院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《线性代数 A 》期末试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，则必有(　　　)

A． $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$；　　B． $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$；

C． $(AB)^2=A^2B^2$；　　D． $|AB|=|BA|$.

2．若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\-2&-6&-3&5\\3&9&3&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&3&3&-5\\1&2&3&-1\\1&0&3&7\end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$(　　　)

A．－12；　　B．12；　　C．　－3；　　D．　3．

3．设 A 是 n 阶矩阵，且 $|A|=0$，则(　　　)

A． A 的列秩等于零；　　B． A 中必有一列向量可由其余列向量线性表示；

C． A 中必有两个列向量对应成比例；　　D． A 的任一列向量可由其余列向量线性表示.

4． 已知 ξ_1， ξ_2 是齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\lambda I-A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同解向量，则下列向量中，必是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量为(　　　).

A． ξ_1；　　B． ξ_2；　　C． $\xi_1-\xi_2$；　　D． $\xi_1+\xi_2$.

5．已知 $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的两个不同的解， $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax=0}$ 的基础解系， $\boldsymbol{k_1,k_2}$ 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的通解是(　　　).

A． $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)$；　　B． $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{1}{4}\beta_1+\frac{3}{4}\beta_2$；

C． $k_1\alpha_1+k_2(\beta_2-\beta_1)$；　　D． $k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_1)+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

6． 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$， 则 $\big||A|A\big|=$____________.

7. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2tx_1x_3$ 为正定二次型，则参数 t 的取值范围为____________.

8. 设三阶方阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则 $\left|B^{-1}-2I\right|=$____________.

9．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为____________.

10. 已知向量空间 R^3 的一组基为 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$，则向量 $\beta=(2,0,0)^T$ 在上述基下的坐标为____________.

三、解答题（本大题共 6 小题，第 11−14 题每题 12 分；第 15−16 题每题 14 分，共 76 分）

11. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x+a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&x+a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&x+a_3&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&x+a_n\end{vmatrix}$.

12. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，若矩阵 X 和 Y 满足：$A(X+Y)B=2I$，$X(X+Y)=I$，其中 I 是单位矩阵，求矩阵 X 和 Y.

13. 设 $\alpha_1=(1,2,-1,3)^T$，$\alpha_2=(0,1,2,-1)^T$，$\alpha_3=(3,7,-1,8)^T$，$\alpha_4=(-1,0,5,-5)^T$. 求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

14. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&b\end{pmatrix}$ 相似，试确定 a,b 的值.

15. 设有方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+kx_2+x_3=k,\\x_1+x_2+k^2x_3=k,\end{cases}$ (1) k 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？(2) 当方程组有无穷多解时，求出其通解.

16. 求一个正交线性变换 $x=Py$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题(本题 4 分)

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵其中 $n<m$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n$，证明：矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.