《代数学引论（第一卷)》（柯斯特利金）习题

Abreto Fu[1]

2019 年 7 月 22 日

[1]Email: abreto [AT] std.uestc.edu.cn

目录

第 1 章　代数的起源

§1　简谈代数

§2　几个典型问题

§3　线性方程初步

§4　低阶行列式

第 2 题

证明在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

证明. 展开式中的六项的乘积为

$$\begin{aligned}\Gamma &= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot a_{12}a_{23}a_{31} \cdot a_{13}a_{21}a_{32} \cdot (-a_{11}a_{23}a_{32}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= -(a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33})^2 \leq 0\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

若这六项同时为正，则应有

$$\Gamma > 0 \tag{1.4.2}$$

与式 (1.4.1) 矛盾.

故在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

□

第 3 题

验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

引理 1.4.1.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

引理 1.4.1 可由定义直接导出.

引理 1.4.2.

$$-a\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} -a\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} &= -a(cf-de)+b(ch-dg) \\ &= -c(af-bh)+d(ae-bg) \\ &= -c\begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

第一个式子

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

由引理 1.4.1 可知

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

由引理 1.4.2 得

$$-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{22} & a_{32}\end{vmatrix} \tag{1.4.5}$$

于是

$$\begin{aligned}D_1 &= a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{22} & a_{32}\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

第一个式子验证完毕.

第二个式子

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix} &= 0\begin{vmatrix}0 & c\\ -c & 0\end{vmatrix}-(-a)\begin{vmatrix}a & b\\ -c & 0\end{vmatrix}+(-b)\begin{vmatrix}a & b\\ 0 & c\end{vmatrix}\\ &= abc-bac=0\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

验证完毕.

§5 集合与映射

引理 1.5.1. *设*

$$f:X\to Y,\qquad g:Y\to X$$

是任意两个映射，如果 $gf=e_X$，则 f 是单的，g 是满的.

第 1 题

设 $\Omega=\{+,-,++,+-,-+,--,+++,\cdots\}$ 是加号和减号的有限序列的集合，而 $f:\Omega\to\Omega$ 是一个变换，将元素 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\in\Omega$ 对应到 $\omega'=\omega_1\dot{\omega}_1\omega_2\dot{\omega}_2\cdots\omega_n\dot{\omega}_n$，其中若 $\omega_k=+$，则 $\dot{\omega}_k=-$，若 $\omega_k=-$，则 $\dot{\omega}_k=+$. 证明在 $f(f\omega)$ 的长度 >4 的任意区间内包含 $++$ 或 $--$.

证明. 设

$$f(f\omega) = \omega_0\omega_1\omega_2\cdots\omega_n \tag{1.5.1}$$

由定义易知,

$$\forall k \geq 0, \omega_{4k+1} = \omega_{4k+2} \tag{1.5.2}$$

对于任意长度 > 4 的区间，一定包含连续的两项形如 $\omega_{4k+1}\omega_{4k+2}$.
即一定包含相等的连续两项. □

第 2 题

由法则 $n \to n^2$ 给出的映射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 有右逆吗? 给出 f 的两个左逆.

假设 f 有右逆 g，即

$$fg = e_{\mathbb{N}} \tag{1.5.3}$$

由引理 1.5.1 得，f 是满的，与题设矛盾. 故 f 不存在右逆.

给出两个左逆如下

$$h_1(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.5.4}$$

$$h_2(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 2, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.5.5}$$