Homework 5: Vectors & Matrices

Abraham Cepeda BUID: 5818

Problem 1.

$A = \begin{bmatrix} 1, 2 \\ 4, -5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ AB? & BA?

$\rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1\cdot7+2\cdot0, & 1\cdot8+2\cdot(-9) \\ 4\cdot7+-5\cdot0, & 4\cdot8+-5\cdot-9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7+0, & 8-18 \\ 28+0, & 32+45 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7, & -10 \\ 28, & 77 \end{bmatrix}$

$\rightarrow BA = \begin{bmatrix} 7\cdot1+8\cdot4, & 7\cdot2+8\cdot-5 \\ 0\cdot1+-9\cdot4, & 0\cdot2+-5\cdot-9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cancel{7}7+32, & 14-40 \\ 0+-36, & 0+45 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 39, & -26 \\ -36, & 45 \end{bmatrix}$

Problem 2.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ AB=? & AC?

$\rightarrow AB = \begin{bmatrix} 4\cdot2+2\cdot1+0\cdot-1, & 4\cdot3+2\cdot-2+0\cdot2, & 4\cdot1+2\cdot-2+0 \\ 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot-1, & 2\cdot3+1\cdot-2+0\cdot2, & 2\cdot1+1\cdot-2+0 \\ -2\cdot2+-1\cdot1+0\cdot-1, & -2\cdot3+-1\cdot-2+0\cdot2, & -2\cdot1+-1\cdot-2+0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8+2+0, & 12-4+0, & 4-4+0 \\ 4+1+0, & 6-2+0, & 2-2+0 \\ -4-1+0, & -6+2+0, & -2+2+0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10, & 8, & 0 \\ 5, & 4, & 0 \\ -5, & -4, & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow AC = \begin{bmatrix} 4\cdot3+2\cdot0+0, & 4\cdot1+2\cdot2+0, & 4\cdot-3+2\cdot6+0 \\ 2\cdot3+1\cdot0+0, & 2\cdot1+1\cdot2+0, & 2\cdot-3+1\cdot6+0 \\ -2\cdot3-1\cdot0+0, & -2\cdot1-1\cdot2+0, & -2\cdot-3-1\cdot6+0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12+0+0, & 4+4+0, & -12+12+0 \\ 6+0+0, & 2+2+0, & -6+6+0 \\ -6+0+0, & -2-2+0, & +6-6+0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12, & 8, & 0 \\ 6, & 4, & 0 \\ -6, & -4, & 0 \end{bmatrix}$

Problem 3 V_i norm? e_v?

1. $V_1 = (1,0) \rightarrow \|V_1\| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1,$ $e_v = \left(\frac{1}{1}, \frac{0}{1}\right) = (1,0),$

2. $V_2 = (5,5) \rightarrow \|V_2\| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50},$ $e_v = \left(\frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}\right),$

3. $V_3 = (-4,4) \rightarrow \|V_3\| = \sqrt{-4^2+4^2} = \sqrt{32},$ $e_v = \left(\frac{-4}{\sqrt{32}}, \frac{4}{\sqrt{32}}\right),$

BU ID: 5818

Abraham Cepeda

Problem 4. Transpose ?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$\rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $\rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Problem 5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

1. $A^2 = \begin{bmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot3, & 1\cdot2 + 2\cdot4 \\ 3\cdot1 + 4\cdot3, & 3\cdot2 + 4\cdot4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+6, & 2+8 \\ 3+12, & 6+16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7, & 10 \\ 15, & 22 \end{bmatrix}$

2. $A^2 - 5A - 2I = 0$

$A^2 = \begin{bmatrix} 7, & 10 \\ 15, & 22 \end{bmatrix}$, $-5A = \begin{bmatrix} -5, & -10 \\ -15, & -20 \end{bmatrix}$, $-2I = \begin{bmatrix} -2, & 0 \\ 0, & -2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 7, & 10 \\ 15, & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5, & -10 \\ -15, & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2, & 0 \\ 0, & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2, & 0 \\ 0, & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}$

3. $A^3 \rightarrow A^2 \cdot A$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 7, & 10 \\ 15, & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\cdot1 + 10\cdot3, & 7\cdot2 + 10\cdot4 \\ 15\cdot1 + 22\cdot3, & 15\cdot2 + 22\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+30, & 14+40 \\ 15+66, & 30+88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37, & 54 \\ 81, & 118 \end{bmatrix}$

4. $A^3 - 27A - 10I = 0$

$A^3 = \begin{bmatrix} 37, & 54 \\ 81, & 118 \end{bmatrix}$, $-27A = \begin{bmatrix} -27, & -54 \\ -81, & -108 \end{bmatrix}$, $-10I = \begin{bmatrix} -10, & 0 \\ 0, & -10 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 37, & 54 \\ 81, & 118 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -27, & -54 \\ -81, & -108 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10, & 0 \\ 0, & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10, & 0 \\ 0, & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10, & 0 \\ 0, & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}$

BUID: 5818

Abraham Cepeda

Problem 5. Continue

5. $\mathrm{Exp}(A) \rightarrow I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3$

$I = \begin{bmatrix}1,0\\0,1\end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix}1,2\\3,4\end{bmatrix}, \frac{1}{2!}A^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}7,10\\15,22\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.5,5\\7.5,11\end{bmatrix}, \frac{1}{3!}A^3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}37,54\\81,118\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6.17,9\\13.5,19.67\end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix}1,0\\0,1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1,2\\3,4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3.5,5\\7.5,11\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6.17,9\\13.5,19.67\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+1+3.5+6.17, & 0+2+5+9\\0+3+7.5+13.5, & 1+4+11+19.67\end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix}11.67, 16\\24, 35.67\end{bmatrix}$

Problem 6. $B = \begin{bmatrix}1,1,1\\1,-1,1\\-1,1,1\end{bmatrix}$

1. $B^2 = \begin{bmatrix}1\cdot1+1\cdot1+1\cdot(-1), & 1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot1, & 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\\1\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot(-1), & 1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot1, & 1\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot1\\(-1)\cdot1+(1)\cdot1+1\cdot1, & (-1)\cdot1+(1)\cdot(-1)+1\cdot1, & (-1)\cdot1+(1)(1)+1\cdot1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1,1,3\\-1,3,1\\-1,-1,1\end{bmatrix}$

2. $C = B^2 + B$

$\rightarrow C = \begin{bmatrix}1,1,3\\-1,3,1\\-1,-1,1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1,1,1\\1,-1,1\\-1,1,1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+1, & 1+1, & 3+1\\-1+1, & 3-1, & 1+1\\-1-1, & -1+1, & 1+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2,2,4\\0,2,2\\-2,0,2\end{bmatrix}$

3. $D = 2B^2 + I \quad \rightarrow I = \begin{bmatrix}1,0,0\\0,1,0\\0,0,1\end{bmatrix}, \quad 2B^2 = 2\begin{bmatrix}1,1,3\\-1,3,1\\-1,-1,1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2,2,6\\-2,6,2\\-2,-2,2\end{bmatrix}$

$\rightarrow D = \begin{bmatrix}1,0,0\\0,1,0\\0,0,1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2,2,6\\-2,6,2\\-2,-2,2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3,2,6\\-2,7,2\\-2,-2,3\end{bmatrix}$

Abraham Cepeda

BUD: 5818

Problem 6. Continue

4. Show that $CD = DC \rightarrow C = \begin{bmatrix} 2, & 2, & 4 \\ 0, & 2, & 2 \\ -2, & 0, & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3, & 2, & 6 \\ -2, & 7, & 2 \\ -2, & -2, & 3 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow CD = \begin{bmatrix} 2\cdot3+2\cdot(-2)+4\cdot(-2), & 2\cdot2+2\cdot7+4\cdot(-2), & 2\cdot6+2\cdot2+4\cdot3 \\ 0\cdot3+2\cdot(-2)+2\cdot(-2), & 0\cdot2+2\cdot7+2\cdot(-2), & 0\cdot6+2\cdot2+2\cdot3 \\ -2\cdot3+0\cdot(-2)+2(-2), & -2\cdot2+0\cdot7+2\cdot(-2), & -2\cdot6+0\cdot2+2\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-4+8, & 4+14-8, & 12+4+12 \\ 0+-4-4, & 0+14-4, & 0+4+6 \\ -6+0-4, & -4+0-4, & -12+0+6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow CD = \begin{bmatrix} -6, & 10, & 28 \\ -8, & 10, & 10 \\ -10, & -8, & -6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow DC = \begin{bmatrix} 3\cdot2+2\cdot0+6\cdot(-2), & 3\cdot2+2\cdot2+6\cdot0, & 3\cdot4+2\cdot2+6\cdot2 \\ -2\cdot(2)+7\cdot0+2\cdot(-2), & -2\cdot(2)+7\cdot2+2\cdot0, & -2\cdot4+7\cdot2+2\cdot2 \\ -2\cdot(2)+(-2)\cdot0+3\cdot(-2), & -2\cdot(2)+(-2)\cdot2+3\cdot0, & -2\cdot4+(-2)\cdot2+3\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0-12, & 6+4+0, & 12+4+12 \\ -4+0-4, & -4+14+0, & -8+14+4 \\ -4+0-6, & -4-4+0, & -8-4+6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow DC = \begin{bmatrix} -6, & 10, & 28 \\ -8, & 10, & 10 \\ -10, & -8, & -6 \end{bmatrix} \qquad \therefore CD = DC$$

Problem 7. $A = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ -1, & 1, & -1 \\ 1, & 1, & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1 \end{bmatrix}$

1. $C = AB = \begin{bmatrix} 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1, & 1\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot(-1), & 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 \\ -1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1, & -1\cdot(-1)+1\cdot(1)+(-1)\cdot(-1), & (-1)\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1 \\ 1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1, & 1\cdot(-1)+1\cdot1+(-1)\cdot(-1), & 1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3, & -1, & 3 \\ -1, & 3, & -1 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}$

2. $C^T = \begin{bmatrix} 3, & -1, & 1 \\ -1, & 3, & 1 \\ 3, & -1, & 1 \end{bmatrix}$

3. $A^T = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ -1, & 1, & -1 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}$

4. $(AB)^T = B^T A^T \rightarrow AB^T = \begin{bmatrix} 3, & -1, & 1 \\ -1, & 3, & 1 \\ 3, & -1, & 1 \end{bmatrix} \rightarrow AB^T = C^T$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1, & 1\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot(-1), & 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot(-1) \\ -1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1, & (-1)\cdot(-1)+1\cdot1+(-1)\cdot(-1), & (-1)\cdot1+1\cdot1+(-1)(-1) \\ 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1, & 1\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot(-1), & 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3, & -1, & 1 \\ -1, & 3, & 1 \\ 3, & -1, & 1 \end{bmatrix}$$