安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．B　　2．B　　3．D　　4．C　　5．A

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．$\frac{1}{2}$　　7．$y=x+2$　　8．1　　9．$\frac{1}{2}\ln 3$　　10．$\frac{9}{2}\pi$

三．计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(2\sin x+\cos x-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(2\sin x+\cos x-1\right)\right]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)}=e^{2}$

…………………………（10 分）

12．解：显然，当 $x=0$ 时，$y=1$

原方程两边对 x 求导，得

$e^{2x+y}(2+y')-(y+xy')\sin(xy)=0$. 所以切线斜率 $k=y'(0)=-2$.

法线斜率为 $\frac{1}{2}$，法线方程为 $y-1=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y+2=0$.

………………（10 分）

13．解：$\int_0^1 xf''(2x)dx \xlongequal{u=2x} \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{u}{2}f''(u)du=\frac{1}{4}\int_0^2 ud\left[f'(u)\right]$

$=\left[\frac{u}{4}f'(u)\right]_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 f'(u)du=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}\left[f(u)\right]_0^2$

$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2)+\frac{1}{4}f(0)=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=2$

………………（10 分）

14．解：设 $x-2=t$, 则 $\int_1^4 f(x-2)dx=\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$

$=\int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$

………………（10 分）

15．解：

由$xdy+\left(x-2y\right)dx=0$，得$y'-\dfrac{2}{x}y=-1$

得通解$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int -e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x+Cx^2$

由$y(1)=2$,得$C=1$，故$y=x+x^2$

则$S=-\int_{-1}^{0}x+x^2dx=\dfrac{1}{6}.$

………………（10 分）

16．解：令 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$，得 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一驻点 $x=\sqrt{2}$

$0<x<\sqrt{2}$ 时， $f'(x)>0$； $x>\sqrt{2}$ 时， $f'(x)<0$

所以， $x=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内的极大值点

$f\left(\sqrt{2}\right)=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\big|_0^2-\int_0^2 e^{-t}dt=1+e^{-2}$，

$f(0)=0$， $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=1$

经过比较，得 $f(x)$ 的最大值是 $f\left(\sqrt{2}\right)=1+e^{-2}$，最小值是 $f(0)=0$

………………（10 分）

四．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，而

$F(0)=\int_1^0\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_0^1\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$， $F(1)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t>0$，

由零点定理知，根存在.

又因为 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}>0$，故根唯一.

………………（5 分）

18．证明：令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$

显然， $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $F(1)=F(2)=\dfrac{1}{2}$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F'(\xi)=\dfrac{\xi^2f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{\xi^4}=0$

即$f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

………………（5 分）