安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《线性代数 A》模拟题（二）

（闭卷　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题　号	一	二	三	四	总 分
得　分					
阅卷人					

一、选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. 设 A 和 B 均是n阶方阵，则下列结论正确的是（　　）

（A）$|A+B|=|A|+|B|$；　　（B）$AB=BA$；

（C）$|AB|=|BA|$；　　（D）$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.

2. 二次型 $f=x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+tx_3^2$，当$t=$（　　）时，其秩为 2.

（A）0　　（B）2　　（C）7/8　　（D）1

3. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解的充分条件是（　　）

(A) A 的行向量组线性相关；　　(B) A 的行向量组线性无关；

(C) A 的列向量组线性相关；　　(D) A 的列向量组线性无关.

4. 若三阶矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 的特征值分别为 1，2，-4，则 $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 和$|A|$的值分别是（　　）

(A) -1，-8；　　(B) 8，7；　　(C) 7，8；　　(D) -8，-1.

5. 对于二次型 $f(x)=X^TAX$，其中 A 为 n 阶实对称矩阵，下述各结论中正确的是（　　）

（A）化 $f(x)$ 为标准形的非退化线性替换是唯一的

（B）化 $f(x)$ 为规范形的非退化线性替换是唯一的

（C）$f(x)$ 的标准形是唯一的　　（D）$f(x)$ 的规范形是唯一的

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6. 行列式$\begin{vmatrix}2 & x & 1 & 2x\\ 1 & 1 & x & -1\\ 3 & 2x & 1 & 1\\ x & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$中，$x^4$ 项的系数为_______ .

7. 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4I=0$，其中 I 为单位矩阵，则 $(A-I)^{-1}=$________.

8. 设 3 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^* ，且$|A|=\dfrac{1}{2}$，则$\left|(2A)^{-1}-2A^*\right|=$________.

9. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$，若矩阵 B 满足 $AB=A+2B$，则 $B=$____________.

10. 设 $\alpha_1=(0,0,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,1,1),\alpha=(3,4,5)$，则 α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为______________.

三、分析计算题（6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分	

11. 讨论线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=1\\x_1+x_2+ax_3=-2\end{cases}$ 解的情况；若有解，则求出方程组的解.

12. 若 $\alpha_1=(1,4,0,2),\alpha_2=(2,7,1,3),\alpha_3=(0,1,-1,a),\beta=(3,10,b,4)$. 问：

（1）a,b 为何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

（2）a,b 为何值时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并写出此表示式.

13. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 分别是 R^4 的两个基，它们的关系是

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3\\\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_4\\\beta_3=\alpha_3-2\alpha_4\\\beta_4=-2\alpha_3+6\alpha_4\end{cases}$$

(1) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵；

(2) 已知向量 $\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$，求 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标.

14. 求下列向量组

$$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(3,0,7,14)^T,\alpha_4=(1,-1,2,0)^T,\alpha_5=(2,1,5,6)^T$$

的一个极大无关组和秩.

15. 已知 3 阶**实对称矩阵** A 的特征值为 1，2，3，且属于特征值 1，2 的特征向量分别为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

16. 用正交线性替换将二次型 $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准型，并写出所用的正交线性替换.

得 分	

四、证明题（共 10 分）

17. 设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 一个基础解系，而 n 维向量 β 不是此方程组的解. 证明：向量组 $\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$ 线性无关.