

# 《代数学引论（第一卷）》（柯斯特利金）习题

Abreto Fu<sup>1</sup>

2019 年 7 月 23 日

<sup>1</sup>Email: abreto [AT] std.uestc.edu.cn



# 目录

第 1 章 代数的起源	5
§1 简谈代数 . . . . .	5
§2 几个典型问题 . . . . .	5
§3 线性方程初步 . . . . .	5
§4 低阶行列式 . . . . .	5
第 2 题 . . . . .	5
第 3 题 . . . . .	6
§5 集合与映射 . . . . .	7
第 1 题 . . . . .	7
第 2 题 . . . . .	8
第 3 题 . . . . .	8
第 4 题 . . . . .	10
第 5 题 . . . . .	10
第 6 题 . . . . .	11



# 第 1 章 代数的起源

## §1 简谈代数

## §2 几个典型问题

## §3 线性方程初步

## §4 低阶行列式

### 第 2 题

证明在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

证明. 展开式中的六项的乘积为

$$\begin{aligned}\Gamma &= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot a_{12}a_{23}a_{31} \cdot a_{13}a_{21}a_{32} \cdot (-a_{11}a_{23}a_{32}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= -(a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33})^2 \leq 0\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

若这六项同时为正, 则应有

$$\Gamma > 0\tag{1.4.2}$$

与式 (1.4.1) 矛盾.

故在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

□

## 第 3 题

验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

引理 1.4.1.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

引理 1.4.1 可由定义直接导出.

引理 1.4.2.

$$-a \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} -a \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} &= -a(cf - de) + b(ch - dg) \\ &= -c(af - bh) + d(ae - bg) \\ &= -c \begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

第一个式子

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

由引理 1.4.1 可知

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

由引理 1.4.2 得

$$-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1.4.5)$$

于是

$$\begin{aligned} D_1 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

第一个式子验证完毕.

第二个式子

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix} - (-a) \begin{vmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} + (-b) \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \\ &= abc - bac = 0 \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

验证完毕.

## §5 集合与映射

引理 1.5.1. 设

$$f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow X$$

是任意两个映射, 如果  $gf = e_X$ , 则  $f$  是单的,  $g$  是满的.

### 第 1 题

设  $\Omega = \{+, -, ++, +-, -+, --, +++, \dots\}$  是加号和减号的有限序列的集合, 而  $f: \Omega \rightarrow \Omega$  是一个变换, 将元素  $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \in \Omega$  对应到  $\omega' = \omega_1 \dot{\omega}_1 \omega_2 \dot{\omega}_2 \cdots \omega_n \dot{\omega}_n$ , 其中若  $\omega_k = +$ , 则  $\dot{\omega}_k = -$ , 若  $\omega_k = -$ , 则  $\dot{\omega}_k = +$ . 证明在  $f(f\omega)$  的长度  $> 4$  的任意区间内包含  $++$  或  $--$ .

证明. 设

$$f(f\omega) = \omega_0\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n \quad (1.5.1)$$

由定义易知,

$$\forall k \geq 0, \omega_{4k+1} = \omega_{4k+2} \quad (1.5.2)$$

对于任意长度  $> 4$  的区间, 一定包含连续的两项形如  $\omega_{4k+1}\omega_{4k+2}$ .

即一定包含相等的连续两项.  $\square$

## 第 2 题

由法则  $n \rightarrow n^2$  给出的映射  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  有右逆吗? 给出  $f$  的两个左逆.

假设  $f$  有右逆  $g$ , 即

$$fg = e_{\mathbb{N}} \quad (1.5.3)$$

由引理 1.5.1 得,  $f$  是满的, 与题设矛盾. 故  $f$  不存在右逆.

给出两个左逆如下

$$h_1(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.5.4)$$

$$h_2(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 2, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.5.5)$$

## 第 3 题

设  $f: X \rightarrow Y$  是一个映射, 且  $S, T$  都是  $X$  的子集.

证明

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T), \quad f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T).$$

试举一例, 说明后一个式子中的包含关系一般来说不能换成相等关系.



## 第一个式子

证明.

$$\forall y \in f(S \cup T), \exists x \in S \cup T, f(x) = y. \quad (1.5.6)$$

1.  $x \in S$ , 则  $y = f(x) \in S$ ;

2.  $x \in T$ , 则  $y = f(x) \in T$ .

于是

$$f(S \cup T) \subset f(S) \cup f(T). \quad (1.5.7)$$

$$\forall y \in f(S) \cup f(T), \text{ 要么 } y \in f(S), \text{ 要么 } y \in f(T). \quad (1.5.8)$$

1.  $y \in f(S)$ , 则  $\exists x \in S \subset S \cup T, f(x) = y$ , 于是  $y \in f(S \cup T)$ ;

2.  $y \in f(T)$ , 则  $\exists x \in T \subset S \cup T, f(x) = y$ , 于是  $y \in f(S \cup T)$ .

所以

$$f(S) \cup f(T) \subset f(S \cup T). \quad (1.5.9)$$

综上所述

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T) \quad (1.5.10)$$

□

## 第二个式子

证明.

$$\forall y \in f(S \cap T), \exists x \in S \cap T, f(x) = y. \quad (1.5.11)$$

此时  $x \in S$  且  $x \in T$ , 所以  $f(x) \in f(S)$  且  $f(x) \in f(T)$ , 即  $y = f(x) \in f(S) \cap f(T)$ .

故而

$$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T). \quad (1.5.12)$$

□

**一个反例** 考虑映射  $f: n \mapsto n^2$ , 以及  $\mathbb{Z}$  的子集  $S = \{-1, 0\}, T = \{0, 1\}$ .  
那么

$$S \cap T = \{0\}, \quad f(S \cap T) = \{0\}, \quad (1.5.13)$$

同时

$$f(S) = \{1, 0\}, f(T) = \{0, 1\}, \quad f(S) \cap f(T) = \{0, 1\}. \quad (1.5.14)$$

在这种情况下,  $f(S) \cap f(T) \not\subseteq f(S \cap T)$ . 所以包含关系不能换成相等关系.

#### 第 4 题

集合  $S$  的全体子集的集合记做

$$\mathcal{P}(S) = \{T | T \subset S\}$$

假如若  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  是含有  $n$  个元素的有限集, 则  $\mathcal{P}(S)$  由空集  $\emptyset$ ,  $n$  个单元集  $\{s_1\}, \{s_2\}, \dots, \{s_n\}$ ,  $n(n-1)/2$  个二元集  $\{s_i, s_j\}, 1 \leq i < j \leq n$ , 等等, 直到全集  $T = S$  组成. 集合  $\mathcal{P}(S)$  的基数是多少?

$\mathcal{P}(S)$  的基数即为  $S$  的不同子集的个数, 也是从  $S$  中选取若干个元素出来的方案数.

每次选择对每个元素来说有选与不选两种可能, 于是总的方案数为  $2^n$ , 即

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^n. \quad (1.5.15)$$

#### 第 5 题

设  $f: X \rightarrow Y$  是一个映射, 且设对某个元素  $a \in X, b = f(a)$ .

原像

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = \{x | f(x) = f(a)\}$$

叫作元素  $b \in \text{Im} f$  上的纤维. 证明集合  $X$  是互不相交的纤维的并 (也就是说, 给出了  $X$  的一个划分).

证明. 设任意  $b_1, b_2 \in \text{Im}f$  且  $b_1 \neq b_2$ , 则  $f^{-1}(b_1) \cap f^{-1}(b_2) = \emptyset$ , 否则将有  $b_1 = b_2$ , 与前述矛盾.

下面证明

$$X = \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b)$$

1.  $X \subset \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b)$ :

设任意  $x \in X$ , 取  $b = f(x) \in \text{Im}f$ , 显然有

$$x \in f^{-1}(b) \subset \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b), \quad (1.5.16)$$

于是  $X \subset \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b)$ .

2.  $\bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b) \subset X$ :

记

$$S = \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b). \quad (1.5.17)$$

设任意  $s \in S$ , 那么

$$\exists b \in \text{Im}f, s \in f^{-1}(b), \quad (1.5.18)$$

也就是

$$f(s) = b, \quad (1.5.19)$$

所以

$$s \in X. \quad (1.5.20)$$

故

$$S \subset X. \quad (1.5.21)$$

综上所述,  $X = \bigcup_{b \in \text{Im}f} f^{-1}(b)$ , 且  $f^{-1}(b)$  间互不相交.  $\square$

## 第 6 题

证明有限个可数集的笛卡尔积也是可数集.

**引理 1.5.2.** 设映射  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  都是双射, 则  $gf$  是  $X \rightarrow Z$  的双射.

证明. 设集合

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \quad (n \geq 2)$$

都是可数集. 存在  $n$  个双射

$$f_i : X_i \rightarrow \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.5.22)$$

下面构造它们的笛卡尔积  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  到  $\mathbb{N}$  的双射

$$f : X \rightarrow \mathbb{N}.$$

定义

$$\pi^{(n)}(k_1, \dots, k_{n-1}, k_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + 1) + k_2 & n = 2; \\ \pi^{(2)}(\pi^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}), k_n) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.5.23)$$

则  $\pi^{(n)}$  是  $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  的双射 (参见 Cantor pairing function) .

设  $X \rightarrow \mathbb{N}^n$  的映射

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)) \quad (1.5.24)$$

由于每个  $f_i (1 \leq i \leq n)$  都是双射, 于是  $g$  也是双射.

令  $f = \pi^{(n)}g$ , 由引理 1.5.2 得,  $f$  是  $X \rightarrow \mathbb{N}$  上的双射.  $X$  是可数集. □