

# 安徽大学 2016 —2017 学年第一学期

## 《高等数学 A (一)、B (一)》考试试卷 (A 卷) (闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

### 一、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + \lambda \frac{\sin x}{|x|} \right)$  存在, 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

2. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 则  $f(x)$  的间断点为\_\_\_\_\_.

3. 设  $y = f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上二阶可导的偶函数, 且  $f''(0) > 0$ , 则  $f(0)$  为  $f(x)$  的极\_\_\_\_\_值.

4. 设  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上以  $T$  为周期的非负连续函数, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\int_x^{x+nT} f(t) dt} =$ \_\_\_\_\_.

5. 设  $f(x) = x^2 \cos(2x)$ , 则  $f^{(10)}(0) =$ \_\_\_\_\_.

### 二、单选题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分

6. 设  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = e^{\sin x}$ , 则  $f(x)g(x)$  在  $\mathbb{R}$  上是( ).

- (A) 周期函数 (B) 奇函数 (C) 单调函数 (D) 有界函数

7. 已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , 满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$ , 则下列断言正确的是( ).

- (A) 若  $\{a_n\}$  发散, 则  $\{b_n\}$  发散 (B) 若  $\{a_n\}$  无界, 则  $\{b_n\}$  有界  
(C) 若  $\{a_n\}$  有界, 则  $\{b_n\}$  无穷小 (D) 若  $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$  无穷小, 则  $\{b_n\}$  无穷小

8. 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义, 则下列断言正确的是 ( ).

- (A)  $f(x)$  连续等价于  $f^2(x)$  连续 (B)  $f(x)$  连续等价于  $f^3(x)$  连续  
(C)  $f(x)$  连续等价于  $|f(x)|$  连续 (D)  $f(x)$  连续等价于  $f(f(x))$  连续

9. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有二阶导数, 且其反函数为  $x = f^{-1}(y)$ , 则  $\frac{d^2x}{dy^2}$  为 ( ).

- (A)  $\frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$  (B)  $\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$  (C)  $f''(x)$  (D)  $\frac{1}{f''(x)}$

10. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 记  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , 其中  $a$  是常数, 则下列断言正确的是 ( ).

- (A) 若  $f(x)$  是周期函数, 则  $F(x)$  是周期函数  
(B) 若  $f(x)$  是奇函数, 则  $F(x)$  是偶函数  
(C) 若  $f(x)$  是偶函数, 则  $F(x)$  是奇函数  
(D) 若  $f(x)$  是严格单调增函数, 则  $F(x)$  是严格单调增函数

三、计算题 (每小题 8 分, 共 48 分)

得分	
----	--

11. 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\sqrt{n}$ .

12. 设函数  $f(x)$  可导, 且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (f(1) - f(1-t))dt}{x^2} = -1$ , 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程.

13. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ .

14. 设函数  $y = y(x)$  可由方程  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  所确定, 计算  $y'$  和  $y''$ .

15. 计算  $I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$ .



16. 计算  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \min \left\{ \frac{1}{2}, x^2 \right\} + e^{x^2} \sin x \right) dx$ .

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

得分	
----	--

17. 设  $S_1$  是由抛物线  $y = 4x^2$  与直线  $x = a, x = 1, y = 0$  所围成的部分,  $S_2$  是由  $y = 4x^2$  与直线  $x = a, y = 0$  所围成的部分 ( $0 < a < 1$ ). 记  $S_1$  绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积为  $V_1$ ,  $S_2$  绕  $y$  轴旋转而成的旋转体体积为  $V_2$ , 问  $a$  为何值时,  $V_1 + V_2$  为最大.

线 订 装 起 勿 题 答

18. 某种细菌繁殖有规律, 实验表明: 设细菌数为  $x(t)$  满足微分方程

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 4x = 0; \\ x(0) = 2, x'(0) = -4. \end{cases}$$

计算广义积分  $\int_0^{+\infty} x(t) dt$ .

五、证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

得分	
----	--

19. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上具有二阶导数, 若  $f''(x) > 0, f(0) = 0, f'(0) = 1$ ,

证明: 当  $x \neq 0$  时, 有  $f(x) > x$ .

8. 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义, 则下列断言正确的是 ( )

20. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有一阶导数, 若  $f(a) = f(b) = 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

(A)  $f(x)$  连续等价于  $|f(x)|$  连续 (B)  $f'(\xi) = 2f(\xi)$  (C)  $f(x)$  连续等价于  $|f(x)|$  连续

9. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有一阶导数, 且其反函数为  $x = f^{-1}(y)$ , 则  $\frac{d}{dy} f^{-1}(y) =$

(A)  $\frac{1}{f'(x)}$  (B)  $\frac{f'(y)}{f'(x)}$  (C)  $f'(x)$  (D)  $\frac{1}{f'(y)}$

10. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义, 则  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 其中  $0$  是常数, 则下列断言正确的是

(A) 若  $f(x)$  是奇函数, 则  $F(x)$  是偶函数  
(B) 若  $f(x)$  是偶函数, 则  $F(x)$  是奇函数  
(C) 若  $f(x)$  是奇函数, 则  $F(x)$  是奇函数  
(D) 若  $f(x)$  是严格单调增函数, 则  $F(x)$  是严格单调增函数

二、计算题 (每小题 5 分, 共 10 分)

11. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{x^2}$

12. 设函数  $f(x)$  可导, 且满足  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(1-t)}{t} = 1$ , 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$

处的切线方程