安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期末考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列（　　）区间内有界.

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

2. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）.

(A) $dy<\Delta y<0$　　(B) $\Delta y<dy<0$　　(C) $0<dy<\Delta y$　　(D) $0<\Delta y<dy$

3. 设 $f(x)$ 有二阶连续导函数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=-1$，则存在 $\delta>0$，有（　　）.

(A) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx>0$　　(B) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx<0$

(C) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx=0$　　(D) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx>0$ 且 $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx<0$

4. 曲线 $y=\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}$ 有（　）条渐近线.

(A)　0　　(B)　1　　(C)　2　　(D)　3

5. 下列反常积分中收敛的是（　　）.

(A) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$　　(B) $\int_1^2\dfrac{dx}{(x-1)^3}$　　(C) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln\sqrt{x})^2}dx$　　(D) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{-y}+x(y-x)=1+x$ 所确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为______.

7. 曲线 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 在点 $t=1$ 处的曲率半径为______.

8. 设 $f(x)$ 有连续导函数且 $f(x)>0$，$\ln f(x)=\sin x$，则 $\int\dfrac{xf'(x)}{f(x)}dx=$________.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$ ________.

10. 半径为 1 的半圆周 $x^2+y^2=1(y\ge 0)$ 的质心坐标为 ________.

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt}{x^2(1-e^{x^2})}$.

12. 求 $f(x)=\left|xe^{-x}\right|$ 的极值与拐点.

13. 计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx$.

14. 计算 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}}$.

15. 已知 $a_n=\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nx\,dx$（$n$ 为正整数），求 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$.

16 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）.

（1）证明：$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\,dx=A\int_0^a g(x)\,dx$；

（2）利用（1）的结果计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x\right|\arctan e^x\,dx$.

四、应用题（每小题 12 分，共 12 分）

17. 设曲线 $y=a(1-x^2)(a>0)$ 在点 $A(1,0)$ 和点 $B(-1,0)$ 处的法线与曲线所围成封闭图形为 D.

（1）当 D 的面积最小时，求 a 的值和最小面积.

（2）当 D 的面积最小时，求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

18. 设 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，$f'(x)$ 单调递减. 证明：对 $x\in(0,1)$，有 $f(1)x<f(x)<f'(0)x$.

19. 已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}\right)=0$，$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx$. 试证：存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$.