安徽大学 2021--2022 学年第一学期《线性代数 A》
期末试卷（A 卷）参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D；2. C；3.C；4.A；5 .B.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6.相关；7. $\dfrac{n!}{2}$；8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$；9. $a=0,b=-3$；10. $\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n,\right)$.

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 解:

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \left(2x+2y\right)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \text{……..5 分}$$

$$=\left(2x+2y\right)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix} = \left(2x+2y\right)\begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix} \text{……..8 分}$$

$$=-2\left(x^3+y^3\right) \text{……..10 分}$$

12. 解：由题意知$\left(A-2E\right)X=A$

$\therefore X=\left(A-2E\right)^{-1}\cdot A$，……………………………4 分

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot A \text{ ……………………………7 分}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ ……………………………………………………….. .10 分}$$

13.解：由题意知，导出组的基础解系中仅含有一个解向量…………2 分

$\because A\left(\eta_2+\eta_3\right)=2b, A\left[\frac{1}{2}\left(\eta_2+\eta_3\right)\right]=b$，$\therefore \frac{1}{2}\left(\eta_2+\eta_3\right)$ 为非齐次方程组的特解 ……………………………….5 分

$\therefore \eta_1-\frac{1}{2}\left(\eta_2+\eta_3\right)=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}^T$是导出组的解，即基础解系. …………8 分

所求通解为$\eta_1+c\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}^T$ $\left(c\text{为任意常数}\right)$. …………………….. .10 分

14. 解：特征多项式为$(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ ……………………………2 分

对应于特征值$\lambda=2$的特征向量为$k(1,1,1)$，$k\neq 0$，将$(1,1,1)$单位化为$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

对应于特征值$\lambda=-1$的特征向量为$k_1(-1,1,0)+k_2(-1,0,1)$，

将$(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$正交化

$$\beta_1=(-1,1,0),\ \beta_2=(-1,0,1)-\frac{1}{2}(-1,1,0)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$$

再单位化为$\eta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\eta_2=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$，令

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$ ……………………………8 分

则 $Q^{-1}AQ=diag\{2,-1,-1\}$ ……………………………10 分

15. 解：该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ …………………5 分

A的各阶顺序主子式

$$\det A_1=1>0, \det A_2=4-t^2>0, \det A_3=t\left(4-t\right)>0.$$

$\Rightarrow 0<t<2$.　　…………………10 分

四、分析计算题（本题 10 分）

16. 解：构造矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & t & 0\\ 0 & -4 & 5 & -2\end{pmatrix}$，……………4 分

因为 $r(A)=2$

故 A 的任意一个三阶子式均为零，$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & t\\ 0 & -4 & 5\end{vmatrix}=0\Rightarrow t=3$.……………10 分

五、证明题（本题 10 分）

17. 证明: 因为 A 与 B 相似，故存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$ ……2 分

$\lambda I-B=\lambda I-P^{-1}AP=P^{-1}\left(\lambda I-A\right)P$，…………………5 分

$\left(\lambda I-B\right)^k=P^{-1}\left(\lambda I-A\right)P\cdot P^{-1}\left(\lambda I-A\right)P\cdots P^{-1}\left(\lambda I-A\right)P$ ，

$=P^{-1}\left(\lambda I-A\right)^k P$ ………………………8 分

故矩阵 $\left(\lambda I-A\right)^k$ 和 $\left(\lambda I-B\right)^k$ 相似. ………………………10 分