院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2016—2017 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1． $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}(\sin x+\cos x)=$____________.

2．已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$____________.

3．设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为________________.

4．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$ ____________.

5．设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$____________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6．下列关于数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a 的定义，错误的是　　(　　　　)

A．对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $a_n\in U(a,\varepsilon)$

B．对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 a_n，使得 $|a_n-a|<\varepsilon$

C．对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<c\varepsilon$，其中 c 是正常数

D．对任意给定 $m\in N^+$，存在 $m\in N^+$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\dfrac{1}{m}$

7．设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A． $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小　　　　　　　　　　B． $f(x)$ 是 x 的低阶无穷小

C． $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　　　　　　　　　D． $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小

8．设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$，则下列说法正确的是　　　　　　　　　　　（　　　）

A． $x=0$ 是可去间断点　　　　　　　　　　　　B． $x=0$ 是跳跃间断点

C． $x=1$ 是可去间断点　　　　　　　　　　　　D． $x=1$ 是跳跃间断点

9．下列函数在区间 $(0,+\infty)$ 内有界的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A． $x\sin x$　　　　　　　　　　　　　　　　　B． $x\cos x$

C． $\dfrac{\sin x}{x}$　　　　　　　　　　　　　　　　　D． $\dfrac{\cos x}{x}$

10．设 $y=f\left(\dfrac{x-2}{3x+2}\right)$， $f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=$　　　　　　　　　　（　　　）

A． $\dfrac{\pi}{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　B． $\dfrac{\pi}{3}$

C． $\dfrac{\pi}{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　D． π

三、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

得 分	

11．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

12．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{\sin x}-1\right)^3\cos x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}$

13．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$．

14．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$．

15．求常数 a,b 的值，使得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, x<0,\\ ax+b, 0\le x\le 1,\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续函数．

16．函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

17. $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

得 分	

18. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<3$， $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)f(1)>0$， $f(0)f(\frac{1}{2})<0$

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.