安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．C　　3．D　　4．A　　5．B

二．**填空题（每小题 3 分，共 15 分）**

6．0.8　　7．$\frac{3}{10}$　　8．1　　9．$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$　　10．$\frac{1}{6}e^{-1}$

三．计算题（每小 10 分，共 60 分）

11．【解】设 $B=\{$从乙袋中取到的球是白球$\}$

$A=\{$从甲袋中任取一个球是白球$\}$

则 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

………………（10 分）

12．【解】(1) $\int_0^2\frac{k}{4}(2-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k=1\ \Rightarrow\ k=2$

………………（4 分）

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & x<0\\ x-\frac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

………………（10 分）

13．【解】（1）

$P\{X+Y=0\}=P\{X=-1,\ Y=1\}+P\{X=1,\ Y=-1\}=0.1+a=0.3$，得 $a=0.2$

另一方面，$a+b=0.5$，得 $b=0.3$

………………（5 分）

（2）$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$

………………（10 分）

14．【解】$X\sim N(160,\sigma^2)$，则 $\frac{X-160}{\sigma}\sim N(0,1)$

$P\{120<X\le 200\}=P\left\{\frac{120-160}{\sigma}<\frac{X-160}{\sigma}\le\frac{200-160}{\sigma}\right\}$

$=\Phi(\frac{40}{\sigma})-\Phi(\frac{-40}{\sigma})=2\Phi(\frac{40}{\sigma})-1$，依题意，$2\Phi(\frac{40}{\sigma})-1=0.8$，

即 $\Phi(\frac{40}{\sigma})=0.9=\Phi(1.282)$，故 $\frac{40}{\sigma}=1.282$，解得 $\sigma\doteq 31.2$

15．【解】(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，

当 $x\le 0$ 时， $f_X(x)=0$；

当 $x>0$ 时， $f_X(x)=\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$，

所以 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$.

………………（5 分）

(2) $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{1/2}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1+\frac{1}{\mathrm{e}}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

………………（10 分）

16．【解】依题意，(X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in G\\ 0,(x,y)\notin G\end{cases}$

显然，$P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$，$P\{X>2Y\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$

$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$

$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$

同理可求 $P\{U=1,V=0\}=\frac{1}{4}$，$P\{U=1,V=1\}=\frac{1}{2}$

故 (U,V) 的联合分布列为

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

………………（10 分）

四．证明题（**每小题 10 分，共 10 分**）

17．【证明】 $f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-5\ln X\le y\}=P\{X\ge e^{-y/5}\}=1-P\{X<e^{-y/5}\}$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=1-e^{-y/5}$；

$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$，故 Y 服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布.

………………（10 分）