安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《线性代数 A》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

学号______ 姓名______ 专业______ 年级______ 院/系______

答　题　勿　超　装　订　线

装--------------------订--------------------线

一、选择题（5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．若 A,B,C 均为 n 阶非零矩阵，则下列说法正确的是（　　）

（A）若 $B\neq C$，则 $AB\neq AC$　　（B）若 $AB=AC$，则 $B=C$

（C）若 $AB=BA$，则 $ABC=CBA$　　（D）若 $AB=BA$，则 $A^2B+ACA=A(B+C)A$

2．已知向量组 $(I)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$(II)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；$(III)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$.

如果各向量组的秩分别为 $r(I)=r(II)=3$，$r(III)=4$，则下列结论错误的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关

（C）α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示　　（D）$\alpha_4+\alpha_5$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

3．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则下列也是其基础解系的是（　　）

（A）向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　（B）向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

（C）与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的向量组　　（D）与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等秩的向量组

4．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$，则 A 与 B（　　）

（A）等价、不合同、不相似　　（B）等价、不合同、相似

（C）等价、合同、不相似　　（D）等价、合同、相似

5．若三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别是 1 和 2，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$a>1$　　（B）$-2<a<1$　　（C）$a<-2$　　（D）$a=1$ 或 $a=-2$

二、填空题（5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

6．已知向量组 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 2,\ 3)^T$，$\alpha_3=(1,\ 3,\ k)^T$ 线性相关，则 $k=$________.

7．若 a_1,a_2,a_3 是互不相同的实数，则方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=1\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=1\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=1\end{cases}$ 的解为________________.

8．设三阶矩阵A的秩为$r(A)=2$，且矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\0 & 3 & 6\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}$，则秩$r(AB)=$______.

9．已知$\lambda_1=\lambda_2=1$是三阶矩阵A的特征值，且$|A|=2$，若A^*表示A的伴随矩阵，I表示三阶单位矩阵，则$|A^*+I|=$________.

10．若矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\a & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$有 3 个线性无关的特征向量，则$a=$_______.

三、计算题（6 小题，每小题 12 分，共 72 分）

11．计算四阶行列式$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$.

12．已知矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\\5 & -3\end{pmatrix}$，满足$X=AX+B$，求矩阵$X$.

13．求向量组$\alpha_1=(2,1,3,-1)$，$\alpha_2=(3,-1,2,0)$，$\alpha_3=(1,3,4,-2)$，$\alpha_4=(4,-3,1,1)$的秩与一个极大线性无关组.

14．已知方程组$\begin{cases}5x_1-5x_2-4x_3=1\\x_1-x_2+ax_3=2\\x_1-ax_2-2x_3=-1\end{cases}$有无穷多个解，求$a$的值并求方程组的通解.

15．求矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

16．用正交变换$X=QY$化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$化为标准形，并写出相应的正交变换矩阵$Q$.

四、证明题（共 8 分）

17．设A是$m\times n$矩阵，η_1和η_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同解，

证明：$\eta_1,\eta_1-\eta_2$线性无关.