18-19 A卷

一.填空

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2018}\right)^n=$ $\underline{e^{2019}}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2018}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2018+2019}{n-2018}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2019}{n-2018}\right)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2019}{n-2018}\right)^{\frac{n-2018}{2019}}\right]^{\frac{2019n}{n-2018}}=e^{2019}$

2. $f(x)=\frac{1}{1-x}$, 则 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$

解: $f(x)=(1-x)^{-1}$, $f'(x)=(-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1)=(1-x)^{-2}$

$f''(x)=(-2)\cdot(1-x)^{-3}\cdot(-1)=2(1-x)^{-3}$, $f'''(x)=2\cdot(-3)\cdot(1-x)^{-4}\cdot(-1)=3!\cdot(1-x)^{-4}$

由数学归纳法, $f^{(n)}(x)=n!\,(1-x)^{-(n+1)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

3. $y=y(x)$ 由 $y=\cos(x+y)$ 所确定, 则 $dy=$ $\underline{\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}dx}$

解: $y=\cos(x+y)$

则: $y'=-\sin(x+y)\cdot(1+y')$

$\Rightarrow[1+\sin(x+y)]y'=-\sin(x+y)$

即 $y'=\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$

故 $dy=\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}dx$

4. $C: y=3x^5+5x^4-2x+4$ 的拐点 $\underline{(-1,8)}$

解：$y'=15x^4+20x^3-2$，$y''=60x^3+60x^2=60x^2(x+1)=0$

$x_1=0$，$x_2=-1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$
$y=f(x)$	$\cap$	$(-1,8)$ 拐点	$\cup$	$(0,4)$ 非拐点	$\cup$

5. 广义积分 $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \underline{\frac{\pi}{3}}$

解：原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$（1为奇点）

而 $\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx \xlongequal{x=\sec t} \int_{\arccos\frac{1}{1+\varepsilon}}^{\arccos\frac{1}{2}} \frac{1}{\sec t\cdot\tan t}\sec t\cdot\tan t\,dt=\arccos\frac{1}{2}-\arccos\frac{1}{1+\varepsilon}$

$\therefore$ 原式 $=\arccos\frac{1}{2}-\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\arccos\frac{1}{1+\varepsilon}=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$

二.选择

6. 广义积分 $\int_1^{+\infty}x^p dx$ 收敛的充要条件是（D）

A $-1<p<0$　B $p>1$　C. $0<p<1$　D. $p<-1$

解：$\int_1^{+\infty}x^p dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{-p}}dx$ 收敛 $\Leftrightarrow -p>1 \Leftrightarrow p<-1$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^k}=C$，其中 k, C 均为实常数，且 $C\neq 0$，则（D）

A. $k=4, C=-\frac{1}{24}$　B. $k=4, C=\frac{1}{24}$　C. $k=5, C=-\frac{1}{120}$　D. $k=5, C=\frac{1}{120}$

解：$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$

$\therefore \sin x-x+\frac{x^3}{6}=\frac{x^5}{120}+o(x^5)$

故 $\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^4}=0}_{(不满足C\neq 0)}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\frac{1}{120}$

（或 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x+x}{k(k-1)x^{k-2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}=C\neq 0 \Rightarrow k-3=2$ 即 $k=5$，且 $C=\frac{\frac{1}{2}}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{1}{120}$）

8. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则下列正确的是（A）

A. $F(x)$ 是偶函数当且仅当 $f(x)$ 是奇函数 ✓

B. $F(x)$ 是奇函数当且仅当 $f(x)$ 是偶函数 × $F(x)=x^3+1$，$f(x)=3x^2$ 偶

C. $F(x)$ 是周期函数当且仅当 $f(x)$ 是周期函数 × $F(x)=\sin x+2x$，$f(x)=\cos x+2$ 周期

D. $F(x)$ 是单调函数当且仅当 $f(x)$ 是单调函数 × $F(x)=x^2$，$f(x)=2x$ 单增

A. $F(x)$ 偶 $\Rightarrow F'(x)=f(x)$ 奇。且反之，$f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$　$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+C$

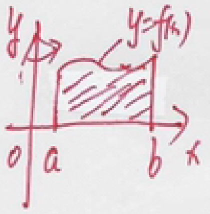
$\overset{t=-u}{=}\int_0^x f(-u)d(-u)+C=\int_0^x f(u)du+C$

$=F(x)$ 为偶函数。

9. $y=f(x)$ $[a,b]$ $(0<a<b)$ 连续可导，且 $f(x)>0$，则：$y=f(x)$，$x=a$，$x=b$，x轴围成图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为（A）

A. $2\pi\int_a^b x f(x)dx$ B. $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ C. $\pi\int_a^b [f(x)]^2dx$ D. $2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

绕x轴旋转 侧面积 绕x轴旋转 体积 绕y轴旋转 侧面积



见课本公式

$V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)dx \quad (f(x)>0)$

10. $f(x)=\begin{cases} x^5\sin\frac{1}{x} & x\neq0 \\ 0 & x=0\end{cases}$，下列正确的是：（B）

A. $f(x)$ $x=0$处有2阶导数，且$f''(x)$在$x=0$处不连续 ×

B. $f(x)$ $x=0$ 有2阶导数，且$f''(x)$ $x=0$ 连续 ✓

C. $f(x)$ $x=0$ 有3阶导数，且$f'''(x)$ $x=0$ 不连续

D. $f(x)$ $x=0$ 有3阶导数，且$f'''(x)$ $x=0$ 连续.

$f'(x)=\begin{cases} 5x^4\sin\frac{1}{x}-x^3\cos\frac{1}{x} & x\neq0 \\ \lim\limits_{x\to0}\frac{x^5\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=0 & x=0\end{cases}$

$f''(x)=\begin{cases} 20x^3\sin\frac{1}{x}-5x^2\cos\frac{1}{x}-3x^2\cos\frac{1}{x}-x\sin\frac{1}{x} \\ =20x^3\sin\frac{1}{x}-8x^2\cos\frac{1}{x}-x\sin\frac{1}{x} & x\neq0 \\ \lim\limits_{x\to0}\frac{5x^4\sin\frac{1}{x}-x^3\cos\frac{1}{x}}{x-0}=0 & x=0\end{cases}$

且 $\lim\limits_{x\to0}f''(x)=\lim\limits_{x\to0}(20x^3\sin\frac{1}{x}-8x^2\cos\frac{1}{x}-x\sin\frac{1}{x})=0=f''(0)$

而 $f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{20x^3\sin\frac{1}{x}-8x^2\cos\frac{1}{x}-x\sin\frac{1}{x}}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}(20x^2\sin\frac{1}{x}-8x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x})$ 不存在