

安徽大学 2021--2022 学年第二学期《线性代数 A》
期中试卷参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. C; 2. C; 3. A; 4. A; 5. D.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$; 7. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n!$; 8. 0; 9. $\frac{n(n-1)}{2} - k$; 10. $-\frac{16}{27}$.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 解: 由范德蒙行列式计算公式易知

$$(x-1)(x-2)(x+2)=0 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow x_1=1, x_2=2, x_3=-2 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

12. 解: 由 $|A|=-2, A^*A=|A|I=-2I \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\text{知 } A^*=-2A^{-1} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$-2A^{-1}BA=2BA-8I$$

$$B=4(I+A)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$13. \text{解: } |A-B|=\left|\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \\ 4\gamma_4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \\ 3\gamma_4 \end{vmatrix}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \\ 3\gamma_4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \\ 3\gamma_4 \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \\ 4\gamma_4 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}|A|-6|B|=-4. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$14. \text{解: } (A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A, |A|=|A^{-1}|^{-1}=\frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$A = (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, (A^*)^{-1} = 2A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$15 \text{ 解: } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ 1 & 0 & \cdots & 1-n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-n \\ 0 & \cdots & 1-n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= (-1)^{n+1} (-1)^{\tau(n-1 \ n-2 \cdots 21)} (1-n)^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} (n-1)^{n-1} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$16. \text{ 解: } \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由最后一行可知, 原方程组无解.10 分

四、证明题 (本题 10 分)

$$17. (1) A+B=AB \Rightarrow AB-A-B+I=I,$$

$$\text{故 } (A-I)(B-I)=I$$

故 $A-I$ 可逆.....5 分

$$(2) (A-I)^{-1} = B-I$$

$$\text{故 } (B-I)(A-I) = (A-I)(B-I) \Rightarrow AB=BA \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$