安徽大学 2010—2011 学年第一学期

《高等数学 A(一)、B(一)》（B 卷）考试试题

参考答案及评分标准

一、　填空题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. $\frac{1}{2}$　　2. $y = x + e^{\frac{\pi}{2}}$　　3. $\frac{\pi}{2}$　　4.0　　5. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

二、单项选择题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

6. C　　7. C　　8. D　　9. B　　10. A

三、计算题（本题共 7 小题，其中第 11-12 题每题 7 分，第 13-17 题每题 8 分，共 54 分）

11.（本小题 7 分）$\frac{n}{(n+n)^2} \le (\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n+n)^2}) \le \frac{n}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+n)^2} = 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$

所以由两边夹定理，$\lim\limits_{n\to 0}(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n+n)^2}) = 0$

12.（本小题 7 分）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc x^2} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\csc x^2 \ln\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{\sin x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{2\cos x\cos x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

13.（本小题 8 分）$\sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctan\frac{y}{x}}$

两边同时 x 对求导，带入原式化简有：$x + yy' = xy' - y$

所以 $y' = \frac{x+y}{x-y}$

两边求导：$y'' = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$

带入一阶导数，化简得：$y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

14. （本小题 8 分）

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\overset{(x+1=\tan t)}{=}\int\frac{\sec^2 t dt}{\sec t}=\int\sec t dt$$

$$=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C=\ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)\right|+C$$

15. （本小题 8 分）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(2x)}{3-\cos 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{3-\cos u}\overset{\tan\frac{u}{2}=t}{=}\int_0^1\frac{1}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot dt$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+2t^2}\cdot dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}$$

16. （本小题 8 分）齐次方程 $y'+\frac{y}{x}=0$ 的通解为 $y=ce^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{c}{x},c\in R$

设非齐次方程的通解为 $y=\frac{c(x)}{x}$，带入原方程有 $c'(x)=-xe^x$，

$c(x)=-\int xe^x dx=-xe^x+e^x+c,c\in R$

原方程通解为 $y=(-xe^x+e^x+c)\cdot\frac{1}{x}$。由条件 $y(1)=0$ 知 $c=0$

所以原方程的一个特解为 $y=(-xe^x+e^x)\cdot\frac{1}{x}$

17. （本小题 8 分） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

瑕积分 $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\overset{x-1=t^2}{=}\int_0^1\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\arctan t\big|_0^1=\frac{\pi}{2}$，收敛

无穷区间广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\overset{x-1=t^2}{=}\int_1^{+\infty}\frac{2dt}{(t^2+1)}=2\arctan t\big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$，收敛

所以积分收敛，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\pi$

四、综合分析题（本题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

18. $\frac{dy}{dx}=1+\int_0^x[t-y(t)]dt, y(0)=1$

方程两边求导有： $y''=x-y$

对应齐次方程为 $y''+y=0$

特征方程为$\lambda^2+1=0$，$\lambda=\pm i$

所以齐次方程的通解为$y=c_1\sin x+c_2\cos x, c_{1,}c_2\in R$

设原方程特解为$y^*=ax+b$，带入有$a=1, b=0$

所以原方程通解为：$y=c_1\sin x+c_2\cos x+x, c_{1,}c_2\in R$

由条件知：$y(0)=1$，$y^{'}(0)=1$知$c_1=0, c_2=1$

原方程满足条件的特解为$y=\cos x+x$

(未利用条件$y^{'}(0)=1$扣一分)

19.
(1) 若$a=0$时

$$A=\int_0^1\left|ax+b\right|dx=\int_0^1\left|b\right|dx=\left|b\right|,$$

则$V=\pi A^2$。

(2) 若$a\neq 0$时，由几何对称性仅需讨论$a>0$情形：

设直线与x截距为t，则直线可表为$y=a(x-t)$，

$$A=\int_0^1 a\left|x-t\right|dx=\begin{cases}a(\frac{1}{2}-t), & t<0\\ a[(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}], & 0\leq t\leq 1\\ a(t-\frac{1}{2}), & t>1\end{cases}$$

再由几何对称性，$t<0$与$t>1$情形相同，

i) 当$t<0$时：

$$V=\pi a^2\int_0^1(x-t)^2dx=\pi a^2[(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}]=\pi A^2+\frac{1}{12}\pi a^2>\pi A^2$$

ii) 当$0\leq t\leq 1$时，可得$2A\leq a\leq 4A$，

$$V=\pi a^2\int_0^1(x-t)^2dx=-\frac{1}{6}\pi(a-3A)^2+\frac{3}{2}\pi A^2\geq\frac{4}{3}\pi A^2。$$

综上所述，当$a=0,\ b=\pm A$时，旋转体积最小，最小值为πA^2。

五．证明题（本题共 2 小题，其中第 20 题 6 分，第 21 题 4 分，共 10 分）

20.（本小题 6 分）证明:由积分中值定理：

$$f(0)=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=3\cdot\frac{1}{3}\cdot f(\eta)=f(\eta),\quad \eta\in[\frac{2}{3},1]$$

由罗尔定理：存在$\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，$f^{'}(\xi)=0$

21.（本小题 4 分） $f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$$

两式相减有： $0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$

$$f'(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$$

$$\left|f'(x)\right|\le\left|\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2\right|\le\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1-x)^2$$

$$=x^2+(1-x)^2=-2x(1-x)+1\le 1,x\in(0,1)$$