安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．（D）　　2．（A）　　3．（C）　　4．（B）　　5．（C）

二．填空题**（每小题 2 分，共 10 分）**

6．0.8　　7．$\frac{16}{45}$　　8．$\frac{4}{5}$　　9．$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$　　10．$\frac{7}{24}$

三．**计算题（每小题 12 分，共 72 分）**

11．【解】

设事件 A 表示“从乙袋中取出的是白球”，

B 表示“从甲袋中取出的两球中恰有 i 个白球”，$i=0,1,2$，

………………（3 分）

由全概率公式，

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\frac{4}{10}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\frac{5}{10}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{13}{25}$$

………………（12 分）

12．【解】从 5 个纪念章中任取 3 个，共有 $C_5^3=10$ 种取法，

$X=3$，只有一种取法 $(1,2,3)$，所以 $P(X=3)=\frac{1}{10}$；

$X=4$，有 $C_3^2=3$ 种取法，所以 $P(X=4)=\frac{3}{10}$；

$X=5$，有 $C_4^2=6$ 种取法，所以 $P(X=4)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

………………（10 分）

故 X 的分布律为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

.

………………（12 分）

13．【解】（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^2(A-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+A-\frac{3}{2}=1$，

所以 $A=2$.

………………（6 分）

（2）$P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=0.5$.

………………（12 分）

14.【解】由 $X \sim N(72,\sigma^2)$，且 $P\{X \geq 96\} = 0.023$，即

$$P\{\frac{X-72}{\sigma} \geq \frac{96-72}{\sigma}\} = P\{\frac{X-72}{\sigma} \geq \frac{24}{\sigma}\} = 1-\Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.023,$$

于是得 $\Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.977$.

由 $\Phi(2) = 0.977$ 知，$\frac{24}{\sigma} = 2$，$\sigma = 12$，即 $X \sim N(72,12^2)$，

………………（6 分）

所求概率为

$$P\{60 \leq X \leq 84\} = P\{\frac{60-72}{12} \leq \frac{X-72}{12} \leq \frac{84-72}{12}\} = P\{-1 \leq \frac{X-72}{12} \leq 1\}$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2\times 0.841 - 1 = 0.682.$$

………………（12 分）

15.（1）由 $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\alpha+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=1$，得 $\alpha = \frac{1}{3}$

………………（3 分）

(2) X 的边缘分布为：

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y 的边缘分布为：

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

………………（9 分）

(3) $P(XY \neq 0) = 1 - P(X=1,Y=0) - P(X=2,Y=0) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

………………（12 分）

16.【解】(1) 由规范性，

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-y}^{y} kx^2 y\,\mathrm{d}x = \frac{2}{15}k = 1，\ \Rightarrow\ k = \frac{15}{2};$$

………………（3 分）

(2) $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{-y}^{y} \frac{15}{2} x^2 y\,\mathrm{d}x = 5y^4, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

………………（9 分）

(3) 记 $B = \{(x,y) \mid y < \frac{1}{2}\}$，

则 $$P\{Y<\frac{1}{2}\} = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{B\cap G} \frac{15}{2} x^2 y\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{-y}^{y} \frac{15}{2} x^2 y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{32},$$

或解：$P\{Y<\frac{1}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} 5y^4\,\mathrm{d}y = \frac{1}{32}$.

………………（12 分）

四．证明题（**每小题 8 分，共 8 分**）

17．【证明】

X的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，

…………………（2 分）

则 Y的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\le y\}=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}$，

当 $y<0$时，$F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}=P(X\le 0)=0$；

当 $y\ge 1$时，$F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}=1$；

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}=P\{X\le -\frac{1}{2}\ln(1-y)\}=\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，

…………………（6 分）

利用变限积分求导，得 $F_Y'(y)=2\mathrm{e}^{\ln(1-y)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-y}=1$，

于是 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，即 Y在$(0,1)$上服从均匀分布.

…………………（8 分）