安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期末模拟题（二）

参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．B　　2．D　　3．A　　4．B　　5．B

二．填空题**（每小题 3 分，共 15 分）**

6．$\frac{5}{9}$　　7．$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$　　8．$\frac{n-1}{n}\sigma^2$　　9．$\frac{1}{12}$　　10．$\frac{1}{2}$

三．计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．【解】（1）由 $F(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 的连续性可知：$a=b$ 和 $b=1-a$，从而 $a=b=\frac{1}{2}$；

（2）求导可得 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x<0, \\ 0, & 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x \ge 1. \end{cases}$

$$P\left(X>\frac{1}{2}\right)=1-P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

12．【解】（1）设 A_i 表示抽到 i 等品 $(i=1,2,3)$，由题意得

$\mathrm{P}(A_1)=0.8$，$\mathrm{P}(A_2)=0.1$，$\mathrm{P}(A_3)=0.1$。

$P(X_1=0,X_2=0)=P(A_3)=0.1$，$P(X_1=0,X_2=1)=P(A_2)=0.1$，

$P(X_1=1,X_2=0)=P(A_1)=0.8$，　$P(X_1=1,X_2=1)=P(\phi)=0$。

即

X_2 \ X_1	0	1
0	0.1	0.8
1	0.1	0

（2）$E(X_1)=0.8$，$D(X_1)=0.8\times(1-0.8)=0.16$，

$E(X_2)=0.1$，$D(X_2)=0.1\times(1-0.1)=0.09$，

$E(X_1X_2)=0$，

$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=-0.08$，

$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=\dfrac{-0.08}{\sqrt{0.16}\sqrt{0.09}}=-\dfrac{2}{3}$。

13.【解】设最多可装n箱，X_i表示第i箱重量，则$E(X_i)=50$，$D(X_i)=25$.

n箱总重量为$X=X_1+X_2+\cdots+X_n\Rightarrow E(X)=50n$，$D(X)=25n$，由中心极限定理得：$X$ 近似服从$N(50n\,,25n)$。

由 $P\{X\le 5000\}>0.977\Rightarrow P\left\{\dfrac{X-50n}{\sqrt{25n}}\le\dfrac{5000-50n}{\sqrt{25n}}\right\}>0.977$

$\Rightarrow P\left\{\dfrac{X-50n}{\sqrt{25n}}\le\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right\}>0.977$

$\Rightarrow \Phi(\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}})>0.977=\Phi(2)$

$\Rightarrow \dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，解得$n<98.02$，

故最多可以装 98 箱，才能保证不超载的概率大于 0.977。

14.【解】（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \int_x^{+\infty}4e^{-2y}dy & x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 2e^{-2x} & x>0\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \int_0^{y}4e^{-2y}dx & y>0\end{cases}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ 4ye^{-2y} & y>0\end{cases}$$

由上可得$f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$，故$X$和$Y$不独立。

（2）当$y>0$时，有$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 0<x<y\\ 0 & x\ge y>0\end{cases}$

15．【解】（1） $E(X)=\int_\theta^1 x\cdot\frac{1}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2}$， $\theta=2E(X)-1$，

所以θ的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 。

（2）似然函数 $L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}(\frac{1}{1-\theta})^n, & \theta\le x_i\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

当 $\theta\le x_i\le 1$ 时， $L(\theta)=(\frac{1}{1-\theta})^n$，关于θ单调增加，

所以 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为θ的最大似然估计量。

四．应用题（**每小题 10 分，共 10 分**）

16．【解】由样本得 $\overline{X}=1267$， $S=\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(X_i-\overline{X})^2}=\sqrt{40/3}=3.65$.

（1）要检验的假设为 $H_0:\mu=1260,\ H_1:\mu\ne 1260$

检验用的统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

拒绝域为 $\left|T\right|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(3)=3.1824$.

$\left|T_0\right|=\frac{1267-1260}{3.65/\sqrt{4}}=3.836>3.1824$，落在拒绝域内，

故拒绝原假设 H_0，即不能认为结果符合公布的数字 1260^0C.

（2）要检验的假设为 $H_0:\sigma\le 2$, $H_1:\sigma>2$

检验用的统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，

拒绝域为 $\chi^2>\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(3)=7.815$

$\chi_0^2=40/4=10>7.815$,落在拒绝域内，

故拒绝原假设 H_0，即不能认为测定值的标准差不超过 2^0C.

五．证明题（**每小题 10 分，共 10 分**）

17．【解】 $E\left(Y_1-Y_2\right)=EY_1-EY_2=EX-EX=0$，

$$D\left(Y_1-Y_2\right)=DY_1+DY_2=\frac{DX}{6}+\frac{DX}{3}=\frac{\sigma^2}{6}+\frac{\sigma^2}{3}=\frac{\sigma^2}{2},$$

故

$$Y_1 - Y_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right) \Rightarrow \frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)\text{。}$$

②$\frac{(3-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3-1) \Rightarrow \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$。

由于Y_1，Y_2，S^2相互独立，可见$Y_1 - Y_2$与S^2独立，所以

$$Z = \frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \Big/ \sqrt{2S^2/\sigma^2 2} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \sim t(2)\text{。}$$