安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期末考试（A 卷）参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．B　　2．A　　3．D　　4．B　　5．C

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．0.28　　7．$\frac{4}{5}$　　8．$\frac{1}{4}$　　9．25　　10．$\frac{7}{16}$

三．计算题（每小 12 分，共 60 分）

11.【解】(1) $\frac{1}{3}+a+\frac{1}{6}+2a+\frac{1}{4}=1$，得 $a=\frac{1}{12}$

………………（6 分）

（2）

X^2	0	1	1/4	4
P_k	1/12	1/2	1/6	1/4

………………（12 分）

12.【解】(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^2(a-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+a-\frac{3}{2}=1$，

所以 $a=2$.

………………（6 分）

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot xdx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx=1$.

………………（12 分）

13.【解】X,Y 的边缘分布分别为

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array},\qquad \begin{array}{c|cc} Y & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array},$$

则 $EX=\frac{1}{4},EY=\frac{1}{6}$，$DX=\frac{3}{16}$，$DY=\frac{5}{36}$，$E(XY)=\frac{1}{12}$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{24}$，从而

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

………………（12 分）

14.【解】(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x \frac{1}{x}dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

………………（6 分）

（2） $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

………………（12 分）

15.【解】设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 的一组样本值，似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

取对数有 $LnL(\theta)=(-n)Ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$， 令 $\dfrac{\partial LnL(\theta)}{\partial\theta}=\dfrac{(-n)}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$

得 θ 的最大似然估计量为：$\hat{\theta}_L=\overline{X}$

………………（12 分）

四．应用题（每小题 5 分，共 5 分）

16.【解】假设 $H_0:\mu=70\quad H_1:\mu\neq 70$

依题意：$n=36\quad \bar{x}=66.5\quad s=15\quad \alpha=0.05$

由 $|T|=\left|\dfrac{\bar{x}-70}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{66.5-70}{15/6}\right|=1.4<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$

故接受 H_0，即可认为这次考试全体考生的平时成绩为 70 分

………………（5 分）

五．证明题（每小题 5 分，共 5 分）

17.【证明】

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P(\min\{X,Y)\le z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}$

$=1-P\{X>z,Y>z)=1-P(X>z)\cdot P\{Y>z)$

$=1-[1-P(X\le z\}]\cdot[1-P\{Y\le z\}]=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]=1-\mathrm{e}^{-2z}$，

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$，

所以 $Z=\min(X,Y)$ 的概率密度函数为

$$f_Z(x)=F_Z'(z)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}.$$

故 $Z=\min(X,Y)$ 服从指数分布

………………（5 分）