安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期末考试试卷（A 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．0.8；　**2**．$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；　**3**．$\frac{1}{2}$；

4．$\sigma^2+\mu^2$；　**5**．1.65

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6．C；　**7**．B；　**8**．C；　**9**．A；　**10**．D

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：(1) 由 $\int_0^\alpha \frac{k}{\alpha^2}(\alpha-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k=1 \ \Rightarrow\ k=2$，

…………………　4 分

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{2x}{\alpha}-\frac{x^2}{\alpha^2}, & 0\le x<\alpha, \\ 1 & x\ge\alpha \end{cases}$

…………………　10 分

12．解：(1) Z 的密度函数为 $f(z)=\begin{cases} 1/4, & -2\le z\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{Z\le -1, Z\le 1\}=P\{Z\le -1\}=\frac{1}{4}$，

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{Z\le -1, Z>1\}=0$，

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Z>-1, Z\le 1\}=P\{-1<Z\le 1\}=\frac{1}{2}$，

$P\{X=1,Y=1\}=P\{Z>-1, Z>1\}=P\{Z>1\}=\frac{1}{4}$，

所以 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	-1	1
-1	$1/4$	0
1	$1/2$	$1/4$

…………………　5 分

(2) $P\{Y=-1 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=-1\}}{P\{X=1\}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$，

$$P\{Y=1|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{1}{3}.$$

………………… 10 分

13．解：此人每天等车时间超过 10 分钟也即步行上班的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2},$$

故 $Y\sim B(5,\mathrm{e}^{-2})$.

………………… 5 分

他一周内至少有一次步行上班的概率为

$$P(Y\ge 1)=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5.$$

………………… 10 分

14．解：（1）(X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

所以 X 的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\cdot\mathrm{d}y=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

………………… 5 分

（2）$EX=\int_0^1 x\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$， $EX^2=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$， $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{18}$，

所以 $D(2X+1)=4D(X)=\frac{2}{9}$.

………………… 10 分

15．解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$，

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2-x-(z-x), & 0<x<1,0<z-x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2-z, & 0<x<1,x<z<1+x\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

………………… 4 分

当 $z\le 0$ 或 $z\ge 2$ 时， $f_Z(z)=0$；

当 $0<z<1$ 时， $f_Z(z)=\int_0^z(2-z)\,\mathrm{d}x=z(2-z)$；

当 $1\le z<2$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^1(2-z)\,\mathrm{d}x=(2-z)^2$；

故 $Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1\\ (2-z)^2, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

………………… 10 分

16．解：（1） $E(X)=\int_\theta^1 x\cdot\frac{1}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2}$，由 $\theta=2E(X)-1$，

所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 。

…………………… 5 分

（2）似然函数 $L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}(\frac{1}{1-\theta})^n, & \theta\le x_i\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

当 $\theta\le x_i\le 1$ 时，$L(\theta)=(\frac{1}{1-\theta})^n$，关于 θ 单调增加，

所以 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量。

…………………… 10 分

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

17．（1） 由题设知， $X\sim B(n,p)$，其中 $n=100$， $p=0.2$，即 X 的分布为

$$P\{X=k\}=C_{100}^{k}\cdot 0.2^k\cdot 0.8^{100-k}，\quad k=0,1,2,\cdots,100$$

…………………… 5 分

（2） $EX=np=20$，$DX=np(1-p)=16$，

由中心极限定理，

$P\{14\le X\le 30\}=P\{\frac{14-20}{4}\le\frac{X-20}{4}\le\frac{30-20}{4}\}=P\{-1.5\le\frac{X-20}{4}\le 2.5\}$

$\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1=0.944+0.933-1=0.927$.

…………………… 10 分