Abraham Cepeda   BUID: 5[redacted]18

Problem 1.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ a) $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2$

eigenvalues

b) $\dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(-2)}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \rightarrow \lambda = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}, \ \lambda = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$

eigenvectors

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x + 2y = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}x \\ 3x + 4y = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}y \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}x + 2y = 0 \\ \dfrac{3-\sqrt{33}}{2}y + 3x = 0 \end{matrix}$

$\rightarrow \begin{matrix} (-3-\sqrt{33})x + 4y = 0 \\ (3-\sqrt{33})y + 3x = 0 \end{matrix} \rightarrow x = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}, \ \lambda = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{3} \quad v_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{33}-3}{6} \\ 1 \end{bmatrix}, \ V_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{33}-3}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $P(A) = A^2 - 5A - 2I = 0 \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \rightarrow -5A = -5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{bmatrix}$

$\rightarrow -2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow A^2 - 5A - 2I = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Problem 2.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow 1-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$\rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$

$\rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -A^3 + A^2 + A - 1I$

$\rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P(B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow 1-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)^2 = (1-\lambda)^3$

Continue Problem 2 $\quad (x-1)(x+1)(x-1)$

2. eigenvalues (A) $\rightarrow P(A) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$

eigenvalues (B) $\rightarrow P(B) = (-\lambda+1)^3 \quad \lambda = 1$

3. eigenvectors (A) $\quad (A-\lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \quad \lambda = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} v_1 = \\ v_2 = \\ v_3 = \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \lambda = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} v_1 = \\ v_2 = \\ v_3 = \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. eigenvectors (B) $\quad (B-\lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \quad \lambda = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} v_1 = \\ v_2 = \\ v_3 = \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $P(A) \rightarrow -A^3 + A^2 - A - I \quad \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow -A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow -A^3 + A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow -A^3 + A^2 + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow -A^3 + A^2 + A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P(B) = -B^3 + 3B^2 - 3B - 1I \quad \rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow 3B^2 = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow -B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow -3B = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow -B^3 + 3B^2 - 3B - 1I = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Problem 5 $\quad A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ which values of a for a positive definite

$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ax_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + ax_3 \end{bmatrix} = x_1(ax_1 + x_2 + x_3) + x_2(x_1 + ax_2 + x_3) + x_3(x_1 + x_2 + ax_3)$

$\rightarrow ax_1^2 + x_2x_1 + x_3x_1 + x_1x_2 + ax_2^2 + x_3x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + ax_3^2 \rightarrow ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2x_3x_2 > 0$

$a > 0$

BUID: 5818

Abraham Cepeda

Continue Problem 5

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad x^T B x = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow x_1(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + x_2(2x_1 + 6x_2 + 4x_3) + x_3(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$

$\rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

$\rightarrow x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3 + 6x_2^2 + 5x_3^2 > 0$

$x_1 = 0,\ x_3 = 0 \rightarrow 6x_2^2 \quad \therefore 6 > 0$

Problem 6 $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) A eigenvalues $A - \lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \rightarrow (\lambda-3)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

b) $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad A^2 - \lambda = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 \rightarrow (\lambda-9)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda = 9$

c) $A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$ $\quad A^3 - \lambda = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14-\lambda & 13 \\ 13 & 14-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 28\lambda + 27 \rightarrow (\lambda-27)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda = 27$

d) $A^4 = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$ $\quad A^4 - \lambda = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41-\lambda & 40 \\ 40 & 41-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 82\lambda + 81 \rightarrow (\lambda-81)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda = 81$

e) One of the eigvalues remain as 1 for all matrices, while the second one increases as the power does $(3, 3^2, 3^3, 3^4)$