安徽大学 2021--2022 学年第一学期《线性代数 A》期中试卷参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B；2. C；3. D　；4. B；5. A.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$；7. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$；8. $\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 11 & 14 & 15 \end{pmatrix}$；9. $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$；10 . -96 .

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 解:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \text{……..4 分}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{……………………10 分}$$

12. 解: $A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 & 27 \\ 4 & 1 & 16 & 64 \end{vmatrix}$………5 分

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=-12 \quad \text{………10 分}$$

13.解：由 Cramer 法则知，系数行列式

$D=\prod\limits_{1\le j<i\le n}\left(a_i-a_j\right)\neq 0$，　　……………………………3 分

$D_1=D, D_2=\cdots=D_n=0$…………………………………….. .6 分

解为 $x_1=\frac{D_1}{D}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=0,\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}=0.$……………………10 分

14.解：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$ ……………..3 分

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$ ……………7 分 ………

$$=\begin{cases} 0, n>2 \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), n=2 \\ a_1+b_1, n=1 \end{cases}$$ ………………..10 分

15. 解：因为 $A^{-1}BA=6A+BA,$，所以 $(A^{-1}-I)BA=6A$，………4 分

故 $B=6(A^{-1}-I)^{-1}=6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$……………..10 分

16. 解：$A^n=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)\beta$ ………4 分

其中 $\beta\alpha^T=3$, 故 $A^n=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$. ……………………..10 分

四、证明题（本题 10 分）

17. $A^2-A-2I=(A+2I)(A-3I)+4I=0$，………5 分

即 $$(A+2I)\left[-\frac{1}{4}(A-3I)\right]=I \text{ ………8 分}$$

故 $A+2I$ 可逆，且 $(A+2I)^{-1}=-\dfrac{1}{4}(A-3I)$. …………………..10 分