安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末模拟卷二参考答案

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D；　**2**．A；　**3**．C；　**4**．A；　**5**．D

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．1；7．第二类（或无穷）；8．$\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$；9．$3x^2-\dfrac{10}{3}$；10．$(\dfrac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

三．**计算题（每小题 10 分，共 50 分）**

11．解：由 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$，知

$$e^x-(ax^2+bx+1)=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)-(ax^2+bx+1)$$

$$=(1-b)x+(\frac{1}{2}-a)x^2+o(x^2)$$

依题意，有 $1-b=0$，$\dfrac{1}{2}-a=0$，故 $a=\dfrac{1}{2},b=1$

…………………………（10 分）

12．解：原式=$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

………………（10 分）

13．解：先解对应的齐次方程：$y'+y=0$ 即 $\dfrac{dy}{dx}=-y$，$\therefore\int\dfrac{1}{y}dy=\int-dx$，解 $y=ce^{-x}$，其中 c 为任意常数．令 $y=u(x)e^{-x}$ 代入 $y'+y=1$ 得 $u'(x)e^{-x}=1$ 即 $u'(x)=e^x$ $\therefore$ $u(x)=e^x+c$ $\therefore$ 原式的通解为：$y=(e^x+c)e^{-x}=1+ce^{-x}$，又 $y(0)=1$，解得 $c=0$ 所以微分方程的解为 $y=1.$

………………（10 分）

14．解：$I=\displaystyle\int\frac{2x-5}{x^2-6x+10}dx=\int\frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx+\int\frac{1}{x^2-6x+10}dx$

$$=\int\frac{1}{x^2-6x+10}d(x^2-6x+10)+\int\frac{1}{(x-3)^2+1}dx$$

$$I=\int\frac{2x-5}{x^2-6x+10}dx=\int\frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx+\int\frac{1}{x^2-6x+10}dx$$

$$=\int\frac{1}{x^2-6x+10}d(x^2-6x+10)+\int\frac{1}{(x-3)^2+1}dx$$

$$=\ln|x^2-6x+10|+\int\frac{1}{(x-3)^2+1}dx(x-3)$$

$$=\ln(x^2-6x+10)+\arctan(x-3)+C.$$

………………（10 分）

15．解：由奇、偶函数在对称区间上定积分性质知

原式 $=2\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx\ =4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=4-4\cdot\frac{\pi}{4}=4-\pi$.

………………（10 分）

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16．解：（1）设切点坐标为 $\left(a,\sqrt{a-1}\right)$，则切线方程为 $y-\sqrt{a-1}=\frac{1}{2\sqrt{a-1}}(x-a)$

由切线过原点，得 $a=2$，故切点为 $(2,1)$，切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$

A 的面积 $S=\int_0^1(y^2+1-2y)dy=\int_0^1(y-1)^2dy=\frac{1}{3}$

（2）所求旋转体的体积 $V=\pi\int_0^1(y^2+1)^2dy-\pi\int_0^1(2y)^2dy=\frac{28}{15}\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{8}{15}\pi$

………………（10 分）

五．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：由积分中值定理，

$F(1)=\int_0^x t^2f(t)dt=\eta^2 f(\eta)$， $\eta\in[0,1]$

对函数 $x^2f(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上应用 Roll 定理，有

$[x^2f(x)]'_{x=\xi}=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$，即

$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$， $0<\xi<1$）

………………（5 分）

18．证明：$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf(\sin x)dx$

令 $x=\pi-t$，有

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi - t) f(\sin t)dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \pi f(\sin x)dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx$$

故 $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

………………（5 分）