安徽大学 2016—2017 学年第一学期

《高数数学 A（一)、B（一)》(A 卷)考试试题参考答案及评分

一、　填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、$\lambda=-1$　　2、$x=1$　　3、小　　4、1　　5、23040（也可写成 $2^9C_{10}^2$）

二、单选题（每小题 2 分，共 10 分）

6、C　　7、D　　8、B　　9、A　　10、B

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

11、解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)\sqrt{n}$　　**……4 分**

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$.　　**……8 分**

12、解. 由洛必达法则，知

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(f(1)-f(1-t)\right)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,　　**……5 分**

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=-2$，即 $f'(1)=-2$,

因此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-f(1)=-2(x-1)$.　　**……8 分**

13、解. 方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-x}{x^3}=\dfrac{-1}{6}$.　　**……8 分**

方法二：由洛必达法则和等价无穷小替换，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\frac{-1}{6}.$$ ……8 分

14、解. 对方程两端关于 x 求导数，有

$x+2yy'=0$，即有

$$y'=\frac{-x}{2y}.\quad (1)$$ ……4 分

再对（1）关于 x 求导数，有

$$y''=-\frac{2y-2y'x}{4y^2}=-\frac{x^2+2y^2}{4y^3}.$$ ……8 分

$$=-\frac{1}{2y^3}$$

15、解. $$I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\int\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx}{\sin^2 x\cos x}=\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$$

$$=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}+\int\frac{d\sin x}{\sin^2 x}=-\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}-\frac{1}{\sin x}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|-\frac{1}{\sin x}+c$$ ……8 分

其中 c 为任意常数.

16、解.利用被积函数的奇偶性，有

$$I=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\frac{1}{2},x^2\right\}dx=2\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dx\right)$$

$$=\frac{3\pi-2\sqrt{2}}{6}$$ ……8 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17、解.由题意知, $V_1=\pi\int_a^1 16x^4dx$, $\cancel{V_2=\pi\int_0^{4a^2}\frac{y}{4}dy}$ $V_2=4\pi a^4-\pi\int_0^{4a^2}\frac{y}{4}dy$ ……4 分

$=\frac{16}{5}\pi(1-a^5)$ $=2\pi\int_0^a x\cdot 4x^2dx=2\pi a^4$

所以, 有 $\frac{d\left(V_1+V_2\right)}{da}=-16\pi a^4+8\pi a^3$.令 $-16\pi a^4+8\pi a^3=0$，

所以有唯一的驻点 $a=\frac{1}{2}$. ……8 分

由问题的实际意义可知，当 $a=\frac{1}{2}$ 时, 有 V_1+V_2 最大. ……10 分

18、解.依题意知，特征方程为$\lambda^2+4\lambda+4=0$，

解得$\lambda_1=\lambda_2=-2$，

故通解为$x(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$,其中$c_1,c_2$为两个互相独立的任意常数.

由初始条件,解得$c_1=2,c_2=0$,所以特解为$x(t)=2e^{-2t}$.　　　　　……8 分

计算$\int_0^{+\infty}x(t)dt=\int_0^{+\infty}2e^{-2t}dt=1$.　　　　　　　　　……10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

19、解.

方法一：由于函数$f(x)$在□ 上二阶导数存在，所以由泰勒公式知，

$\exists\xi\in(0,x)$或$(x,0)$,有$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$.　　　　……4 分

进一步，当$x\neq0$时,有$f(x)>x$.　　　　　　　　　　　　　　……6 分

方法二：构造辅助函数$F(x)=f(x)-x$,利用函数的单调性证明之给相应的分.

20、解.构造辅助函数$F(x)=e^{-2x}f(x)$,显然有$F(a)=F(b)=0$,由题意知$F(x)$满足罗尔定理条件. 所以$\exists\xi\in(a,b)$，有$F'(\xi)=0$.　　　　　……4 分

而$F'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)$，故结论正确 .　　　　　　……6 分