安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期末模拟题（一）

参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．A　　3．B　　4．D　　5．C

二．填空题**（每小题 3 分，共 15 分）**

6．0.2　　7．$\dfrac{1}{9}$　　8．14　　9．0.9　　10．10

三．**计算题（每小题 10 分，共 50 分）**

11.【解】（1）利用分布函数连续性质可知：$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{\pi}$；

（2）$P\{-1<X<\dfrac{1}{2}\}=F(\dfrac{1}{2})-F(-1)=\dfrac{2}{3}$；

（3）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0\ , & 其他,\\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , & -1<x\le 1。\end{cases}$

12.【解】（1）$P\left\{X=1,Y=1\right\}=P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\middle|A\right)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$，

$P\left\{X=1,Y=0\right\}=P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right)-P\left(AB\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$，

$P\left\{X=0,Y=1\right\}=P\left(\overline{A}B\right)=P\left(B\right)-P\left(AB\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(A\middle|B\right)}-P\left(AB\right)=\dfrac{1/12}{1/2}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{12}$，

$P\left\{X=0,Y=0\right\}=1-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{3}$，故

X \ Y	0	1
0	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{12}$
1	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{12}$

（2）$EX=\dfrac{1}{6}\times 1+\dfrac{1}{12}\times 1=\dfrac{1}{4}$，$EX^2=\dfrac{1}{6}\times 1+\dfrac{1}{12}\times 1=\dfrac{1}{4}$，

$DX = EX^2 - \left(EX\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$,

$EY = \frac{1}{12}\times 1 + \frac{1}{12}\times 1 = \frac{1}{6}$，$EY^2 = \frac{1}{12}\times 1 + \frac{1}{12}\times 1 = \frac{1}{6}$,

$DY = EY^2 - \left(EY\right)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$，$EXY = \frac{1}{12}\times 1\times 1 = \frac{1}{12}$，故

$$\rho_{XY} = \frac{E\left(XY\right) - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{5}{36}}} = \frac{\sqrt{15}}{15}。$$

（3）由

p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\left(X, Y\right)$	$\left(0, 0\right)$	$\left(0, 1\right)$	$\left(1, 0\right)$	$\left(1, 1\right)$
$Z = X^2 + Y^2$	0	1	1	2

故

Z	0	1	2
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

13.【解】(I) $f_X\left(x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, y\right)dy = \begin{cases} \int_0^{2x} dy, 0 < x < 1 \\ 0，其他 \end{cases}$,

$$f_Y\left(y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, y\right)dx = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^{1} dy, 0 < y < 2 \\ 0，其他 \end{cases}。$$

（II）$F_Z\left(z\right) = P\left\{Z \le z\right\} = P\left\{2X - Y \le z\right\} = \iint\limits_{2x-y\le z} f\left(x, y\right)dxdy$

$$= \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ 1 - \int_{\frac{z}{2}}^{1} dx\int_0^{2x-z} dy, & 0 < z < 2 \\ 1, & z \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0，z \le 0 \\ z - \frac{z^2}{4}, 0 < z < 2 \\ 1，z \ge 2 \end{cases},$$

所以

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2},0<z<2\\ 0，其他\end{cases}。$$

14.【解】(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}y，& x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}，& x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}x，& y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}，& y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$,

(2) $P(0<X\le 1,1<Y\le 2)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^2 12\mathrm{e}^{-3x-4y}\,\mathrm{d}y$

$=(1-\mathrm{e}^{-3})(\mathrm{e}^{-4}-\mathrm{e}^{-8})$.

15.【解】(1) $EX=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$,

令 $EX=\overline{X}\Rightarrow 3-4\theta=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}_{矩}=\frac{3-\overline{X}}{4}=\frac{1}{4}$。

(2) $L(\theta)=P\{X_1=3\}P\{X_2=1\}\cdots P\{X_8=3\}=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$,

$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$,

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0$$

$\Rightarrow\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，因为 $\theta=\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$，不合题意，故 $\hat{\theta}_{极大}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$。

四．应用题（**每小题 10 分，共 10 分**）

16.【解】①设考生成绩 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，由题意，知

$$n=36，\ \overline{x}=66.5，\ s=15，\ \alpha=0.05，\ \mu_0=70。$$

② H_0： $\mu=\mu_0=70$； H_1： $\mu\ne\mu_0=70$，

σ^2 未知，检验统计量为 $\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，拒绝域为

$$\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{s}\sqrt{n}\ge t_{1-\alpha/2}(35)=2.0301，$$

而 $\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{s}\sqrt{n}=\frac{|66.5-70|}{15}\sqrt{36}=1.4<2.0301$，

故接受 H_0，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分。

五．证明题（**每小题 10 分，共 10 分**）

17．【解】列出二维随机变量 (X,Y^2) 的联合分布律为

X \ Y^2	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

先考虑相关性.

计算得 $E(X)=0$， $E(Y^2)=\frac{2}{3}$， $E(XY^2)=0$，

故 $Cov(X,Y^2)=E(XY^2)-E(X)E(Y^2)=0$，所以 X 与 Y^2 不相关；

再考虑独立性.

由于 $P(X=0,Y^2=0)=\frac{1}{3}$， $P(X=0)P(Y^2=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，

故 $P(X=0,Y^2=0)\neq P(X=0)P(Y^2=0)$，所以所以 X 与 Y^2 独立.