安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《线性代数 A》期中考试（A 卷）参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. A　2. D　3. B　4. C　5. B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 0　**7.** -9　**8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**9.** 4　**10.** $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11.【解】 $(AI)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.　　10 分

12.【解】此为四阶的范德蒙行列式，于是

$$D=(3-4)(7-4)(-5-4)(7-3)(-5-3)(-5-7)=10368$$

.　　10 分

13.【解】 将矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 进行初等列变换 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

得 $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.　　10 分

14.【解】 将行列式按第一行展开，得 $D_n=9D_{n-1}-20D_{n-2}$.

$$D_n-4D_{n-1}=5\left(D_{n-1}-4D_{n-2}\right)=5^{n-2}\left(D_2-4D_1\right),$$

$$D_n-5D_{n-1}=4\left(D_{n-1}-5D_{n-2}\right)=4^{n-2}\left(D_2-5D_1\right)$$

解得　$D_n=5^{n+1}-4^{n+1}$.

10 分

15. 【解】由 $AXA^T = 2XA^T + I$，可得 $(A-2I)XA^T = I$

而 $A, A-2I$ 可逆，所以

$$X = (A-2I)^{-1}(A^T)^{-1} = \left(A^T(A-2I)\right)^{-1} = \left(A^TA-2A^T\right)^{-1},$$

$$\left(A^TA-2A^T \middle| I\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

故 $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 10 分

16.【解】

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a \end{pmatrix}$$

当 $\begin{cases} b-3a=0 \\ 2-2a=0 \end{cases}$ 时，即 $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$ 时，方程组有无穷多解.

于是，$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得

$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$,其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量.

10 分

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17.【证明】:

$$(I-A)\left(I-\frac{1}{n-1}A\right) = I - A - \frac{1}{n-1}A + \frac{1}{n-1}A^2$$

由 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,得 $A^2 = nA$

于是 $(I-A)\left(I-\frac{1}{n-1}A\right) = I$，即 $(I-A)^{-1} = \left(I-\frac{1}{n-1}A\right)$. 5 分

18.【证明】

由$A^* = |A| A^{-1}$,得$\left(A^*\right)^{-1} = \left(|A| A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A$，

而$\left(A^{-1}\right)^* = \left|A^{-1}\right| \left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A$.

故$\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$.

5 分