

《代数学引论（第一卷）》（柯斯特利金）习题

Abreto Fu¹

2019 年 7 月 22 日

¹Email: abreto [AT] std.uestc.edu.cn

目录

第 1 章 代数的起源	5
§1 简谈代数	5
§2 几个典型问题	5
§3 线性方程初步	5
§4 低阶行列式	5
第 2 题	5
第 3 题	6
§5 集合与映射	7
第 1 题	7

第 1 章 代数的起源

§1 简谈代数

§2 几个典型问题

§3 线性方程初步

§4 低阶行列式

第 2 题

证明在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

证明. 展开式中的六项的乘积为

$$\begin{aligned}\Gamma &= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot a_{12}a_{23}a_{31} \cdot a_{13}a_{21}a_{32} \cdot (-a_{11}a_{23}a_{32}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= -(a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33})^2 \leq 0\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

若这六项同时为正, 则应有

$$\Gamma > 0\tag{1.4.2}$$

与式 (1.4.1) 矛盾.

故在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

□

第 3 题

验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

引理 1.4.1.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

引理 1.4.1 可由定义直接导出.

引理 1.4.2.

$$-a \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} -a \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} &= -a(cf - de) + b(ch - dg) \\ &= -c(af - bh) + d(ae - bg) \\ &= -c \begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

第一个式子

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

由引理 1.4.1 可知

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

由引理 1.4.2 得

$$-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1.4.5)$$

于是

$$\begin{aligned} D_1 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

第一个式子验证完毕.

第二个式子

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix} - (-a) \begin{vmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} + (-b) \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \\ &= abc - bac = 0 \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

验证完毕.

§5 集合与映射

第 1 题

设 $\Omega = \{+, -, ++, +-, -+, --, + + +, \dots\}$ 是加号和减号的有限序列的集合, 而 $f: \Omega \rightarrow \Omega$ 是一个变换, 将元素 $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \in \Omega$ 对应到 $\omega' = \omega_1 \dot{\omega}_1 \omega_2 \dot{\omega}_2 \cdots \omega_n \dot{\omega}_n$, 其中若 $\omega_k = +$, 则 $\dot{\omega}_k = -$, 若 $\omega_k = -$, 则 $\dot{\omega}_k = +$. 证明在 $f(f\omega)$ 的长度 > 4 的任意区间内包含 $++$ 或 $--$.

证明. 设

$$f(f\omega) = \omega_0 \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \quad (1.5.1)$$

由定义易知,

$$\forall k \geq 0, \omega_{4k+1} = \omega_{4k+2} \quad (1.5.2)$$

对于任意长度 > 4 的区间, 一定包含连续的两项形如 $\omega_{4k+1}\omega_{4k+2}$.
即一定包含相等的连续两项. \square