Дифференциальная геометрия и топология
Домашняя работа №1

Чилеше Абрахам

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Доказать являются ли вектора базисами

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{A}: \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 1(1-0) + 0 = -1 - 1 = -2 \neq 0 \text{ Линейно независим}$$

$$\mathsf{B}: \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+4) - 2(2+4) + 2(4-2) = 5 - 12 + 4 = -3 \neq 0 \text{ Линейно независим}$$

Ответ: Являются базисами

1 Найти матрицу перехода от базиса $\{a\}$ к базису $\{b\}$

Найти матрицы перехода от a к b

$Formula: A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^T$

$$C = \left(A^{-1}B\right)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^T$$

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

2 Найти координаты вектора $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ в базисах $\{a\}$ и $\{b\}$

Для A:

$$A \begin{cases} 3 = d_1 + d_2 \\ -1 = d_1 + d_3 \\ 7 = d_2 + d_3 \end{cases}$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Для B:

$$\begin{cases} 3 = w_1 + 2w_2 + 2w_3 \\ -1 = 2w_1 + w_2 - 2w_3 \\ 7 = 2w_1 + 2w_2 + w_3 \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 29 \\ -27 \\ 17 \end{pmatrix}$$

3 Найти координаты $y = 3a_1 - a_2 + 7a_3$ в базисе $\{b\}$

$$C^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(C^T)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = (C^T)^{-1} \cdot X_A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$