安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期末模拟题（一）

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．将一枚均匀的硬币连续抛两次，以 A 表示事件“正面最多出现一次”，以 B 表示事件“正面和反面各出现一次”，则（ ）

(A) $A\subset B$； (B) A 与 B 互斥 ； (C) A 与 B 互不相容； (D) A 与 B 不独立

2．设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别是 4 和 2，则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是（ ）。

$(A)44$； $(B)28$； $(C)16$； $(D)8$。

3．已知总体 X 的期望为 0，方差为 σ^2. 从总体 X 中抽取容量为 n 的简单随机样本，其样本均值和样本方差分别为 $\overline{X},S^2$. 记 $S_k^2=\frac{n}{k}\left(\overline{X}\right)^2+\frac{1}{k}S^2$（$k=1,2,3,4$），则（ ）。

(A) $E(S_1^2)=\sigma^2$； (B) $E(S_2^2)=\sigma^2$； (C) $E(S_3^2)=\sigma^2$； (D) $E(S_4^2)=\sigma^2$。

4．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值，S^2为样本方差，则（ ）。

$(A)n\overline{X}\sim N(0,1)$； $(B)nS^2\sim\chi^2(n)$； $(C)\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$； $(D)\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$。

5．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（σ^2 已知），则在给定样本容量 n 及置信度 $1-\alpha$ 的情况下，未知参数 μ 的置信区间长度随着样本均值 $\overline{X}$ 的增加而（ ）。

(A)不变； (B)增加； (C)减少； (D)不能确定增加或减少。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．一批产品共有 8 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回. 则第二次抽出的是次品的概率________.

7．设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\leq 1\}=$____________。

8．设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,1;2,4;0)$，则 $D(XY)=$____________。

9．设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z=X-0.4$，则 Y 和 Z 的相关系数为_____。

10．设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=75$，方差 $D(X)=5$，由根据切比雪夫不等式估计得 $P(|X-75|\geq k)\leq 0.05$，则 k 为__________。

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．设连续型随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<-1\\ a+b\arcsin x\ , & -1<x\le 1\\ 1\ , & x>1\end{cases}$

（1）试确定常数 $a\,,b$；（2）求 $P\{-1<X<\frac{1}{2}\}$；（3）求 X 的密度函数;

12．设 A、B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}\ ,\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}\ ,$$

求：（1）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；（2）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

（3）$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布。

13．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

求：（1）(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),\ f_Y(y)$；（2）$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

14．设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-3x-4y}, & x>0,\ y>0\\ 0\,, & \text{其他}\end{cases}$，求

(1) 随机变量 X,Y 的边缘密度函数；(2) $P(0<X\le 1,1<Y\le 2)$.

15．设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中是 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 未知参数，利用总体 X 的如下样本值 3，1，3，0，3，1，2，3，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16．设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程。

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

17．设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
-1	$\frac{1}{3}$	0	0

0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	0	$\frac{1}{3}$

证明：X 与 Y^2 不独立也不相关.