安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期末模拟题（二）

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．事件 A,B 为对立事件，则（　　）不成立。

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$　　(B) $P(B|A)=\phi$　　(C) $P(\overline{A}|B)=1$　　(D) $P(A+B)=1$

2．设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从 $N(0,1)$，则

(A) $P(X+Y\geq 0)=\dfrac{1}{4}$　　(B) $P(X-Y\geq 0)=\dfrac{1}{4}$

(C) $P\{\max(X,Y)\geq 0\}=\dfrac{1}{4}$　　(D) $P\{\min(X,Y)\geq 0\}=\dfrac{1}{4}$

3．设离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
P	$1/6$	$1/9$	$1/18$	$1/3$	α	β

且 X,Y 相互独立，则________。

(A) $\alpha=2/9,\beta=1/9$　　(B) $\alpha=1/9,\beta=2/9$

(C) $\alpha=1/6,\beta=1/6$　　(D) $\alpha=8/15,\beta=1/18$

4．设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为（ ）。

$(A)E(X)=E(Y)$；　　$(B)E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2$；

$(C)E(X^2)=E(Y^2)$；　　$(D)E(X^2)+\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2$。

5．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，则对于给定的样本，总体均值 μ 的置信区间的长度为 L 与置信水平 $1-\alpha$ 的关系时（　　）

$(A)1-\alpha$ 变小时，L 变长；　　$(B)1-\alpha$ 变小时，L 变短；

$(C)1-\alpha$ 变小时，L 不变；　　$(D)1-\alpha$ 变小时，L 变长或变短不确定。。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．一批产品共有 8 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回. 已知第二次抽出的是次品，则第一次取出正品的概率________.

7．设随机变量 X，Y 独立同分布，且 X 的分布列为

X	0	1
p	1/2	1/2

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布列为______________

8．设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则统计量 $S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 的数学期望是_________。

9．设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为 -0.5，则

根据切比雪夫不等式$P\{|X+Y|\ge 6\}\le$__________。

10．设总体$X\sim P(\lambda)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的样本，$\overline{X}$和S^2表示样本均值和样本方差，若$\hat{\lambda}=a\overline{X}+(2-3a)S^2$是$\lambda$的无偏估计量，则$a=$___________。

三、计算题（每小题10分，共50分）

11．

设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} ae^x, & x<0, \\ b, & 0\le x<1, \\ 1-ae^{-(x-1)}, & x\ge 1. \end{cases}$

（1）求a,b值；（2）求概率密度函数$f(x)$；（3）求$P\left(X>\dfrac{1}{2}\right)$

12．某箱装有100件产品，其中一、二和三等品分别为80、10、和10件，现在从中随机抽取一件，记$X_i=\begin{cases} 1, & \text{若抽到i等品} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$i=1,2,3$，试求：

（1）随机变量X_1和X_2的联合分布；（2） 随机变量X_1和X_2的相关系数ρ。

13．一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重50千克，标准差为5千克。若用最大载重量为5吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多装多少箱，才能保证不超载的概率大于0.977。（$\Phi(2)=0.977$，其中$\Phi(x)$是标准正态分布函数）

14．设(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} 4e^{-2y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，试求：

（1）X和Y的边缘密度函数，并判断其独立性。

（2）求条件密度函数$f_{X|Y}(x\mid y)$。

15．设总体X的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，其中$\theta$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的简单随机样本。(1)求$\theta$的矩估计量；(2)求$\theta$的最大似然估计量.

四、应用题（每小题10分，共10分）

16．某冶金实验室对锰的熔化点作了四次试验，结果分别为

1269^0C　　1271^0C　　1263^0C　　1265^0C

设数据服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，以 $\alpha=5$ % 的水平作如下检验：

（1）这些结果是否符合于公布的数字1260^0C？

（2）测定值的标准差是否不超过2^0C？

五、证明题（每小题10分，共10分）

17．设$X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自总体$N\left(0,\sigma^2\right)$的简单随机样本，

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6)，\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)，\quad S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2，$$

$Z=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$，证明统计量$Z$服从自由度为2的$t$分布。