院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《线性代数 A》期中考试试卷

（闭卷 时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 是 n 阶方阵,, 则有(　　).

   A. $(AB)^T = A^T B^T$.　　B. $(A+B)^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$.

   C. $AB = BA$.　　D. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

2. 下列说法**正确**的是（　　）.

   A.可逆矩阵的列向量组线性相关.　　B. 初等矩阵的逆仍然是初等矩阵.

   C. n 阶可逆矩阵的秩小于 n.　　D.矩阵的逆不是唯一的.

3. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则（　　）.

   A. $\lambda = 3$.　　B. $\lambda = -3$.

   C. $\lambda = \pm 3$.　　D. $\lambda \neq \pm 3$.

4. $2n$ 阶排列 $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$ 的逆序数是(　　).

   A. $\frac{n}{2}$.　　B. $\frac{n(n+1)}{2}$.

   C. n.　　D. $2n$.

5. 下列向量组中线性无关的向量组为（　　）.

   A. $(2,-3,4,1),(5,2,7,1),(-1,-3,5,5)$.

   B. $(12,0,2),(1,1,1),(3,2,1),(4,78,16)$.

   C. $(2,3,1,4),(0,0,0,0),(3,1,2,4)$.

   D. $(1,2,-3,1),(3,6,-9,3),(3,0,7,7)$.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．设n阶矩阵A及s阶矩阵B均可逆，则$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} =$ ________.

7. 设方阵A满足关系式 $A^3+A^2-A-I=O$，且$|A+I|\neq 0$ ，则$A^{-1}=$________.

8．设 3 阶矩阵A的行列式$|A|=-2$，则$|A^*A^{-1}|=$____________.

9．设矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A|=12$, A_{ij}是元素a_{ij}的代数余子式，则 $2A_{21}+A_{22}-A_{23}=$_________.

10．设A为4×3矩阵，$r(A)=2$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$r(AB)=$__________.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，利用初等变换求$A^{-1}$.

12. 设 4 阶矩阵$A=\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \\ 4\gamma_4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$，其中$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为 4 维行向量，已知 $|A|=8$, $|B|=1$, 计算行列式$|A-B|$.

13．计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

14. 设 $a_1=(1,1,2,3),a_2=(1,-1,1,1),a_3=(1,3,3,5),a_4=(4,-2,5,6),a_5=(3,1,5,7)$，求该向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

15. 线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+x_4=5 \end{cases}$ 是否有解？若有解，求出所有的解.

16．设 3 阶矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8I$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 B .

四、证明题（本题 10 分）

17. 试证：任意 m 个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$，当 $m>n$ 时，是线性相关的.