安徽大学 数学科学学院
School of Mathematical Sciences of Anhui University

2020－2021. A(一)期末考试卷(A卷).

一. 选择题.

1. D.　　2. B.　　3. C.　　4. C.　　5. A.

二. 填空题.

6. $\underline{-1}$　　7. $\underline{-1}$，　8. $\underline{\frac{2}{2}}$　　9. $\underline{(\frac{1}{4},+\infty)}$　　10. $\underline{6a}$

三.

(11) 解法1.

$$\lim_{x\to0^+} x^{(e^x-1)} = \lim_{x\to0^+} e^{(e^x-1)\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)} = e^0 = 1.$$

解法2. 令 $y = x^{(e^x-1)} \Rightarrow \ln y = (e^x-1)\ln x$.

$$\lim_{x\to0^+}(e^x-1)\ln x = \lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to0^+} y = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln y} = e^0 = 1.$

(12) 解：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt}{bx-\sin x} = 1$

$$\Rightarrow 左 = \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt}{bx-\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{a+x}}\cdot\frac{x^2}{b-\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x} = 1.$$ 故：$\lim\limits_{x\to0}(b-\cos x) = b-1 = 0$

磬苑校区 地址：合肥市九龙路111号　邮编：230601　电话：0551-3861307
龙河校区 地址：合肥市肥西路3号　邮编：230039　电话：0551-5107241

$\Rightarrow b=1.$

又 $\frac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=1 \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 2=1$

$\Rightarrow a=4$

$\Rightarrow a=4,\quad b=1.$

⑬：由 $x=y^y \Rightarrow x=e^{y\ln y}$ 两边关于 x 求导得：

$$1=e^{y\ln y}(y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y')$$

$$\Rightarrow 1=y^y(\ln y+1)y'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{y^y(1+\ln y)}=\frac{1}{x(1+\ln y)}$$

故 $dy=\frac{1}{x(1+\ln y)}dx$

⑭. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{2-(1+x)^2}}d(x+1)$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}d\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\arcsin\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

⑮. $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx = \int_0^1 \ln(1+x)\, d\left(\frac{1}{2-x}\right)$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{3}\left[-\ln(2-x) + \ln(1+x)\right]\Big|_0^1$$

$$= \ln 2 - \frac{2}{3}\ln 2$$

$$= \frac{\ln 2}{3}$$

⑯. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_1^{+\infty}$$

$$= \left[\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]\Big|_1^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \ln 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\ln 2}{2}$$

或 $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2(1+x^2)}dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{x^2(1+x^2)}d(x^2) \xrightarrow[x|_1^{+\infty}\to t|_1^{+\infty}]{令 t=x^2} \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{t(1+t)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln t - \ln(1+t)\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{t}{1+t}\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(0 - \ln\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2.$$

(17). $y=x^2 \Rightarrow y'=2x$, $y''=2$.

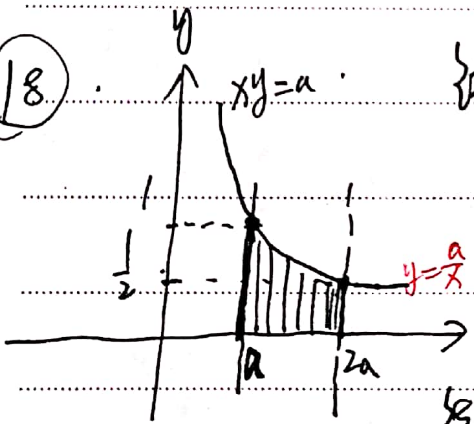
曲率 $k=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时. $(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}$ 最小值为 1.

即 $x=0$ 时. $\min\{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\}=1$.

此时 k 最大为 2. 故 $x=0$ 时. 曲率最大.

(18).



绕 x 轴: $V_x=\int_a^{2a}\pi\left(\dfrac{a}{x}\right)^2dx$

$=\dfrac{\pi a}{2}$

绕 y 轴: $V_y=\int_a^{2a}2\pi x\cdot\dfrac{a}{x}\,dx=2\pi a^2$ (套筒法)

或 $V_y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi\cdot\left(\dfrac{a}{y}\right)^2dy+\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\cdot(2a)^2dy-\int_0^{1}\pi\cdot a^2dy$

$=2\pi a^2$.

由 $V_x=V_y \Rightarrow \dfrac{\pi a}{2}=2\pi a^2 \Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$ 即 $a=\dfrac{1}{4}$ 时, $V_x=V_y$.

磐苑校区 地址：合肥市九龙路111号 邮编：230601 电话：0551-3861307
龙河校区 地址：合肥市肥西路3号 邮编：230039 电话：0551-5107241

(19) 证明：$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ $(x>0, y>0, x\neq y)$.

证明：即证 $\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$.

令 $f(x)=x\ln x$. $x>0$.

则 $f'(x)=\ln x+1$ $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, $(x>0)$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸函数.

从而 $\forall x, y\in(0,+\infty)$, $x\neq y$. 恒有：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

即：$\frac{x+y}{2}\cdot\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x\ln x+y\ln y}{2}$

$\Rightarrow$ $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.