安徽大学 2020 —2021 学年第 2 学期

《 线性代数 A 》（A 卷）期末考试试题参考答案

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. D； **2.** A； **3.** B； **4.** C； **5.** B.

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 625； **7.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； **8.** 6； **9.** 1； **10.** $(1,1,-1)^T$.

三、解答题（本大题共6小题，其中第11-14题每题12分；第15-16每题14分，共76分）

11. 解：将第一行的（-1）倍加到以后各行，有

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

12. **解**：由 $A(X+Y)B=2I$，可知 $X+Y=2A^{-1}B^{-1}=2(BA)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，

又因为 $X^2+XY=I$，所以 $X=(X+Y)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，

进而 $Y=(X+Y)-X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. **解**：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

则 $R(\boldsymbol{A})=2$，从而 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}=2$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为该向量组的一个极大线性无关组，并且 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

14. 解：由于 A 与 B 相似，从而有相同的特征值和迹，于是

$$\begin{cases} |A|=|B|, \\ tr(A)=tr(B). \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -2=2(8+3b), \\ 2+a=5+b. \end{cases}$$

故 $a=0,b=-3.$

15. 解法 1　对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$B=(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&k&1&k\\1&1&k^2&k\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&k-1&0&k-1\\0&0&k^2-1&k-1\end{array}\right)$$

（1）当 $k=-1$ 时，$R(A)=2\neq R(B)=3$，方程组无解；

当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -1$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解；

当 $k=1$ 时，有 $B\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$，即 $R(A)=R(B)=1<3$，故方程组有无穷多组解.

（2）当 $k=1$ 时，方程组有无穷多组解，此时原方程组的同解方程组为 $x_1=1-x_2-x_3$，其导出组 $x_1=-x_2-x_3$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是原方程组的通解为

$$x=\boldsymbol{\eta}^*+c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

解法 2　（克莱姆法则）系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&k&1\\1&1&k^2\end{vmatrix}=(k+1)(k-1)^2$$

（1）当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -1$，由克莱姆法则方程组有惟一解；

当 $k=-1$ 时，

$$B=(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

则 $R(A)=2\neq R(B)=3$，方程组无解；

当 $k=1$ 时，

$$B=(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

即 $R(A)=R(B)=1<3$，故方程组有无穷多组解.

（2）以下同**解法 1**.

16. 解：二次型 f 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，特征方程 $\left|A-\lambda I\right|=(2-\lambda)(\lambda+1)^2=0$

的根为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=2$ 时，由 $(A-2I)x=0$, $A-2I\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

单位化得 $p_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，由 $(A+I)x=0$, $A+E\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系

$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 先正交再单位化得 $p_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $p_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$;

所以所求正交矩阵 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，正交变换 $x=Py$ 将二次型化

为标准形 $f=2{y_1}^2-{y_2}^2-{y_3}^2$.

四、证明题(本题 4 分)

17. 证法 1（矩阵秩）

只需证 $R(\boldsymbol{B}_{m\times n})=n$．$\because$ $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n$，$\therefore$ $n=R(\boldsymbol{I}_n)=R(\boldsymbol{AB})\le R(\boldsymbol{B}_{m\times n})\le n$，即 $R(\boldsymbol{B}_{m\times n})=n$，从而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

证法 2（方程组）只需证 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

考虑两方程组

$$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0} \tag*{①}$$

$$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}\text{，即 }\boldsymbol{Ix}=\boldsymbol{0}. \tag*{②}$$

显然，①的解一定是②的解.

由克莱姆法则或线性齐次方程组解的判定定理可知:②只有零解,又①的解均是②的解,故①只有零解，即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.