《代数学引论（第一卷）》（柯斯特利金）习题

Abreto Fu[1]

2019 年 7 月 23 日

[1]Email: abreto [AT] std.uestc.edu.cn

目录

第 1 章　代数的起源

§1　简谈代数

§2　几个典型问题

§3　线性方程初步

§4　低阶行列式

第 2 题

证明在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

证明. 展开式中的六项的乘积为

$$\begin{aligned}\Gamma &= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot a_{12}a_{23}a_{31} \cdot a_{13}a_{21}a_{32} \cdot (-a_{11}a_{23}a_{32}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= -(a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33})^2 \leq 0\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

若这六项同时为正，则应有

$$\Gamma > 0 \tag{1.4.2}$$

与式 (1.4.1) 矛盾.

故在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

□

第 3 题

验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

引理 1.4.1.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

引理 1.4.1 可由定义直接导出.

引理 1.4.2.

$$-a\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} -a\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} &= -a(cf-de)+b(ch-dg) \\ &= -c(af-bh)+d(ae-bg) \\ &= -c\begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

第一个式子

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

由引理 1.4.1 可知

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

由引理 1.4.2 得

$$-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{22} & a_{32}\end{vmatrix} \tag{1.4.5}$$

于是

$$\begin{aligned}D_1&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{22} & a_{32}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

第一个式子验证完毕.

第二个式子

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix}&=0\begin{vmatrix}0 & c\\ -c & 0\end{vmatrix}-(-a)\begin{vmatrix}a & b\\ -c & 0\end{vmatrix}+(-b)\begin{vmatrix}a & b\\ 0 & c\end{vmatrix}\\ &=abc-bac=0\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

验证完毕.

§5 集合与映射

引理 1.5.1. *设*

$$f: X\to Y,\qquad g: Y\to X$$

是任意两个映射，如果 $gf=e_X$，则 f 是单的，g 是满的.

第 1 题

设 $\Omega=\{+,-,++,+-,-+,--,+++,\cdots\}$ 是加号和减号的有限序列的集合，而 $f:\Omega\to\Omega$ 是一个变换，将元素 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\in\Omega$ 对应到 $\omega'=\omega_1\dot{\omega}_1\omega_2\dot{\omega}_2\cdots\omega_n\dot{\omega}_n$, 其中若 $\omega_k=+$, 则 $\dot{\omega}_k=-$，若 $\omega_k=-$，则 $\dot{\omega}_k=+$. 证明在 $f(f\omega)$ 的长度 >4 的任意区间内包含 $++$ 或 $--$.

证明. 设

$$f(f\omega) = \omega_0\omega_1\omega_2\cdots\omega_n \tag{1.5.1}$$

由定义易知，

$$\forall k \geq 0, \omega_{4k+1} = \omega_{4k+2} \tag{1.5.2}$$

对于任意长度 > 4 的区间，一定包含连续的两项形如 $\omega_{4k+1}\omega_{4k+2}$. 即一定包含相等的连续两项. □

第 2 题

由法则 $n \to n^2$ 给出的映射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 有右逆吗? 给出 f 的两个左逆.

假设 f 有右逆 g，即

$$fg = e_{\mathbb{N}} \tag{1.5.3}$$

由引理 1.5.1 得，f 是满的，与题设矛盾. 故 f 不存在右逆.

给出两个左逆如下

$$h_1(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.5.4}$$

$$h_2(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 2, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.5.5}$$

第 3 题

设 $f : X \to Y$ 是一个映射，且 S, T 都是 X 的子集.
证明

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T), \quad f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T).$$

试举一例，说明后一个式子中的包含关系一般来说不能换成相等关系.

第一个式子

证明.

$$\forall y \in f(S \cup T), \exists x \in S \cup T, f(x) = y. \tag{1.5.6}$$

1. $x \in S$，则 $y = f(x) \in S$;
2. $x \in T$，则 $y = f(x) \in T$.

于是

$$f(S \cup T) \subset f(S) \cup f(T). \tag{1.5.7}$$

$$\forall y \in f(S) \cup f(T), \text{ 要么 } y \in f(S), \text{ 要么 } y \in f(T). \tag{1.5.8}$$

1. $y \in f(S)$，则 $\exists x \in S \subset S \cup T, f(x) = y$，于是 $y \in f(S \cup T)$;
2. $y \in f(T)$，则 $\exists x \in T \subset S \cup T, f(x) = y$，于是 $y \in f(S \cup T)$.

所以

$$f(S) \cup f(T) \subset f(S \cup T). \tag{1.5.9}$$

综上所述

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T) \tag{1.5.10}$$

□

第二个式子

证明.

$$\forall y \in f(S \cap T), \exists x \in S \cap T, f(x) = y. \tag{1.5.11}$$

此时 $x \in S$ 且 $x \in T$, 所以 $f(x) \in f(S)$ 且 $f(x) \in f(T)$, 即 $y = f(x) \in f(S) \cap f(T)$.

故而

$$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T). \tag{1.5.12}$$

□

一个反例　考虑映射 $f: n \mapsto n^2$，以及 $\mathbb{Z}$ 的子集 $S=\{-1,0\}, T=\{0,1\}$.

那么

$$S \cap T=\{0\}, \quad f(S \cap T)=\{0\}, \tag{1.5.13}$$

同时

$$f(S)=\{1,0\}, f(T)=\{0,1\}, \quad f(S) \cap f(T)=\{0,1\}. \tag{1.5.14}$$

在这种情况下，$f(S) \cap f(T) \nsubseteq f(S \cap T)$. 所以包含关系不能换成相等关系.

第 4 题

> 集合 S 的全体子集的集合记做
>
> $$\mathcal{P}(S)=\{T | T \subset S\}$$
>
> 假如若 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 是含有 n 个元素的有限集，则 $\mathcal{P}(S)$ 由空集 $\varnothing$, n 个单元集 $\{s_1\},\{s_2\}, \cdots,\{s_n\}$, $n(n-1)/2$ 个二元集 $\{s_i, s_j\}, 1 \leq i<j \leq n$, 等等，直到全集 $T=S$ 组成. 集合 $\mathcal{P}(S)$ 的基数是多少?

$\mathcal{P}(S)$ 的基数即为 S 的不同子集的个数，也是从 S 中选取若干个元素出来的方案数.

每次选择对每个元素来说有选与不选两种可能，于是总的方案数为 2^n，即

$$|\mathcal{P}(S)|=2^n. \tag{1.5.15}$$