安徽大学 2017—2018 学年第一学期

《高等数学 A（一）》（B 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．可去；　**2**．1；　**3**．$x+e^x+C$；　**4**．$\ln(1+\sqrt{2})$；　**5**．$\frac{1}{5}$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．D；　**7**．A；　**8**．B；　**9**．C；　**10**．A

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

11．解：利用洛必达法则及无穷小量的等价替换，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\frac{\arctan t^2}{t}dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\arctan(\sin x)^2}{\sin x}\cos x}{2x}$$ ………………… 4 分

$$=\lim_{x\to0}\frac{a\mathrm{rctan}(\sin x)^2}{2x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x\cdot x}$$

$$=\frac{1}{2}$$ ………………… 8 分

12．解：利用定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$ ………………… 5 分

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$ ………………… 8 分

13．解：由 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$，知

$$e^x-(mx^2+nx+1)=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)-(mx^2+nx+1)$$

$$=(1-n)x+(\frac{1}{2}-m)x^2+o(x^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad 5 分$$

依题意，有$1-n=0$，$\frac{1}{2}-m=0$，

故$m=\frac{1}{2},n=1$. ………………… 8 分

14．解：$\int\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\int\ln x d(\frac{1}{x+1})$ ………………… 2 分

$=-\frac{1}{x+1}\ln x+\int\frac{1}{x(x+1)}dx=-\frac{1}{x+1}\ln x+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx$ ………………… 6 分

$=-\frac{1}{x+1}\ln x+\ln|\frac{x}{x+1}|+C$ ………………… 8 分

15．解：由对称区间上奇函数的定积分性质，

$I=\int_{-1}^{1}\frac{2018+x^{2017}}{\sqrt{4-x^2}}dx=2\times2018\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ ………………… 4 分

$=2018\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}dx=2018\times2\times\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{2018}{3}\pi$ ………………… 8 分

16．解：该方程对应齐次方程的特征方程 $r^2+2r+1=0$，故特征根$r_{1,2}=-1$，

所以相应齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$， …………… 4 分

$\lambda=1$不是特征根，故设特解为 $y^*=(a+bx)\mathrm{e}^{-x}$，代入原方程，

$4b+4(a+bx)=x$，$\Rightarrow$ $a=-\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{4}$，于是 $y^*=\frac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^{-x}$，

所以所求通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^{-x}$. ………………… 8 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17．解：设切点为$(x_0,\sqrt{x_0-2})$，

切线斜率为$\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}=\frac{\sqrt{x_0-2}-0}{x_0-1}$，得 $x_0=3$， ………………… 4 分

所以 $V_x=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot(3-1)-\pi\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$ ………………… 10 分

18．解：（1）原方程中令$x=0$，得 $f(0)=0$.

原方程两边对x求导，$xf(x)=2x+f'(x)$，故 $f'(0)=0$ ………………… 6 分

（2）对方程$xf(x)=2x+f'(x)$，记$y=f(x)$，则有一阶线性方程$y'-xy=2x$，

通解为 $y=\mathrm{e}^{\int x\,\mathrm{d}x}(\int 2x\mathrm{e}^{\int -x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}(\int 2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x+C)$

$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}(-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}+C)=-2+C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$，

由原方程得 $f(0)=0$，故 $C=2$，

所以 $f(x)=2(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2})$. .... 10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

19. 证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx$ .... 2 分

令 $x=\pi-t$，有

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f(\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi f(\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx$$

故 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$. .... 6 分

20. 证明：令 $F(x)=xf(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导.

又由积分中值定理知，至少存在一点 $\eta\in[0,\frac{1}{2}]$，使得

$$f(1)=2\eta f(\eta)(\frac{1}{2}-0)=\eta f(\eta)$$

即，$F(\eta)=F(1)$.

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$. .... 6 分