19-20 A-期末

一. 选择题.

1. $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列 (A) 区间内有界.

A $(-1,0)$ B $(0,1)$ C. $(1,2)$ D. $(2,3)$

A. ① $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{-x\cdot\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin3}{(-2)\cdot9}=\frac{\sin3}{18}$

② $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x\cdot\sin(x-2)}{x\cdot(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin2}{(-1)\cdot4}=\frac{\sin2}{4}$

又 $f(x)$ $(-1,0)$ 连, 由①② $f(x)$ $(-1,0)$ 有界.

局部有界性 ① $f(x)$ $(-1,-1+\delta_1)$ 有界

② $f(x)$ $(-\delta_2,0)$ 有界

③ 又 $f(x)$ $[-1+\delta_1,-\delta_2]$ 连 ⇒ 有界

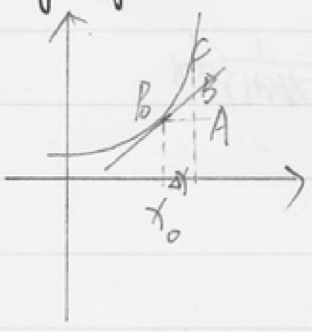
⇒ $f(x)$ $(-1,0)$ 有界

B.C. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\cdot\sin(x-2)}{x\cdot(x-1)(x-2)^2}=\infty$. ⇒ $f(x)$ $(0,1)$ 无界. $(1,2)$ 无界

C. D. $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{x\cdot\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\infty$ ⇒ $f(x)$ $(1,2)$. $(2,3)$ 无界.

2. $y=f(x)$ 有二阶导数, 且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在 x_0 处对应的增量与微分. 若 $\Delta x>0$, 则 (C)

A. $dy<\Delta y<0$. B. $\Delta y<dy<0$. C. $0<dy<\Delta y$. D. $0<\Delta y<dy$



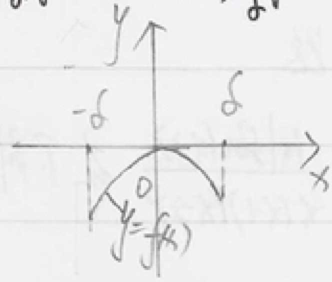
$f'(x)>0$, $f''(x)>0$. 则 $y=f(x)$ 单调递增, 下凸. 如左图.

又 $\Delta x>0$. $P_0A=\Delta x$. 则 $AB=dy=f'(x_0)\Delta x$. ⇒ $\Delta y>dy>0$.

$AC=\Delta y$.

3. $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(0)=f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$. 则 ∃ $\delta>0$, 有 (B)

A. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx>0$ B. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx<0$ C. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx=0$ D. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx>0$ 且 $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx<0$



$\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=-1<0 \Rightarrow \exists\delta>0$, 且$x\neq0$ $x\in(-\delta,\delta)$时 $\frac{f''(x)}{|x|}<0$, 即 $f''(x)<0$ $x\in\mathring{U}(0,\delta)$ 上凸

又 $f(0)=f'(0)=0$, 则 $y=f(x)$ 图象如右图

$\therefore \int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx<0$

4. $y=\frac{1+x}{1-e^{-x}}$ 有(D.)条渐近线.

A. 0. B. 1 C. 2. D 3.

$y=\frac{1+x}{1-e^{-x}}$ 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. ① $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x}{1-e^{-x}}=\infty$. $x=0$ 为垂直渐近线.

② $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+x}{x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}}=1\cdot0=0=a_1$. $b_1=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+x}{1-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$.

$\therefore y=0$ 为水平渐近线 ($x\to-\infty$时)

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}}=1\cdot\frac{1}{1-0}=1=a_2$. $b_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{e^x-1}=1$

$\therefore y=x+1$ 为斜渐近线 ($x\to+\infty$时)

5. 下列反常积分中收敛的是(C.)

A. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ B. $\int_1^2\frac{1}{(x-1)^3}dx$ C. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ D. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$

A. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$. 发散.

B. $\int_1^2\frac{1}{(x-1)^3}dx=-\frac{1}{2}(x-1)^{-2}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ 发散

C. $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln\sqrt{x})^2}dx \xlongequal{令\sqrt{x}=t} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{t^2\cdot(\ln t)^2}dt^2=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t\cdot(\ln t)^2}dt$

$=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{(\ln t)^2}d\ln t=-\frac{2}{\ln t}\Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-2}{\ln t}+\frac{2}{\ln\sqrt{2}}=\frac{2}{\ln\sqrt{2}}$ 收敛.

D. $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{x(x+1)}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=\int_0^1\frac{1}{x}dx-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+1}dx$

而 $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ 发散. $\therefore\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$ 发散.

二. 填空题.

6. $y=y(x)$ 由方程 $e^{-y}+x(y-x)=1+x$ 确定, 则 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处切线方程为 <u>$y=-x$</u>

$x=0$ 代入, 有 $e^{-y}+0=1+0\Rightarrow y=0$.

$e^{-y}+x(y-x)=1+x$, 两边对 x 求导, 得: $-e^{-y}\cdot y'+(y-x)+x(y'-1)=1$

$x=0, y=0$ 代入, 有 $-e^{0}\cdot y'(0)+0+0=1\Rightarrow y'(0)=-1$.

$\therefore y=y(x)$ $(0,0)$ 处切线为: $y-0=(-1)(x-0)$. 即 $y=-x$

7. 曲线 $\begin{cases}x=3t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的曲率半径为 <u>6</u>

①先求曲率 $k=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{t=1}=\frac{|6t\cdot(-6t)-6\cdot(3-3t^2)|}{[(6t)^2+(3-3t^2)^2]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{t=1}=\frac{36}{(36)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{6}$

② 曲率半径 $\rho=\frac{1}{k}=6$

求曲率 $k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=1}$. $t=1\Rightarrow x=1, y=2$. $y'(x)=\frac{3-3t^2}{6t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{2}t\Rightarrow y'(1)=0$

$y''(x)=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2}}{6t}\Rightarrow y''(1)=-\frac{1}{6}$

所以有 $k=\frac{1}{6}$.

8. $f(x)$有连续导函数，且$f(x)>0$，$\ln f(x)=\sin x$，则 $\int \frac{x f'(x)}{f(x)}dx =$ $\underline{x\sin x+\cos x+C}$

$\int \frac{x f'(x)}{f(x)}dx = \int x\cdot \frac{1}{f(x)} df(x) = \int x\cdot d(\ln f(x)) = x\cdot \ln f(x) - \int \ln f(x)\, dx$，$\ln f(x)=\sin x$ 代入

$= x\cdot \sin x - \int \sin x\, dx = x\cdot \sin x + \cos x + C$.

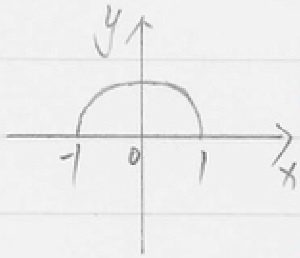
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) =$ $\underline{\frac{\pi}{6}}$

$a_n=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}\right)$

取 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$，$[0,1]$。 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

10. 半径为1的半圆周 $x^2+y^2=1$ $(y\geq 0)$ 的质心坐标为 $\underline{(0,\frac{2}{\pi})}$

设质心 $(\bar{x},\bar{y})$，则 $\bar{x}=\frac{1}{l}\int_0^l x\,ds$，$\bar{y}=\frac{1}{l}\int_0^l y\,ds$，$l=\pi$.



上半圆参数方程为 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $t\in[0,\pi]$ $ds=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt = dt$

$\therefore \bar{x}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos t\cdot dt = 0$ (或由对称性)

$\bar{y}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cdot dt = \frac{2}{\pi}$