安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试参考答案与评分标准

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$\underline{\quad 0 \quad}$；2、$\underline{9,\ -12}$；3、$\underline{\quad 2 \quad}$；4、$\underline{y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}$；5、$\underline{\frac{\pi}{2}}$.

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、A；7、D；8、B；9、C；10、D.

三、计算题（本题共六小题，每小题 8 分，共 48 分）

11. 解. 对任意$1\le i\le n$，$\dfrac{i}{n^2+2n+n}\le\dfrac{i}{n^2+2n+i}\le\dfrac{i}{n^2+2n+1}$.......（3 分）

于是，

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n+n)}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2n+i}\le\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n+1)}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{i}{n^2+2n+i}\le\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n+1)}=\dfrac{1}{2}$,

由夹逼定理可知，原式$=\dfrac{1}{2}$. ....（8 分）

12. 解.

原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+3x)-(1-2x)}{(\tan x)(\cos x+1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{(1+3x)(1-2x)}+\sqrt[3]{(1-2x)^2})}$

$=\dfrac{5}{6}$. ....（8 分）

13. 解.

原式$\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin^2\dfrac{x}{2})^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}$ ....（3 分）

$=\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin^2\dfrac{x}{2})^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x\ln(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$. ....（8 分）

14. 解. 对$y=(\arctan\sqrt{x})^x$两边求对数可得$\ln y=x\ln(\arctan\sqrt{x})$. ....（2 分）

方程两边同时求导可得

$\dfrac{1}{y}y'=\ln\arctan\sqrt{x}+x(\dfrac{1}{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$,

由此可得 $y'=(\arctan\sqrt{x})^x(\ln(\arctan\sqrt{x})+\dfrac{x}{2x(1+x)\arctan\sqrt{x}})$............（8 分）

15. 解.

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3\sec t\tan t, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2\sec^2 t.$ ……………………………………………………（4 分）

故$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{3\sin t}.$ ……………………………………………（8 分）

16. 解. 方程$y-x\cdot 2^y=1$两边同时对x求导可得

$y'-2^y-x\cdot y'\cdot\ln 2\cdot 2^y=0.$ ……………………………………………（4 分）

由此可得

$y'=\dfrac{2^y}{1-(\ln 2)x\cdot 2^y}.$ ……………………………………………………（8 分）

四、分析计算题（本题共 10 分）

17. 解. 由$0<x_1<\pi$可知，$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi.$

由数学归纳法可知，$0<x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}<\pi.$

故数列$\{x_n\}$为单调递减有界数列. 由单调有界原理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. ………（5 分）

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，方程$x_n=\sin x_{n-1}$两边同时取极限可得$a=\sin a$，

故$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$ ……………………………………………（10 分）

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

18. 证明. 由题设可知，对$\forall\varepsilon>0$，存在$N_1>0$，当$n>N_1$时，$|x_{3n}-A|<\varepsilon$；

存在$N_2>0$，当$n>N_2$时，$|x_{3n+1}-A|<\varepsilon$；

存在$N_3>0$，当$n>N_3$时，$|x_{3n+2}-A|<\varepsilon.$ ……………………………（3 分）

令$N=\max\{3N_1,3N_2+1,3N_3+2\}$，当$n>N$时，总有$|x_n-A|<\varepsilon.$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$ ……………………………………………………（6 分）

19. 证明. 构造辅助函数$F(x)=f(x)-f(x+\dfrac{b-a}{2}).$ ……………………（3分）

由$f(x)$在$[a,b]$上连续可知，$F(x)$在$[a,\dfrac{a+b}{2}]$连续.

则$F(a)=f(a)-f(a+\dfrac{b-a}{2})=f(a)-f(\dfrac{b+a}{2})$

$F(\dfrac{a+b}{2})=f(\dfrac{a+b}{2})-f(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2})=f(\dfrac{a+b}{2})-f(b)$

再由$f(a)=f(b)$可知，$F(a)F(\dfrac{a+b}{2})\le 0.$

故由连续函数介值定理可知，存在$\xi\in[a,\dfrac{a+b}{a}]\subset[a,b)$，使得$F(\xi)=0.$

即$f(\xi)=f(\xi+\dfrac{b-a}{2}).$ ……………………………………………………（6 分）