安徽大学2017-2018学年第二学期

《高等数学A(二)》期中考试参考答案与评分标准

一、填空题(每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\sqrt{2}}$.

2. $\underline{1}$, $\underline{-1}$.

3. $\underline{2}$.

4. $\underline{\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}}$.

5. $\underline{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

二、选择题(每小题3分, 共15分)

6. C. 7. B. 8. B. 9. A. 10. D.

三、计算题(每小题8分, 共40分)

11. 解. 曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,-2,5)$处的一个法向量为

$\vec{n}=(2x,2y,-1)|_{(1,-2,5)}=(2,-4,-1)$. ………………………………(3分)

曲线L的一个方向向量为

$\vec{v}=(1,1,0)\times(1,-a,-1)=(-1,1,-a-1)$.

由题设可知, $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$, 即$(2,-4,-1)\cdot(-1,1,-a-1)=0$.

由此可知, $a=+5$. ………………………………(8分)

12. 解. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1'e^x+f_2'\cos x$, ...(3分)

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f_1'e^x+f_{11}''e^{2x}+f_{12}''e^x\cos x-f_2'\sin x+f_{21}''e^x\cos x+f_{22}''\cos^2 x$ ······(7分)

于是，

$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,0)+f_{11}''(1,0)+2f_{12}''(1,0)+f_{22}''(1,0)$. ....(8分)

13. 解. 当$x=0,y=1$时，$z=0$. 方程两边同时对x求导得

$e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+1-\sin x=0$. 由此可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1)=-1$. ....(4分)

方程两边同时对x求导得

$e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}+xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$. 由此可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1)=0$. ------(7分)

故$\mathrm{d}z|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x$. ....(8分)

14. 解. $y=3x$与$x+y=8$交于点$(2,6)$; $y=\dfrac{1}{3}x$与$x+y=8$交于点$(6,2)$. 于是，

$\displaystyle\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{3}x}^{3x}x^2\mathrm{d}y+\int_2^6\int_{\frac{1}{3}x}^{8-x}x^2\mathrm{d}y$ ....(5分)

$\displaystyle=\int_0^2\left(3x-\frac{1}{3}x\right)x^2\mathrm{d}x+\int_2^6\left(8-x-\frac{1}{3}x\right)x^2\mathrm{d}x$

$=\dfrac{416}{3}$ ....(8分)

15. 解. 由积分区域的对称性和被积函数的奇偶性，

方法一： $\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_{y\geq 0}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

作极坐标变换，当$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$时，$0\leq r\leq 2$;

当$\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$时，$-2\cos\theta\leq r\leq 2$. ....(4分)

原式$\displaystyle=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{-2\cos\theta}^{2}r^2\mathrm{d}r\right)$

$=2\left(\dfrac{4}{3}\pi+(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{16}{9})\right)=\dfrac{16}{9}(3\pi-2)$. ....(8分)

方法二： 设D_1: $x^2+y^2\leq 4$, $y\geq 0$; D_2: $(x+1)^2+y^2\leq 1$, $y\geq 0$

$\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=2\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy-2\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ -----(4分)

$\displaystyle=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2dr$

$=\dfrac{16}{3}\pi-\dfrac{32}{9}$ ------(8分)

四、应用题（每小题10分，共20分）

16. 解. 设正方形边长为x，正三角形边长为y. 则问题转化为讨论函数$z=x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$在条件$4x+3y=2$ $(x,y\geq 0)$下的最小值问题. ....(2分)

令$L(x,y,\lambda)=x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2-\lambda(4x+3y-2)$. 考虑方程组

$$\begin{cases} L_x=2x-4\lambda=0, \\ L_y=\frac{\sqrt{3}}{2}y-3\lambda, \\ L_\lambda=-(4x+3y-2)=0. \end{cases}$$

- - ----(7分)

解得$x_0=\frac{2}{4+3\sqrt{3}}$, $y_0=\frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}$. $f(x_0,y_0)=\frac{1}{4+3\sqrt{3}}$. ....(9分)

当$x=0,y=\frac{2}{3}$时，$f(0,\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{3}}{9}>f(x_0,y_0)$;

当$x=\frac{1}{2},y=0$时，$f(\frac{1}{2},0)=\frac{1}{4}>f(x_0,y_0)$.

故两个图形的面积之和存在最小值，且最小值为$\frac{1}{4+3\sqrt{3}}$. ....(10分)

17. 解：区域D的面积为$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

令$u=\frac{y}{x^2},v=\frac{y}{x}$，则$x=\frac{v}{u},y=\frac{v^2}{u}$. 且区域$D$对应于$D_1$：$1\leq u\leq 2,1\leq v\leq 2$. ---(5分)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ -\frac{v^2}{u^2} & \frac{2v}{u} \end{vmatrix}=-\frac{v^2}{u^3}.$$ ....(7分)

于是$S=\iint\limits_{D_1}\frac{v^2}{u^3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^2 v^2\mathrm{d}v\int_1^2\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u=\frac{7}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$. ....(10分)

五、证明题（每小题5分，共10分）

18. 证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ……………………………(2分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(\sqrt{x^2+y^2})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}),$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(\sqrt{x^2+y^2})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}).$$

由题设可知，

$$f''(\sqrt{x^2+y^2})+f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

令$u=\sqrt{x^2+y^2}$，即有$uf''(u)+f'(u)=0$. ……………………………(5分)

19. 证明：设$I=\iint\limits_D \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 对任意$(x,y)\in D$，显然有

$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$. ……………………………(2分)

于是，$\frac{1}{102}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\le I\le\frac{1}{100}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

D是边长为$10\sqrt{2}$的正方形，故D的面积为$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=200$. – – – ‐‐(4分)

由此可知，$\frac{200}{102}\le I\le 2$. ……………………………(5分)