

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 A (一)》期中考试试卷

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 下列命题中错误的是 ().

(A) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 则当 n 充分大时, $a_n > \frac{1}{2}$

(C) 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\}$ 均收敛

(D) 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

2. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$ 有 () 个第一类间断点.

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

3. 设函数 $y = f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处增量 Δy 是 ().

(A) 与 Δx 同阶的无穷小

(B) 与 Δx 等价的无穷小

(C) 比 Δx 高阶的无穷小

(D) 比 Δx 低阶的无穷小

4. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内 ().

(A) 有界

(B) 无界

(C) 存在最值

(D) 不一定有界

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则下列结论正确的是 ().

(A) $f(0) = 0, f'(0) = 1$

(B) $f(0) = 0, f'(0)$ 不一定存在

(C) $f(0) = 1, f'(0) = 1$

(D) $f(0) = 1, f'(0)$ 不一定存在

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+x+1} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 若 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+ax^2} - 1$ 与 $1 - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{2x}}{\arcsin x}, & x > 0 \\ ae^x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 若函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 若函数 $y = f(\ln x)e^x$, 则微分 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (每小题 10 分, 共 60 分)

11. 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right)$.
12. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)}$.
13. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$.
14. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x - \sqrt{ax^2 + bx + 1} \right) = 2$, 求常数 a, b 的值.
15. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 确定, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.
16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17. 证明方程 $2^x + \sin x = 2$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.
18. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}$, $(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.