

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A (一)》期末模拟卷一参考答案

一. 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. D; 2. B; 3. A; 4. C; 5. C

二. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 2; 7. 3; 8. -2; 9. $y = x + 1$; 10. $\ln(1 + \sqrt{2})$

三. 计算题 (每小题 10 分, 共 50 分)

11. 解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e$

..... (10 分)

12. 解: (1) 两边对 x 求导, 得 $y' - 1 = e^{x(1-y)}[1 - y - xy']$

解得: $y' = \frac{1 + (1-y)e^{x(1-y)}}{1 + e^{x(1-y)}}$

(2) 在方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = 1$, 又由 (1) 知 $f'(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0) = 1$$

..... (10 分)

13. 解: 原方程可化为 $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$, 这是一个一阶线性非齐次方程, 其通解公式为

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right), \text{ 即}$$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x+1} dx} \left(\int (x+1)^3 e^{-\int \frac{2}{x+1} dx} dx + C \right) = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$$

代入初始条件 $y(0) = \frac{1}{2}$, 得 $C = 0$, 故原方程的解为 $y = \frac{1}{2}(x+1)^4$.

..... (10 分)

14. 解: 令 $x = \tan t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{1}{\tan^4 t \sec t} \sec^2 t dt = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} d \sin t = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t} d \sin t = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{3 \sin^3 t} + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C \\ &\dots\dots\dots (10 \text{ 分})\end{aligned}$$

15. 解: 令 $\sqrt{x} = t$, 由分部积分法, 知

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2 \int_0^\pi t^2 \cos t dt = 2 \int_0^\pi t^2 d \sin t = 0 - 2 \int_0^\pi 2t \sin t dt = 4 \int_0^\pi t d \cos t = 4\pi \\ &\dots\dots\dots (10 \text{ 分})\end{aligned}$$

四、应用题 (每小题 10 分, 共 10 分)

16. 解: (1) 依题意 D 的面积为

$$S = \int_0^1 (e^y - ey) dy = e - 1 - \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - 1.$$

(2) 依题意, 旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy - \pi \int_0^1 (ey)^2 dy = \frac{e^2 - 1}{2} \pi - \frac{e^2}{3} \pi = \left(\frac{e^2}{6} - \frac{1}{2}\right) \pi. \\ &\dots\dots\dots (10 \text{ 分})\end{aligned}$$

五. 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17. 证明: 由 $f(0)f(1) > 0$, $f(0)f(\frac{1}{2}) < 0$ 知, $f(0)f(\frac{1}{2}) < 0$, $f(\frac{1}{2})f(1) < 0$

由连续函数的零点定理知, 存在 $\eta \in (0, \frac{1}{2})$, $\zeta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\eta) = f(\zeta) = 0$

令 $F(x) = e^x f(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 由罗尔定理知,

至少存在 $\xi \in (\eta, \zeta) \subset (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$
 $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

18. 证明:
$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2}$$

由积分中值定理 $\int_a^x f(t) dt = f(\xi)(x-a)$, 其中 $a < \xi < x$, 故

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2} = \frac{f(x)(x-a) - f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(\xi)}{(x-a)}$$

依题意知 $f(x)$ 递增, 知 $F'(x) \geq 0$
 $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$