安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《线性代数 A》模拟题（二）参考答案

一、选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、C；　2、C；　3、D；　4、A；　5、D.

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、-4；　7、$\frac{1}{2}(A+2I)$；　8、$-\frac{1}{4}$；　9、$\begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}$；　10、$(1,1,3)^T$.

三、分析计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11、解：方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 2a+4 \end{array}\right).$$

讨论：1）当 $a=1$ 时，方程组无解；

2）当 $a=-2$ 时，方程组有无穷多个解，其解为：

$X=k(1,1,1)^T+(-1,-1,0)^T$，其中 k 为任意实数.

3）当 $a\neq -1$ 且 $a\neq -2$ 时，方程组有唯一解，解为 $X=(-1,\frac{1}{a-1},\frac{2}{1-a})^T$.

12、解：　设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$ 即

$$\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ x_2-x_3=b \\ 2x_1+3x_2+ax_3=4 \end{cases}$$

对方程组的增广矩阵作初等变换得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

（1）当 $b\neq 2$ 时，方程组无解，故 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

（2）当 $b=2,a\neq 1$ 时，方程组有唯一解，解得 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=0 \end{cases}$，于是 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯

一表示为：$\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$.

（3）当$b=2,a=1$时，方程组有无穷多个解，此时有

$\beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3$，其中$k$为任意实数.

13、解：（1）根据题意，有$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&0&1&-2\\0&1&-2&6\end{pmatrix}$，从而

基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&0&1&-2\\0&1&-2&6\end{pmatrix}$.

（2）已知$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)A^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}$，故$\alpha$在基

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标为$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&0&0\\2&-1&0&0\\7&-5&3&1\\2&-\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\4\\24\\\frac{15}{2}\end{pmatrix}$.

14、解：将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$排成一个矩阵，并对其作初等行变换，化其为阶梯形矩阵：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是向量组的秩为3，极大线性无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$或者$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$，或者$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

也可以是$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$.

15、解：设矩阵A属于特征值为 3 的特征向量为$\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则由于$A$是实对称

矩阵，α_3与α_1,α_2正交，于是有方程组$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$，

取$\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则令$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$，于是有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

故有$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$.

16、解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$，其特征多项式为：

$|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-9)$，故$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$，求解齐次方程组$(0I-A)X=0$，得基础解系为：

$\alpha_1=(2,1,0)^T,\alpha_2=(-2,0,1)^T$.

对于$\lambda_3=9$，求解齐次方程组$(9I-A)X=0$，得基础解系为：

$\alpha_3=(1,-2,2)^T$.

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位正交化得到：

$\beta_1=(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0)^T,\beta_2=(-\frac{2}{3\sqrt5},\frac{4}{3\sqrt5},\frac{5}{3\sqrt5})^T,\beta_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$.

令$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则$Q$是一个正交矩阵，所作的正交线性变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt5}{5}&-\frac{2\sqrt5}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{\sqrt5}{5}&\frac{4\sqrt{15}}{15}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

将二次型化为标准型为$0y_1^2+0y_2^2+9y_3^2$.

四、证明题（共10分）

17、证明：设向量组$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$线性相关，则存在不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得$k_1(\alpha_1+\beta)+k_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+k_t(\alpha_t+\beta)=0$，即有

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+(k_1+k_2+\cdots k_t)\beta=0$. 而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是齐次线性方程组$AX=0$一个基础解系，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性无关，从而$k_1+k_2+\cdots k_t\neq 0$，

于是$\beta=-\dfrac{k_1}{k_1+k_2+\cdots k_t}\alpha_1--\dfrac{k_2}{k_1+k_2+\cdots k_t}\alpha_2-\cdots--\dfrac{k_t}{k_1+k_2+\cdots k_t}\alpha_t$. 与$\beta$不是方程组$AX=0$的解矛盾！从而假设不成立，即向量组$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$线性无关.