

《代数学引论（第一卷）》（柯斯特利金）习题

Abreto Fu¹

2019 年 8 月 3 日

¹Email: abreto [AT] std.uestc.edu.cn

目录

第 1 章 代数的起源	5
§1 简谈代数	5
§2 几个典型问题	5
§3 线性方程初步	5
§4 低阶行列式	5
第 2 题	5
第 3 题	6
§5 集合与映射	7
第 1 题	7
第 2 题	8
第 3 题	8
第 4 题	10
第 5 题	10
第 6 题	11
第 7 题	12
§6 等价关系. 商映射	13
第 1 题	13
第 2 题	13
第 3 题	14
第 4 题	15
第 5 题	15

第 1 章 代数的起源

§1 简谈代数

§2 几个典型问题

§3 线性方程初步

§4 低阶行列式

第 2 题

证明在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

证明. 展开式中的六项的乘积为

$$\begin{aligned}\Gamma &= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot a_{12}a_{23}a_{31} \cdot a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad \cdot (-a_{11}a_{23}a_{32}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= -(a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33})^2 \leq 0\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

若这六项同时为正, 则应有

$$\Gamma > 0\tag{1.4.2}$$

与式 (1.4.1) 矛盾.

故在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

□

第 3 题

验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

引理 1.4.1.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

引理 1.4.1 可由定义直接导出.

引理 1.4.2.

$$-a \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} -a \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} &= -a(cf - de) + b(ch - dg) \\ &= -c(af - bh) + d(ae - bg) \\ &= -c \begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

第一个式子

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

由引理 1.4.1 可知

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

由引理 1.4.2 得

$$-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1.4.5)$$

于是

$$\begin{aligned} D_1 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

第一个式子验证完毕.

第二个式子

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix} - (-a) \begin{vmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} + (-b) \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \\ &= abc - bac = 0 \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

验证完毕.

§5 集合与映射

引理 1.5.1. 设

$$f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow X$$

是任意两个映射, 如果 $gf = e_X$, 则 f 是单的, g 是满的.

第 1 题

设 $\Omega = \{+, -, ++, +-, -+, --, +++, \dots\}$ 是加号和减号的有限序列的集合, 而 $f: \Omega \rightarrow \Omega$ 是一个变换, 将元素 $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \in \Omega$ 对应到 $\omega' = \omega_1 \dot{\omega}_1 \omega_2 \dot{\omega}_2 \cdots \omega_n \dot{\omega}_n$, 其中若 $\omega_k = +$, 则 $\dot{\omega}_k = -$, 若 $\omega_k = -$, 则 $\dot{\omega}_k = +$. 证明在 $f(f\omega)$ 的长度 > 4 的任意区间内包含 $++$ 或 $--$.

证明. 设

$$f(f\omega) = \omega_0\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n \quad (1.5.1)$$

由定义易知,

$$\forall k \geq 0, \omega_{4k+1} = \omega_{4k+2} \quad (1.5.2)$$

对于任意长度 > 4 的区间, 一定包含连续的两项形如 $\omega_{4k+1}\omega_{4k+2}$.

即一定包含相等的连续两项. \square

第 2 题

由法则 $n \rightarrow n^2$ 给出的映射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 有右逆吗? 给出 f 的两个左逆.

假设 f 有右逆 g , 即

$$fg = e_{\mathbb{N}} \quad (1.5.3)$$

由引理 1.5.1 得, f 是满的, 与题设矛盾. 故 f 不存在右逆.

给出两个左逆如下

$$h_1(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.5.4)$$

$$h_2(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 2, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.5.5)$$

第 3 题

设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射, 且 S, T 都是 X 的子集.

证明

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T), \quad f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T).$$

试举一例, 说明后一个式子中的包含关系一般来说不能换成相等关系.

第一个式子

证明.

$$\forall y \in f(S \cup T), \exists x \in S \cup T, f(x) = y. \quad (1.5.6)$$

1. $x \in S$, 则 $y = f(x) \in S$;

2. $x \in T$, 则 $y = f(x) \in T$.

于是

$$f(S \cup T) \subset f(S) \cup f(T). \quad (1.5.7)$$

$$\forall y \in f(S) \cup f(T), \text{ 要么 } y \in f(S), \text{ 要么 } y \in f(T). \quad (1.5.8)$$

1. $y \in f(S)$, 则 $\exists x \in S \subset S \cup T, f(x) = y$, 于是 $y \in f(S \cup T)$;

2. $y \in f(T)$, 则 $\exists x \in T \subset S \cup T, f(x) = y$, 于是 $y \in f(S \cup T)$.

所以

$$f(S) \cup f(T) \subset f(S \cup T). \quad (1.5.9)$$

综上所述

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T) \quad (1.5.10)$$

□

第二个式子

证明.

$$\forall y \in f(S \cap T), \exists x \in S \cap T, f(x) = y. \quad (1.5.11)$$

此时 $x \in S$ 且 $x \in T$, 所以 $f(x) \in f(S)$ 且 $f(x) \in f(T)$, 即 $y = f(x) \in f(S) \cap f(T)$.

故而

$$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T). \quad (1.5.12)$$

□

一个反例 考虑映射 $f: n \mapsto n^2$, 以及 \mathbb{Z} 的子集 $S = \{-1, 0\}, T = \{0, 1\}$.
那么

$$S \cap T = \{0\}, \quad f(S \cap T) = \{0\}, \quad (1.5.13)$$

同时

$$f(S) = \{1, 0\}, f(T) = \{0, 1\}, \quad f(S) \cap f(T) = \{0, 1\}. \quad (1.5.14)$$

在这种情况下, $f(S) \cap f(T) \not\subseteq f(S \cap T)$. 所以包含关系不能换成相等关系.

第 4 题

集合 S 的全体子集的集合记做

$$\mathcal{P}(S) = \{T | T \subset S\}$$

假如若 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 是含有 n 个元素的有限集, 则 $\mathcal{P}(S)$ 由空集 \emptyset , n 个单元集 $\{s_1\}, \{s_2\}, \dots, \{s_n\}$, $n(n-1)/2$ 个二元集 $\{s_i, s_j\}, 1 \leq i < j \leq n$, 等等, 直到全集 $T = S$ 组成. 集合 $\mathcal{P}(S)$ 的基数是多少?

$\mathcal{P}(S)$ 的基数即为 S 的不同子集的个数, 也是从 S 中选取若干个元素出来的方案数.

每次选择对每个元素来说有选与不选两种可能, 于是总的方案数为 2^n , 即

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^n. \quad (1.5.15)$$

第 5 题

设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射, 且设对某个元素 $a \in X, b = f(a)$.

原像

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = \{x | f(x) = f(a)\}$$

叫作元素 $b \in \text{Im} f$ 上的纤维. 证明集合 X 是互不相交的纤维的并 (也就是说, 给出了 X 的一个划分).

证明. 设任意 $b_1, b_2 \in \text{Im}f$ 且 $b_1 \neq b_2$, 则 $f^{-1}(b_1) \cap f^{-1}(b_2) = \emptyset$, 否则将有 $b_1 = b_2$, 与前述矛盾.

下面证明

$$X = \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b)$$

1. $X \subset \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b)$:

设任意 $x \in X$, 取 $b = f(x) \in \text{Im}f$, 显然有

$$x \in f^{-1}(b) \subset \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b), \quad (1.5.16)$$

于是 $X \subset \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b)$.

2. $\bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b) \subset X$:

记

$$S = \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b). \quad (1.5.17)$$

设任意 $s \in S$, 那么

$$\exists b \in \text{Im}f, s \in f^{-1}(b), \quad (1.5.18)$$

也就是

$$f(s) = b, \quad (1.5.19)$$

所以

$$s \in X. \quad (1.5.20)$$

故

$$S \subset X. \quad (1.5.21)$$

综上所述, $X = \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b)$, 且 $f^{-1}(b)$ 间互不相交. \square

第 6 题

证明有限个可数集的笛卡尔积也是可数集.

引理 1.5.2. 设映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 都是双射, 则 gf 是 $X \rightarrow Z$ 的双射.

引理的证明是显然的, 下面是原题的证明.

证明. 设集合

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \quad (n \geq 2)$$

都是可数集. 存在 n 个双射

$$f_i : X_i \rightarrow \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.5.22)$$

下面构造它们的笛卡尔积 $X = \prod_{i=1}^n X_i$ 到 \mathbb{N} 的双射

$$f : X \rightarrow \mathbb{N}.$$

定义

$$\pi^{(n)}(k_1, \dots, k_{n-1}, k_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + 1) + k_2, & n = 2; \\ \pi^{(2)}(\pi^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}), k_n), & n > 2. \end{cases} \quad (1.5.23)$$

则 $\pi^{(n)}$ 是 $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ 的双射 (参见 Cantor pairing function) .

设 $X \rightarrow \mathbb{N}^n$ 的映射

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)) \quad (1.5.24)$$

由于每个 $f_i (1 \leq i \leq n)$ 都是双射, 于是 g 也是双射.

令 $f = \pi^{(n)}g$, 由引理 1.5.2 得, f 是 $X \rightarrow \mathbb{N}$ 上的双射. X 是可数集. □

第 7 题

符号 $S\Delta T$ 表示两个集合 S 与 T 的对称差: $S\Delta T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$. 证明 $S\Delta T = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$.

引理 1.5.3. 设有集合 A, B, C , 若 $A \cap C = \emptyset$ 且 $B \cap C = \emptyset$, 则

$$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B.$$

引理 1.5.4.

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

引理 1.5.5. 设有集合 A, B, C , 若 $A \cap C = \emptyset$, 则

$$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (A \cap B).$$

上述三个引理的证明都是显然的, 下面是原题的证明.

证明. 易知

$$S \cap (T \setminus S) = \emptyset, \quad (1.5.25)$$

由引理 1.5.5 得

$$\begin{aligned} S \Delta T &= (S \setminus T) \cup (T \setminus S) \\ &= (S \cup (T \setminus S)) \setminus (S \cap T) \\ &= (S \cup T) \setminus (S \cap T). \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

□

§6 等价关系. 商映射

第 1 题

设 \mathbb{R}^2 / \sim 是图 8 (图见原书) 中给出的商集, l 是与 OX 轴相交的任意直线, 试给出 \mathbb{R}^2 / \sim 的元素与 l 的点之间的一一对应.

定义

$$P(\xi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \xi\}. \quad (1.6.1)$$

由题意

$$\mathbb{R}^2 / \sim = \{P(\xi) | \xi \in \mathbb{R}\}. \quad (1.6.2)$$

这里认为 l 与 OX 轴不重合, 于是

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |P(\xi) \cap l| = 1. \quad (1.6.3)$$

可以给出如下双射

$$f: P(\xi) \mapsto Q^{(\xi)}, \quad (1.6.4)$$

其中 $Q^{(\xi)} \in P(\xi) \cap l$.

第 2 题

令实坐标平面 \mathbb{R}^2 上的两点 $P(x, y) \sim P(x', y')$, 当且仅当 $x' - x \in \mathbb{Z}$ 且 $y - y' \in \mathbb{Z}$. 证明 \sim 是等价关系, 且商集可以几何地表示为环面 (例如小面包圈的表面) 上的点集.

证明. 先来证明 \sim 是等价关系.

reflexive 设任意 $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 显然有

$$x - x = 0 \in \mathbb{Z} \quad y - y = 0 \in \mathbb{Z} \quad (1.6.5)$$

所以 $P(x, y) \sim P(x, y)$.

symmetric 设任意 $P(x, y) \sim P(x', y')$, 则

$$x' - x \in \mathbb{Z} \quad y' - y \in \mathbb{Z} \quad (1.6.6)$$

那么显然

$$x - x' = -(x' - x) \in \mathbb{Z} \quad y - y' = -(y' - y) \in \mathbb{Z} \quad (1.6.7)$$

所以 $P(x', y') \sim P(x, y)$.

transitive 设任意 $P(x, y) \sim P(x', y'), P(x', y') \sim P(x'', y'')$, 则

$$x' - x \in \mathbb{Z} \quad y' - y \in \mathbb{Z} \quad (1.6.8)$$

$$x'' - x' \in \mathbb{Z} \quad y'' - y' \in \mathbb{Z} \quad (1.6.9)$$

所以

$$x'' - x = (x'' - x') + (x' - x) \in \mathbb{Z} \quad (1.6.10)$$

$$y'' - y = (y'' - y') + (y' - y) \in \mathbb{Z} \quad (1.6.11)$$

故而 $P(x, y) \sim P(x'', y'')$.

所以 \sim 是等价关系.

商集可以用 $[0, 1) \times [0, 1)$ 上的点来表示, 将这个正方形对边粘上就成了一个环面.

□

第 3 题

证明 2 元、3 元和 4 元集分别有 2, 5 和 15 个不同的商集.

证明. 问题等价于集合有几个不同的划分.

有 n 个元素的集合的划分数记为 $B(n)$, 有

$$B(2) = 2 \quad (1.6.12)$$

$$B(3) = 5 \quad (1.6.13)$$

$$B(4) = 15 \quad (1.6.14)$$

□

第 4 题

设 \sim 是集合 X 上的一个等价关系, 且 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射, 使得

$$x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

证明 f 与 \sim 的这一相容性条件 (比第 2 段讨论的条件要弱) 允许我们定义一个从 X/\sim 到 Y 的诱导映射 $\bar{f}: \bar{x} \mapsto f(x)$, 它给出了分解式 $f = \bar{f} \cdot p$, 但 \bar{f} 不一定是单射. \bar{f} 成为单射的条件是什么?

第 5 题

画出下述偏序集的图解:

1. $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$;
2. 整数 24 的全体因子的几何 (偏序关系由整除给出).