安徽大学 2016—2017 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试试卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．0；　**2**．8；　**3**．$y=x-1$；　**4**．1；　**5**．$2e^3$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6．B；　**7**．D；　**8**．D；　**9**．C；　**10**．A

三、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

11．解：由 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$

………………… 4 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\dfrac{1}{2}$，同理 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\dfrac{1}{2}$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}$

………………… 8 分

12．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{\sin x}-1\right)^3\cos x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 x\cos x}{(1-\cos x)x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\cos x}{\frac{1}{2}x^2x}=2\lim\limits_{x\to0}\cos x=2$

………………… 8 分

13．解：$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}]^{\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}$

………………… 8 分

14．解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$

………………… 8 分

15．解：依题意，只需 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=1$ 处连续即可。

故 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}=-\dfrac{1}{2}a=f(0)=b$

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}\arctan\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}=f(1)=a+b$$

解得， $a=\pi, b=-\frac{\pi}{2}$ .... 8 分

16．解： $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}=\frac{1}{t}$ .... 4 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}=-\frac{1+t^2}{t^3}$ .... 8 分

17．解： $x\neq0, f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot(-\frac{1}{x^4})\cdot2x=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}$

$x=0$， $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}-0}{x}=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to0} f'(x)=\lim_{x\to0}[\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}]=\frac{\pi}{2}=f'(0)$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续 .... 8 分

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

18． $0<x_n=\sqrt{x_{n-1}(3-x_{n-1})}\leq\frac{x_{n-1}+(3-x_{n-1})}{2}=\frac{3}{2}$

又因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{x_n(3-x_n)}}{x_n}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}\geq1$

由单调有界原理知 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，证毕. .... 7 分

19．由 $f(0)f(1)>0$， $f(0)f(\frac{1}{2})<0$ 知， $f(0)f(\frac{1}{2})<0$， $f(\frac{1}{2})f(1)<0$

由连续函数的零点定理知，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$， $\zeta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=f(\zeta)=0$

令 $F(x)=e^x f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由罗尔定理知，

至少存在 $\xi\in(\eta,\zeta)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$

.... 7 分