安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1.C;　2.D;　3.A;　4.C;　5.B.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\dfrac{b}{a+b}$ ；　7. $\dfrac{27}{65}$ ；　8. $\dfrac{2}{5}$ ；　9. $F(n-1,1)$ ；　10. 0.98.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：（1）设 $B=\{$随机购买一件商品为次品$\}$；

$A_i=\{$随机购买一件商品由第 i 厂家生产$\}$， $i=1,2,3$

由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=0.5\times0.02+0.25\times0.02+0.25\times0.04\\&=0.025;\end{aligned}$$

（5 分）

（2）由贝叶斯公式有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)}=\frac{0.5\times0.02}{0.025}=\frac{0.01}{0.025}=0.4.$$ （10 分）

注：计算结果错误扣 1 分.

12．解：(1)由于 $F(x)$ 为连续型随机变量 X 的分布函数，所以由

$$F(+\infty)=A=1,\ \lim_{x\to0}F(x)=A+B=F(0)=0$$

知，$A=1,B=-1$.　（3 分）

（2）X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x^2/2}, & x>0,\\ 0, & \mathrm{x}\le0.\end{cases}$$ （6 分）

（3）　$P(1<X<2)=F(2)-F(1)=e^{-1/2}-e^{-2}$.　（10分）

13.解：当 $y\le0$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)$

$$=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=2\int_0^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

因此，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-y^2/2} & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

（10 分）

14. 解：（1）首先注意到 $P(Y=2)=\frac{1}{9}+a$，由条件分布定义知，

$$P(X=1|Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{1}{9a+1},$$

$$P(X=2|Y=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{9a}{9a+1}.$$

（5 分）

(2) 首先由联合分布性质知，$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+a+b=1$，另外, 由 X 与 Y 独立，则

$$P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2),$$

得到

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{9}+a),$$

解得，

$$a=\frac{2}{9}, b=\frac{1}{9}.$$

（10 分）

15．解(1) 由于

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1(\int_0^y kxydx)dy=\int_0^1\frac{k}{2}y^3dy=\frac{k}{8},$$

从而 $k=8$.

(3 分)

(2) $P(X+Y\ge 1)=\iint\limits_{x+y\ge 1}f(x,y)dxdy=\int_{1/2}^1\int_{1-y}^y 8xydxdy=\frac{5}{6}$,

(6 分)

(3) 由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 得, 则当 $0<x<1$ 时,

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^1 8xydy=4x(1-x^2),$$

从而 $f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$，则当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^y 8xydx=4y^3,$$

从而 $f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(10分)

16. 解：(1) 由 $EX=1$，$EY=2$，$EXY=5$ 知

$$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=3.$$

故 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\dfrac{1}{2}$

(2) 由 $D(X)=9$，$D(Y)=4$，$D(Z)=1$，$\rho_{XZ}=-\dfrac{1}{3}$ 和 $\rho_{YZ}=\dfrac{1}{4}$ 知

$Cov(X,Z)=-1$，$Cov(Y,Z)=\dfrac{1}{2}$.

故 $D(X+Y+Z)$

$=DX+DY+DZ+2Cov(X,Y)+2Cov(X,Z)+2Cov(Y,Z)$

$=9+4+1+2\cdot 3-2\cdot 1+2\cdot\dfrac{1}{2}$

$=19$

(3) $D(X-2Y+3Z)$

$=DX+4DY+9DZ-4Cov(X,Y)+6Cov(X,Z)-12Cov(Y,Z)$

$=9+16+9-12-6-6$

$=10$ （10 分）

四、解答题（每小题 10 分，共 10 分）

17．解：（1）$E(X)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}p=\dfrac{1}{p}$，令 $\dfrac{1}{p}=\overline{X}$，

解得 p 的矩估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$； （5 分）

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值,

则似然函数为

$L(p)=\prod\limits_{i=1}^{n}[(1-p)^{x_i-1}p]=p^n\cdot(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n}$，

$\ln L(p)=n\ln p+(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n)\cdot\ln(1-p)$，

令 $\dfrac{d\ln L(p)}{dp}=\dfrac{n}{p}-\dfrac{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n)}{1-p}=0$，

解得 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\overline{x}}$,

从而得 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}=\dfrac{1}{\overline{X}}$. （10 分）