

安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《线性代数 A》期中考试试卷

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

课程目标 1: 一、1.2.5; 二、6.8.9.10; 三、11.12.13.14.15.16

课程目标 2: 一、3.4; 二、7; 四、17

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 A, B 是 n 阶矩阵, 下列矩阵的运算正确的是 ()

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ (B) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(C) $|AB|=|BA|$ (D) $(AB)^2 = A^2B^2$

2. 若 A 是 n ($n > 1$) 阶矩阵, 则 $(-A)^*$ 等于 ()

(A) $-A^*$ (B) A^* (C) $(-1)^n A^*$ (D) $(-1)^{n-1} A^*$

3. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 且 $(AB)^2 = I$, 则下列结论**错误**的是 ()

(A) $(BA)^2 = I$ (B) $A^{-1} = B$ (C) $B^{-1}A^{-1} = AB$ (D) $A^{-1} = BAB$

4. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第一列的 -1 倍加到

第 2 列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ()

(A) $C = P^{-1}AP$ (B) $C = PAP^{-1}$ (C) $C = P^TAP$ (D) $C = PAP^T$

5. $2n$ 阶排列 $246 \cdots (2n)135 \cdots (2n-1)$ 的逆序数为 ()

(A) $\frac{n(n+1)}{2}$ (B) $\frac{n(n-1)}{2}$ (C) $n(n+1)$ (D) $n(n-1)$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 已知四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 则 $A_{31} + A_{33} =$ _____.

7. 设 A 是三阶矩阵, 且 $|A|=2$, 则 $|A^{-1}-A^*|=\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 矩阵 $A=\alpha\alpha^T$, 则 $A^n=\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 若三元齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+kx_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \\ kx_2+3x_3=0 \end{cases}$ 有非零解, 则常数 $k=\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (每小题 10 分, 共 60 分)

11. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+a & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+a & \cdots & n \\ & & \cdots & \cdots & \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n+a \end{vmatrix}$.

12. 设 A, B 均为二阶矩阵, 满足 $AB+A=B$, 且 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $|B|$.

13. 设 A 是三阶矩阵, P 是可逆矩阵, $B=P^{-1}AP$, 且 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{2024} .

14. 已知 $X=AX+B$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

15. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2^2 & 4^2 & 6^2 \end{pmatrix}$, 求 $(A^*)^{-1}$.

16. 求解四元非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+x_2-3x_4=1 \\ -2x_1-2x_3+10x_4=4 \end{cases}$.

四、证明题 (每小题 10 分, 共 10 分)

17. 设 ξ 是 3×1 矩阵, 满足 $\xi^T \xi=1$, 已知矩阵 $A=\xi\xi^T+I$,

(1) 证明: $A^2-3A+2I=O$; (2) 证明: 矩阵 $A+I$ 可逆.