

# 安徽大学 2020—2021 学年第一学期

## 《高等数学 A (一)》期末考试试题 (B 卷)

### 参考答案及评分标准

#### 一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. C      2. B      3. D      4. B      5. B

#### 二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

6. 4      7.  $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} dx$       8.  $2^5 e^x \cos x$

9.  $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + 2e$       10.  $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2} d\theta$

#### 三、计算题 (每小题 9 分, 共 54 分)

11. 解: 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+n}{2+n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2+n} \right)^{-(2+n) \cdot \frac{n}{-(2+n)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{-(2+n)}}$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{-(2+n)} = -1$ , .....7 分

所以所求极限为  $e^{-1}$ . .....9 分

12. 解: 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}) x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}) x^3 \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}) x^3 \cos x} = \frac{1}{4}. \quad 9 \text{ 分}$$

13. 解: 对  $y = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$  两边取对数, 有

$$\ln y = x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right). \quad \text{..... 3 分}$$

对等式两边关于  $x$  求导, 则有  $\frac{y'}{y} = \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1}$ ,

从而  $y' = \left( \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$ . ..... 9 分

14. 解: 原式  $= \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$  .....4 分

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

15. 解: 原式  $= x \ln^2 x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \ln x dx$  ..... 4 分

$$= x \ln^2 x \Big|_0^1 - 2x \ln x \Big|_0^1 + \int_0^1 2 dx = 2. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

16. 解: 原式  $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 x dx$  ..... 3 分

$$= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 x dx = 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \pi. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

#### 四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 解: 因为  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2e^{2t}}$ , 所以  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2}$ .

$t=0$  对应的点为  $(2,1)$ ,

所以曲线在点  $(2,1)$  处的切线方程为  $y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)$ , 即  $x+2y-4=0$ . ..... 6 分

从而法线方程为  $y-1 = 2(x-2)$ , 即  $2x-y-3=0$ . ..... 8 分

18. 解: 令  $x^3 - 6x = 2x$ , 解得  $x = \pm 2\sqrt{2}, 0$ . .....3 分

故所求面积为  $S = \int_{-2\sqrt{2}}^0 (x^3 - 6x - 2x) dx + \int_0^{2\sqrt{2}} (2x - x^3 + 6x) dx = 32$ . ..... 8 分

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

19. 证明：因为  $F'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2} = \frac{\int_0^x (x-t)f(x)f(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2} \geq 0,$

所以  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加. .... 10 分