17-18 B卷

一. 填空

1. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x}$, 则 $x=0$ 是其 __可去__ 间断点

解: $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\arctan\frac{1}{x}=0\cdot\frac{\pi}{2}=0$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\arctan\frac{1}{x}=0\cdot(-\frac{\pi}{2})=0$

2. 连续函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{\sin x}=1$. 则 $f'(0)=$ __1__

解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{\sin x}=1$. 且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. $f(x)$ $x=0$ 连续 即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

故 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-2]=0$ 即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2=f(0)$

故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{\sin x}=1$

3. $f'(\ln x)=1+x$, 则 $f(x)=$ __$x+e^x+C$__

解: $f'(\ln x)=1+x$

令 $\ln x=t$, 则 $x=e^t$. 故 $f'(t)=1+e^t$. 即 $f'(x)=1+e^x$

$f(x)=\int(1+e^x)dx=x+e^x+C$

4. $y=\ln\cos x$ 上从 $x=0$ 到 $x=\frac{\pi}{4}$ 一段的弧长为 $\underline{\ln(1+\sqrt{2})}$

解：$l=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx$

$=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(1+0)=\ln(1+\sqrt{2})$

5. $f(x)$ $[0,+\infty)$ 连，且 $\int_0^{x^2(x+1)}f(t)\,dt=x$，则 $f(2)=\underline{\frac{1}{5}}$

解：$\int_0^{x^2(x+1)}f(t)\,dt=x \Rightarrow f[x^2(x+1)]\cdot(3x^2+2x)=1$

代入 $x=1$，有 $f[1\cdot(1+1)]\cdot(3+2)=1 \Rightarrow f(2)=\frac{1}{5}$

二、选择

6. 下列曲线中，没有斜渐近线的是（ D ）

A $y=x\cdot\ln(e+\frac{1}{x})$ B $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ C. $y=x+\arctan x$ D. $y=x+\sin x$

解：A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x})-x]=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot[\ln(e+\frac{1}{x})-1]$

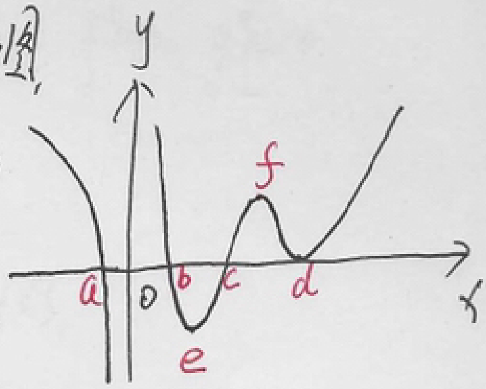
$y=x+\frac{1}{e}$ 为其斜渐近线 $\quad=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln(1+\frac{1}{ex})=\frac{1}{e}$

B $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}=-5$ $y=x-5$ 为其斜渐近线

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\arctan x}{x})=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x\to+\infty\\ -\frac{\pi}{2} & x\to-\infty\end{cases}$ 故 $x\to+\infty$ $y=x+\frac{\pi}{2}$，$x\to-\infty$ $y=x-\frac{\pi}{2}$ 均为斜渐近线

D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在，故无斜渐近线

7. $f(x)$ $(-\infty,+\infty)$ 上连，$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 有二阶连续导数，$f'(x)$ 图形如图，若 m 表示 $y=f(x)$ 极值点个数，n 表示 $y=f(x)$ 拐点个数，则（A）



A $m=4, n=3$ B $m=4, n=4$ C. $m=5, n=3$ D. $m=5, n=4$

解：$f'(a)=f'(b)=f'(c)=f'(d)=0$ $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

且

x	$(-\infty,a)$	a	$(a,0)$	0	$(0,b)$	b	(b,c)	c	(c,d)	d	$(d,+\infty)$
y'	+	0	−	/	+	0	−	0	+	0	+
y	↗	极大	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗	非极值	↗

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,e)$	e	(e,f)	f	(f,d)	d	$(d,+\infty)$
$f'(x)$	↘	/	↘		↗		↘		↗
$f''(x)$	−	/	−		+		−		+
$y=f(x)$	∩	$(0,f(0))$ 非拐点	∩	$(e,f(e))$ 拐点	∪	$(f,f(f))$ 拐点	∩	$(d,f(d))$ 拐点	∪

8. $f'(x)=\sin x$，且 $f(0)=-1$，则 $f(x)$ 的一个原函数可能是（B）

A $1+\sin x$ B. $1-\sin x$ C. $1+\cos x$ D $1-\cos x$

解：$f'(x)=\sin x \Rightarrow f(x)=-\cos x+C$，且 $f(0)=-1$，即 $-1=-\cos 0+C \Rightarrow C=0$，故 $f(x)=-\cos x$

$\therefore \int f(x)dx=\int -\cos x\,dx=-\sin x+C'$

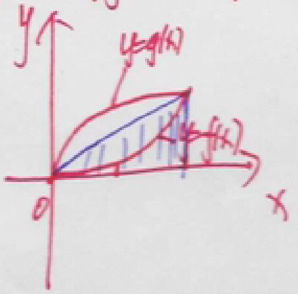
9. $f(x)$、$g(x)$ $[0,2]$ 二阶可导. $f(0)=g(0)=0$, $f(2)=g(2)=1$. $\forall x\in[0,2]$. $f''(x)>0$, $g''(x)<0$

记：$S_1=\int_0^2 f(x)dx$, $S_2=\int_0^2 g(x)dx$. 则（ C ）

A $S_1<S_2<1$　B $1<S_2<S_1$　C $S_1<1<S_2$　D $S_2<1<S_1$

解：$f''(x)>0 \Rightarrow y=f(x)$ $[0,2]$ 下凸. $g''(x)<0\Rightarrow y=g(x)$ $[0,2]$ 上凸.

如图



由几何意义 $S_1<S_\triangle<S_2$，即 $S_1<1<S_2$

10. 下列反常积分中，收敛的是（A）

A $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$　B $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$　C. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　D. $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$

解：$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx \begin{cases} p<1 \text{ 收敛} \\ p\geq 1 \text{ 发散}\end{cases}$　　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases} p>1 \text{ 收敛} \\ p\leq 1 \text{ 发散}\end{cases}$

故 B.C.D 发散

而 $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx \xlongequal{\sqrt{x}=t} \int_0^{+\infty}e^{-t}dt^2=-\int_0^{+\infty}2t\,de^{-t}=-2te^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2e^{-t}dt$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-2t}{e^t}-\lim\limits_{t\to+\infty}2e^{-t}=0$ 收敛.

或 $\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 比较 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}}=0$，故 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}$ 收敛.

故 $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx=\underbrace{\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}dx}_{\text{定积分}}+\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$ 收敛