安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《线性代数 A》考试试卷（A 卷）

参考答案与评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1． D；　2． D；　3． A；　4． C；　5． B

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6． 5；　7． $(1,0,0)^T$；　8． 2；　9． 18；　10． 0

三、计算题（6 小题，每小题 12 分，共 72 分）

11．解

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-3.$$

………………（12 分）

12．解

$(E-A)X=B$， $X=(E-A)^{-1}B$，

$$(E-A,B)=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}，所以\quad X=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

…………………（12 分）

13．解

依题意，将向量组按列排成矩阵并作初等行变换

$$\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-1&3&-3\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&3&-3&6\\0&-1&1&-2\\0&2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以秩为 2，α_1,α_2 为其一极大线性无关组，

…………………（12 分）

14．解：对增广矩阵进行初等行变换，

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}5&-5&-4&1\\1&-1&a&2\\1&-a&-2&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&a&2\\0&1-a&-2-a&-3\\0&-5+5a&6&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&a&2\\0&a-1&a+2&3\\0&0&4+5a&9\end{array}\right),$$

……………………（6 分）

当 $a=1$ 时，$\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，有无穷多解，基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，特解

$\xi_0=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

通解为 $x=\xi_0+c\xi_1$，c 为任意常数。

……………………（12 分）

15．解

A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\0&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1),$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

……………………（6 分）

对于 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(E-A)X=O$，

$$(E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程组的基础解系 $\alpha_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

于是 A 的对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量为 $c_1\alpha_1$ ($c_1\neq 0$，为任意常数)；

对于 $\lambda_2=\lambda_3=2$，解齐次线性方程组 $(2E-A)X=0$，

$$(2E-A)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可得方程组的基础解系 $\alpha_2=(1,\ 0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,-1,\ 1)^{\mathrm{T}}$

于是，A 的对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $c_2\alpha_2+c_3\alpha_3$ (c_2,c_3 为不全为零的任意常数).

……………………（12 分）

16．解：

$f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+2c_2+2c_3}(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

所以 A 的特征值是 $\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=-2$.

……………………（4 分）

分别求得相应特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，

单位化得 $\beta_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，

令 $Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则 Q 是正交矩阵，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{pmatrix}$，

作正交变换 $x=Qy$，即得标准形 $f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

……………………（12 分）

四、证明题（共 8 分）

17. 证明：设 $k_1\eta_1+k_2(\eta_1-\eta_2)=\theta$，两边左乘 A，得 $k_1A\eta_1+k_2(A\eta_1-A\eta_2)=\theta$，

即 $k_1b+k_2(b-b)=\theta$，即 $k_1b=\theta$，而 $b\neq\theta$，所以 $k_1=0$，

于是 $k_2(\eta_1-\eta_2)=\theta$，由于 $\eta_1\neq\eta_2$，可知 $k_2=0$，从而证得 $\eta_1,\eta_1-\eta_2$ 线性无关；

……………………（8 分）