安徽大学互联网学院 2018-2019 学年第一学期

《高等数学 A（一)》期末考试试卷（B 卷）答案

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 3　　**2.** 100!　　**3.** 1dx　　**4.** $(-\frac{3}{2},\frac{9}{2})$　　**5.** $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. B　　7. D　　8. B　　9. C　　10. A

三、计算题（本题共六小题，每小题 7 分，共 42 分）

11. 解：由 $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n},n=1,2,\cdots$ 得

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{6+a_n}-\sqrt{6+a_{n-1}}=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{6+a_n}+\sqrt{6+a_{n-1}}},n=1,2,\cdots,$$

可见 $a_{n+1}-a_n$ 与 a_n-a_{n-1} 同号。（2 分）

由数学归纳法知对任意正整数 n，有 $a_{n+1}-a_n<0$，即数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $0<a_n<10$。根据单调有界原理知该数列有极限，记数列极限为 l。（4 分）

则

$$l:=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6+a_n}=\sqrt{6+\lim_{n\to\infty}a_n}=\sqrt{6+l},$$

解得 $l=3$，即数列极限为 3。（7 分）

12. 解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$（3 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$（7 分）

13. 解：求导有：$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t},$（3 分）

当 $x=0,y=1$ 时 $t=0$.

由 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,1)}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$, 可知, $k_{法}=-2.$（5 分）

因此, 法线方程是 $y-1=-2(x-0)$, 即：$y+2x-1=0$.（7分）

14. 解：令 $x=a\sin t$, 则 $dx=a\cos tdt$

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{a\cos tdt}{a\sin t+a\cos t}=\int\frac{\cos tdt}{\sin t+\cos t}$$ (3 分)

$$\int\frac{\cos tdt}{\sin t+\cos t}=\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt+\int\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\int\frac{d\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}+\int\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt$$ （5 分）

$$=\ln|\sin t+\cos t|+\int\frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}dt-\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\ln|\sin t+\cos t|+t-\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

由此可知：

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{2}[\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right|+\arcsin\frac{x}{a}]+c$$ （7 分）

15. 解：令：$t=\sqrt{x}$，则 $dx=2tdt$ （2 分）

$$\int_1^4\frac{1}{x(1+\sqrt{x})}dx=\int_1^2\frac{2t}{t^2(1+t)}dt=2\int_1^2(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})dt$$

$$=2\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|\Bigg|_1^2=2\ln\left|\frac{4}{3}\right|.$$ （7 分）

16. 解：解方程组 $\begin{cases}x+y-1=0\\x-y+3=0\end{cases}$ 得$x=-1,y=2,$ （2 分）

令$X=x+1,Y=y-2$代入方程得 $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X+Y}{X-Y}=\dfrac{1+\frac{Y}{X}}{1-\frac{Y}{X}}$

令$u=\dfrac{Y}{X}$,得 $X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1+u^2}{1-u}$ 将变量分离后得$\dfrac{(1-u)du}{1+u^2}=\dfrac{dX}{X}$两边积分得

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|X|+c$$ （5 分）

变量还原并整理后得原方程的通解为$\arctan\dfrac{y-2}{x+1}=\ln\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+c.$ （7 分）

四、应用题（本题共两小题，每小题 8 分，共 16 分）

17. 解：由 $\pi r^2 h = 2\pi$，得罐头筒表面积为 $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$，

即 $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r(\frac{2}{r^2})$，令 $S'(r) = 4\pi(r - \frac{1}{r^2}) = 0$，得 $r = 1$，（4 分）

又 $S''(r) = 4\pi(1 + \frac{2}{r^3})$，$S''(1) = 12\pi > 0$，$\therefore S(r)$ 在 $r = 1$ 取极小值，

即有最小值. 此时 $h = 2$.则 $r = 1$，筒高 $h = 2$ 时所用材料最省.（8 分）

18. 解：设切线的横坐标是 x_0，则曲线 $y = \ln x$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

又因为切线过原点可知 $\ln x_0 - 1 = 0,$ 从而得到 $x_0 = e$，所以该切线方程是

$$y = \frac{1}{e}x.$$（4 分）

平面图形 D 的面积为：$\int_0^1 (e^y - ey)dy = \frac{1}{2}e - 1.$（8 分）

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

19. 证明：取 $g(x) = \ln x, g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0, a < x < b,$（2 分）

由 cauchy 中值定理知，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \xi f'(\xi).$$

即得到：$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$（6 分）

20. 证明：由于 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上必存在最大值 M 和最小值 m,

于是 $m = \frac{m+m+m}{3} \le \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \le \frac{M+M+M}{3} = M$（2 分）

根据介值定理：存在一点 $c \in [0,2]$，使得

$$f(c) = \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1$$

则 $f(c) = f(3) = 1$，根据罗尔定理，存在 $\xi \in (c,3) \in (0,3)$，使得

$$f'(\xi) = 0。$$（6 分）