院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《线性代数 A》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

课程目标 1：一（1）、（2）、（4）、（5）；二、 三
课程目标 2：一（3）；四

一、选择题（5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．设 A 为 n 阶可逆矩阵，下列各式一定正确的是（　　）

（A）$|2A| = 2|A^T|$　　（B）$(2A)^{-1} = 2A^{-1}$

（C）$\left[\left(A^{-1}\right)^{-1}\right]^T = \left[\left(A^T\right)^T\right]^{-1}$　　（D）$\left[\left(A^T\right)^T\right]^{-1} = \left[\left(A^{-1}\right)^T\right]^T$

2．若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 线性表示，且 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关，则下列结论一定正确的是（　　）

（A）$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 线性无关　　（B）$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 线性相关

（C）$s \le t$　　（D）$s > t$

3．设矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，若 A 的列向量组线性无关，则（　　）

（A）齐次方程组 $Ax = 0$ 仅有零解　　（B）齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解

（C）非齐次方程组 $Ax = b$ 有唯一解　　（D）非齐次方程组 $Ax = b$ 有无穷多解

4．设 A,B 均是 n 阶矩阵，若 $r(A) = r(B)$，则下列结论正确的是（　　）

（A）$r(A-B) = 0$　　（B）$r(A-B) = 2r(A)$

（C）$|A| = |B|$　　（D）若 $|A| = 0$，则 $|B| = 0$

5．已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，则下列矩阵中在实数域上与 A 合同的矩阵是（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题（5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

6．若向量组 $\alpha_1 = (1,2,-1)^T$，$\alpha_2 = (1,0,a)^T$，$\alpha_3 = (1,-1,3)^T$ 线性相关，则 $a =$________.

7．已知行列式$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & -3 & 3 & -3\\ 9 & 8 & 7 & 6\\ 1 & 0 & 3 & 7\end{vmatrix}$，则第4行元素的余子式之和为 ＿＿＿＿＿＿＿＿.

8．已知三阶方阵A的行列式值为2，则行列式$\left|A^{-1}+A^*\right|$＿＿＿＿＿＿＿＿.

9．已知三阶方阵A的特征值分别为1，-2，3，则$\left|A^*\right|=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

10．若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+4x_2{}^2+2x_3{}^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$是正定二次型，则$t$的取值范围是＿＿＿＿＿＿＿＿.

三、计算题（6小题，每小题12分，共72分）

11．设矩阵$A=\begin{pmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{pmatrix}$，已知$r(A)=3$，求$k$的值.

12．已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$与$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$是向量空间$R^3$的两组基，求由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵.

13．已知三元非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1 + x_3=\lambda\\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2\\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$有无穷多解，求$\lambda$的值并求方程组的通解.

14．已知$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$，若$A$与$B$相似.

（1）求a，b的值；　　（2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

15．求向量组$\alpha_1=(1,1,2,2)^T$，$\alpha_2=(0,2,1,5)^T$，$\alpha_3=(2,0,3,-1)^T$，$\alpha_4=(1,3,3,7)^T$的秩和一个极大线性无关组.

16．用正交变换$X=QY$化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2-2x_2{}^2-2x_3{}^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$为标准形，并写出相应的正交变换矩阵$Q$.

四、证明题（共8分）

17．设A是n阶矩阵，满足$A=A^2$，证明：$r(A)+r(A-I)=n$.