安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《线性代数 A》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．（C）　　2．（D）　　3．（B）　　4．（B）　　5．（A）

二．填空题（**每小题 3 分，共 15 分**）

6．-4　　7．$-\dfrac{1}{2}$　　8．$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$　　9．$14^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$　　10．$\dfrac{3}{5}$

三．计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11.【解】$D=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+a & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+a & \cdots & n \\ & & \cdots & \cdots & \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n+a \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2}+a & 2 & 3 & \cdots & n \\ \dfrac{n(n+1)}{2}+a & 2+a & 3 & \cdots & n \\ \dfrac{n(n+1)}{2}+a & 2 & 3+a & \cdots & n \\ & & \cdots & \cdots & \\ \dfrac{n(n+1)}{2}+a & 2 & \cdots & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+a & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+a & \cdots & n \\ & & \cdots & \cdots & \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a \end{vmatrix}=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]a^{n-1}$$

………………（10 分）

12．【解】由 $AB+A=B$，知 $B-AB=A$，即 $\left(I-A\right)B=A$

两边取行列式，$|I-A||B|=|A|$，故 $|B|=\dfrac{|A|}{|I-A|}=2$

………………（10 分）

13．【解】$B=P^{-1}AP$，得 $A=PBP^{-1}$，故

$A^{2024}=PBP^{-1}PBP^{-1}\cdots PBP^{-1}=PB^{2024}P^{-1}$，

由于 $B^{-1}=B$，故 $B^{2024}=I$，故 $A^{2024}=PB^{2024}P^{-1}=PP^{-1}=I$

………………（10 分）

14．【解】$(I-A)X=B$，$X=(I-A)^{-1}B$，

$$(I-A\,,B)=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}，所以\quad X=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

………………（10 分）

15．【解】$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&6\\4&16&36\end{vmatrix}=(4-2)(6-2)(6-4)=16$，

$$\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{16}A=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&4&6\\4&16&36\end{pmatrix}$$

………………（10 分）

16．【解】对增广矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\2&1&0&-3&1\\-2&0&-2&10&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\0&-1&2&-7&-5\\0&2&-4&14&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\0&-1&2&-7&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得同解的方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+2x_4=3\\-x_2+2x_3-7x_4=-5\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x_1=-2-x_3+5x_4\\x_2=5+2x_3-7x_4\end{cases}$，其中 x_3,x_4 为自由未知量

………………（10 分）

四．证明题（**每小题 10 分，共 10 分**）

17．(1)【证明】由 $A=\xi\xi^T+I$，得

$A^2=\left(\xi\xi^T+I\right)\left(\xi\xi^T+I\right)=\xi\xi^T\xi\xi^T+2\xi\xi^T+I^2=3\xi\xi^T+I$，故

$A^2=3\xi\xi^T+3I-2I=3A-2I$，即 $A^2-3A+2I=O$

………………（5 分）

（2）由 $A^2-3A+2I=O$，得 $A^2-3A-4I=-6I$，即 $\left(A+I\right)\left(A-4I\right)=-6I$

故 $A+I$ 可逆，且 $\left(A+I\right)^{-1}=\dfrac{1}{6}\left(4I-A\right)$

………………（10 分）