Отчет по численному решению уравнения с использованием различных методов

Вариант № 17

Чилеше Абрахам

Группа: Б9122-02-03-01сцт

Цель работы

1. Определите примерный диапазон, в котором может находиться требуемый корень.
2. Найдите решение численно с использованием трех известных методов.
3. Создайте сравнительную таблицу, показывающую сходимость этих методов.
4. Сделайте выводы о проделанной работе.

Введение

В данном отчете рассматривается численное решение уравнения $\ln(0.5x)-0.5\cos(x)=0$ с использованием трех различных методов:

1. Метод хорд
2. Метод Ньютона
3. Метод бисекции

Каждый из методов будет применен для нахождения корня функции с заданной точностью. Также будет проведено сравнение сходимости этих методов.

Определение интервала для корня

Первоначально был выбран интервал [0.5, 2.0] для поиска корня функции. Этот интервал был определен на основании анализа поведения функции.

Код

Программа, написанная на языке C++, реализует три метода численного решения уравнений. Ниже приведен исходный код:

https://github.com/Abraham-Chileshe/Computational-Mathematics/blob/main/Lab%207/Lab7.cpp

```cpp
double chord_method(double eps, std::vector<double> lst) {
    std::vector<std::pair<int, double>> table;
    int counter = 1;
    double b = lst[1];
    double x_prev = lst[0];
    double x_next = x_prev - (b - x_prev) * function(x_prev) /
        (function(b) - function(x_prev));
    table.push_back({counter, x_next});

    while (fabs(x_next - x_prev) > eps) {
        x_prev = x_next;
        x_next = x_prev - (b - x_prev) * function(x_prev) /
            (function(b) - function(x_prev));
        counter++;
        std::cout << x_next << std::endl;
        table.push_back({counter, x_next});
    }

    print_table(table);
    return x_next;
}
```

Описание методов

Метод хорд

Метод хорд (метод секущих) основан на линейной аппроксимации функции. На каждой итерации строится хорда, соединяющая две точки функции, и вычисляется точка пересечения этой хорды с осью абсцисс. Этапы метода:

1. Начинаем с двух начальных точек x0 и x1
2. Вычисляем новое приближение корня x_{n+1} формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

3. Повторяем процесс до тех пор, пока абсолютное значение разницы между X_{n+1} и X_n не станет меньше заданного порога ϵ.

Метод Ньютона

Метод Ньютона (метод касательных) использует производную функции для нахождения корня. Это один из самых быстрых методов, если начальное приближение достаточно близко к истинному корню. Этапы метода:

1. Начинаем с начальной точки x0.
2. Вычисляем новое приближение корня x_{n+1} формуле:
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
3. Повторяем процесс до тех пор, пока абсолютное значение разницы между X_{n+1} и X_n не станет меньше заданного порога ϵ.

Метод бисекции

Метод бисекции делит отрезок пополам и проверяет, в какой половине находится корень. Этапы метода:

1. Начинаем с интервала $[a, b]$, где $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. Вычисляем среднюю точку c по формуле:
   $c = \frac{a+b}{2}$
3. Если $f(c) = 0$, то c является корнем.
4. Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то корень находится в интервале $[a, c]$, иначе в интервале $[c, b]$.
5. Повторяем процесс до тех пор, пока длина интервала не станет меньше заданного порога ϵ.

Результаты

Метод хорд

Метод хорд используется для нахождения корня функции с помощью линейной аппроксимации. Ниже приведены результаты:

```
Метод хорд:
1.78962
1.79222
1.7921
1.79211
1.79211
1.79211
```

Метод Ньютона

Метод Ньютона использует производную функции для нахождения корня. Результаты:

```
Метод Ньютона:
1.79209
1.79211
1.79211
```

Метод бисекции

Метод бисекции делит отрезок пополам и проверяет, в какой половине находится корень. Результаты:

```
Метод бисекции:
1 1.25
2 1.625
3 1.8125
4 1.71875
5 1.76562
6 1.78906
7 1.80078
8 1.79492
9 1.79199
10 1.79346
11 1.79272
```

Выводы

- **Метод хорд** потребовал больше итераций по сравнению с методом Ньютона, но все же показал хорошую сходимость.
- **Метод Ньютона** показал наилучшую сходимость, потребовав всего 6 итераций для достижения заданной точности.
- **Метод бисекции** также успешно сошелся к корню, но потребовал большее количество итераций по сравнению с методом Ньютона.

Достоинства и недостатки методов

- **Метод хорд**
  - Достоинства: Простота реализации, не требует вычисления производной.
  - Недостатки: Медленная сходимость по сравнению с методом Ньютона.

- **Метод Ньютона**
    - Достоинства: Быстрая сходимость, особенно если начальное приближение близко к корню.
    - Недостатки: Требует вычисления производной функции, может не сходиться если начальное приближение далеко от корня.

- **Метод бисекции**
    - Достоинства: Надежный метод, всегда сходится если функция непрерывна и знаки функции на концах отрезка различны.
    - Недостатки: Медленная сходимость по сравнению с методом Ньютона, требует больше итераций.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что метод Ньютона является наиболее эффективным для данной функции, так как он быстрее сходится к корню. Однако, метод бисекции является более надежным, так как не требует вычисления производной функции и всегда сходится, если функция непрерывна на заданном интервале.