16-17 A卷

一. 填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}+\lambda\cdot\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$ 存在，则 $\lambda=$ <u>$-1$</u>

解: $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}+\lambda\cdot\dfrac{\sin x}{-x}\right)=\dfrac{0-1}{0+1}+\lambda\cdot(-1)=-1-\lambda$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}+\lambda\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right)=\dfrac{1-0}{1+0}+\lambda=1+\lambda$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，即 $f(0^-)=f(0^+)$，即: $-1-\lambda=1+\lambda\Rightarrow \lambda=-1$

2. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)$ 的间断点为 <u>$x=1$</u>

解: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+0}=1+x & |x|<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x=-1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ 即 $f(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0 & x=-1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$

$f(-1)=f(-1^-)=0=f(-1^+)$，$f(1^-)=2\neq f(1^+)=0$ $x=1$ 为跳跃间断点.

3. $y=f(x)$ 为 $R$ 上二阶可导的偶函数，且 $f''(0)>0$，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极 <u>小</u> 值.

解: $y=f(x)$ 可导且为偶函数，故 $f'(x)$ 为奇函数，从而 $f'(0)=0$

$f'(0)=0$ 且 $f''(0)>0\Rightarrow f(0)$ 为 $f(x)$ 极小值.

4. $f(x)$为$R$上以$T$为周期的非负连续函数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_x^{x+nT} f(t)dt}$ = $\underline{1}$

解: $\int_x^{x+nT} f(t)dt = n\cdot\int_0^T f(t)dt \doteq n\cdot a$ ($a$为正常数)

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_x^{x+nT} f(t)dt} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{a} = 1$

5. $f(x)=x^2\cdot\cos(2x)$, 则 $f^{(10)}(0) = \underline{23040}$

解: 设 $u(x)=x^2$, $v(x)=\cos 2x$. 则: $u'(x)=2x$, $u''(x)=2$, $u^{(k)}(x)=0$ $k\geq 3$, $v^{(n)}=2^n\cdot\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$

$$f^{(10)}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}\cdot v^{(n-k)} = u\cdot v^{(10)}+10\cdot u'\cdot v^{(9)}+\frac{10\cdot 9}{2}\cdot u''\cdot v^{(8)}$$

$$= x^2\cdot v^{(10)}(x)+10\cdot 2x\cdot v^{(9)}(x)+90\cdot v^{(8)}(x)$$

故 $f^{(10)}(0)=90\cdot v^{(8)}(0)=90\cdot 2^8\cdot\cos\frac{8\pi}{2}=90\cdot 2^8=23040=C_{10}^2\cdot 2^9$

二.单选题.

6. $f(x)=e^{2x}$, $g(x)=e^{\sin x}$, 则 $f(x)\cdot g(x)$在$R$上是( C )

A.周期函数 B.奇函数 C.单调函数 D有界函数

解: A× B× D 取 $x_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}$. 则 $f(x_k)\cdot g(x_k)=e^{4k\pi+\pi}\cdot e\to\infty$, 故无界.

C. $[f(x)\cdot g(x)]'=2e^{2x}\cdot e^{\sin x}+e^{2x}\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x$

$=e^{2x}\cdot e^{\sin x}(2+\cos x)>0 \Rightarrow f(x)\cdot g(x)$单增

7. 已知 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=0$, 则下列正确的是 ( D )

A. $\{a_n\}$ 发散, 则 $\{b_n\}$ 发散 ×. 取 $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n^2}$

B. $\{a_n\}$ 无界, 则 $\{b_n\}$ 有界. × 取 $\{a_n\}$: $0,1,0,2,0,3,\cdots 0,n,\cdots$ 则 $\{a_n\}\{b_n\}$ 均无界

$\{b_n\}$: $1,0,2,0,3,0,\cdots n,0,\cdots$

C. $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{b_n\}$ 无穷小. × 取 $\{a_n\}$: $0,1,0,1,0,1,\cdots 0,1,\cdots$

$\{b_n\}$: $1,0,1,0,1,0,\cdots 1,0,\cdots$

D. $\{\frac{1}{a_n}\}$ 无穷小, 则 $\{b_n\}$ 无穷小 ✓. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)\cdot\frac{1}{a_n}=0\cdot 0=0$

8. $f(x)$ R上有定义, 则下列正确的是 ( B )

A. $f(x)$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $f^2(x)$ 连续. × $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ $x=0$ 不连, 但 $f^2(x)=1$ $x=0$ 连

B. $f(x)$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $f^3(x)$ 连续.

C. $f(x)$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $|f(x)|$ 连续. × $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ $x=0$ 不连, 但 $|f(x)|=1$ $x=0$ 连

D. $f(x)$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $f(f(x))$ 连续 × $f(x)=D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$ 不连, 而 $f(f(x))=1$ 连.

B. $f(x)$ 连 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f^3(x)=f^3(x_0)$ $\Longleftrightarrow$ $f^3(x)$ 连

$\forall x_0\in R$ $\quad\quad$ $\forall x_0\in R$

9. $f(x)$ R上有二阶导数，且其反函数为 $x=f^{-1}(y)$，则 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 为（A）

A. $\frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$ B. $\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$ C. $f''(x)$ D. $\frac{1}{f''(x)}$

解：$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)}$ $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$

$$=\frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

10. $f(x)$ R上连续，记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，a为常数，则下列正确的是（B）

A. $f(x)$ 是周期函数，则 $F(x)$ 是周期函数 × $f(x)=\cos x+1$，$F(x)=\sin x-\sin a+x$ 非周期函数.

B. $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 是偶函数 ✓

C. $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 是奇函数 × $f(x)=\cos x$，$F(x)=\sin x-\sin a$ $(a\neq 0$ 时$)$ 非奇函数

D. $f(x)$ 是严格单调函数，则 $F(x)$ 是严格单调函数 × $f(x)=x$，$F(x)=\frac{x^2}{2}$

B: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ $f(x)$ 奇函数

$$F(-x)=\int_a^{-x} f(t)dt \xlongequal{t=-u} \int_{-a}^{x} f(-u)\,d(-u)=\int_{-a}^{x} f(u)du=\underbrace{\int_{-a}^{a} f(u)du}_{=0}+\int_a^x f(u)du=\int_a^x f(u)du=F(x)$$