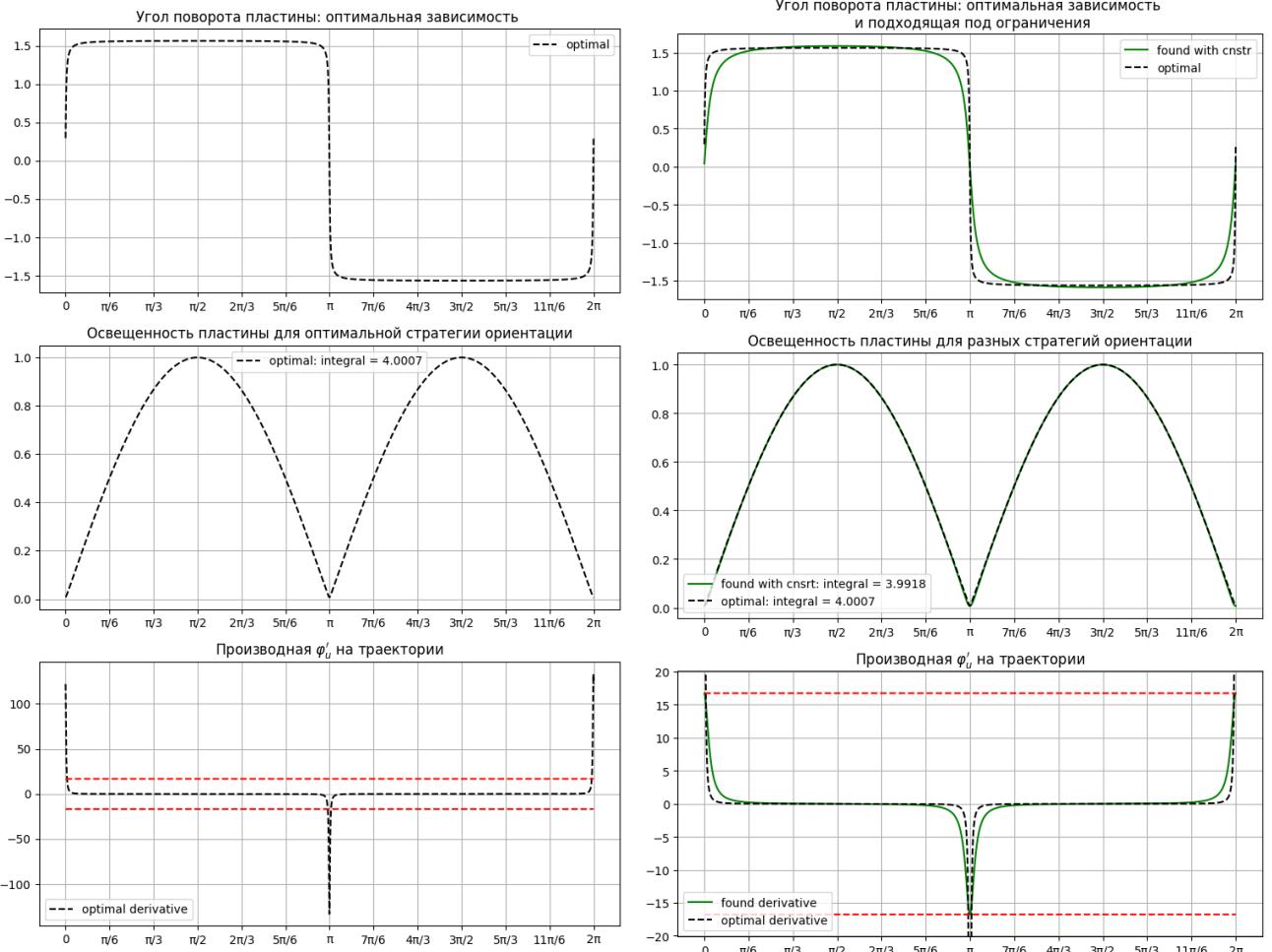
где  $C = \sqrt{\omega^2/n^2 - 1}$ , в силу  $\dot{\varphi} = \varphi'_u \dot{u}$ , а для круговой орбиты  $\dot{u} = n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$  – среднее движение.

Эта задача не является классической вариационной задачей, поэтому аналитического решения найти не удается. Приближенное решение будет строиться на основе поиска оптимума на некотором конечномерном многообразии функций, параметризованных следующим образом:  $\varphi(u, \mathbf{w}) = w_2 \arctan(w_0 \cos u + w_1 \sin u)$ . Такую параметризацию подсказывает вид оптимальной функции (3) для ориентации солнечной панели. Ограничение на угловую скорость перепишем в виде  $\|\varphi'_u\| - C \leq 0$  и с применением метода штрафных функций получим итоговую задачу безусловной оптимизации

$$-\int_0^{2\pi} \max(0, E(u, \varphi(u, w_0, w_1, w_2))) du + \alpha \left( \max \left( w_2 \frac{-w_0 \sin u + w_1 \cos u}{1 + (w_0 \cos u + w_1 \sin u)^2} - C_1, 0 \right) \right)^2 \longrightarrow \min_{w_0, w_1, w_2}$$

где  $\alpha$  – параметр штрафа, инкрементально подбирающийся в процессе работы метода.

На графике (3b) представлен результат решения задачи оптимизации для параметров  $\theta = 45^\circ, \Omega = 0.45^\circ \longrightarrow i = 73.08^\circ$ . Для решения задачи оптимизации использовался метод имитации отжига (в форме Dual Annealing) из библиотеки **scipy.optimize**. По интегральному потоку за виток две стратегии ориентации отличаются всего на 0.4%.



(a) Оптимальное решение не удовлетворяет ограничению на угловую скорость

(b) Найденная методом штрафа функция удовлетворяет ограничениям и не сильно хуже оптимальной

**Рисунок 3.** Оптимальная зависимость и зависимость, удовлетворяющая ограничениям на угловую скорость; красными горизонтальными линиями показаны ограничения

## 4 Эффекты от тени

Космический аппарат на низких орбитах на некотором участке безусловно будет находиться в тени Земли.

В затенении освещённость солнечной панели будет равна нулю. В этом случае можно очевидным образом предъявить более качественную стратегию ориентации с точки зрения освещённости: как только аппарат заходит в тень, то мы начинаем движение по кратчайшему пути к той ориентации, что будет оптимальной в точке выхода аппарата из тени. Однако, эта стратегия даст сравнительно малый выигрыш по сравнению с имеющимся решением, а потому и не рассматривалась (но обдумывалась!).

В качестве подтверждающего примера приведу аналогичные 3b графики, но с учетом тени. В расчете использовалась цилиндрическая модель тени без полутеней, а аппарат считался находящимся в тени, если его центр масс находится в тени. Результаты расчетов для параметров  $\theta = 45^\circ, \Omega = 0.45^\circ \rightarrow i = 73.08^\circ$  приведены на графике 4. Различие в полученных потоках составляет 0.2%, и кажется, что дальнейшая оптимизация стратегии с точки зрения освещённости не имеет большого смысла.

## 5 Обсуждение

- Удалось построить стратегию ориентации КА с учетом максимизации освещённости, однако для решения задачи с ограничениями на угловую скорость пришлось несколько ослабить постановку, что в прочем, как мне кажется, более соответствует физической интерпретации.
- Алгоритм опирается на метод штрафной функции, который обладает свойством, что при любом конечном значении параметра штрафа  $\alpha$  полученное решение может выходить за ограничение (чем больше параметр, тем меньше выходим). Кажется, что в задаче с ограничением на угловую скорость это самое ограничение не является слишком строгим. Теоретические результаты утверждают, что при увеличении параметра штрафа окрестность возможного выхода за ограничивающее многообразие уменьшается.
- Если всё же ограничение должно строго выполняться, то для решения задачи можно применить родственный метод – метод барьерных функций, который гарантирует, что найденное решение будет

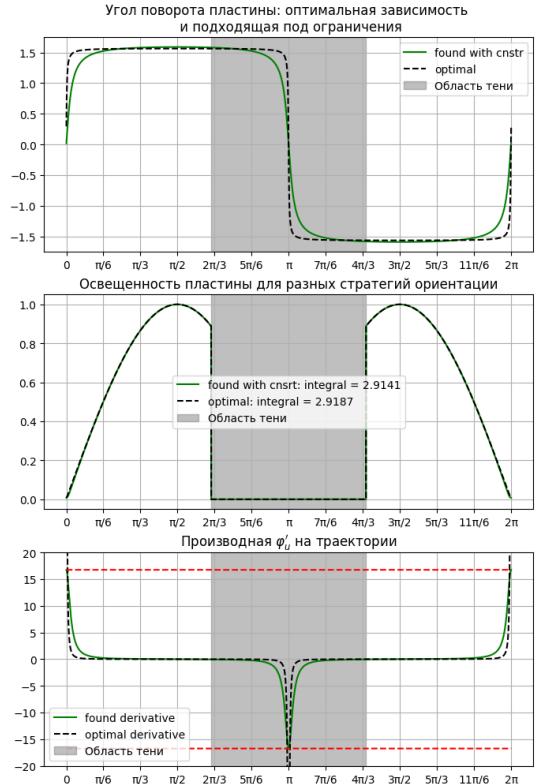


Рисунок 4. А Расчет двух стратегий ориентации с учетом тени

внутри заданного многообразия. С точки зрения вычислительной сложность все остается так же.

- Весь алгоритм переносится на эллиптические орбиты с учетом того, что нужно будет переопределить орбитальную систему и пересчитать коэффициент  $A$  для оптимальной ориентации. Остальное строится аналогично.
- Я рассматривал исключительно кеплерово движение, однако этот же алгоритм можно приспособить и для возмущенного движения. Процедура вычисления оптимального угла без учета ограничений на угловую скорость будет такой же, так как этот угол зависит только от положения КА на орбите и его скорости (или, что то же, от оскулирующей кеплеровой орбиты). При этом моделирование движения на виток будет существенно усложнено — нужно будет численно интегрировать и систему уравнений движения центра масс КА (лучше в специальных орбитальных элементах, нежели в декартовых координатах), и систему уравнений для динамики твердого тела (уравнения Пуассона + уравнения Эйлера), поскольку возмущения вносят и возмущающий момент. Метод расчета оптимальной ориентации с учетом ограничений на угловую скорость тоже можно будет применить: мы всего лишь считаем специальный функционал от ориентации. Однако, сложность решения задачи сильно возрастет, так как на каждой итерации метода оптимизации нужно будет численно прогнозировать орбиту аппарата (а не просто изменять аргумент широты).