安徽大学 数学科学学院
School of Mathematical Sciences, Anhui University

17-18 A卷

一.填空

1. 曲线 $y=x^2(x-1)^2$ 有 <u>2</u> 个拐点

解: $y=x^4-2x^3+x^2$, $y'=4x^3-6x^2+2x$, $y''=12x^2-12x+2=2(6x^2-6x+1)$

令 $y''=0 \Rightarrow x_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
$y=f(x)$	$\cup$	(x_1,y_1) 拐点	$\cap$	(x_2,y_2) 拐点	$\cup$

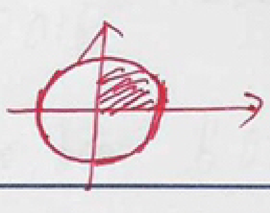
2. $f(x)=\int_{-1}^{x} t\cdot e^{|t|}dt$, $t\in[-1,1]$, 则 $f(x)$ $[-1,1]$ 上的最小值应在 $x=$ <u>0</u> 处取到

解: $f'(x)=x\cdot e^{|x|}$　　$f'(0)=0 \Rightarrow x=0$. 且

x	$[-1,0)$	0	$(0,1]$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↓	最小	↑

3. 设 $a>0$, 则 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=$ <u>$\frac{\pi a^2}{4}$</u>

解: $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}=\frac{\pi a^2}{4}$ (几何意义, 面积)



4. 广义积分 $\int_0^1 \ln x dx =$ $\underline{\ -1\ }$

解：$\int_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x dx$ （0为奇点）

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 dx\right] = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[1\cdot\ln 1 - \varepsilon\cdot\ln\varepsilon - (1-\varepsilon)\right]$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon - \varepsilon\cdot\ln\varepsilon - 1) = -1 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\cdot\ln\varepsilon \xlongequal{令t=\frac{1}{\varepsilon}} -1 - \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{t}}{t}$

$= -1 + \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = -1$

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x + x f(x)}{x^3} = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x^2} =$ $\underline{\ \frac{1}{6}\ }$

解：$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x + x f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{6} + x f(x) + o(x^3)}{x^3} = 0$

即：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{6} + f(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{6}}{x^2} = \frac{1}{6}$

解2：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x + x f(x) + \sin x - x}{x^3} = 0$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x + x f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

二. 选择

6. $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ R上连，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$，则 a.b满足（ D ）

A $a<0, b<0$， B $a>0, b>0$ C. $a\le 0, b>0$， D. $a\ge 0, b<0$

解：$f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在R上连续，故 $a+e^{bx}>0$，$\forall x\in R \Rightarrow a\geq 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{a+e^{bx}}=0$（若 $b\geq 0$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}(a+e^{bx})=c\neq 0$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{a+e^{bx}}=\infty$）

故 $\lim\limits_{x\to-\infty}(a+e^{bx})=\infty \Rightarrow bx\to+\infty\ (x\to-\infty) \Rightarrow b<0$

7. 设 $y=\int f(x)dx$ 中有倾角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线，则 $y=f(x)$ 的图形是（A）

A. 平行于 x 轴的直线　　B. 平行 y 轴的直线

C. $y=\sqrt{3}x$　　D. $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

解：$y=\int f(x)dx$ 中有 $y=\tan\frac{\pi}{3}\cdot x=\sqrt{3}x$，故 $f(x)=\sqrt{3}$ 即 $y=f(x)$ 为 $y=\sqrt{3}$

8. $f(x)$ 满足 $f''(x)-f'(x)+5f(x)=0$，且 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，在 $f(x)$ 在 x_0 处（B）

A. 取极小值　　B. 取极大值　　C. 附近单调减少　　D. 附近单调增加

解：$f''(x_0)-f'(x_0)+5f(x_0)=0 \Rightarrow f''(x_0)=f'(x_0)-5f(x_0)<0$

故 $f(x)$ 在 x_0 处，$f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$，取极大值

9. 曲线 $y=\int_0^x \sqrt{\sin t}\,dt$ $(0\le x\le \pi)$ 的弧长为(B)

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx$　B. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx$　C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx$　D. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}\,dx$

解: $L=\int_0^{\pi}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx$

10. $y=y(x)$ 是 $\begin{cases} y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=1 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ 解. 其中 $a(x)$, $b(x)$ 连续. 下列正确的是(　　)

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}$ 不存在.　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=1$　C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$　D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=\frac{1}{4}$

解: $y(0)=0$, $y'(0)=0$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}y'(x)=0$, 且 $y''(0)=1$, 又 $a(x)$, $b(x)$ 连续, 故 $y''(x)$ 连续.
故 $\lim\limits_{x\to 0}y''(x)=1$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{y'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{y''(x)}{2}=\frac{1}{2}$