T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RAYLEIGH DENKLEMİNİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan: Ömer AÇAN

VAN–2011

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RAYLEIGH DENKLEMİNİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Hazırlayan: Ömer AÇAN

VAN – 2011

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Ana Bilim Dalı'nda Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Ömer AÇAN tarafından sunulan *"Rayleigh Denkleminin Periyodik Çözümleri Üzerine"* isimli bu çalışma "Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği" ve "Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi"nin ilgili hükümleri gereğince 02/02/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Cemil TUNÇ İmza

Üye Yrd. Doç. Dr. Cemil BÜYÜKADALI İmza

Üye Yrd. Doç. Dr. Kamil AKBAYIR İmza

Üye …………………………………………...... İmza

Üye ………………………………………... …..İmza

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04/02/2011 tarih ve 2011/3-I. sayılı kararı ile onaylanmıştır

Enstitü Müdürü

ÖZET

RAYLEIGH DENKLEMİNİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

AÇAN, Ömer
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Şubat 2011, 61 sayfa

Bu çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Rayleigh denklemlerinin sunumu ve tarihçesi verildi.

İkinci bölümde ise daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Üçüncü bölümde gecikmeli olmayan Rayleigh tipindeki bir denklem için periyodik çözümlerin varlık ve teklik problemi çalışıldı.

Dördüncü bölümde değişken gecikmeli $\ddot{x}(t)+f\big(\dot{x}(t)\big)+g\big(x(t-\tau(t))\big)=p(t)$ bir Rayleigh denkleminin periyodik çözümlerinin sınırlılığı ve diğer bir değişken gecikmeli $\ddot{x}(t)+f\big(t,\dot{x}(t-\tau(t))\big)+h\big(t,x(t-\sigma(t))\big)=p(t)$ Rayleigh denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı göz önüne alındı.

Son bölümde ise $n.$ mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için periyodik çözümlerin varlığı ve tekliği ele alındı.

Anahtar kelimeler: Rayleigh diferansiyel denklemi, Periyodik çözüm, Gecikme, Varlık, Teklik, Sınırlılık

ABSTRACT

ON PERIODIC SOLUTIONS OF A RAYLEIGH EQUATION

AÇAN, Ömer
Msc Thesis, Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
February 2011, 61 pages

This study consists of five chapters. In the first chapter we present introduction and history of Rayleigh equations.

In the second chapter, we give fundamental definitions and theorems that will be used in the subsequent chapters.

In the third chapter, the problem of existence and uniqueness of periodic solutions for a non-delayed Rayleigh-type equation is studied.

In the fourth chapter, boundedness of periodic solutions of variable delayed Rayleigh equation $\ddot{x}(t)+f(\dot{x}(t))+g(x(t-\tau(t)))=p(t)$, and the existence of periodic solutions of variable delayed Rayleigh equation $\ddot{x}(t)+f(t,\dot{x}(t-\tau(t)))+h(t,x(t-\sigma(t)))=p(t)$ are taken into consideration.

In the last chapter, for a class of $n-th$ order nonlinear delay differential equations, existence and uniqueness of periodic solutions are discussed.

Key words: Rayleigh differantial equation, periodic solition, delay, existence, uniqueness, boundedness

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında ve tamamlanmasında yanımda olan öneri ve eleştirileri benimle paylaşan ve kendisinden çok şey öğrendiğim tez danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a, çalışmalarım esnasında desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Ali SIRMA, Yrd. Doç. Dr. Cemil BÜYÜKADALI ve yardımlarından dolayı bölümdeki bütün hocalarıma teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca eğitimimin her aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ailem ve özellikle sevgili annem ve babama teşekkürü bir borç bilir saygılarımı sunarım.

Daha kapsamlı bir çalışma olması dileğiyle…

Ömer AÇAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

ε : Epsilon

λ : Lamda

$\circ$: Bileşke fonksiyon

$\emptyset$: Boş cümle

deg : Derece

$DomL$: L operatörünün tanım cümlesi

$D(L)$: L operatörünün tanım cümlesi

ImL : L operatörünün görüntü cümlesi

$boyL$: L operatörünün boyutu

$KerL$: L nin çekirdeği

X/ImL : X in ImL ye göre denklik sınıfı

Ω : Açık ve sınırlı cümle

$\overline{\Omega}$: Ω nın kapanışı

$\partial\Omega$	: Ω nın sınırı
$C(\overline{\Omega})$	: $\overline{\Omega}$ den R^n e sürekli fonksiyonların kümesi
K_p	: L operatörünün $D(L) \cap KerP$ üzerinde sınırlandırılışının tersi
$C^n(A)$	: A⊂R de $n.$ türevi sürekli fonksiyonların cümlesi
$CokerL$	: X/ImL
$Y^{\perp}$	: Y cümlesinin dikeyi
$f(Q_f \cup \partial\Omega)$	: f nin yüzey ve kritik nokta görüntüsü

1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Matematik literatürü incelendiğinde

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0,\ \dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{1.1}$$

biçimindeki bir diferansiyel denklem Rayleigh denklemi olarak adlandırılır (Lord Rayleigh Strutt (1877;1945). Burada yeterince küçük $|u|$ lar için $F(u)$ fonksiyonu

$$uF(u) < 0$$

eşitsizliğini ve yeterince büyük $|u|$ lar için ise $F(u)$ fonksiyonu

$$uF(u) > 0$$

eşitsizliğini sağlar.

Rayleigh denklemi ilk olarak ses ile ilgili problemlerin incelenmesinde ortaya çıkmıştır (Lord Rayleigh Strutt (1877;1945) Ses ile ilgili söz konusu problemler Lord Rayleigh tarafından incelenirken problemin matematiksel modellemesine karşılık olarak (1.1) denklemi ortaya çıkmıştır. Bu denklem literatürde Rayleigh denklemi olarak adlandırılmıştır. Ancak sonradan bu tür denklemlerin daha genel hali olan denklemler ise Rayleigh denklemi türünden denklemler olarak ifade edilmiştir.

Yine matematik literatürü incelendiğinde Rayleigh denklem ve Rayleigh sisteminin dinamik davranışları fizik, mekanik ve mühendislik teknik alanları gibi birçok alanda uygulandığından dolayı Burton (1985); Hale (1977); Antosiewicz (1955) ve Sansone ve Conti (1964) tarafından geniş bir şekilde araştırıldı. Rayleigh denklemi uygulamalı fen bilimlerinde de sıkça ortaya çıkmaktadır ve bu denklemin periyodik çözümlerinin varlığı geçmiş 20 yıl boyunca geniş bir şekilde incelendi. Bu uygulamalar içinde, Rayleigh denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını bilmek önemlidir.

Son yıllarda Rayleigh denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı, Lu ve Gui (2007); Zong ve Liang (2007); Zhang ve Li (2008); Chen, Li ve Li (2004) ve Gaines ve Mawhin (1977) gibi bazı araştırmacılar tarafından çalışıldı. Gaines ve Mawhin (1977) ve Deimling (1985) diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığı üzerine teoremler oluşturup ve bu teoremleri uyguladılar. Gerek Rayleigh denklemi ve gerekse Rayleigh denklemi tipindeki denklemlerin çözümlerinin davranışları ile ilgili son derece nitelikli dergilerde çalışmalar yapıldığı ve halen yapılmakta olduğu görülmektedir. Bu çalışmaların büyük bir kısmı ise gecikmeli türden Rayleigh denklemlerinin periyodik çözümleri hakkındadır. Bu durum mevcut tezin kaynaklarına bakıldığında rahatlıkla görülebilir.

Örneğin; (1.1) denkleminin türevini alalım ve

$$y = \dot{x}$$

olsun. Bu durumda (1.1) denkleminden

$$\ddot{y} + f(y)\dot{y} + y = 0, f(u) = \dot{F}(u)$$

Lienard denklemi elde edilir.

$$F(u) = -\lambda\left(u - \frac{u^3}{3}\right), \lambda = sbt$$

alındığında ise

$$\ddot{u} - \lambda\left(u - \frac{u^2}{3}\right) + u = 0$$

van der Pol denklemi elde edilir.

Gaines ve Mawhin (1977) tarafından süreklilik teoremleri verildi ve bu teoremler diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı için uygulanmıştır. Özel olarak, Deimling (1985) bu teoremler aracığıyla

$$\ddot{x}(t) + f\big(\dot{x}(t)\big) + h\big(t, x(t)\big) = 0$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin nasıl elde edilebileceği üzerine örnekler verdi. Bu denklem için f fonksiyonu

$$f(0) = 0$$

olacak şekilde R üzerinde sürekli bir fonksiyon, h funksiyonu, her $|x| \geq r$ ve $t \in [0,2\pi]$ için

$$h(t,x)x < 0$$

şartını sağlamakta ve bu fonksiyon $R \times R$ de tanımlı sürekli, t ye göre 2π- periyotludur.

Lu ve Ge (2004) gecikmeli

$$\ddot{x}(t) + f\big(\dot{x}(t)\big) + g\big(t, x(t-\tau(t))\big) = p(t)$$

Rayleigh denkleminin T-periyodik çözümlere sahip olması için bazı sonuçlar inşa edip, elde edilen sonuçları örnekler ile açıkladı.

Bingwen ve Huang (2006) benzer bir çalışmayı gecikmeli

$$\ddot{x}(t) + f\big(\dot{x}(t)\big) + g\big(x(t-\tau(t))\big) = p(t)$$

tipindeki Rayleigh denklemi için yaptı.

Zhou ve Tang (2007b) otonom olmayan gecikmeli

$$\ddot{x}(t) + f\big(t, \dot{x}(t-\sigma)\big) + g\big(t, x(t-\tau(t))\big) = p(t) \tag{1.2}$$

denklemini göz önüne aldı. Belirtilen araştırmacılar (1.2) denklemin en az bir 2π-periyotlu periyodik çözüme sahip olması için yeter koşullar içeren iki teorem ispatladı.

Aynı şekilde Zhou ve Tang (2008)

$$\ddot{x}(t) + f\big(\dot{x}(t)\big) + g\big(t, x(t-\tau(t))\big) = p(t)$$

formundaki gecikmeli Rayleigh denklemini ele aldı. Bu denklemin en az bir T-periyodik çözüme sahip olması için yeter koşullar içeren bazı sonuçlar ispatladı.

Daha sonradan Tang ve arkadaşları (2009) yine (1.2) denkleminin periyodik çözümlere sahip olması için benzer bir çalışmada bulundu.

Konu ile ilgili olarak yapılan çalışmalar için ayrıca Bolwell (1999); Huang ve ark. (2007); Lee (2001); Liu ve Huang (2006); Lu ve ark. (2004a); Lu ve ark. (2004b); Manásevich ve ark. (1999); Peng ve ark. (2007); Srinivasan (1994); Stepin (1993);

Tatarskiĭ (1995); Volponi (2005); Wang ve Yan (2000a); Wang ve Yan (2000b); Wang (2005); Wang ve Cheng (2002); Zanolin (1980); Zhou ve Tang (2007a); Zhou ve Tang (2007b); Chen (2001); Liu (1994); Wang ve Shao (2010); Huang ve ark. (2007) gibi kaynaklara başvurulabilir.

2. ÖN BİLGİLER

Matematik literatüründe

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0,$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

biçimindeki bir diferansiyel denklem **Rayleigh denklemi** olarak adlandırılır (Lord Rayleigh Strutt, 1877;1945).

$$\ddot{x}(t) + f\big(\dot{x}(t)\big) + g(t, x(t)) = p(t) \tag{2.1}$$

$$\ddot{x}(t) + f\big(\dot{x}(t)\big) + g\big(t, x(t - \tau(t))\big) = p(t) \tag{2.2}$$

$$\ddot{x}(t) + f\Big(\dot{x}\big((t - \tau(t)\big)\Big) + g(t, x(t)) = p(t) \tag{2.3}$$

$$\ddot{x}(t) + f\big(\dot{x}(t - \tau(t))\big) + g\big(t, x(t - \tau(t))\big) = p(t) \tag{2.4}$$

$$\ddot{x}(t) + f\big(\dot{x}(t - \sigma(t))\big) + g\big(t, x(t - \tau(t))\big) = p(t) \tag{2.5}$$

$$x^{(n)}(t) + f\left(x^{(n-1)}(t)\right) + g(t, x(t)) = p(t) \tag{2.6}$$

$$x^{(n)}(t) + f\left(x^{(n-1)}(t)\right) + g(t, x\big(t - \tau(t)\big)) = p(t) \tag{2.7}$$

$$x^{(n)}(t) + f\left(x^{(n-1)}\big(t - \tau(t)\big)\right) + g(t, x(t)) = p(t) \tag{2.8}$$

$$x^{(n)}(t) + f\left(x^{(n-1)}\big(t - \tau(t)\big)\right) + g\left(t, x\big(t - \tau(t)\big)\right) = p(t) \tag{2.9}$$

$$x^{(n)}(t) + f\left(x^{(n-1)}\big(t - \sigma(t)\big)\right) + g(t, x\big(t - \tau(t)\big)) = p(t) \tag{2.10}$$

denklemleri birer Rayleigh denklemdir. (2.1) gecikmesiz Rayleigh denklemi olup (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) ve (2.10) denlemleri ise gecikmeli Rayleigh denklemleridir. Yukarıda verilmiş olan Rayleigh denklemlerinin büyük bir kısmı üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Tanım 2.1.

X bir lineer uzay olsun.

$$\| \|: X \to R$$

fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in R$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlar sağlanıyorsa, $\| \|$ fonksiyonuna X de **norm** denir. $(X, \| \|)$ uzayına **normlu uzay** denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.2. (Metrik ve Metrik Uzay)

X boş olmayan bir cümle olsun.

$$d: X \times X \to R$$

fonksiyonu için,

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği),

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d ye X de **metrik** ve d ile birlikte X e **metrik uzay** denir ve genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.3. (Açık ve Kapalı cümle)

X metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için

$$D(x, r) = \{y \in X: d(y, x) < r\} \subseteq A$$

olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in açık alt cümlesi veya A ya X de **açıktır** denir. X in B altcümlesinin X deki tümleyeni yani

$$B^t = X - B,$$

X de açıksa B ye **kapalı cümle** denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.4.

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A cümlesini kapsayan kapalı cümlelerin kesişim cümlesine A nın **kapanışı** denir (Çakallı, 1997).

Tanım 2.5.

(X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. A cümlesine **sınırlıdır** denir (Bülbül, 1994).

$$:\Leftrightarrow \exists r \in R^+ : \ \forall x, y \in A \text{ için } d(x, y) < r.$$

Tanım 2.6.

X normlu lineer uzay olsun. X norm metriğine göre tam ise X e **Banach uzayı** denir (Bayraktar , 2000).

Tanım 2.7.

$(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X uzayında bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|.\|)$ norrnlu uzayına **tam normlu uzayı** ya da **Banach uzayı** adı verilir (Musayev ve Alp ,2000).

Tanım 2.8.

X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D nin her elemanına Y nin bir elemanını karşılık getiren kurala D den Y ye bir **operatör** veya **dönüşüm** denir. A operatörünün x e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ yi, $A(x) \in Y$ ye götürdüğünü belirtmek için,

$$A: D \to Y$$

gösterimi kullanılır. (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.9.

X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun.

$$T: X \to Y$$

operatörü

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

ve

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T ye **lineer operatör** denir ($\alpha \in F$) (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.10.

(X,d) metrik uzayı ve , $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A nın her açık örtüsünün sonlu bir alt açık örtüsü var ve A yı örtüyorsa, $A \subset X$ ya **kompakt cümle** denir (Rahimov, 2006).

Tanım 2.11.

X, Z normlu reel uzaylar, $\Omega \subset X$sınırlı açık cümle ve $\overline{\Omega}$, Ω nın kapanışı olsun.

$$L: domL \subset X \to Z$$

ve

$$N: \overline{\Omega} \subset X \to Z$$

dönüşümleri ,

(i) $\pi N: \overline{\Omega} \to Z$ sürekli ve $\pi N(\overline{\Omega})$ sınırlı,

(ii) $K_{P,Q}N: \overline{\Omega} \to X$ kompakt

şartları sağlıyorsa

$$N: \overline{\Omega} \subset X \to Z$$

dönüşümüne $\overline{\Omega}$ içinde **L-kompakt** denir. Burada

$$\begin{aligned} \pi: Z &\to CokerL \\ z &\to z + ImL \end{aligned}$$

şeklinde bir operatör ve

$$K_{P,Q} = K_P \circ (I - Q)$$

dir (Gaines ve Mawhin, 1977).

Tanım 2.12. (Kompakt operatör)

$K_{P,Q}N$ sürekli ve $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ ön kompakt ise $K_{P,Q}N$ operatörüne **kompakt operatör** denir.

Tanım 2.13. (Ön kompakt)

$\overline{\Omega}$ kompakt ise Ω **ön kompakt** olur.

Tanım 2.14.

X, Z normlu reel uzaylar, $\Omega \subset X$sınırlı açık cümle ve $\overline{\Omega}$, Ω nın kapanışı olsun.

$$L: domL \subset X \to Z$$

ve

$$N: \overline{\Omega} \subset X \to Z$$

dönüşümleri,

(i) L lineer ve ImL, Z de kapalı bir cümle,

(ii) $KerL$ ve $CokerL$ sonlu boyutlu ve

$$boyKerL = boyCokerL$$

şartları sağlıyorsa L dönüşümüne **sıfır indeksli Fredholm operatörü** denir (Gaines ve Mawhin, 1977).

Tanım 2.15. (Cauchy-Schwarz eşitsizliği)

$$f, g : [a, b] \to R$$

türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$\left(\int_a^b fg dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 dx\right)\left(\int_a^b g^2 dx\right)$$

Eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.16.

$$f : X \to Y,$$
$$g : X \to Y$$

sürekli dönüşümler,

$$I = [0,1]$$

olsun. Her $x \in X$ için

$$H(x,0) = f(x)$$

ve

$$H(x,1) = g(x)$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$H : X \times I \to Y$$

sürekli dönüşümü varsa f ve g **homotopiktir** denir. Bu durumda H dönüşümüne f ve g arasında bir **homotopidir** denir (Ağırseven, 2003).

Örnek 2.1.

$X = Y = R^n$ ve $x \in R^n$ olmak üzere

$$f(x) = x,$$
$$g(x) = 0$$

biçiminde tanımlansın.

$$H: R^n \times I \to R^n,$$
$$H(x,t) = (1-t)f(x)$$

ile tanımlanan H dönüşümü f ve g arasında bir homotopidir (Ağırseven, 2003).

Tanım 2.17.

$f \in C(\overline{\Omega})$ alalım. Eğer Ω nin yüzeyinde $x_0 \in \partial\Omega$ var ve $f(x_0) = p, p \in R^n$ oluyorsa p ye f nin **sınır görüntüsü** denir (Degla ,1997).

Tanım 2.18.

$f \in C^1(\overline{\Omega})$ alaım. Eğer $x_0 \in \overline{\Omega}$ noktası f nin kritik noktası ve $f(x_0) = p, p \in R^n$ oluyorsa p ye f nin **kritik nokta görüntüsü** denir (Degla ,1997).

Tanım 2.19.

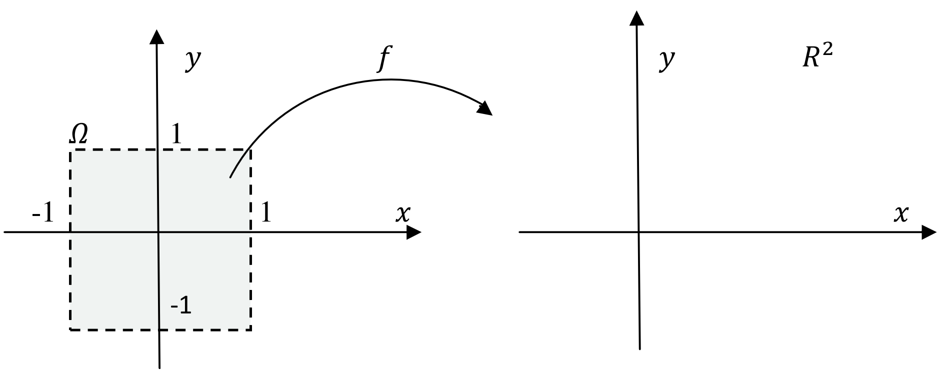
$f \in C^1(\overline{\Omega}), p \in R^n$ öyleki p noktası f nin sınır görüntüsü olmasın ayrıca p noktası f nin kritik nokta görüntüsü olmasın. Bu durumda f nin Ω ye göre p noktasındaki derecesi

$$\deg(f,\Omega,p) = \begin{cases} \sum_{x\in f^{-1}(p)} sgn\left(J_f(x)\right) & f^{-1}(p) \neq \emptyset \\ 0 & diğer\ durumlar\ için \end{cases}$$

olur (Degla, 1997).

Örnek 2.2.

$X = R^2$,



olmak üzere

$$f(x,y) = (2x^2 + x, 3y^2 - y)$$

şeklinde tanımlansın. $p(0,0)$ için deg (f,Ω,p) yi bulalım.

$$J_f(x,y) = \begin{vmatrix} 4x+1 & 0 \\ 0 & 6y-1 \end{vmatrix} = (4x+1)(6y-1) = 0$$

olup

$$x = -\frac{1}{4} \text{ veya } y = \frac{1}{6}$$

elde edilir. Kiritik noktalar ise $a, b \in (-1,1)$ olmak üzere, $\{\left(-\frac{1}{4}, a\right), \left(b, \frac{1}{6}\right)\}$ olur.

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow (2x^2 + x, 3y^2 - y) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = -\frac{1}{2}, y = 0, y = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2},0\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),(0,0),\left(0,\frac{1}{3}\right),$$

$p \notin f\left(Q_f \cup \partial\Omega\right)$ ve $f^{-1}(p) = \left\{\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),(0,0),\left(0,\frac{1}{3}\right)\right\}$ dir.

$$J_f(x,y) = (4x+1)(6y-1)$$

$$J_f(-\frac{1}{2},0) = 1$$

$$J_f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$J_f(0,0) = -1$$

$$J_f(0,\frac{1}{3}) = 1$$

elde edilir. Buradan

$$\deg(f,\Omega,p) = \sum_{x\in f^{-1}(p)} sgn\left(J_f(x)\right), \qquad f^{-1}(p) \neq \emptyset$$

$$= (1)+(-1)+(-1)+(1)$$

$$= 0$$

olur. Böylece f nin Ω ye göre p noktasındaki derecesi 0 dır.

Teorem 2.1. (homotopi değişmezlik (invariance) teoremi)

$$H: [0,1] \times \overline{\Omega} \to R^n$$

sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$H_t(x) = H(t,x)$$

şeklinde tanımlansın. $p \in R^n$ öyle ki

$$H(t,x) \neq p, \text{her } t \in [0,1] \text{ ve her } x \in \partial\Omega.$$

Bu takdirde t değişkeni [0,1] aralığında değişirken,

$$deg(H_t,\Omega,p)$$

sabittir. Özel olarak;

$$deg(H_0, \Omega, p) = deg(H_1, \Omega, p)$$

Olur (Degla, 1997).

Teorem 2.2. (süreklilik (continuation) Teoremi)

L sıfır indeksli Fredholm operatörü ve N, $\bar{\Omega}$ üzerinde L-kompakt olsun.

(i) $\lambda \in (0,1)$ ve

$$Lx = \lambda Nx$$

denklemini her x çözümü için $x \notin \partial\Omega$ dir,

(ii) $n = JQN: KerL \rightarrow KerL$ olmak üzere

$$deg(n, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$$

ve her $x \in KerL \cap \partial\Omega$ için

$$QNx \neq 0$$

dir.

Bu takdirde (i) ve (ii) şartları sağlanıyorsa,

$$Lx = \lambda Nx$$

denkleminin $domL \cap \bar{\Omega}$ de en az bir çözümü vardır (Gaines ve Mawhin, 1977).

Tanım 2.20.

X iç çarpım uzayı ve $\| \ \|$, iç çarpım normlusu olsun.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

olarak tanımlanırsa (X, d) metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise X e **Hilbert uzayı** denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.21.

X bir Hilbert uzayı ve Y, X in kapalı alt uzayı olsun. $x \in X$ ise $y \in Y$ ve $z \in Y^{\perp}$ olmak üzere

$$x = y + z$$

birtek olarak ifade edilebilir. Bu y vektörüne x in Y üzerindeki **dik iz düşümü** denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.22.

$$f\colon A \to B$$

fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için

$$f(x) = f(x + T)$$

olacak şekilde $T \neq 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, bu şartı sağlayan en küçük pozitif T sayısına da **fonksiyonun periyodu (esas periyot)** denir (Sağel ve ark., 2004).

3. GECİKMELİ OLMAYAN RAYLEIGH TİPİNDEKİ BİR DENKLEM İÇİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Bu bölümde Li ve Huang (2008) tarafından

$$\ddot{x}(t) + f\big(t, \dot{x}(t)\big) + g\big(t, x(t)\big) = e(t) \tag{3.1}$$

biçimindedeki Rayleigh denklemi için T-periyodik çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine verilen bir sonuç ele alınacaktır. (3.1) Rayleigh denklemi eşdeğer sistem olarak

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -f\big(t, y(t)\big) - g\big(t, x(t)\big) + e(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $e: R \to R$ ve $f, g: R \times R \to R$ sürekli fonksiyonlar,

$$f(t, 0) = 0,$$

e fonksiyonu T-periyodik, f ve g fonksiyonları ise birinci bileşenlerine göre T-periyodik ve $T > 0$ dır.

Bu bölümün temel amacı Li ve Huang (2008) tarafından (3.2) Rayleigh denklem sistemi için verilen T-periyodik çözümlerinin varlığı ve tekliğini incelemektir.

İlk olarak X Banach uzayında $\lambda \in (0,1)$ için

$$Lz = \lambda Nz \tag{3.3}$$

operatör denklemi ele alındı. Burada

$$L: DomL \cap X \to X$$

lineer operatör ve λ bir parametredir. P ve Q iki iz düşümü operatörü olmak üzere

$$P: DomL \cap X \to KerL$$

$$Q: X \to X/ImL$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 3.1.

X Banach uzayı,

$$L: D(L) \subset X \to X$$

sıfır indeksli Fredholm operatörü ve

$$N: \bar{\Omega} \to X$$

ise X uzayında Ω açık sınırlı bir alt cümlesi olmak üzere, $\bar{\Omega}$ üzerinde L-kompakt operatör olsun.

Ayrıca aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(1) Her $x \in \partial\,\Omega\ \cap D(L)$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $Lz \neq \lambda Nz$,
(2) her $z \in \partial\,\Omega\ \cap KerL$ için $QNz \neq 0$,
(3) $deg\{QN, \Omega\ \cap KerL, 0\} \neq 0$.
Bu takdirde

$$Lz = Nz$$

denklemi $\bar{\Omega}$ de en az bir çözüme sahiptir.

Lemma 3.2.

$\Omega \subset R^n$ içinde orijini barındıran açık, sınırlı ve orijine göre simetrik bir küme olduğunu kabul edelim. Eğer $A: \bar{\Omega} \to R^n$ sürekli dönüşüm ve her $z \in \partial\,\Omega$ için

$$Az = -A(-z) \neq 0$$

ise, bu takdirde

$$deg\{A, \Omega\,, 0\} \neq 0$$

olur.

$$|x|_k = (\int_0^T (|x(t)|^k dt)^{1/k}, \qquad |x|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$$

olsun. Ayrıca

$$X = \{z = (x(t), y(t))^T \in C(R, R^2): z, T - periyodiktir\},$$

her $z \in X$ için $\|.\|$ normu

$$\|z\| = |x|_\infty + |y|_\infty$$

ile tanımlanan bir Banach uzayıdır.

$$D(L) = \{z = (x(t), y(t))^T \in C^1(R, R^2) \colon z, T - periyodiktir\}$$

olmak üzere

$$L \colon D(L) \subset X \to X$$

lineer operatörünü, her $z \in D(L)$ için

$$Lz = \dot{z} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca

$$Nz = (y(t), -f\big(t, y(t)\big) - g\big(t, x(t)\big) + e(t))^T \tag{3.5}$$

olmak üzere

$$N \colon X \to X$$

lineer olmayan operatörü tanımlansın. (3.4) ve (3.5) göz önüne alındığında

$$Lz = \lambda Nz$$

operatör denklemi $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y(t) \\ -f\big(t, y(t)\big) - g\big(t, x(t)\big) + e(t) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

sistemi şeklinde yazılabilir. Tekrar (3.4) ve (3.5) dikkate alındığında

$$KerL = R^2$$

ve

$$ImL = \{z \colon z \in X, \int_0^T z(s)ds = 0\}$$

olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Böylece L operatörü sıfır indeksli Fredholm operatörüdür.

$$P \colon X \to KerL$$

ve

$$Q: X \to X/ImL$$

iz düşümler sırasıyla

$$Pz(t) = \frac{1}{T}\int_0^T z(s)ds,$$

$$Qz(t) = \frac{1}{T}\int_0^T z(s)ds$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$KerL = ImP$$

ve

$$KerQ = ImL$$

olur. Bunun yanında L operatörünün $D(L) \cap KerP$ üzerine sınırlandırılışının tersi K_p ile gösterilirse

$$K_p: ImL \to D(L) \cap KerP,$$

$$(K_p z)(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t x(s)ds - \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t x(s)ds\, dt \\ \int_0^t y(s)ds - \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t y(s)ds\, dt \end{pmatrix}, z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \epsilon ImL \tag{3.7}$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak (3.5) ve (3.7) den N operatörünün $\bar{\Omega}$ üzerinde L-kompakt olduğu kolaylıkla görülmektedir. Burada Ω, X üzerinde açık ve sınırlı bir cümledir.

Lemma 3.3.

$(\boldsymbol{A_1})$ Her $t \in R$, $x_1, x_2 \in R$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$\big(g(t, x_1) - g(t, x_2)\big)(x_1 - x_2) < 0$$

şartınının sağlandığını varsayalım. Bu takdirde (3.2) sistemi en çok bir T-periyodik çözüme sahiptir.

İspat:

(3.2) sisteminin T-periyodik iki çözümü, $(x_1(t), y_1(t))^T$ ve $(x_2(t), y_2(t))^T$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = y_i(t) \\ \frac{dy_i}{dt} = -f\big(t, y_i(t)\big) - g\big(t, x_i(t)\big) + e(t) \end{cases} i = 1{,}2, \tag{3.8}$$

elde edilir.

$$(v(t), u(t))^T = ((x_1(t) - x_2(t), y_1(t) - y_2(t))^T)$$

olsun. (3.8) dan

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = u(t) \\ \dot{u}(t) = -\big[f\big(t, y_1(t)\big) - f\big(t, y_2(t)\big)\big] - [g\big(t, x_1(t)\big) - g\big(t, x_2(t)\big)] \end{cases} \tag{3.9}$$

olur. Şimdi her $t \in R$ için

$$v(t) \leq 0$$

olduğu gösterilecektir. Karşıt bir şekilde, $t \in R$ için $v \in C^2[0, T]$ ve

$$v(t + T) = v(t)$$

olduğundan dolayı

$$\max_{t \in R} v(t) > 0$$

elde edilir. Bu nedenle

$$v(t^*) = \max_{t \in [0,T]} v(t) = \max_{t \in R} v(t) > 0$$

olacak şekilde $t^* \in R$ vardır (kolay olması için $t^* \in (0, T)$ seçilebilir). Buradan

$$\dot{v}(\, t^*) = u(\, t^*) = y_1(t^*) - y_2(t^*) = 0 \tag{3.10}$$

ve

$$\ddot{v}(\, t^*) = \big(u(t)\big)'\Big|_{t=t^*}$$

$$= -\big[f\big(t^*, y_1(t^*)\big) - f\big(t^*, y_2(t^*)\big)\big] - \big[g\big(t^*, x_1(t^*)\big) - g\big(t^*, x_2(t^*)\big)\big]$$

$$\leq 0 \tag{3.11}$$

olduğu görülür.

$$v(t^*) = x_1(t^*) - x_2(t^*) > 0$$

ve

$$y_1(t^*) = y_2(t^*)$$

olduğundan dolayı (A_1) şartından (3.11) ile çelişen

$$\ddot{v}(t^*) = -\big[f\big(t^*, y_1(t^*)\big) - f\big(t^*, y_2(t^*)\big)\big] - \big[g\big(t^*, x_1(t^*)\big) - g\big(t^*, x_2(t^*)\big)\big]$$

$$= -\big[g\big(t^*, x_1(t^*)\big) - g\big(t^*, x_2(t^*)\big)\big] > 0 \tag{3.12}$$

ifadesi elde edilir. Bu çelişkiden her $t \in R$ için

$$v(t) = x_1(t) - x_2(t) \leq 0$$

yazılabilir. Benzer bir şekilde her $t \in R$ için

$$x_1(t) - x_2(t) \geq 0$$

olduğu gösterilebilir. Böylece $t \in R$ için

$$x_1(t) \equiv x_2(t)$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.2) sistemi en çok bir T-periyodik çözüme sahiptir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.

(A_1) şartına ilaveten aşağıdaki şartların da sağlandığını varsalım:

$(\mathbf{A_2})$ Her $t \in R$ için

$$x\big(g(t,x) - e(t)\big) < 0, |x| \geq d^*, x \in R$$

olacak şekilde pozitif d^* sabiti vardır,

$(\mathbf{A_3})$ her $t, x \in R$ için

$$m_1 < \frac{2}{T}\ , f(t,x) \leq m_1|x| + m_2$$

olacak şekilde negatif olmayan m_1 ve m_2 sabitleri vardır.

Bu takdirde (3.2) sistemi tek bir T-periyodik çözüme sahiptir.

İspat:

(A_1) şartı ile birlikte Lemma 3.3 den (3.2) sistemi en çok bir T-periyodik çözüme sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece teoremi ispatlamak için (3.2) sisteminin en az bir T-periyodik çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu yapmak için Lemma 3.1 uygulanacaktır. İlk olarak (3.6) sistemi için mümkün olabilecek tüm T-periyodik çözümlerin kümesinin sınırlı olduğu iddası ispatlanacaktır.

(3.6) sisteminin keyfi bir T-periyodik çözümü $z = (x(t), y(t))^T \in X$ olsun. (3.6) sisteminden $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$\ddot{x} + \lambda^2 f\left(t, \frac{1}{\lambda}\dot{x}(t)\right) + \lambda^2\left[g\big(t, x(t)\big) - e(t)\right] = 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. $t_1, t_2 \in R$ için

$$x(t_1) = \max_{t\in R} x(t)$$

ve

$$x(t_2) = \min_{t\in R} x(t)$$

olsun. Bu takdirde

$$\dot{x}(t_1) = 0,$$

$$\ddot{x}(t_1) \leq 0$$

ve

$$\dot{x}(t_2) = 0,$$

$$\ddot{x}(t_2) \geq 0$$

yazılabilir. $f(t,0) = 0$ ve (3.13) den

$$g(t_1, x(t_1)) - e(t_1) \geq 0$$

ve

$$g(t_2, x(t_2)) - e(t_2) \leq 0$$

elde edilir. (A_2) göz önüne alındığında

$$x(t_1) < d^*$$

ve

$$x(t_2) > -d^*$$

elde edilir. $x(t)$, R de sürekli olduğundan en az bir $\xi \in R$ sayısı vardır öyle ki

$$x(\xi) \leq d^* \tag{3.14}$$

olur. $\bar{\xi} \in [0,T]$ ve m tam sayı olmak üzere

$$\xi = mT + \bar{\xi}$$

olsun. Bu takdirde

$$|x(t)| = \left| x(\bar{\xi}) + \int_{\bar{\xi}}^{t} \dot{x}(s)ds \right|$$

$$\leq d^* + \int_{\bar{\xi}}^{t} |\dot{x}(s)|ds \, , t \in [0,T]$$

ve

$$|x(t)| = |x(t-T)| = \left| x(\bar{\xi}) - \int_{t-T}^{\bar{\xi}} \dot{x}(s)ds \right|$$

$$\leq d^* + \int_{t-T}^{\bar{\xi}} |\dot{x}(s)|ds \, , t \in \left[\bar{\xi}, \bar{\xi} + T\right]$$

olur. Yukarıdaki iki eşitsizlik göz önüne alındığında

$$|x|_\infty = \max_{t\in[0,T]}|x(t)| = \max_{t\in[\bar{\xi},\bar{\xi}+T]}|x(t)|$$

$$\leq \max_{t\in[\bar{\xi},\bar{\xi}+T]}\left\{d^* + \frac{1}{2}\left(\int_{\bar{\xi}}^{t}|\dot{x}(s)|ds + \int_{t-T}^{\bar{\xi}}|\dot{x}(s)|ds\right)\right\}$$

$$\leq d^* + \frac{1}{2}\int_0^T|\dot{x}(s)|ds$$

$$\leq d^* + \tfrac{1}{2}\sqrt{T}|\dot{x}|_2 \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.13) ifadesi $x(t)$ ile çarpılıp 0 dan T ye integral alındığında, (A_2), (A_3), (3.15) ve Schwarz eşitsizliğinden

$$|\dot{x}|_2^2 = -\int_0^T \ddot{x}(t)x(t)dt$$

$$= \int_0^T\left\{\lambda^2 f\left(t,\frac{1}{\lambda}\dot{x}(t)\right) + \lambda^2\big[g\big(t,x(t)\big) - e(t)\big]\right\}x(t)dt$$

$$= \int_0^T \lambda^2 f\left(t,\frac{1}{\lambda}\dot{x}(t)\right)x(t)dt + \lambda^2\int_{\{t:t\in[0,T],|x(t)|>d^*\}}\big[g\big(t,x(t)\big) - e(t)\big]x(t)dt$$

$$+\lambda^2\int_{\{t:t\in[0,T],|x(t)|\leq d^*\}}\big[g\big(t,x(t)\big) - e(t)\big]x(t)dt$$

$$\leq \int_0^T \lambda^2\left[m_1\frac{1}{\lambda}|\dot{x}(t)| + m_2\right]|x(t)|dt$$

$$+\lambda^2\int_{\{t:t\in[0,T],|x(t)|\leq d^*\}}\big|g\big(t,x(t)\big) - e(t)\big||x(t)|dt$$

$$\leq m_1|x|_\infty\int_0^T|x(t)|dt + |x|_\infty T(max\{|g(t,x) - e(t)|: t\in R, |x|\leq d^*\} + m_2)$$

$$\leq m_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{T}|\dot{x}|_2 + d^*\right)\sqrt{T}|\dot{x}|_2$$

$$+ T(max\{|g(t,x) - e(t)|: t\in R, |x|\leq d^*\} + m_2)\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{T}|\dot{x}|_2 + d^*\right) \tag{3.16}$$

elde edilir.

$$0 \leq m_1 \leq \frac{2}{T}$$

olduğundan dolayı (3.16) ifadesinden

$$|\dot{x}|_2 \leq D_1 \text{ ve } |x|_\infty \leq D_1 \tag{3.17}$$

şartlarını sağlayan pozitif bir D_1 sabiti vardır.

$$|x(t_1)| = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$$

olacak şekilde $t_1 \in [0, T]$ olsun. Bu takdirde

$$\dot{x}(t_1) = 0$$

olur. (3.6) nın ilk eşitsizliğini dikkate aldığımızda

$$y(t_1) = 0$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| y(t_1) + \int_{t_1}^{t} \dot{y}(s)ds \right| \\
&\leq |y(t_1)| + \int_{t_1}^{t} |\dot{y}(s)|ds \\
&\leq \int_{0}^{T} |\dot{y}(s)|ds \\
&\leq \int_{0}^{T} \left| \lambda^2 f\left(t, \frac{1}{\lambda}\dot{x}(t)\right) + \lambda^2\big[g\big(t, x(t)\big) - e(t)\big] \right| dt \\
&\leq \int_{0}^{T} m_1 |\dot{x}(t)| dt + T[m_2 + max\{|g(t,x) - e(t)| : t \in R, |x| \leq D_1\}] \\
&\leq m_1\sqrt{T}|\dot{x}(t)|_2 + T[m_2 + max\{|g(t,x) - e(t)| : t \in R, |x| \leq D_1\}] \\
&\leq D_2
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ifadesi sağlanacak şekilde pozitif bir D_2 sabiti seçilebilir. Burada $t \in [t_1, t_1 + T]$ dir.

$$\Omega = \{x\epsilon X : |x|_\infty + |y|_\infty \leq D_1 + D_2 + d^* + 1 := M\}$$

olsun. Bu takdirde $\lambda \in (0,1)$ olduğunda (3.6) sisteminin $\partial\Omega$ üzerinde çözüme sahip değildir.

$$z = (x,y)^T \in \partial\Omega \cap KerL = \partial\Omega \cap R^2$$

olsun. $z,\ \|z\| = M$ ile R^2 de sabit bir vektördür. (A_2) den eğer

$$y = 0$$

ise

$$|x|_\infty = M > d^* + 1$$

ve

$$-\frac{1}{T}\int_0^T (f(t,y) + g(t,x) - e(t))dt = -\frac{1}{T}\int_0^T (g(t,x) - e(t))dt \neq 0$$

olur. Böylece herhangi bir durumda $z \in \partial\Omega \cap KerL$ için

$$QNz = (y, -\tfrac{1}{T}\int_0^T (f(t,y) + g(t,x) - e(t))dt)^T \neq 0 \qquad (3.19)$$

sağlanır. Şimdi her $z = (x,y)^T \in \bar{\Omega}$ için

$$Az = (y,x)^T$$

olmak üzere

$$A: \bar{\Omega} \to R^2$$

bir sürekli dönüşüm tanımlansın. Ω orijine göre simetrik ve her $z \in \partial\Omega \cap KerL$ için

$$Az = -A(-z) \neq 0$$

olduğu açıktır. Lemma 3.2 yi uygulayarak

$$\deg\{A, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0$$

elde edilir. (3.19) un ispatına benzer bir şekilde, $(\partial\Omega \cap KerL) \times [0,1]$ üzerinde $\phi(z,u) \neq 0$ olacak şekilde

$$\phi(z,u) = uAz + (1-u)QNz$$

$$= (uy + (1-u)y, ux - (1-u)\tfrac{1}{T}\int_0^T \big(f(t,y) + g(t,x) - e(t)\big)dt)^T \qquad (3.20)$$

bir homotopi dönüşüm olduğunu ispatlamak kolaydır.

Sonuç olarak, homotopi değişmezlik (invariance) teoremini kullanarak

$$deg\{QN, \Omega \cap KerL, 0\} = deg\{A, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0$$

elde edilir.

Şimdiye kadar Ω, Lemma 3.1 deki bütün şartları sağladığını gördük. Bu nedenle

$$Lz = Nz$$

operatör denklemi X Banach uzayında en az bir çözüme sahiptir. Böylece (3.2) sisteminin tek bir T-periyodik çözüme sahip olduğu ispatlandı. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Yukarıda elde edilen sonucu destekleyen iki örnek verilecektir.

Örnek 3.1.

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{200\pi}\left(\dot{x}(t)\right)\left(sin\left(\dot{x}(t)\right)\right) cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \left(1 + sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right) x^{99}(t) = cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) \qquad (3.21)$$

Rayleigh denklemi ele alansın. Bu denklem (3.1) denklemiyle karşılaştırıldığında, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$f(t,x) = \frac{1}{200\pi}(x)(sin(x)) cos\left(\frac{1}{2}t\right),$$

$$g(t,x) = -\left(1 + sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right) x^{99}(t)$$

ve

$$e(t) = cos^2\left(\frac{1}{2}t\right).$$

(3.21) Rayleigh denklemi sistem biçiminde

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{200\pi}\left(y(t)\right)\left(sin\left(y(t)\right)\right) cos\left(\dfrac{1}{2}t\right) \\ \qquad + \left(1 + sin^2\left(\dfrac{1}{2}t\right)\right) x^{99}(t) + cos^2\left(\dfrac{1}{2}t\right) \end{cases} \qquad (3.22)$$

olarak ifade edilebilir. Açıkça her $t, x_1, x_2 \in R$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$\big(g(t,x_1)-g(t,x_2)\big)(x_1-x_2)=\left(-\left(1+sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right)x_1{}^{99}+\left(1+sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right)x_2{}^{99}\right)$$

$$\times\,(x_1-x_2)$$

$$=-\left(1+sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right)(x_2{}^{99}-x_1{}^{99})(x_2-x_1)<0,$$

her $t\in R$ ve $|x|\geq d^*$ (d^* uygun seçilmesi kaydıyla) için

$$x\big(g(t,x)-e(t)\big)=x\left(-\left(1+sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right)x^{99}-cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right)$$

$$=-x\left(x^{99}+x^{99}\,sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)+cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right)$$

$$=-\left(x^{100}+x^{100}\,sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)+x\,cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right)<0$$

ve her $t,x\in R$ için

$$f(t,x)=\frac{x}{200\pi}sin\,x\,cos\left(\frac{1}{2}t\right),$$

$$|f(t,x)|=\left|\frac{x}{200\pi}sin\,x\,cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right|$$

$$\leq\frac{|x|}{200\pi}\leq\frac{|x|}{200\pi}+m_2$$

$$=m_1|x|+m_2,\qquad m_1=\frac{1}{200\pi}\ ve\ m_2\geq 0$$

olur. Böylece yukarıdaki verilen $(A_1),(A_2)$ ve(A_3) şartları sağlanır. Bu nedenle Teorem 3.1 den (3.22) sistemi ve buna bağlı olarak (3.21) denklemi tek bir 4π-periyodik çözüme sahiptir.

Örnek 3.2.

$$\ddot{x}(t)-(1+|sint|)x^2(t)arctanx(t)=\frac{1}{100}sint \tag{3.23}$$

Rayleigh denklemi ele alınsın. Bu denklem (3.1) denklemiyle karşılaştırıldığında, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$f(t,x)=0,$$

$$g(t,x) = -(1+|sint|)x^2(t)arctanx(t)$$

ve

$$e(t) = \frac{1}{100}sint$$

(3.23) Rayleigh denklemi sistem biçiminde

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(t) \\ \frac{dy}{dt} = (1+|sint|)x^2(t)arctanx(t) + \frac{1}{100}sint \end{cases} \tag{3.24}$$

olarak ifade edilebilir. Açıkça her $t, x_1, x_2 \in R$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$\begin{aligned} \big(g(t,x_1) - g(t,x_2)\big)(x_1 - x_2) &= (-(1+|sint|){x_1}^2 arctanx_1 + (1+|sint|){x_2}^2 arctanx_2) \\ &\quad \times (x_1 - x_2) \\ &= -(1+|sint|)({x_1}^2 arctanx_1 - {x_2}^2 arctanx_2)(x_1 - x_2) \\ &< 0 \end{aligned}$$

her $t \in R$ ve $|x| \geq d^*$(d^* sabiti uygun bir biçimde seçilmek kaydıyla) için

$$x\big(g(t,x) - e(t)\big) = x\left(-(1+|sint|)x^2 arctanx - \frac{1}{100}sint\right) < 0$$

ve her $t, x \in R$ için

$$f(t,x) = 0 \leq m_1|x| + m_2, \qquad m_1 \geq 0 \text{ ve } m_2 \geq 0$$

olur. Böylece yukarıdaki verilen $(A_1), (A_2)$ ve(A_3) şartları sağlanır. Bu nedenle Teorem 3.1 den (3.24) sistemi ve buna bağlı olarak (3.23) denklemi tek bir 4π-periyodik çözüme sahiptir.

4. GECİKMELİ TİPTEKİ BELLİ FORMDAKİ RAYLEIGH DENKLER İÇİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI VE SINIRLILIĞI

4.1. Gecikmeli $\ddot{x}(t)+f\big(\dot{x}(t)\big)+g\big(x(t-\tau(t))\big)=p(t)$ Rayleigh Denklemin Periyodik Çözümleri İçin Sınırlılık

Bu kesimde ilk olarak Wang ve Cheng (1999) tarafından ele alınan gecikmeli

$$\ddot{x}(t)+f\big(\dot{x}(t)\big)+g\big(x(t-\tau(t))\big)=p(t) \tag{4.1}$$

Rayleigh denklemi ele alınacaktır. Burada f, g, p ve $\tau: R \to R$ biçiminde tanımlı, sürekli fonksiyonlar,

$$f(0)=0,$$

τ, p ise 2π-periyodik ve

$$\int_0^{2\pi} p(t)dt = 0$$

dır. (4.1) denklemi $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$\ddot{x}(t)+\lambda f\big(\dot{x}(t)\big)+\lambda g\big(x(t-\tau(t))\big)=\lambda p(t) \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığını, çözümlerin sınırlı olması yardımıyla belirleyen çalışmalar vardır. Bunun için Inernizzi ve Zanolin (1979) Omari ve Villari (1990) gibi kaynaklara başvurulabilir.

Teorem 4.1.1.

K, D ve M pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $x \in R$ için $|f(x)| \leq K$,

(ii) $|x| \geq D$ için $xg(x) > 0$ ve $|g(x)| > K$,

(iii) $x \leq -D$ için $g(x) \geq -M$.

Bu takdirde (4.2) denkleminin 2π-periyodik herhangi bir $x = x(t)$ çözümü için D_2 pozitif bir sabit olmak üzere

$$\dot{x}(t) \leq D_2$$

ve

$$x(t) \leq D + 2\pi D_2$$

olur.

İspat:

$x = x(t)$ (4.2) denkleminin 2π-periyotlu periyodik bir çözümü olsun. $x(0) = x(2\pi)$ olduğundan bir $t_0 \in [0,2\pi]$ sayısı vardır öyleki $\dot{x}(t_0) = 0$ olur. (4.2) denklemi göz önüne alındığında $t \in [0,2\pi]$ olmak üzere

$$|\dot{x}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} \ddot{x}(s)ds\right| \leq \int_0^{2\pi} |\ddot{x}(s)|ds$$

$$\leq \lambda \int_0^{2\pi} \left|f\big(\dot{x}(s)\big)\right| ds + \lambda \int_0^{2\pi} \left|g\Big(x\big(s-\tau(s)\big)\Big)\right| ds + \lambda \int_0^{2\pi} |p(s)| ds \tag{4.3}$$

$$\leq 2\pi K + \lambda \int_0^{2\pi} |g(x(s-\tau(s)))| ds + 2\pi \max_{0\leq s\leq 2\pi} |p(s)|$$

elde edilir.

D_1 pozitif bir sabit olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} |g(x(s-\tau(s)))| ds \leq 2\pi K + 4\pi D_1 \tag{4.4}$$

olduğu iddia edilmektedir. Gerçekten (4.2) denkleminin 0 dan 2π ye integrali alınıp ve (i) şartı uygulandığında

$$\int_0^{2\pi} \left\{g\Big(x\big(t-\tau(t)\big)\Big) - K\right\} dt \leq \int_0^{2\pi} \left\{g\Big(x\big(t-\tau(t)\big)\Big) - \left|f\big(\dot{x}(t)\big)\right|\right\} dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \left\{f\big(\dot{x}(t)\big) + g\Big(x\big(t-\tau(t)\big)\Big)\right\} dt = 0 \tag{4.5}$$

olduğu görülür.

$$E_1 = \big\{t \in [0,2\pi] : x\big(t-\tau(t)\big) > D\big\},$$

$$E_2 = [0,2\pi] \backslash E_1$$

olsun. Bu durumda

$$\int_{E_2} |g(x(t-\tau(t)))| dt \leq 2\pi\, max\left\{M, \sup_{|x|\leq D}|g(x)|\right\}$$

ve

$$\int_{E_1}\left\{\left|g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right)\right| - K\right\} dt \leq \int_{E_1}\left|g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right) - K\right| dt$$

$$= \int_{E_1}\left\{g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right) - K\right\} dt$$

$$\leq -\int_{E_2}\left\{g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right) - K\right\} dt$$

$$\leq \int_{E_2}\left|g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right)\right| dt + \int_{E_2} K dt$$

elde edilir. Buna bağlı olarak

$$\int_0^{2\pi}\left|g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right)\right| dt \leq 2\pi K + 4\pi\, max\left\{M, \sup_{|x|\leq D}|g(x)|\right\}$$

yazılabilir. (4.3) ve (4.4) den $t \in [0,2\pi]$ olmak üzere,

$$\dot{x}(t) \leq D_2 \tag{4.6}$$

olduğu görülebilir.

$$\int_0^{2\pi}\left\{f\big(\dot{x}(t)\big) + g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right)\right\} dt = 0$$

eşitliğinden, $t_1 \in [0,2\pi]$ olmak üzere

$$f\big(\dot{x}(t_1)\big) + g\left(x\big(t_1-\tau(t_1)\big)\right) = 0$$

elde edilir.

Teoremin şartlarına bağlı olarak

$$\left|g\left(x\big(t_1-\tau(t_1)\big)\right)\right| = \left|f\big(\dot{x}(t_1)\big)\right| \leq K$$

ve

$$\left|x\left(t_1 - \tau(t_1)\right)\right| < D$$

yazılabilir. $x(t)$ çözümü 2π periyodik olduğundan dolayı $t_2 \in [0,2\pi]$ için

$$|x(t_2)| < D$$

yazılabilir. Sonuç olarak $t \in [0,2\pi]$ için

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s)ds = \int_0^{t_2} \dot{x}(s)ds + \int_{t_2}^t \dot{x}(s)ds = x(t_2) - x(0) + \int_{t_2}^t \dot{x}(s)ds$$

ifadesinden

$$x(t) = \left|x(t_2) + \int_{t_2}^t \dot{x}(s)ds\right| \leq D + \int_0^{2\pi} |\dot{x}(s)|ds \leq D + 2\pi D_2 \qquad (4.7)$$

olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi Gaines ve Mawhin (1977) tarafından (4.1) denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını ispatlayan işlemleri verelim.

X her t için R de tanımlı 2π-periyotlu $x = x(t)$ biçimindeki sürekli türevlenebilir fonksiyonlarının bir Banach uzayı ve

$$\|x\|_1 = \max_{0\leq t\leq 2\pi} \{|x(t)|, |\dot{x}(t)|\}$$

olsun. Benzer biçimde Y her t için R de tanımlı 2π-periyotlu $y = y(t)$ biçimindeki sürekli türevlenebilir fonksiyonlarının bir Banach uzayı ve

$$\|y\|_0 = \max_{0\leq t\leq 2\pi} |y(t)|$$

olsun. Ayrıca, Ω, $x = x(t)$ biçimindeki fonksiyonları içeren X uzayının alt uzayı ve

$$|x(t)| < \overline{D}$$

ve

$$|\dot{x}(t)| < \overline{D}$$

olsun. Burada $\overline{D}$ sayısı $D + 2\pi D_2$ sayısından daha büyüktür.

$$L: X \cap C^2(R,R) \to Y,$$

$t \in R$ için

$$(Lx)(t) = \ddot{x}(t)$$

ile tanımlı bir operatör olsun. Benzer biçimde

$$N: X \to Y,$$

$t \in R$ için

$$(Nx)(t) = -f\big(\dot{x}(t)\big) - g\Big(x\big(t-\tau(t)\big)\Big) + p(t)$$

ile tanımlı bir operatör olsun.

ImL ve $KerL$ sırasıyla L operatörünün görüntüsü ve çekirdeğini temsil etsin. Açık olarak

$$KerL = R$$

dir. Bununla birlikte

$$P: X \to KerL$$

ve

$$Q: Y \to Y/ImL$$

iz düşümler sırasıyla

$$(Px)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt\,, t \in R,$$

$$(Qx)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)dt\,, t \in R$$

gibi tanımlanırsa, bu takdirde

$$KerL = ImP$$

ve

$$KerQ = ImL$$

olur. Ayrıca L operatörü sıfır indeksli bir Fredholm operatörü ve N operatörü Ω nın $\overline{\Omega}$ kapanışı üzerinde L-kompaktır (Gaines ve Mawhin ,1977).

$\lambda \in (0,1)$ ve $\partial\Omega$ da bulunan L nin tanım bölgesindeki her hangi bir $x = x(t)$ için $Lx \neq \lambda Nx$ olmalıdır. Aksi halde (4.6) ve(4.7) göz önüne alındığında x, Ω nın iç bölgesine ait olur. Bu durum ise $x \in \partial\Omega$ kabulü ile bir çelişkidir. Ayrıca $KerL$ ve Ω nın kesişimin bölgesinde bulunan bir $x = x(t)$ fonksiyonu için $x(t) \equiv \overline{D}$ veya $x(t) \equiv -\overline{D}$ olmalıdır. Burada D bir sabittir. Buna bağlı olarak

$$(QN)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(-f(\dot{x}(t)) - g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right) + p(t)\right)dt = -g(\mp\overline{D}) \neq 0$$

yazılabilir. Şimdi

$$H(x,s) = sx + (1-s)g(x), 0 \leq s \leq 1$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$$s \in [0,1] \text{ ve } KerL \cap \partial\Omega$$

olduğunda

$$xH(x,s) = sx^2 + (1-s)xg(x) > 0$$

olur. Böylece $H(x,s)$ bir homotopidir. Bu ise

$$\begin{aligned} deg\{QNx, \Omega \cap KerL, 0\} &= deg\{-g(x), \Omega \cap KerL, 0\} \\ &= deg\{-x, \Omega \cap KerL, 0\} \\ &= deg\{-x, \Omega \cap R, 0\} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Buna bağlı olarak Teorem 2.2. (süreklilik (continuation) teoremi) nin bütün şartlarının sağlandığı gösterildi. Teorem 4.1.1 şartları altında (4.1) denklemi bir 2π-periyodik çözüme sahiptir.

Örnek 4.1.1.

$$\ddot{x}(t) + e^{-(\dot{x}(t))^2} + \arctan\big(x(t-\pi)\big) = sint + 1$$

Rayleigh denklemi ele alansın. Bu denklem (4.1) denklemiyle karşılaştırıldığında, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$f(u) = e^{\{-u^2\}} - 1,$$

$$g(u) = arctan\, u,$$

$$p(u) = sinu$$

ve

$$\tau(u) = \pi.$$

Açıkça K, D ve M pozitif sabitler (sabitler uygun bir biçimde seçilmek kaydıyla) olmak üzere her $x \in R$ için

$$|f(x)| = \left|e^{-x^2} - 1\right| \leq K,$$

$|x| \geq D$ için

$$xg(x) = xarctan\, x > 0$$

ve

$$|g(x)| = |arctan\, x| > K,$$

$x \leq -D$ için

$$g(x) = arctan\, x \geq -M,$$

olur. Söz konusu fonksiyonlar Teorem 4.1.1 in tüm şartlarını sağlar.

Böylece yukarıda verilen denklem 2π-periyotlu periyodik bir çözüme sahiptir.

4.2. Gecikmeli $\ddot{x}(t) + f\big(t, \dot{x}(t-\tau)\big) + h\big(t, x(t-\sigma)\big) = p(t)$ Rayleigh Denkleminin Periyodik Çözümlerinin Varlığı

Bu kesimde ise Wang ve Yan (2000b) tarafından

$$\ddot{x}(t) + f\big(t, \dot{x}(t-\tau)\big) + h\big(t, x(t-\sigma)\big) = p(t) \tag{4.8}$$

Gecikmeli tip otonom olmayan Rayleigh diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığı ele alınacaktır.

Burada τ, σ sabitler f ve $g \in C(R^2, R)$, $f(t,x)$ ve $g(t,x)$ her t için 2π periyodik fonksiyonlar, her $t \in R$ için

$$f(t,0) = 0,$$

her $t \in R, p \in C(R,R)$ için

$$p(t) = p(t + 2\pi)$$

ve

$$\int_0^{2\pi} p(t)dt = 0$$

dır. Adı geçen araştırmacılar Mawhin (1977) tarafından geliştirilen Teorem 2.2. (süreklilik (continuation) teoremi) ni kullanarak (4.8) nin periyodik çözümlerin varlığı için iki yeter şart oluşturdular.

Teorem 4.2.1.

K, D ve M pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $(t,x) \in R^2$ için $|f(t,x)| \leq K$,

(ii) $t \in R$ ve $|x| \geq D$ için $xg(t,x) > 0$ ve $|g(t,x)| > K$,

(iii) $t \in R$ ve $x \leq -D$ için $g(t,x) \geq -M$,

(iv) $sup_{(t,x)\in R\times[-D,D]}|g(t,x)| < \infty$.

Bu takdirde (4.8) denklemi 2π-periyotlu periyodik bir çözüme sahiptir.

İspat:

$\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$\ddot{x}(t) + \lambda f\big(t, \dot{x}(t-\tau)\big) + \lambda h\big(t, x(t-\sigma)\big) = \lambda p(t) \tag{4.9}$$

denklemini göz önüne alalım. $x(t)$, (4.9) denkleminin 2π periyodik bir çözümü olsun. Bu durumda

$$x(0) = x(2\pi)$$

olur. Buna bağlı olarak Rolle teoremi gereği

$$\dot{x}(t_0) = 0$$

olacak şekilde en az bir $t_0 \in [0,2\pi]$ vardır. (4.9) denklemini göz önüne aldığımızda her $t \in [0,2\pi]$ için

$$|\dot{x}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} \ddot{x}(s)ds\right| \leq \int_0^{2\pi} |\ddot{x}(s)|ds$$

$$\leq \lambda \int_0^{2\pi} \big|f\big(s, \dot{x}(s-\tau)\big)\big|ds + \lambda \int_0^{2\pi} \big|g\big(s, x(s-\sigma)\big)\big|ds + \lambda \int_0^{2\pi} |p(s)|ds \tag{4.10}$$

$$\leq 2\pi K + \lambda \int_0^{2\pi} |g(s, x(s-\sigma))|ds + 2\pi \max_{0\leq s\leq 2\pi} |p(s)|$$

yazılabilir.

D_1 pozitif bir sabit olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} |g(s, x(s-\sigma))|ds \leq 2\pi K + 4\pi D_1 \tag{4.11}$$

olduğu iddia edilmektedir. (4.9) denkleminin 0 dan 2π ye integrali alınıp ve (i) şartı göz önüne alındığında

$$\int_0^{2\pi} \{g\big(t, x(t-\sigma)\big) - K\}dt \leq \int_0^{2\pi} \{g\big(t, x(t-\sigma)\big) - \big|f\big(t, \dot{x}(t-\tau)\big)\big|\}dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \{f\big(t, \dot{x}(t-\tau)\big) + g\big(t, x(t-\sigma)\big)\}dt = 0 \tag{4.12}$$

olduğu görülür.

$$\mathrm{E}_1 = \{t \in [0,2\pi]: x((t-\sigma)) > D\},\ \mathrm{E}_2 = [0,2\pi]\backslash \mathrm{E}_1 \tag{4.13}$$

olsun. (ii), (iii) ve (iv) şartları uygulandığında

$$\int_{\mathrm{E}_2} |g(t, x(t-\sigma))| dt \leq 2\pi\, max\{M, sup_{(t,x)\in R\times[-D,D]} |g(t,x)|\} \tag{4.14}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{E}_1} \{|g(t, x(t-\sigma))| - K\} dt &\leq \int_{\mathrm{E}_1} |g(t, x(t-\sigma)) - K| dt \\ &= \int_{\mathrm{E}_1} \{g(t, x(t-\sigma)) - K\} dt \\ &\leq -\int_{\mathrm{E}_2} \{g(t, x(t-\sigma)) - K\} dt \\ &\leq \int_{\mathrm{E}_2} |g(t, x(t-\sigma))| dt + \int_{\mathrm{E}_2} K dt \end{aligned} \tag{4.15}$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak

$$\int_0^{2\pi} |g(t, x(t-\sigma))| dt \leq 2\pi K + 4\pi\, max\{M, sup_{(t,x)\in R\times[-D,D]} |g(t,x)|\} \tag{4.16}$$

yazılabilir. Bu ise yukarıdaki iddianın doğru olduğunu gösterir. (4.10) ve (4.11) den D_2 pozitif bir sabit olmak üzere

$$\dot{x}(t) \leq D_2, t \in [0,2\pi] \tag{4.17}$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.12) nin son eşitliğinden $t_1 \in [0,2\pi]$ olmak üzere

$$f(t_1, \dot{x}(t_1-\tau)) + g(t_1, x(t_1-\sigma)) = 0 \tag{4.18}$$

elde edilir.

Teoremin şartlarına bağlı olarak

$$|g(t_1, x(t_1-\sigma))| = |f(t_1, \dot{x}(t_1-\tau))| \leq K \tag{4.19}$$

ve

$$|x(t_1-\sigma)| < D \tag{4.20}$$

yazılabilir. $x(t)$, 2π periyodik olduğundan dolayı $t_2 \in [0,2\pi]$ için

$$|x(t_2)| < D$$

yazılabilir. Sonuç olarak $t \in [0,2\pi]$ için

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s)ds = \int_0^{t_2} \dot{x}(s)ds + \int_{t_2}^t \dot{x}(s)ds = x(t_2) - x(0) + \int_{t_2}^t \dot{x}(s)ds$$

ifadesinden

$$x(t) = \left| x(t_2) + \int_{t_2}^t \dot{x}(s)ds \right| \leq D + \int_0^{2\pi} |\dot{x}(s)|ds \leq D + 2\pi D_2 \qquad (4.21)$$

elde edilir.

X her t için R de tanımlı 2π-periyotlu $x = x(t)$ biçimindeki sürekli türevlenebilir fonksiyonlarının bir Banach uzayı ayrıca

$$\|x\|_1 = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \{|x(t)|, |\dot{x}(t)|\}$$

olarak tanımlanmaktadır. Benzer biçimde Y her t için R de tanımlı 2π-periyotlu $y = y(t)$ biçimindeki sürekli türevlenebilir fonksiyonlarının bir Banach uzayı, ayrıca

$$\|y\|_0 = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |y(t)|$$

olarak tanımlanmaktadır. Son olarak $\overline{D}$ sayısı $D + 2\pi D_2$ sayısından daha büyük

$$|x(t)| < \overline{D}$$

ve

$$|\dot{x}(t)| < \overline{D}$$

olmak üzere Ω, $x = x(t)$ biçimindeki fonksiyonları içeren X uzayının alt uzayı olsun. Şimdi

$$L: X \cap C^2(R,R) \to Y,$$

$t \in R$ için

$$(Lx)(t) = \ddot{x}(t)$$

ile tanımlanan operatör olsun.

$$N: X \to Y,$$

$t \in R$ için

$$(Nx)(t) = -f\big(t, \dot{x}(t-\sigma)\big) - g\big(t, x(t-\tau)\big) + p(t) \tag{4.22}$$

ile tanımlansın.

$$KerL = R$$

olduğunu biliyoruz. Bunulla birlikte eğer

$$P: X \to KerL$$

ve

$$Q: Y \to Y/ImL$$

iz düşümler sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$\begin{aligned} Px &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt\,, \\ Qx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)dt\,, \end{aligned} \tag{4.23}$$

bu takdirde

$$KerL = ImP$$

ve

$$KerQ = ImL$$

olur. Ayrıca L operatörü sıfır indeksli Fredholm operatörü ve N operatörü Ω nın $\bar{\Omega}$ kapanışı üzerinde L-kompaktır (Gaines ve Mawhin, 1977).

$\lambda \in (0,1)$ ve $\partial\Omega$ da bulunan L nin tanım bölgesindeki her hangi bir $x = x(t)$ için $Lx \neq \lambda Nx$ olmalıdır. Aksi halde (4.17) ve(4.21) göz önüne alındığında x, Ω nın iç bölgesine ait olur. Bu durum ise $x \in \partial\Omega$ kabulü ile bir çelişkidir. Ayrıca bir fonksiyonu $KerL$ ve Ω nın kesişimin bölgesinde bulunan bir

$$x = x(t)$$

fonksiyonu için

$$x = \overline{D}$$

veya

$$x = -\overline{D}$$

olmalıdır. Burada D bir sabittir. Buna bağlı olarak (ii), (iii) ve $\int_0^{2\pi} p(t)dt = 0$ göz önüne alındığında

$$QNx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-f\big(t,\dot{x}(t-\tau)\big) - g\big(t,x(t-\sigma)\big) + p(t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-f(t,0) - g\big(t,x(t-\sigma)\big)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-g\big(t,x(t-\sigma)\big)\right]dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t,x)dt \neq 0 \qquad (4.24)$$

yazılabilir. Buradan

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t,-\overline{D})dt > 0,$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t,\overline{D})dt < 0 \qquad (4.25)$$

yazılabilir. Bu ise

$$deg\{QNx, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0 \qquad (4.26)$$

olduğunu gösterir. Buna bağlı olarak Teorem 2.2. (süreklilik (continuation) teoremi) den dolayı (4.8) nin çözümünün 2π-periyodik çözümü vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2.

K, D ve M pozitif sabitler olmak üzere, aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

(i) $(t,x) \in R^2$ için $|f(t,x)| \leq K$,

(ii) $t \in R$ ve $|x| \geq D$ için $xg(t,x) > 0$ ve $|g(t,x)| > K$,

(iii) $t \in R$ ve $x \geq D$ için $g(t,x) \leq M$,

(iv) $sup_{(t,x)\in R\times[-D,D]}|g(t,x)| < \infty$.

Bu takdirde (4.8) denklemi 2π-periyotlu en az bir periyodik bir çözüme sahiptir.

Teorem 4.2.2. nin ispatı Teorem 4.2.1. in ispatı ile benzerdir.

5. n. MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BİR SINIFI İÇİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Bu bölümde n. mertebeden

$$x^{(n)}(t) + f\left(x^{(n-1)}(t)\right) + g(t, x\big(t - \tau(t)\big)) = p(t) \tag{5.1}$$

biçimindeki gecikmeli diferansiyel denklemini göz önüne alınacaktır. Burada $f, \tau, p: R \rightarrow R, g: R \times R \rightarrow R$ biçiminde tanımlı fonksiyonlar,

$$f(0) = 0,$$

τ ve p ise T-periyodik,

$$g\left(t + T, x\big(t - \tau(t)\big)\right) = g\left(t, x\big(t - \tau(t)\big)\right),$$

$n \geq 2$ bir tam sayı ve $T > 0$ bir sabittir.

Açıkça

$$n = 2$$

ve

$$g\left(t, x\big(t - \tau(t)\big)\right) = g\left(x\big(t - \tau(t)\big)\right)$$

için (5.1) denklemi

$$\ddot{x} + f(\dot{x}(t)) + g(x\big(t - \tau(t)\big))) = p(t) \tag{5.2}$$

denklemine indirgenir.

Bu bölümde Zhao ve Liu (2009) tarafından (5.1) denkleminin T-periyotlu periyodik çözümlerinin varlığına ve tekliğine ilişkin olarak verilen sonuçlar üzerine durulacaktır.

$$|x|_X = (\int_0^T (|x(t)|^k dt)^{1/k}, \qquad |x|_\infty = \max_{t \in [0,T]} |x(t)|,$$

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n-1} \left|x^{(j)}\right|_{\infty}, \qquad x^{(0)}(t) = x$$

olsun. Ayrıca

$$X = \{x: Her\ t \in R\ için\ x \in C^{n-1}(R,R), x(t+T) = x(t)\}$$

ve

$$Y = \{x: Her\ t \in R\ için\ x \in C(R,R), x(t+T) = x(t)\},$$

iki Banach uzayı ve

$$\|x\|_X = \|x\| = \sum_{j=1}^{n-1} \left|x^{(j)}\right|_{\infty}$$

ve

$$\|x\|_Y = \|x\| = \max_{t \in [0,T]} |x(t)|$$

olsun.

$$D(L) = \left\{x: x \in X, x^{(n)} \in C(R,R)\right\}$$

olmak üzere

$$L: D(L) \subset X \to Y$$

lineer operatörü ve $x \in D(L)$ için

$$Lx = x^{(n)} \tag{5.3}$$

tanımlansın. Ayrıca

$$Nx = -\left[f\left(x^{(n-1)}(t)\right) + g\left(t, x\big(t - \tau(t)\big)\right)\right] + p(t) \tag{5.4}$$

olmak üzere

$$N: X \to Y$$

lineer olmayan operatörü tanımlansın.

$$KerL = R$$

ve

$$ImL = \{x: x \in Y, \int_0^T x(s)ds = 0\}$$

olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Böylece L operatörü sıfır indeksli Fredholm operatörüdür (Bakınız Zhao ve Liu, 2009).

$$P: X \rightarrow KerL$$

ve

$$Q: Y \rightarrow Y/ImL$$

iz düşümler sırasıyla

$$Px(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)ds,$$

$$Qx(t) = \frac{1}{T}\int_0^T y(s)ds$$

gibi tanımlansın.

Bu takdirde

$$KerL = ImP$$

ve

$$KerQ = ImL$$

olur. $L|_{D(L)\cap KerP}$ nin tersini

$$L_P^{-1}: ImL \rightarrow D(L) \cap KerP$$

ile göstererek L_P^{-1} in kompakt operatör olduğu görülebilir.

Bu nedenle, Ω, X in açık sınırlı bir alt cümlesi olmak üzere N operatörü $\bar{\Omega}$ üzerinde L kompaktır.

Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$(\mathbf{A_0})$ C_1 negatif olmayan bir sabit olmak üzere, her $x_1, x_2 \in R$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C_1|x_1 - x_2|,$$

$(\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{0}})$ C_2 negatif olmayan bir sabit olmak üzere, her $x_1, x_2 \in R$ için

$$C_1|x_1 - x_2|^2 \leq (x_1 - x_2)\big(f(x_1) - f(x_2)\big).$$

(5.3) ve (5.4) bağlantıları göz önüne alındığında

$$Lx = \lambda Nx$$

operatör denklemi $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$x^{(n)}(t) + \lambda\left[f\left(x^{(n-1)}(t)\right) + g\big(t, x(t - \tau(t))\big)\right] = \lambda p(t) \tag{5.5}$$

yazılabilir.

Lemma 5.1.

X ve Y iki Banach uzayı,

$$L: D(L) \subset X \to Y$$

sıfır indeksli Fredholm operatörü ve

$$N: X \to Y$$

ise $\bar{\Omega}$ üzerinde L kompakt operatör olsun. Burada Ω, X in açık sınırlı bir alt cümlesidir.

Ayrıca aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(a) Her $x \in \partial\,\Omega\ \cap D(L)$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$Lx \neq \lambda Nx,$$

(b) her $x \in \partial\,\Omega\ \cap KerL$ için $Nx \notin ImL$,

(c) $\deg\{QN, \Omega\ \cap KerL, 0\} \neq 0$.

Bu takdirde

$$Lx = Nx$$

denklemi $\bar{\Omega}$ de en az bir T-periyodik çözüme sahiptir.

Lemma 5.2. (Wirtinger eşitsizliği)

Eğer $x \in C^2(R, R)$ ve $x(t+T) = x(t)$ ise, bu takdirde

$$|\dot{x}(t)|_2 \leq \frac{T}{2\pi} |\ddot{x}(t)|_2 \tag{5.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 5.3.

$d > 0$ bir sabit olmak üzere, aşağıdaki şartlardan bir tanesi sağlansın.

$(\mathbf{A_1})$ Her $t \in R$ için

$$x\big(g(t,x) - p(t)\big) < 0, |x| \geq d,$$

$(\mathbf{A_2})$ her $t \in R$ için

$$x\big(g(t,x) - p(t)\big) > 0, |x| \geq d.$$

Eğer $x(t)$ (5.5) in T-periyodik bir çözümü ise bu takdirde

$$|x|_\infty \leq d + \sqrt{T} |\dot{x}(t)|_2 \tag{5.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$x(t)$, (5.5) in T-periyodik bir çözümü olsun.

$t_1, t_2 \in R$ için

$$x^{(n-2)}(t_1) = \max_{t \in R} \{x^{(n-2)}(t)\}$$

$$x^{(n-2)}(t_2) = \min_{t \in R} \{x^{(n-2)}(t)\}$$

alalım. Bu takdirde

$$x^{(n-1)}(t_1) = 0, \;\; x^{(n)}(t_1) \leq 0 \text{ ve } x^{(n-1)}(t_2) = 0, \;\; x^{(n)}(t_2) \geq 0 \tag{5.8}$$

yazılabilir. (A_1) ve (A_2) şartlarını göz önüne aldığımızda aşağıdaki iki durum söz konusu olur.

Durum (i).

(A_1) şartı sağlanırsa,

$$f(0) = 0,$$

(5.5) ve (5.8) den

$$g\left(t_1, x\big(t_1 - \tau(t_1)\big)\right) - p(t_1) = -\frac{x^{(n)}(t_1)}{\lambda} \geq 0,$$

$$g\left(t_2, x\big(t_2 - \tau(t_2)\big)\right) - p(t_2) = -\frac{x^{(n)}(t_2)}{\lambda} \leq 0$$

elde eldir. (A_1) şartı göz önüne alındığında

$$x\big(t_1 - \tau(t_1)\big) < d$$

ve

$$x\big(t_2 - \tau(t_2)\big) > -d$$

elde edilir. $x\big(t - \tau(t)\big)$, R de sürekli olduğundan bir $\xi \in R$ sayısı vardır öyle ki $t_0 \in [0, T]$ ve m bir tam sayı olmak üzere $x\big(\xi - \tau(\xi)\big) \leq d$ olur. $\xi - \tau(\xi) = mT + t_0$ olsun. Schwarz eşitsizliği ve

$$|x(t)| = \left| x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s) ds \right| \leq d + \int_0^T |\dot{x}(s)| ds \, , t \in [0, T]$$

bağıntısı kullanıldığında

$$|x|_\infty = \max_{t \in [0,T]} |x(t)| \leq d + \sqrt{T} |\dot{x}(t)|_2$$

elde eldir.

Durum (ii).

(A_2) şartı sağlandığında, benzer müzakere kullanarak (5.7) eşitsizliğinin doğruluğu kolaylıkla görülebilir (Zhao ve Liu (2009)). Bu ise Lemma 5.3 ün ispatını tamamlar.

Lemma 5.4.

Aşağıdaki şartların bir tanesinin sağlandığını varsayalım:

$(\boldsymbol{A_3})$ (A_0) şartı sağlanıyor, $g(t,x)$fonksiyonu x e göre monoton bir fonksiyon ve negatif olmayan bir b sabiti vardır öyleki her $t, x_1, x_2 \in R$ için

$$C_1 \frac{T}{2\pi} + b \frac{T^n}{(2\pi)^{n-1}} < 1$$

ve

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \leq b|x_1 - x_2|$$

olur.

$(\boldsymbol{A_4})$ $(\tilde{A}_0)$ şartı sağlanıyor, $g(t,x)$ x e göre monoton bir fonksiyon ve bir b sabiti vardır öyleki her $t, x_1, x_2 \in R$ için

$$0 \leq b < C_1 \frac{(2\pi)^{n-2}}{T^{n-1}}$$

ve

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \leq b|x_1 - x_2|$$

olur. Bu takdirde (5.1) denklemi en çok bir T-periyodik çözüme sahiptir.

İspat:

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$, (5.1) denkleminin T-periyodik iki çözümü olsun. Bu takdirde

$${x_1}^{(n)}(t) + f\left({x_1}^{(n-1)}(t)\right) + g(t, x_1(t - \tau(t))) = p(t)$$

ve

$${x_2}^{(n)}(t) + f\left({x_2}^{(n-1)}(t)\right) + g(t, x_2(t - \tau(t))) = p(t)$$

olur. Taraf tarafa çıkarma yapıldığında

$$\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^{(n)}+\left(f\left({x_1}^{(n-1)}(t)\right)-f\left({x_2}^{(n-1)}(t)\right)\right)$$

$$+(g\left(t,x_1\left(t-\tau(t)\right)\right)-g\left(t,x_2\left(t-\tau(t)\right)\right))=0 \tag{5.9}$$

elde edilir.

$$Z(t)=x_1(t)-x_2(t)$$

olsun. Bu takdirde

$$Z^{(n)}(t)+\left(f\left({x_1}^{(n-1)}(t)\right)-f\left({x_2}^{(n-1)}(t)\right)\right)$$

$$+(g\left(t,x_1\left(t-\tau(t)\right)\right)-g\left(t,x_2\left(t-\tau(t)\right)\right)=0 \tag{5.10}$$

yazılabilir. $\bar{t}_1,\bar{t}_2\in R$ olmak üzere

$$Z^{(n-2)}(\bar{t}_1)=\max_{t\in[0,T]} Z^{(n-2)}(t)$$

ve

$$Z^{(n-2)}(\bar{t}_2)=\min_{t\in[0,T]} Z^{(n-2)}(t)$$

olsun. Bu nedenle,

$$Z^{(n-1)}(\bar{t}_1)={x_1}^{(n-1)}(\bar{t}_1)-{x_2}^{(n-1)}(\bar{t}_1)=0, \qquad Z^{(n)}(\bar{t}_1)\le 0$$

ve

$$Z^{(n-1)}(\bar{t}_2)={x_1}^{(n-1)}(\bar{t}_2)-{x_2}^{(n-1)}(\bar{t}_2)=0, \qquad Z^{(n)}(\bar{t}_2)\ge 0$$

yazılabilir. (5.10) denklemi göz önüne alındığında

$$g\left(\bar{t}_1,x_1\left(\bar{t}_1-\tau(\bar{t}_1)\right)\right)-g\left(\bar{t}_1,x_2\left(\bar{t}_1-\tau(\bar{t}_1)\right)\right)\ge 0$$

ve

$$g\left(\bar{t}_2,x_1\left(\bar{t}_2-\tau(\bar{t}_2)\right)\right)-g\left(\bar{t}_2,x_2\left(\bar{t}_2-\tau(\bar{t}_2)\right)\right)\le 0$$

elde edilir.

$$g\left(t, x_1(t-\tau(t))\right) - g\left(t, x_2(t-\tau(t))\right)$$

R üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$g\left(\bar{\xi}, x_1\left(\bar{\xi}-\tau(\bar{\xi})\right)\right) - g\left(\bar{\xi}, x_2\left(\bar{\xi}-\tau(\bar{\xi})\right)\right) = 0 \tag{5.11}$$

sağlanacak şekilde sabit bir $\bar{\xi} \in R$ sayısı vardır. $\tilde{\gamma} \in [0, T]$ ve n bir tam sayı olmak üzere

$$\bar{\xi} - \tau(\bar{\xi}) = nT + \tilde{\gamma}$$

olsun. Bu takdirde (5.11) ifadesi (A_3) veya (A_4) ile birlikte göz önüne alındığında

$$Z(\tilde{\gamma}) = x_1(\tilde{\gamma}) - x_2(\tilde{\gamma}) = x_1\left(\bar{\xi}-\tau(\bar{\xi})\right) - x_2\left(\bar{\xi}-\tau(\bar{\xi})\right) = 0 \tag{5.12}$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak

$$|Z(t)| = \left|Z(\tilde{\gamma}) + \int_{\tilde{\gamma}}^{t} \dot{Z}(s)ds\right| \leq \int_0^T \left|\dot{Z}(s)\right| ds\,, t \in [0, T]$$

ve

$$|Z|_\infty \leq \sqrt{T}\left|\dot{Z}\right|_2 \tag{5.13}$$

elde edilir.

Şimdi (A_3) veya (A_4) şartlarından birinin sağlandığını varsayalım. Aşağıdaki iki durumu göz önüne alacağız:

Durum (i).

(A_3) şartı sağlansın. (5.10) ifadesi $Z^{(n)}(t)$ ile çarpılıp 0 dan T ye integral alındığında

$$\begin{aligned} \left|Z^{(n)}\right|_2^2 &= \int_0^T \left|Z^{(n)}(t)\right|^2 dt \\ &= -\int_0^T \left(f\left({x_1}^{(n-1)}(t)\right) - f\left({x_2}^{(n-1)}(t)\right)\right) Z^{(n)}(t)dt \\ &\quad - \int_0^T \left(g\left(t, x_1(t-\tau(t))\right) - g\left(t, x_2(t-\tau(t))\right)\right) Z^{(n)}(t)dt \end{aligned}$$

$$\leq C_1 \int_0^T \left| x_1{}^{(n-1)}(t) - x_2{}^{(n-1)}(t) \right| \left| Z^{(n)}(t) \right| dt$$

$$+b \int_0^T \left| x_1\big(t-\tau(t)\big) - x_2\big(t-\tau(t)\big) \right| \left| Z^{(n)}(t) \right| dt \qquad (5.14)$$

elde edilir.(5.6), (5.13) ve Schwarz eşitsizliğinden (5.14) ifadesi

$$\left| Z^{(n)} \right|_2^2 \leq C_1 \left| Z^{(n-1)} \right|_2 \left| Z^{(n)} \right|_2 + \mathrm{b}|\mathrm{Z}|_\infty \sqrt{T} \left| Z^{(n)} \right|_2$$

$$\leq C_1 \frac{T}{2\pi} \left| Z^{(n)} \right|_2^2 + \mathrm{b}\sqrt{T} |\dot{\mathrm{Z}}|_2 \sqrt{T} \left| Z^{(n)} \right|_2$$

$$\leq \left(C_1 \frac{T}{2\pi} + b\frac{T^n}{(2\pi)^{n-1}}\right) \left| Z^{(n)} \right|_2^2 \qquad (5.15)$$

sonucunu gerektirir.

$$Z(t), \dot{Z}(t), \ddot{Z}(t), \dots, Z^{(n)}(t)$$

T-periyodik ve sürekli fonksiyonlar olması nedeniyle, (A_3), (5.12) ve (5.15) bağıntılarından her $t \in R$ için

$$Z(t) \equiv \dot{Z}(t) \equiv \ddot{Z}(t) \equiv \cdots \equiv Z^{(n-1)}(t) \equiv 0$$

elde edilir. Böylece $her\ t \in R$ için

$$x_1(t) \equiv x_2(t)$$

olur.

Sonuç olarak (5.1) denklemi en çok bir T-periyodik çözüme sahiptir.

Durum (ii).

(A_4) şartının sağlandığını varsayalım. (5.10) denklemi $Z^{(n-1)}(t)$ ile çarpılıp 0 dan T ye integral alınır ve (5.13) eşitsizliği kullanılırsa

$$\mathrm{C}_2 \left| Z^{(n-1)} \right|_2^2 = \int_0^T C_2 \left| x_1{}^{(n-1)}(t) - x_2{}^{(n-1)}(t) \right|^2 dt$$

$$\leq \int_0^T \left(f\left(x_1{}^{(n-1)}(t)\right) - f\left(x_2{}^{(n-1)}(t)\right)\right)\left(x_1{}^{(n-1)}(t) - x_2{}^{(n-1)}(t)\right) dt$$

$$= -\int_0^T (g\left(t, x_1\big(t-\tau(t)\big)\right) - g\left(t, x_2\big(t-\tau(t)\big)\right) Z^{(n-1)}(t) dt$$

$$\leq b \int_0^T \left|x_1\big(t-\tau(t)\big) - x_2\big(t-\tau(t)\big)\right|\left|Z^{(n-1)}(t)\right| dt$$

$$\leq \mathrm{b}|\mathrm{Z}|_\infty \sqrt{T}\left|Z^{(n-1)}\right|_2$$

$$\leq b \frac{T^{n-1}}{(2\pi)^{n-2}})\left|Z^{(n-1)}\right|_2^2 \qquad (5.16)$$

elde edilir.(5.12) ve (A_4) göz önüne alındığında (5.16) ifadesinden, her $t \in R$ için

$$Z(t) \equiv \dot{Z}(t) \equiv \ddot{Z}(t) \equiv \cdots \equiv Z^{(n-1)}(t) \equiv 0$$

yazılabilir. Sonuç olarak her $t \in R$ için

$$x_1(t) \equiv x_2(t)$$

olur.

Böylece (5.1) denklemi en çok bir T-periyodik çözüme sahiptir.

Lemma 5.4 ün ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.

(A_1) (ya da (A_2)) şartına ilaveten, (A_3) veya (A_4) şartlarından birinin sağlandığını varsayalım.

Bu takdirde (5.1) denklemi bir tek T-periyodik çözüme saiptir.

İspat:

(A_3) ve (A_4) şartları ve Lemma 5.4 dikkate alındığında, (5.1) denkleminin en çok bir T-periyodik çözüme sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. Sonuç olarak; Teorem 5.1 i ispatlamak için (5.1) denkleminin en az bir T-periyodik çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu göstermek için Lemma 5.1 kullanılabilir. İlk olarak (5.5) denkleminin olası tüm T-periyodik çözümlerinin sınırlı olduğunu iddia edilecektir.

(A_3) ve (A_4) şartlarından dolayı aşağıdaki iki durum söz konusudur:

Durum (i).

(A_3) şartı sağlansın. Ayrıca $x(t)$, (5.5) denkleminin T-periyodik bir çözümü olsun. (5.5) denklemi $x^{(n)}(t)$ ile çarpılarak 0 dan $T\ ye$ integral alınıp, (5.6), (5.7), (A_3) ve Schwarz eşitsizliği kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
\left|x^{(n)}\right|_2^2 &= \int_0^T \left|x^{(n)}(t)\right|^2 dt \\
&= -\lambda \int_0^T f\left(x^{(n-1)}(t)\right) x^{(n)}(t)dt - \lambda \int_0^T g\left(t, x\big(t-\tau(t)\big)\right) x^{(n)}(t)dt \\
&\quad +\lambda \int_0^T p(t)x^{(n)}(t)dt \\
&= -\lambda \int_0^T g\left(t, x\big(t-\tau(t)\big)\right) x^{(n)}(t)dt + \lambda \int_0^T p(t)x^{(n)}(t)dt \\
&\le \int_0^T \left|g\left(t, x\big(t-\tau(t)\big)\right)\right| \left|x^{(n)}(t)\right|dt + \int_0^T |p(t)|\left|x^{(n)}(t)\right|dt \\
&\le \int_0^T \left[\left|g\left(t, x\big(t-\tau(t)\big)\right) - g(t,0)\right| + |g(t,0)|\right] \left|x^{(n)}(t)\right|dt \\
&\quad + \int_0^T |p(t)|\left|x^{(n)}(t)\right|dt \\
&\le b\int_0^T \left|x\big(t-\tau(t)\big)\right|\left|x^{(n)}(t)\right|dt + \int_0^T \big||g(t,0)|\big|\left|x^{(n)}(t)\right|dt \\
&\quad + \int_0^T |p(t)|\left|x^{(n)}(t)\right|dt \\
&\le b|x|_\infty \sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2 + [max\{|g(t,0)|: 0 \le t \le T\} + |p|_\infty] \\
&\quad \times \sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2
\end{aligned}
$$

$$\leq b\sqrt{T}|\dot{x}|_2\sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2 + [bd + max\{|g(t,0)|: 0 \leq t \leq T\} + |p|_\infty]$$

$$\times \sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2$$

$$\leq b\frac{T^n}{(2\pi)^{n-1}}\left|x^{(n)}\right|_2^2 + [bd + max\{|g(t,0)|: 0 \leq t \leq T\} + |p|_\infty]$$

$$\times \sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2 \tag{5.17}$$

elde edilir. D_1 bir pozitif sabit olmak üzere (A_3) ve (5.17) ile birlikte

$$\left|x^{(j)}\right|_2 \leq (\tfrac{T}{2\pi})^{n-j}\left|x^{(n)}\right|_2 < D_1,\ j = 1,2,\dots,n \tag{5.18}$$

ifadesini verir.

$$x^{(j)}(0) = x^{(j)}(T), (j = 0,1,2,\dots,n-1)$$

olduğundan bir $\xi_j \epsilon [0,T]$ sabiti vardır öyleki

$$x^{(j+1)}(\xi_j) = 0$$

ve

$$\left|x^{(j+1)}(t)\right| = \left|x^{(j+1)}(\xi_j) + \int_{\xi_j}^{t} x^{(j+2)}(s)ds\right|$$

$$\leq \int_0^{\mathrm{T}} \left|x^{(j+2)}(t)\right| dt$$

$$\leq \sqrt{T}\left|x^{(j+2)}\right|_2,\ t\epsilon[0,T], j = 0,1,2,\dots,n-2 \tag{5.19}$$

olur.

(5.7), (5.18) ve (5.19) dan D_2 pozitif sabit olmak üzere

$$\left|x^{(j)}\right|_\infty \leq \sqrt{T}\left|x^{(j+1)}\right|_2 + d \leq D_2, j = 0,1,2,\dots,n-1 \tag{5.20}$$

elde edilir. Bu ise M_1, λ dan bağımsız bir sabit olmak üzere, (5.5) denkleminin olası tüm T-periyodik çözümleri için

$$\|x\| = \sum_{j=0}^{n-1} \left|x^{(j)}\right|_\infty < M_1 \tag{5.21}$$

sonucunu verir.

Durum (ii).

(A_4) şartı sağlansın ayrıca $x(t)$, (5.5) denkleminin T-periyodik çözümü olsun.

(5.5) denklemini $x^{(n-1)}(t)$ ile çarparak 0 dan $T\ ye$ integral alalım. (5.7), (A_4) ve Schwarz eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\mathrm{C}_2\left|x^{(n-1)}\right|_2^2 = \int_0^T C_2 x^{(n-1)}(t) x^{(n-1)}(t) dt$$

$$\leq \int_0^T f(x^{(n-1)})(t) x^{(n-1)}(t) dt$$

$$= -\int_0^T g\left(t, x\big(t-\tau(t)\big)\right) x^{(n-1)}(t) dt + \int_0^T p(t) x^{(n-1)}(t) dt$$

$$\leq \int_0^T \left[\left|g\left(t, x\big(t-\tau(t)\big)\right) - g(t,0)\right| + |g(t,0)|\right] \left|x^{(n-1)}(t)\right| dt$$

$$+ \int_0^T |p(t)| \left|x^{(n-1)}(t)\right| dt$$

$$\leq b \int_0^T \left|x\big(t-\tau(t)\big)\right| \left|x^{(n-1)}(t)\right| dt + \int_0^T |g(t,0)| \left|x^{(n)}(t)\right| dt$$

$$+ \int_0^T |p(t)| \left|x^{(n-1)}(t)\right| dt$$

$$\leq b|x|_\infty \sqrt{T} \left|x^{(n-1)}\right|_2 + [max\{|g(t,0)| : 0 \leq t \leq T\} + |p|_\infty]$$

$$\times \sqrt{T} \left|x^{(n-1)}\right|_2$$

$$\leq bT|\dot{x}|_2 \left|x^{(n-1)}\right|_2 + [bd + max\{|g(t,0)| : 0 \leq t \leq T\} + |p|_\infty]$$

$$\times \sqrt{T} \left|x^{(n-1)}\right|_2$$

$$\leq b\frac{T^{n-1}}{(2\pi)^{n-2}}\left|x^{(n-1)}\right|_2^2 + [bd + max\{|g(t,0)|: 0 \leq t \leq T\} + |p|_\infty]$$

$$\times \sqrt{T}\left|x^{(n-1)}\right|_2 \tag{5.22}$$

elde edilir. $\overline{D}_2$ pozitif sabit olmak üzere, (5.22) den

$$\left|x^{(j)}\right|_\infty \leq \sqrt{T}\left|x^{(j+1)}\right|_2 + d \leq \overline{D}_2, j = 0,1,2,\dots,n-2 \tag{5.23}$$

elde edilir.

(5.5) denklemi $x^{(n)}(t)$ ile çarpılarak 0 dan $T\ ye$ integral alınıp, daha sonra (5.7), (5.17), (A_4) ve Schwarz eşitsizliği kullanıldığında (5.23) den

$$\left|x^{(n)}\right|_2^2 = \int_0^T \left|x^{(n)}(t)\right|^2 dt$$

$$\leq \int_0^T \left[\left|g\left(t, x\big(t-\tau(t)\big)\right) - g(t,0)\right| + |g(t,0)|\right]\left|x^{(n)}(t)\right| dt$$

$$+ \int_0^T |p(t)|\left|x^{(n)}(t)\right| dt$$

$$\leq b\int_0^T \left|x\big(t-\tau(t)\big)\right|\left|x^{(n)}(t)\right| dt + \int_0^T |g(t,0)|\left|x^{(n)}(t)\right| dt$$

$$+ \int_0^T |p(t)|\left|x^{(n)}(t)\right| dt$$

$$\leq b\sqrt{T}|\dot{x}|_2\sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2 + [bd + max\{|g(t,0)|: 0 \leq t \leq T\} + |p|_\infty]$$

$$\times \sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2$$

$$\leq bT\overline{D}_2\left|x^{(n)}\right|_2 + [bd + max\{|g(t,0)|: 0 \leq t \leq T\} + |p|_\infty]\sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2$$

elde edilir. $\overline{D}_1$ pozitif tamsayı olmak üzere, (5.19) dan

$$\left|x^{(n-1)}(t)\right| \leq \sqrt{T}\left|x^{(n)}\right|_2 \leq D_1 \tag{5.24}$$

elde eldir. Böylece (5.23) ve (5.24) den dolayı, $\widetilde{M}_1$ pozitif bir sabit olmak üzere, (5.5) denkleminin olası tüm T-periyodik $x(t)$ çözümleri için

$$\|x\| = \sum_{j=0}^{n-1} \left|x^{(j)}\right|_{\infty} < \widetilde{M}_1 \tag{5.25}$$

yazılabilir. Eğer

$$x\epsilon\Omega_1 = \{x : \ x\epsilon KerL \cap X \ ve \ Nx\epsilon ImL\}$$

ise, bu takdirde

$$x(t) \equiv M_2 \text{ ve } \int_0^T [g(t, M_2) - p(t)]dt = 0 \tag{5.26}$$

sağlanacak şekilde bir M_2 pozitif sabiti vardır.

Böylece her $x(t) \in \Omega_1$ için

$$|x(t)| \equiv |M_2| < d \tag{5.27}$$

olur.

$$M = M_1 + \widetilde{M}_1 + d + 1$$

olsun.

$$\Omega = \{x : x\epsilon X, \|x\| = \sum_{j=0}^{n-1} \left|x^{(j)}\right|_{\infty} < M\}$$

alınsın. (5.3) ve (5.4) den, N nin, $\bar{\Omega}$ üzerinde L kompakt olduğu kolaylıkla görülmektedir. (5.26), (5.27) ve

$$M > max\,\{M_1 + \widetilde{M}_1, d\}$$

ifadesinden Lemma 5.1 deki şartların sağlandığı görülebilir.

$H_1(x, \mu)$ ve $H_2(x, \mu)$ sürekli fonksiyonları

$$H_1(x, \mu) = (1 - \mu)x - \mu \frac{1}{T} \int_0^T [g(t, x) - p(t)]dt \,, \mu\epsilon[0,1],$$

$$H_2(x, \mu) = -(1 - \mu)x - \mu \frac{1}{T} \int_0^T [g(t, x) - p(t)]dt \,, \mu\epsilon[0,1]$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer (A_1) şartı sağlanırsa bu takdirde her $x \in \partial\Omega \cap KerL$ için

$$xH_1(x,\mu) \neq 0$$

olur. Böylece homotopi değişmezlik (invariance) teoremini kullanarak

$$\deg\{QN, \Omega \cap KerL, 0\} = \deg\left\{-\frac{1}{T}\int_0^T [g(t,x) - p(t)]dt\,, \Omega \cap KerL, 0\right\}$$

$$= \deg\{-x, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0$$

elde edilir.

Eğer (A_2) şartı sağlanırsa, bu takdirde her $x \in \partial\Omega \cap KerL$ için

$$xH_2(x,\mu) \neq 0$$

olur. Buna bağlı olarak homotopi değişmezlik (invariance) teoremini kullanarak

$$\deg\{QN, \Omega \cap KerL, 0\} = \deg\left\{-\frac{1}{T}\int_0^T [g(t,x) - p(t)]dt\,, \Omega \cap KerL, 0\right\}$$

$$= \deg\{-x, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 5.1.

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{8}\dot{x}(t) + \frac{1}{8}sin\dot{x}(t) + g\big(t, x(t - sin^2 t)\big) = \frac{1}{40}e^{sint} \tag{5.28}$$

denklemini göz önüne alalım. Her $t\epsilon R$ ve

$$x > 0$$

için

$$g(t,x) = \frac{1}{6\pi}x$$

ve her $t\epsilon R$ ve $x \leq 0$ için

$$g(t,x)=\frac{1}{12\pi}arctanx$$

olsun. Bu takdirde (5.28) Rayleigh denklemi bir tek 2π-periyodik çözüme sahiptir.

Gerçekten (5.28) den

$$b=\frac{1}{6\pi},$$

$$C_1=\frac{1}{4},$$

$$f(x(t))=\frac{1}{8}x(t)+\frac{1}{8}sinx(t),$$

$$\tau(t)=sin^2t,$$

ve

$$p(t)=\frac{1}{40}e^{sint}$$

yazılabilir. Her $t\in R$ ve $x\geq d$ (d sabiti uygun bir biçimde seçilmek kaydıyla) için

$$x\big(g(t,x)-p(t)\big)=x\left(\frac{1}{6\pi}x-\frac{1}{40}e^{sint}\right)>0$$

ve $x\leq -d$ (d sabiti uygun bir biçimde seçilmek kaydıyla) için

$$x\big(g(t,x)-p(t)\big)=x\left(\frac{1}{12\pi}arctanx-\frac{1}{40}e^{sint}\right)>0,$$

dolayısıyla Her $t\in R$ ve $|x|\geq d$ için

$$x\big(g(t,x)-p(t)\big)>0$$

olur. her $x_1,x_2\in R$ için

$$C_1\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^n}{(2\pi)^{n-1}}=\frac{7}{12}<1,$$

$x>0$ için

$$|g(t,x_1)-g(t,x_2)|=\left|\frac{1}{6\pi}x_1-\frac{1}{6\pi}x_2\right|$$

$$\leq b|x_1 - x_2|$$

ve $x \leq 0$ için

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| = \left|\frac{1}{12\pi} arctanx_1 - \frac{1}{12\pi} arctanx_2\right|$$

$$= \frac{1}{6\pi}|arctanx_1 - arctanx_2|$$

$$\leq b|x_1 - x_2|$$

olur. Böylece yukarıdaki verilen (A_1) ve (A_3) şartları sağlanır. Bu nedenle Teorem 5.1 den olayı (5.28) Rayleigh denklemi bir tek 2π-periyodik çözüme sahiptir.

KAYNAKLAR

Ağırseven, D., 2003. Bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin yarı analitik yöntemlerle çözümleri üzerine. ***Trakya Üniv. Fen Bil. Enst.***, Trakya.

Antosiewicz, T. A., 1955. On nonlinear differential equations of the second order with integrrable forcing term. ***J. London Math. Society 30 :*** 64-67.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz. ***U. Üniv. Fen-Edb. Fak. Mat. Böl.,*** Bursa.

Bingwen, L., Huang, L., 2006. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. ***J. Math. Anal. Appl.*** **321 , no. 2:** 491-500.

Bolwell, J. E., 1999. On Rayleigh's equations for the vibrations of a loaded flexible string. ***European J. Phys. 20:*** 305-312.

Burton, P. W., 1985. Stability and periodic solutions of ordinary and functional-differential equations, Mathematics in Science and Engineering. **178.** ***Academic Press:*** 34-01.

Bülbül, A., 1994. Genel Topoloji. ***K. T. Üniv. Genel yay. no:*****172**, Trabzon.

Chen, F. D., 2001. Existence and uniqueness of almost periodic solutions for forced Rayleigh equations. ***Ann. Differantial Equtions*** **17 (1):** 1-9.

Chen, H., Li, K,. Li, D., 2004. On the existence of exactly one and two periodic solutions of the Liénard equation. ***Acta Math. Sinica*** **47 no. 3:** 417-424.

Çakallı, H., 1997. Genel Topolojiye Giriş. **İ. Ü. Fen Fak. Basımevi**, İstanbul.

Degla, G., 1997. Degree theory for compact displacements of the identity and applications. ***International Center for Theoretical Physics P.O. Box 586,*** Italy.

Deimling, K., 1985. Nonlinear functional analysis. ***Springer-Verlag,*** *Berlin.*

Gaines, R. E. and Mawhin, J. L., 1977. Coincidence degree and nonlinear differential equations. ***Lecture Notes in Math., No. 568***, Springer-Verlag, New York.

Hale, Jack, 1977. Theory of functional differential equations. ***Appl. Math. Sci., Vol. 3.*** Springer-Verlag, New York.

Huang, C., He, Y., Huang, L., Tan, W., 2007. New results on the periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with two deviating arguments. ***Math. Comput. Modelling 46:*** 604-611.

Invernizzi, S. and Zanolin, F., 1979. Periodic solutions of a differential delay equation of Rayleigh type. ***Rend. Sere. Mat. Univ. Padova*** **61:** 115-124.

Lee, K., 2001. Yong Numerical solution of Rayleigh equation in non-linear vibration. ***Comm. Numer. Methods Engrg. 17:*** 253-258.

Liu, B., Huang, L., 2006. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. ***J. Math. Anal. Appl. 321:*** 491-500.

Liu, F., 1994. On the existence of the periodic solutions of Rayleigh equation. ***Acta. Math. Sinica 37 (5)*** **:** 639-644 (in Chinese) .

Li, Y., Huang, L., 2008. New results of periodic solutions for forced Rayleigh-type equations. ***J. Comput. Appl. Math.*** **221:** 98-105.

Lord Rayleigh Strutt, J.W., 1877., re-issued 1945. Theory of sound. ***Dover Publications.*** **vol. 1***,* New York.

Lu, S., Ge, W. and Zheng, Z., 2004a. A new result on the existence of periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. ***Acta Math. Sinica*** **47*:*** 299–304.

Lu, S., Ge, W., Zheng, Z., 2004b. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. ***Appl. Math. Lett. 17:*** 443-449.

Lu, S., Ge, W., 2004. Some new results on the existence of periodic solutions to a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. ***Nonlinear Anal. 56:*** 501-514.

Lu, S., Gui, Z., 2007. On the existence of periodic solutions to p-Laplacian Rayleigh differential equation with a delay. **J.** ***Math. Anal. Appl.*** **325:** 685–702.

Manásevich, R., Mawhin, J., Zanolin, F., 1999. Periodic solutions of some complex-valued Liénard and Rayleigh equations. ***Nonlinear Anal. 36, Ser. A: Theory Methods:*** 997-1014.

Musayev, B. ve Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz. ***Balcı Yay.***, Ankara.

Omari, P. and Villari, G., 1990. Periodic solutions of the Rayleigh equations with damping of definite sign. ***Atti. Aecad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*** **1 (1):** 29-35.

Peng, L., Liu, B., Zhou, Q., Huang, L., 2007. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with two deviating arguments. ***J. Franklin Inst. 343:*** 676-687.

Rahimov, A., 2006. Topolojik Uzaylar, Birinci baskı. ***Seçkin Yay.***, Ankara.

Sağel, M. K. ve Ark. 2004. Genel Matematik, İkinci baskı, Öncü basımvi. ***Pegem A Yay.***, Ankara.

Sansone, G., Conti, R., 1964. Non-linear differential equations. Macmillan. ***Appl. Math., Vol. 67*** New York.

Srinivasan, R., 1994. Exact solutions of Rayleigh's equation and sufficient conditions for inviscid instability of parallel, bounded shear flows. ***Z. Angew. Math. Phys. 45:*** 615-637.

Stepin, S. A.,1993. On the expansion in eigenfunctions of the continuous spectrum of the Rayleigh equation. ***(Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 7:*** 87-89, ***translation in Funct. Anal. Appl. 27:*** 219-221.

Tang, M. L., Liu, X. G., Liu, X. B., 2009. New results on periodic solutions for a kind of Rayleigh equation. ***Appl. Math. 54:*** 79-85.

Tatarskiĭ, V. I.,1995. Relation between the Rayleigh equation in diffraction theory and the equation based on Green's formula. ***J. Opt. Soc. Amer. A 12:*** 1254-1260.

Volponi, F., 2005. Local algebraic instability of shear-flows in the Rayleigh equation. ***J. Phys. A 38:*** 4293-4307.

Wang, L., Shao, J., 2010. New results of periodic solutions for a kind of forced Rayleigh-type equations. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.,*** **11 :** 99-105.

Wang, G. Q., Cheng, S., 1999. Sun A priori bounds for periodic solutions of a delay Rayleigh equation. ***Appl. Math. Lett. 12:*** 41-44.

Wang, G. Q., Cheng, S., 2002. Sun Periodic solutions of nth order delay Rayleigh equations. ***Ann. Polon. Math.*** **78:** 261-266.

Wang, G. Q., Yan, J. R., 2000a. On existence theorem of periodic positive solutions fort he Raylrigh equation of retarded type. ***Portugal. Math.*** **57 (2) :** 153-160.

Wang, G., Yan, J. R., 2000b. On existence of periodic solutions of the Rayleigh equation of retarded type. ***Int. J. Math. Math. Sci. 23:*** 65-68.

Wang, Z., 2005. On the existence of periodic solutions of Rayleigh equations. ***Z. Angew. Math. Phys. 56:*** 592-608.

Zhao, C. and Liu, B., 2009. Existence and uniqueness of periodic solutions for a class of nonlinear n-th order differential equations with delays. ***Vietnam J. Math.*** **37 :** 1-13.

Zanolin, F., 1980. Periodic solutions for differential systems of Rayleigh type. ***Rend. Istit. Mat. Univ. ~este*** **12 (1/2):** 69-77.

Zhang, F., Li, Y., 2008. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of Duffing type p-Laplacian equation. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.*** **9 , no. 3:** 985-989.

Zong, M., Liang, H., 2007. Periodic solutions for Rayleigh type p-Laplacian equation with deviating arguments. ***Appl. Math. Lett.*** **206:** 43-47.

Zhou, Y., Tang, X. P., 2007a. solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. ***Comput. Math. Appl. 53:*** 825-830.

Zhou, Y., Tang, X., 2007b. On existence of periodic solutions of Rayleigh equation of retarded type. ***J. Comput. Appl. Math. 203:*** 1-5.

Zhou, Y., Tang, X., 2008. On existence of periodic solutions of a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. ***Nonlinear Anal. 69:*** 2355-2361.

ÖZGEÇMİŞ

1985 Yılında Mardin'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Mardin'in Midyat ilçesine bağlı Söğütlü Beldesi'nde tamamladı. 2004 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2008 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek lisans öğrenimine başladı.