安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《线性代数 A》模拟题（一）参考答案

一、选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、D；　2、C；　3、B；　4、D；　5、C.

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、-10；　7、8；　8、$\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+2$；　4、$(1,1,-1)^T$；　5、1.

三、分析计算题（6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11、解：从第 2 列开始到第 n 列，每列的均加到第一列，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n-1}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ x+\sum_{i=1}^{n-1}a_i & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n-1}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n-1}a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(x-a_i).$$

12、解：(1) 由于 A 与 B 相似，故 A 与 B 有相同的特征值，从而 A 的特征值也为 $2,2,b$. 另一方面，$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1))$，于是 2 是多项式 $\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)$ 的根，解得 $a=5$． 将 $a=5$ 代入 A 的特征多项式，得到 A 的特征值为 $2,2,6$，这样得到 $b=6$.

(2) 利用 (1) 的结果，$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

当 $\lambda=2$ 时，求解方程组 $(2E-A)X=0$ 得到线性无关的特征向量为

$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，

当 $\lambda=6$ 时，求解方程组 $(6E-A)X=0$ 得到线性无关的特征向量为

$\alpha_3=(1,-2,3)^T$，令 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=B$.

13、解：令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)$，由于 $|A|=0$，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，从而向量组 β_1,β_2,β_3 也线性相关，于是 $\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0$，即有 $a=3b$.

另一方面，α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个基，则有 β_3 可由 α_1,α_2 线性表出，于是 $\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=0$，解得 $b=5$，则 $a=15$.

14、解：（1）设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，则 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，

得到 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{pmatrix}$.

（2）设 $\alpha=\begin{pmatrix}9\\6\\5\end{pmatrix}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

则 $\begin{cases}-x_2+x_3=9\\x_1+x_2+2x_3=6\\x_1+x_3=5\end{cases}$，解得：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\5\end{pmatrix}$.

于是，$\alpha=\begin{pmatrix}9\\6\\5\end{pmatrix}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $A\begin{pmatrix}0\\-4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$.

15、解：A 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\2&\lambda-2&0\\-4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$，故

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，求解齐次线性方程组 $(I-A)X=0$，得基础解系为：

$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$；

对于特征值 $\lambda_3=0$，求解齐次线性方程组 $(-2I-A)X=0$，得基础解系为：

$\alpha_3=(1,1,-2)^T$.

令 $Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$，则有 $QAQ^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

这样，$A^{2024}=Q^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}$，其中 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\4&-2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$.

16、解：二次型对应的实对称矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$，令其特征多项式

$f(\lambda)=|\lambda E-A|=0$，解得其特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

所作的正交线性替换为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，原二次型化为

标准型为：$-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

四、证明题（共 10 分）

17、**证法一：** 因为 $(P^TAP)^T=P^TAP$，所以 P^TAP 为对称阵.

因为 A 正定，所以存在可逆矩阵 C，使得 $A=C^TC$，故

$P^TAP=P^TC^TCP=(CP)^T(CP)$

根据假设可得，CP 为可逆矩阵，所以 P^TAP 也正定.

证法二： 考察二次型 $X^T(P^TAP)X$， 任取 $X_0\neq 0$，因为 A 正定，所以

$X_0^T(P^TAP)X_0=(PX_0)^TA(PX_0)=Y^TAY>0$， $Y=PX_0$，

所以 P^TAP 正定.