安徽大学 2018—2019 学年第一学期
《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）
参考答案与评分标准

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$\underline{e^{2019}}$；　2、$\underline{\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$；　3、$\underline{-\dfrac{\sin(x+y)\mathrm{d}x}{1+\sin(x+y)}}$；　4、$\underline{(-1,8)}$；　5、$\underline{\dfrac{\pi}{3}}$.

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、D；　7、D；　8、A；　9、A；　10、B.

三、计算题（本题共六小题，每小题 7 分，共 42 分）

11. 解. 令$x-t=u$，则

$$\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t=\int_x^0 \sin u^2(-\mathrm{d}u)=\int_0^x \sin u^2\mathrm{d}u \text{..........（3 分）}$$

故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin u^2\,\mathrm{d}u}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\sec^2 x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\tan^2 x}=1$.....................（7 分）

12. 解.

原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{k}{n}\sin(\dfrac{k}{n}\pi)\ =\int_0^1 x\sin(\pi x)\mathrm{d}x$......................................（4 分）

$=-\dfrac{1}{\pi}(x\cos\pi x|_0^1-\int_0^1\cos\pi x\mathrm{d}x)=\dfrac{1}{\pi}$. ....（7 分）

13. 解. 由$x'(t)=\cos t, y'(t)=t\cos t$可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t$. ....（4分）

进而$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{\cos t}$，故$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.　...（7 分）

14. 解. $I=\int\sec x\mathrm{d}(\tan x)=\sec x\tan x-\int\tan x\sec x\tan x\mathrm{d}x$................（2 分）

$=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\sec x\tan x-I+\int\sec x\mathrm{d}x$

$=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|$

故$I=\dfrac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$ ....（7 分）

15. 解. 令$x=t^2, x|_0^1 \iff t|_0^1, \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，则

原式$=\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\cdot(2t)\mathrm{d}t=2\int_0^1\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t$……………………………………（3 分）

$=2\int_0^1\frac{t^4-1+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int_0^1(t^2-1+\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$

$=2\left(\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$.……………………………………（7 分）

16. 解. 原方程可写成 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\cos x}{x}$.

故原方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}(\sin x+C)\text{……………………………………（5 分）}$$

又因$y(\frac{\pi}{2})=1$， 由此可得$C=\frac{\pi}{2}-1$，故原初值问题的解为

$$y=\frac{1}{x}(\sin x+\frac{\pi}{2}-1).\quad\text{……………………………（7 分）}$$

四、应用题（本题共两小题，每小题 8 分，共 16 分）

17. 解. 设小正方形的边长为x，则叠成的盒子的体积为

$$V(x)=x(3-2x)^2,\ 0<x<\frac{3}{2}.\text{……………………………（3 分）}$$

$V'(x)=3(3-2x)(1-2x)$，得驻点$x=\frac{3}{2}$（舍去），$x=\frac{1}{2}$，

又当$0<x<\frac{1}{2}$时，$V'(x)>0$，当$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$时，$V'(x)<0$，

所以$V(x)$在$x=\frac{1}{2}$时取得最大值，

即小正方形的边长为$\frac{1}{2}$时， 叠成的盒子体积最大.……………………………………（8 分）

18. 解. 该钢丝段的长度为

$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t$ ……………………………………（4 分）

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\sqrt{3}\left(e^{2\pi}-1\right)$.……………………………………………（8 分）

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

19. 证明. 构造辅助函数$F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$………………………（3 分）

则$F(a) = F(b) = f(a)$，且$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导.

由 Rolle 定理可知，存在$\xi \in (a,b)$使得 $F'(\xi) = 0$，

即$f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$………………………………………………………………（6 分）

20. 证明. 令$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

$$F(a) = -\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t < 0,\ F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0.$$

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续，由零点定理可知，存在$\xi \in (a,b)$，使得$F(\xi) = 0$.

即$\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$. ……………………………………………………（3 分）

又因为$F'(x) = f(x) + \dfrac{1}{f(x)} > 0$，所以$F(x)$为严格单调递增函数，故上述$\xi \in (a,b)$是

唯一的. . ………………………………………………………………………………（6 分）