安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《线性代数(A)》期中考试试卷(A 卷)

（闭卷　　时间 120 分钟）

院/系＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿

答题勿超装订线

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 是 3×4 矩阵，B 是 4×3 矩阵，则下列运算可以进行的是（　　　）.

   (A) AB　　(B) $A+B$　　(C) A^TB　　(D) AB^T

2. 以下结论或等式正确的是（　　　）.

   (A) 若 $AB=AC$,且$A\neq0$,则$B=C$　　(B) 若 $A\neq0$，$B\neq0$,则$AB\neq0$

   (C) 若 A,B均为零矩阵,则$A=B$　　(D) 对角矩阵是对称矩阵

3. 设 4 阶行列式$|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)|=m,|(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3)|=n$，其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\beta_1$，$\beta_2$ 为 4 维列向量，则 4 阶行列式$|(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2)|=$（　　　）.

   (A) $m-n$　　(B) $n-m$　　(C) $m+n$　　(D) $-m-n$

4. 设 A,B 为同阶方阵，且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$（　　　）.

   (A) 2　　(B) -2　　(C) 3　　(D) -3

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

   若线性方程组 $Ax=b$无解，则 $a=$＿＿＿＿＿＿.

   (A) 1　　(B) -1　　(C) 3　　(D) -3

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 设 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$，$D$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}，则 $2A_{11}-4A_{12}-A_{13}-3A_{14}=$＿＿＿＿＿＿.

7. 三阶行列式D中第 2 列第 1、2、3 行位置元素分别为 1、2、3，对应的余子式分别为 1、2、4，则 $D=$____________.

8. 设A,B均为 3 阶方阵，A的第 3 行的（-2）倍加到第 2 行得A_1，再将B的第 1 列的（-1）倍加到第 2 列得B_1，而 $A_1B_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $AB=$ ______________.

9. 齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2-x_3=0\\\lambda x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解，则正数λ必须满足____________.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\-\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$，则 $A^n=$_________________.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

12. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\4&3&7&-5\\16&9&49&25\\64&27&343&-125\end{vmatrix}$.

13. 解矩阵方程 $X\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&4\end{pmatrix}$.

14. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}9&5&0&\cdots&0&0\\4&9&5&\cdots&0&0\\0&4&9&\cdots&0&0\\&\cdots&&\cdots&&\\0&0&0&\cdots&9&5\\0&0&0&\cdots&4&9\end{vmatrix}$.

15.设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求满足 $AXA^T=2XA^T+I$ 的矩阵 X，其中 A^T 是 A 的转置矩阵.

16.当 a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

有无穷多解？并求其全部解.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17.设 A 为 $n(n>2)$ 阶方阵, 其中元素均为 1，证明：$(I-A)^{-1}=I-\dfrac{1}{n-1}A$.

18.设 A 为 $n(n>2)$ 阶可逆阵，证明:$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$. 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.