安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《线性代数 A》考试试卷（A 卷）

参考答案与评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．D；　2．C；　3．A；　4．D；　5．D

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6．$\dfrac{5}{3}$；　7．0；　8．$\dfrac{27}{2}$；　9．36；　10．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

三、计算题（6 小题，每小题 12 分，共 72 分）

11．解：依题意，$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0$，得 $k=-3$ 或 $k=1$，

$k=-3$时，$r(A)=3$；$k=1$时，$r(A)=1$，舍去.

故 $k=-3$

………………（12 分）

12．解

设由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$C$，则$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$

故$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

…………………（12 分）

13．**解**　对增广矩阵进行初等行变换，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \vdots & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & \vdots & 2\lambda+3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -3\lambda+2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -4\lambda+3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\lambda+1 \end{bmatrix}$$

当$-\lambda+1=0,\lambda=1$时，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多解.

齐次方程组：$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2-2x_3=0 \end{cases}$，基础解系为：$(-1,2,1)^T$.

非齐次方程组：$\begin{cases} x_1+x_3=1 \\ x_2-2x_3=-1 \end{cases}$，　特解为：$(1,-1,0)^T$.

通解为: $x=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$ ....(12 分)

14．解 由相似矩阵的性质，一方面$|A|=|B|$，

另一方面，相似矩阵有相同的特征值，故$tr(A)=tr(B)$，得$a=5$，$b=6$

由$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$，得特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$

由$(2E-A)x=0$得$\lambda_1=\lambda_2=2$线性无关的特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

由$(6E-A)x=0$得$\lambda_3=6$线性无关的特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

令$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=B$

......................(12 分)

15．解 依题意，将向量组按列排成矩阵并作初等行变换

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&3\\2&1&3&3\\2&5&-1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&2\\0&1&-1&1\\0&4&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故$r(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$为向量组的一个极大无关组

......................(12 分)

16．解

$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵是$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\0&\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -4 \\ 2 & \lambda+2 & -\lambda-6 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{vmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-2)^2=0$$

得特征值$\lambda_1=-7,\lambda_2=\lambda_3=2$，

当$\lambda_1=-7$时，得特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，得特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

正交化，单位化得

$$\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

令$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$, $x=Qy$

则$x^TAx=y^TQ^TAQy=-7y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

……………………（12 分）

四、证明题（共 8 分）

17． 证明：由$A=A^2$，得$A(A-I)=0$，得

$$r(A)+r(A-I)\le n \qquad (1)$$

再依据$r(A+B)\le r(A)+r(B)$及$r(A)=r(-A)$，有

$$r(A)+r(A-I)=r(-A)+r(A-I)\ge r[-A+(A-I)]=r(-I)=n \qquad (2)$$

由(1)、(2)得 $r(A)+r(A-I)=n$.

……………………（8 分）