安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《线性代数 A》模拟题（一）

（闭卷　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题　号	一	二	三	四	总　分
得　分					
阅卷人					

一、选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. 设 A 是 n 阶矩阵，且 $|A|=0$，则有（　　）

（A） A 的列秩等于零；　　（B） A 中必有两个列向量对应成比例；

（C） A 的任一列向量可由其他列向量线性表示；

（D） A 中必有一列向量可由其他列向量线性表示.

2. 设 A,B 为 n 阶方阵，且 $A\neq O$， $AB=O$，下列结论必然正确的是（　　）

（A） $B=O$；　　（B） $(A+B)^2=A^2+B^2$；

（C） $(A-B)^2=A^2-BA+B^2$；　　（D） $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B 必有（　　）

（A）合同，且相似；　　（B）合同，但不相似；

（C）不合同，但相似；　　（D）既不合同也不相似.

4. 设 A 为 n 阶方阵， $B=\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}$，其中 α 为 n 维列向量，且 $r(A)=r(B)$，则（　　）

（A） $AX=\alpha$ 必有无穷多解；　　（B） $AX=\alpha$ 必有唯一解；

（C） $BY=0$ 仅有零解 ；　　（D） $BY=0$ 必有非零解.

5. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是（　C　）

（A） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个零向量；

（B） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有两个向量的对应分量成比例；

（C） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示；

（D） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}(t<s)$ 线性相关.

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6. 行列式$\begin{vmatrix} x-1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & x-2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix}$中，$x^3$项的系数为________ .

7. 设α,β均为3维列向量. 若$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则$\alpha^T\beta=$________.

8. 设A为一个n阶可逆矩阵，且A有一特征值为λ，则$(A^*)^2+2I$必有特征值_________.

9. 设$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,0),\alpha=(1,2,1)$，则$\alpha$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为________________.

10. 若n阶方阵A的秩为$n-1$，则其伴随矩阵A^*的秩为_________.

三、分析计算题（6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分	

11. $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & x \end{vmatrix}$.

12. 设矩阵A与B相似，且$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

（1）求a,b的值；

（2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

13. 已知向量组$\beta_1=(0,1,-1),\beta_2=(a,2,1),\beta_3=(b,1,0)$与向量组$\alpha_1=(1,2,-3)$，$\alpha_2=(3,0,1)$，$\alpha_3=(9,6,-7)$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，求$a,b$的值.

14. 给定R^3的两个基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{与}\beta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

（1）求出由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵；

（2）求向量$\alpha=\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$在这两组基下的坐标.

15. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{2024}.

16. 用正交线性替换将二次型 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准型.

得 分	

四、证明题（共 10 分）

17. 设 A 是 n 阶正定矩阵，P 为可逆阵，P^T 为 P 的转置矩阵，证明：P^TAP 也为正定矩阵.