安徽大学 2022--2023 学年第一学期《线性代数 A》期中试卷参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D；2. B；3. C；4. B；5. A.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；7. A；8. -2；9. -12；10．2.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11.解：$(A\ I)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$……2 分

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ ………6 分

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ………………8 分

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ……………10 分

12. 解:

$$|A-B|=\begin{vmatrix} \alpha-\beta \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \\ 3\gamma_4 \end{vmatrix}$$ …….3 分

$$=\begin{vmatrix}\alpha\\ \gamma_2\\ 2\gamma_3\\ 3\gamma_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\beta\\ \gamma_2\\ 2\gamma_3\\ 3\gamma_4\end{vmatrix}$$ ……………………6 分

$$=\frac{1}{4}|A|-6|B|=-4$$ …………………10 分

13.解: 将第 1 行的-1 倍加到第 2 行，再将第 2 行的-1 倍加到第 3 行，以此类推最后将第 n-1 行的-1 倍加到第 n 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{\ n-1} & x_2^{\ n-1} & \cdots & x_n^{\ n-1}\end{vmatrix}$$ ………6 分

$$=\mathop{\Pi}_{1\le j\le i\le n}\left(x_i-x_j\right).$$ ……………………….10 分

14. 解：令 $A=\left(\alpha_1^{\ T}\alpha_2^{\ T}\alpha_3^{\ T}\alpha_4^{\ T}\alpha_5^{\ T}\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 3\\ 1 & -1 & 3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 5 & 5\\ 3 & 1 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\right)$$ ……………4 分

易知 β_1,β_2 是 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的一个极大无关组，且

$\beta_3=2\beta_1-\beta_2,\beta_4=\beta_1+3\beta_2,\beta_5=2\beta_1+\beta_2$ ……………7 分

从而原向量组的秩为 2，α_1,α_2 是原向量组的一个极大无关组，且

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$ ……………10 分

15.解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$ ……………4 分

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$……………7 分

由最后一行可知，方程组无解……………………..10 分

16.解：由 $|A|=-2, A^*A=|A|I=-2I,$，所以 $A^*=-2A^{-1}$，………5 分

故 $-2A^{-1}BA=2BA-8I\Rightarrow B=4\left(I-A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. ………………..10 分

四、证明题（本题 10 分）

17.证明：任意 n 维向量 $\alpha=\left(a_1,a_2\cdots a_n\right)$ 可由 n 维基本向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 线性表示，

即 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots a_n\varepsilon_n$，………5 分

故任意 m 个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 可由向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 线性表示，且

$m>n$，故 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关…………10 分