院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《线性代数 A》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

一、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $AX=B$ 是 n 元线性方程组，则此方程组有唯一解的充要条件是(　　).

A. $r(A)=r(\overline{A})$.　　　B. $r(A)=r(\overline{A})<n$.

C. $r(A)\neq r(\overline{A})$.　　　D. $r(A)=r(\overline{A})=n$.

2. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,-2,1$，则 $\left|A^2-A+I\right|=$（　　）.

A. 0.　　　B. 1.

C. 21.　　　D. 5.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}$ 为（　　）.

A. A^{-1}.　　　B. $10A$.

C. $\dfrac{1}{10}A$.　　　D. $\dfrac{1}{10}A^{-1}$.

4. A 为 n 阶方阵，方程组 $AX=0$ 有非零解，则 A 必有一个特征值为(　　).

A. 0.　　　B. 1.

C. -1.　　　D. 2.

5. n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值是 A 与对角矩阵相似的（　　）条件.

A. 充要.

B. 充分.

C. 必要.

D. 即非充分也非必要.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 向量组 $\alpha_1=(1,0,-1),\alpha_2=(-2,2,0),\alpha_3=(3,-5,2)$ 线性______关.

7. n 元排列中 $(n\geq 2)$，奇排列与偶排列各有 ______个.

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2^2-2x_2x_3$ 的矩阵为 ___________.

9．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&b\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$___，$b=$____.

10. 设 n 维线性空间中的向量 α 和向量 β 在基 ε_1，$\varepsilon_2,\cdots$，ε_n 下的坐标分别为 $(a_1,a_2,\cdots a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots b_n)$,则 $\alpha+\beta$ 在基 ε_1，$\varepsilon_2,\cdots$，ε_n 下的坐标为______________.

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 10 分，共 50 分）

11. 计算行列式 $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

12. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$AX=2X+A$,求矩阵 X.

13. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，η_1，η_2，η_3 均为它的解向量，已知 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求该方程组的通解.

14. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

15．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+4x_2x_3+2x_1x_3$ 为正定二次型，求 t 的取值范围.

四、分析计算题（本题 10 分）

16. 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(2,0,t,0),\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，求 t 的值.

五、证明题（本题 10 分）

17. 设方阵 A 与 B 相似，证明：$(\lambda I-A)^k$ 和 $(\lambda I-B)^k$ 相似.（k 为任意正整数）