18-19 互联网学院 B卷

一、填空

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=$ $\underline{3}$

解：$\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{1+2^n+3^n}<\sqrt[n]{3\cdot3^n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot3^n}=3$

2. $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$，则 $f'(0)=$ $\underline{100!}$

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}{x}=1\cdot2\cdot3\cdots100=100!$

3. $y=y(x)$ 由 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $dy\big|_{x=0}=$ $\underline{1dx}$

解：$\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ $x=0$. $\ln y=0\Rightarrow y=1$

则：$\dfrac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x$ 代入 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$，有 $\dfrac{0+y'(0)}{0+1}=0+0+1\Rightarrow y'(0)=1$

故 $dy\big|_{x=0}=y'(0)\,dx=1dx$

4. $(1,3)$ 是 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $(a,b)=$ $\underline{\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)}$

解：$y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$，故 $\begin{cases}a+b=3\\6a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\b=\frac{9}{2}\end{cases}$

$(1,3)$ 在曲线上，且 $y''(1)=0$

5. $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线为 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x+1)x}=\frac{1}{2}=k$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 为斜渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}=b$

二.选择

6. $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$，则 $f'(x)$ 为（ B ）

A. $(x+1)^{-1}$ B. $-(x+1)^{-2}$ C. $\ln(x+1)$ D. $(x+1)\ln(x+1)$

解：$f(x)=[\ln(x+1)]'=\frac{1}{x+1}$，$f'(x)=\left(\frac{1}{x+1}\right)'=-(x+1)^{-2}$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k,c 为常数，且 $c\neq 0$，则（ D ）

A $k=2$，$c=-\frac{1}{2}$，B $k=2$，$c=\frac{1}{2}$，C. $k=3$，$c=-\frac{1}{3}$ D. $k=3$，$c=\frac{1}{3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{kx^{k-1}}=c\neq 0$.

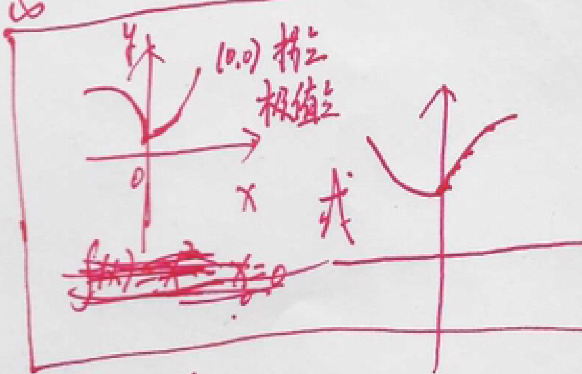
故 $k-1=2$ 即 $k=3$，此时 $c=\frac{1}{3}$.

8. ① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为（B）

A ①收敛 ②收敛　B ①收敛，②发散　C ①发散 ②收敛　D ①发散 ②发散

解：① $=\int_{-\infty}^{0}-e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0^-}=\lim\limits_{x\to0^-}(-e^{\frac{1}{x}})-\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{\frac{1}{x}})=1$

② $=\int_{0}^{+\infty}-e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0^+}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{\frac{1}{x}})-\lim\limits_{x\to0^+}(-e^{\frac{1}{x}})=\infty$



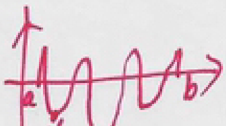
9. 下列正确的是（C）

A. 若 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 拐点，则 $x=x_0$ 不可能是 $f(x)$ 极值点 ×

B. $x=x_0$ 为 $f(x)$ 极值点，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 二阶可导，则必有 $f''(x_0)\neq0$ × $f(x)=x^4$ $x_0=0$

C. $f'(b)<0$，则 $f(b)$ 不可能是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值

D. $x=x_0$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 极小值点，则 $f(x_0)$ 必为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最小值 ×



C. 若 $f(b)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 最大值，则 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)\le f(b)$，故 $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ ($x<b$ 时) ≥ 0

故 $f'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geq0$ 与 $f'(b)<0$ 矛盾.

10. $f(x)=\begin{cases} bx^2+a & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x} & x>0 \end{cases}$ $x=0$ 连，则 a,b (A)

A $a=b$.　　B $a=-b$　　C. $ab=-1$　　D 以上都不对

解：$f(x)$ $x=0$ 连，则 $f(0^-)=f(0^+)$

而 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(bx^2+a)=a$，$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=b$.

故 $a=b$