安徽大学 20 22 —20 23 学年第 1 学期

《 线性代数 A 》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D　　2. A　　3.B　　4.D　　5.B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 3　　7. 2　　8. 2　　9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　10. 32

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 后一列减去前一列，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5$$ ...（10 分）

12.

由题意，$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ -2 & 1 & 3 & & 1 & \\ 3 & -1 & 2 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & -1 & 5 & -3 & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

所以，其逆矩阵为$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{13}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$...（10 分）

13. 方程组系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2$$ ，

所以 $a\neq -2$且$a\neq 1$ 时 ，$|A|\neq 0$方程组有唯一的解，

$a=1$时，$r(A)=1, r(\overline{A})=2$，所以此时方程组无解，

$a=-2$时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，所以此时方程组有解且不唯一。. . .　　（6 分）

此时方程组增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

所以，导出组基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

非齐次方程组的一个特解是$\eta_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

所以方程组的通解为$k_1\eta_1+\eta_0$，其中$k_1\in R$。. . .（10 分）

14.

由斯密特正交化公式，

$\beta_1=\alpha_1=(1\quad 1\quad 0)$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1=(1\quad 0\quad 1)-\frac{1}{2}(1\quad 1\quad 0)=\left(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 1\right),$$

$$\beta_3=(0\quad 1\quad 1)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 1\right)-\frac{1}{2}(1\quad 1\quad 0)=\left(-\frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}\right),...$$　　（6 分）

单位化得到

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\quad 1\quad 0),$$

$$\gamma_1=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{\sqrt{6}}{6}(1\quad -1\quad 2),$$

$\gamma_1=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, ...（10 分）

15.

$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$，所以 A 的特征值为 0，1，-1， ... （2 分）

$\lambda=0$时，$(\lambda I-A)X=0$ 的基础解系为$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化得 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=1$时，$(\lambda I-A)X=0$ 的基础解系为$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$\lambda=-1$时，$(\lambda I-A)X=0$ 的基础解系为$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，

单位化得 $\beta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ ...（8 分）

记 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$,

此时 $PAP^{-1}=\Lambda$.

... （10 分）

16.

$t{x_1}^2+2x_1x_3+2x_2^2+t{x_3}^2$ 的矩阵为$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$， ...（2 分）

则二次型各阶顺序主子式分别为

$A_1=|t|=t>0$

$A_2=\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2t>0$

$A_3=\begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix}=2\left(t^2-1\right)>0$ ...（8 分）

联立得$t>1$. ... （10 分）

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 A 为方阵，

令 $H=\dfrac{1}{2}(A+A^T),G=\dfrac{1}{2}(A-A^T)$ （2 分）

则$A=H+G$，且 $H=H^T,G=-G^T$ 。 （5 分）

18. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，$\lambda_n$为 A 的特征值，A 为n阶正定矩阵，则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$均大于零，

$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots$，$\lambda_n+1$ 为$A+I$的特征值，且$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots$，$\lambda_n+1$均大于 1,

... （3 分）

所以$|A+I|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$ 。 ... （5 分）