安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A(一)》期末考试试卷（B 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每空 2 分，共 10 分）

1. -1；2. $-\frac{1}{2}e^{2\cos x}+C$；3. $y=3x-1$；4. $\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f(u)du$；5. -2；

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. D；7. D；8. C；9. C；10. C。

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

11．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x\ln\cos x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{4x^2}$ （4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x 8x}=-\frac{1}{8}$。 （8 分）

12．解：原式$=\int_0^\pi\sqrt{2\cos^2 x}dx$。

$=\sqrt{2}\int_0^\pi|\cos x|dx$ （4 分）

$=\sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx)$

$=\sqrt{2}(\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})=2\sqrt{2}$。 （8 分）

13．解：$\because f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$

$\therefore f(x)=((1+\sin x)\ln x)'=\cos x\ln x+\frac{1+\sin x}{x}$

再由分部积分公式 （4 分）

$\int xf'(x)dx=xf(x)-\int f(x)dx$

$=xf(x)-\int f(x)dx$

$=x\cos x\ln x+1+\sin x-(1+\sin x)\ln x+C$ 。　　（ 8 分）

14. 解：原式$=\lim\limits_{A\to\infty}\int_e^A\frac{\ln x-1}{x^2}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int_e^A(1-\ln x)d\frac{1}{x}$　　（ 4 分）

$=\lim\limits_{A\to\infty}(1-\ln x)\frac{1}{x}+\lim\limits_{A\to+\infty}\int_e^A\frac{1}{x^2}dx$

$=\lim\limits_{A\to+\infty}-\frac{1}{x}\Big|_e^A=e^{-1}$ 。

因此广义积分收敛，收敛与e^{-1}　　（ 8 分）

15. 解：方程两端同时对x求导：

$4xf(x)=f'(x)$

解此一阶微分方程得：$f(x)=Ce^{2x^2}$　　（ 4 分）

再将$x=0$代入积分方程得：$f(0)=2$

再代入$f(x)=Ce^{2x^2}$ 由此求得：$C=2$

因此：函数$f(x)=2e^{2x^2}$ 。　　（ 8 分）

四、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

16．证：令$F(x)=\sin\pi x-\frac{\pi^2}{2}x(1-x)\quad 0\le x\le 1$　　（ 1 分）

$F'(x)=\pi\cos\pi x-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2x\qquad 0\le x\le 1$

$F''(x)=-\pi^2\sin\pi x+\pi^2\ge 0\qquad 0\le x\le 1$　　（ 2 分）

由此可得：$F'(x)\ge F'(0)=\pi-\frac{\pi^2}{2}<0\quad 0\le x\le 1$　　（ 4 分）

$F(x)$单调递增：$F(x)\le F(0)=0$

因此：$\sin\pi x\le\frac{\pi^2}{2}x(1-x)$ 。　　（ 8 分）

17．证明：$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$　　（ 2 分）

$\because$函数$f(x)$在$[-2,2]$上连续，在$(-2,2)$上可导；

$\therefore F(x)$在$[-2,2]$上连续，在$(-2,2)$上可导。

又$\because f(-2)=0.f(0)=2,f(2)=0$ 。

$\therefore F(-2)=f(-2)-\frac{1}{2}(-2)=1$；$F(0)=f(0)-\frac{1}{2}x=2$

$F(2)=f(2)-\frac{1}{2}x=-1<0$　　（ 4 分）

由连续函数的性质得：

$\exists\xi_1 \in (0,2)$，使$F(\xi_1) = F(-2) = 1$。　　　　　　　　　　　（ 6 分）

再由罗尔中值定理：可得$\exists\xi \in (-2,\xi_1)$，使$F'(\xi) = 0$，即：$f'(\xi) = \frac{1}{2}$。

因此曲线段$y = f(x),(-2 \le x \le 2)$上至少有一点$(\xi, f(\xi))$的切线平行于$x - 2y + 6 = 0$。

（8 分）

18.　**证明：**$\int_0^x f(t)dt - x\int_0^1 f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - x(\int_0^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt)$

$$= (1-x)\int_0^x f(t)dt - x\int_x^1 f(t)dt$$　（4 分）

再由函数的单调递减性及积分中值定理知：$\exists\xi_1 \in (0,x), \exists\xi_2 \in (x,1)$

$$= x(1-x)f(\xi_1) - x(1-x)f(\xi_2) \ge x(1-x)(f(\xi_1) - f(\xi_2)) \ge 0$$　（8 分）

五、解答题（每小题 8 分共 16 分）

19．**解**：（1）由题意知，$x \ne 0$时，函数$f(x)$是连续函数；　　　　（1 分）

要使$f(x)$在$x = 0$处连续，当且仅当$\lim\limits_{x\to0^+}(a + e^{-\frac{1}{x}}) = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{e^x - 1} = b$，

由此解得：$a = 1, b = 1$时，函数$f(x)$在$x = 0$处连续，则函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$连续。

（4 分）

（2）$f(0^+) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1 + e^{-\frac{1}{x}} - 1}{x} = 0$　　　　（5 分）

$f(0^-) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{e^x - 1} - 1}{x} = -\frac{1}{2}$　　　　（6 分）

$f(0^+) \ne f(0^-)$，因此$f(x)$在$x = 0$处不可导。　　　　（8 分）

20.解：(1) 设容器内水面的高度为h由题意知：

$$\int_0^h \pi(\sqrt{y})^2 dy = \frac{1}{4}\int_0^4 \pi(\sqrt{y})^2 dy$$

$\pi\frac{h^2}{2} = 2\pi$ 解得：$h = 2$。　　　　（4 分）

（2）由题意知：$w = \int_0^2 \rho g(2 - y)\pi(\sqrt{y})^2 dy = \frac{4}{3}\rho g\pi$

如果要将题(1)中这部分水吸尽，外力需要作的功为$\frac{4}{3}\rho g\pi$。　（8 分）