安徽大学 2017—2018 学年第一学期
《高等数学 A（一）》（A 卷）期末考试试题
参考答案及评分标准

温馨提示：

1. 考试考务中心告知，安大本学期选用教材《高等数学》（理工类，上册，第 3 版，安徽大学出版社）。考虑到安徽大学已经举行过期中考试，结合教学大纲要求和教学进度安排，本卷更加关注期中考试以后的教学内容。

2. 下文中的**参考答案及评分标准**仅供参考，允许学生有其它解法，允许学生合理省略相关过程，允许学生使用自学的理论及知识解答本试题。

3. 阅卷时，阅卷人员应该严格按照分工和要求，坚持**公平**、**公正**原则，做到**给分有理**、**扣分有据**，确保评卷准确无误。

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 2　　2. 0　　3. $\pi a^2/4$　　4. -1　　5. 1/6

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. D　　7. A　　8. B　　9. B　　10.C

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

11. 解：直接计算得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\frac{b}{a}\cot t$$ （2 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-\frac{b}{a}\cot t)=\frac{(-\frac{b}{a}\cot t)'}{x'(t)}=-\frac{b\csc^2 t}{a^2\sin t}$$

$$k=\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|/(1+(\frac{dy}{dx})^2)^{3/2}=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$k\big|_P=\frac{ab}{(a^2\sin^2\frac{\pi}{4}+b^2\cos^2\frac{\pi}{4})^{3/2}}=\frac{2\sqrt{2}ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$ （8 分）

12. 解：$I=\int e^{-x}\sin x d x=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x d x$ （3 分）

$=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x d x$

$=-e^{-x}(\sin x+\cos x)-I+2C$

$I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ （8 分）

13. 解： $I=\int_{-1}^{1}\left[(x+|x|)^2+x^3e^{x^2}\right]dx$

$=\int_{-1}^{1}(x+|x|)^2\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x+|x|)^2\,dx+\int_{0}^{1}(x+|x|)^2\,dx$

$=\int_{0}^{1}(2x)^2\,dx$ （7 分）

$=\frac{4}{3}$ （8 分）

14. 解：先对被积函数进行代数分解，得到：

$\frac{x}{(1+x)^3}=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}$ （4 分）

$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\,dx=\int_{0}^{+\infty}(\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3})dx$

$=(\frac{-1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2})\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2}$ （8 分）

15. 解：在 $f(1/x)$ 的表达式中，令 $y=\frac{1}{t},\ dt=-\frac{1}{y^2}dy$，

因此， $f(1/x)=\int_{1}^{1/x}\frac{\ln t}{1+t}dt=\int_{1}^{x}\frac{\ln y}{y(1+y)}dy=\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{t(1+t)}dt$ （5 分）

所以， $f(x)+f(1/x)=\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{t(1+t)}dt=\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{t}dt$

$=\frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_{1}^{x}=\frac{1}{2}\ln^2 x,\ x>0$ （8 分）

16.解：（1）由 $y(x)=e^x+\int_0^x t\,y(t)dt-x\int_0^x y(t)dt$ 可知 $y(0)=1$

由 $y'(x)=e^x-\int_0^x y(t)dt$ （*）

可得 $y'(0)=1$. （3 分）

（2）对（*）式再求导，得到：

$y''(x)=e^x-y(x)$，也即 $y''(x)+y(x)=e^x$. （5 分）

（3）对应的齐次方程的通解为：

$\tilde{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$，

直接观察可得非其次方程的一个特解为： $y_0(x)=\frac{1}{2}e^x$，

所以 $y(x)=\tilde{y}(x)+y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x/2$，

根据初始条件可得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，所以 $y(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$ （8 分）

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 解：（1）设切点 A 的坐标为 (a,a^2)，则过 A 点的切线斜率为 $y'\big|_{x=a}=2a$，

切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，

切线与 x 轴的交点为 $(\dfrac{a}{2},0)$

平面图形 S 的面积为 $S=\int_0^a x^2dx-\dfrac{a^3}{4}=\dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a^3}{4}=\dfrac{a^3}{12}$

由题设 $S=1/12$，解得 $a=1$

所以切点 A 的坐标为 $(1,1)$ （5 分）

（2）切线方程为 $y-1=2(x-1)$，也即 $y=2x-1$ (6 分）

（3）旋转体的体积为：

$$V=\pi\int_0^1((x^2))^2dx-\pi\int_{1/2}^1(2x-1)^2dx$$
$$=\pi\left(\frac{1}{5}x^5\Bigg|_0^1-\frac{1}{6}(2x-1)^3\Bigg|_{1/2}^1\right)=\frac{\pi}{30}$$
(8 分）

18. 解：根据题意，可列出如下微分方程：

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=r(1-\frac{1}{K}y(t))$$
（4 分）

这是一个可分离变量微分方程，解得：

$y(t)=\dfrac{CK}{C+(K-C)e^{-rt}}$ （或 $y(t)=\dfrac{CK}{C+e^{-rt}}$ 或 $\ln\dfrac{y}{K-y}=rt+C$ ），

代入初始条件，可求得 $C=y_0$（或 $C=\dfrac{y_0}{K-y_0}$ ），

从而 $y(t)=\dfrac{Ky_0}{y_0+(K-y_0)e^{-rt}}$，$t\ge 0$

直接计算可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=K$． （8 分）

五、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

19.证明：（1）根据 Taylor 定理，存在 ξ_1,ξ_2，其中 ξ_1 在 x_1 和 x_0 之间，ξ_2 在 x_2 和 x_0 之间，使得

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)\left[x_1-x_0\right]+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)\left[x_1-x_0\right]^2$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)\left[x_2-x_0\right]+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)\left[x_2-x_0\right]^2$$ （6 分）

（2）

$$\begin{aligned}
\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)&=\lambda_1 f(x_0)+\lambda_1 f'(x_0)(x_1-x_0)+\lambda_2 f(x_0)+\lambda_2 f'(x_0)(x_2-x_0)\\
&\quad+\frac{1}{2!}\lambda_1 f''(\xi_1)\left[x_1-x_0\right]^2+\frac{1}{2!}\lambda_2 f''(\xi_2)\left[x_2-x_0\right]^2\\
&=(\lambda_1+\lambda_2)f(x_0)+\frac{1}{2!}\lambda_1 f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2+\frac{1}{2!}\lambda_2 f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2\\
&=f(x_0)+\frac{1}{2!}\lambda_1 f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2+\frac{1}{2!}\lambda_2 f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2\\
&\ge f(x_0)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)
\end{aligned}$$

这就证明了：

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$$ （8 分）

20.证明：（1）作变换$t=nx,\ dx=\frac{1}{n}dt$，从而

$$\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}\left|\sin nx\right|dx=\frac{1}{n}\int_{2(i-1)\pi}^{2i\pi}\left|\sin t\right|dt$$

注意到被积函数是周期为π的周期连续，积分区间长度为2π。因此我们有：

$$\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}\left|\sin nx\right|dx=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left|\sin t\right|dt=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|dt+\frac{1}{n}\int_{\pi}^{2\pi}\left|\sin t\right|dt$$

$$=\frac{1}{n}\left[\int_0^{\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)\,dt\right]=\frac{1}{n}\left[-\cos t\Big|_0^{\pi}+\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]=\frac{4}{n}$$ （6 分）

（2）利用定积分的定义、积分中值定理，可得：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\left|\sin nx\right|dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}f(x)\left|\sin nx\right|dx\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}\left|\sin nx\right|dx\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{4}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{2\pi}{n}\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx
\end{aligned}$$ （8 分）