安徽大学 2022—2023 学第一学期

《高等数学 A 一》期末答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、D　　3、C　　4、A　　5、A

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 2023

7. $x^x(\ln x+1)dx$

8. $-\dfrac{x\sin x+2\cos x}{x}+C$

9. $\dfrac{\pi}{2}$

10. $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$

三、计算题（共 60 分，每题 10 分）

11. **解：由定积分定义可知**

$$\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

12. 解

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x}{x}-1\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$$

13 解：

$x=\sec t$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sec t\tan t}{\sec^2 t\tan t}dt=\int\cos tdt$$

$$=\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$

14 解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\cos^2\frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}=u,x\frac{du}{dx}+u=u+\cos^2 u$$

$$\tan u=\ln|x|+c$$

$$\because y(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \tan\frac{y}{x}=\ln|x|+1$$

15 解：

$f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$，

$0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)>0$；$x>\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$

所以，$x=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内的极大值点

$f\left(\sqrt{2}\right)=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\mid_0^2-\int_0^2 e^{-t}dt=1+e^{-2}$，

$f(0)=0$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=1$

经过比较，得 $f(x)$ 的最大值是 $f\left(\sqrt{2}\right)=1+e^{-2}$，最小值是 $f(0)=0$

16 解：

$y=\sqrt{x-1}$

切点（$x_0,\sqrt{x_0-1}$)

$y-\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$

$\because x=0,y=0$

$\therefore x_0=2,y_0=1$

$\therefore$切线方程为$y=\frac{x}{2}$

$S=\int_0^1(1+y^2-2y)dy=\frac{1}{3}$

$V=\pi\int_0^1(\,(1+y^2)^2-(2y)^2)dy=\frac{8}{15}\pi$

四、证明题（共 10 分，每小题 5 分）

17 解：令

$F(x)=xf(x)$

$F(1)=f(1)=2\frac{1}{2}\eta f(\eta)$(积分中值定理，$\eta\in$（0, 1））

$=F(\eta)$

$\therefore$由罗尔中值定理可知，$\exists\xi\in$（η, 1），$F'(\xi)=0$

$\therefore f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$

18 解

$(1)f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h$，$0<\theta(h)<1,h\in(-\delta,\delta)$

$(2)f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)$

$(1)-(2):$

$f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h-f'(x_0)\cdot h=\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)$

$\frac{f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h-f'(x_0)\cdot h}{h^2}=\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{o(h^2)}{h^2}$

$\lim_{h\to0}\theta(h)\frac{f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h-f'(x_0)\cdot h}{h^2\theta(h)}=\lim_{h\to0}(\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{o(h^2)}{h^2})$

$\lim_{h\to0}\theta(h)\bullet f''(x_0)=\frac{1}{2}f''(x_0)$

$\because f''(x_0)\neq0$

$\lim_{h\to0}\theta(h)=\frac{1}{2}$