《代数学引论（第一卷)》（柯斯特利金）习题

Abreto Fu[1]

2019 年 8 月 3 日

[1]Email: abreto [AT] std.uestc.edu.cn

目录

第 1 章　代数的起源

§1　简谈代数

§2　几个典型问题

§3　线性方程初步

§4　低阶行列式

第 2 题

证明在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

证明. 展开式中的六项的乘积为

$$\begin{aligned}\Gamma &= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot a_{12}a_{23}a_{31} \cdot a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad \cdot (-a_{11}a_{23}a_{32}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= -(a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33})^2 \leq 0\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

若这六项同时为正，则应有

$$\Gamma > 0 \tag{1.4.2}$$

与式 (1.4.1) 矛盾.

故在三阶行列式展开式中的六项不可能同时为正.

□

第 3 题

验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

引理 1.4.1.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

引理 1.4.1 可由定义直接导出.

引理 1.4.2.

$$-a\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} -a\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} &= -a(cf-de) + b(ch-dg) \\ &= -c(af-bh) + d(ae-bg) \\ &= -c\begin{vmatrix} a & b \\ h & f \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a & b \\ g & e \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

第一个式子

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

由引理 1.4.1 可知

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

由引理 1.4.2 得

$$-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{22} & a_{32}\end{vmatrix} \tag{1.4.5}$$

于是

$$\begin{aligned}D_1&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{31}\\ a_{22} & a_{32}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

第一个式子验证完毕.

第二个式子

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix}&=0\begin{vmatrix}0 & c\\ -c & 0\end{vmatrix}-(-a)\begin{vmatrix}a & b\\ -c & 0\end{vmatrix}+(-b)\begin{vmatrix}a & b\\ 0 & c\end{vmatrix}\\ &=abc-bac=0\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

验证完毕.

§5 集合与映射

引理 1.5.1. 设

$$f:X\to Y,\qquad g:Y\to X$$

是任意两个映射，如果 $gf=e_X$，则 f 是单的，g 是满的.

第 1 题

设 $\Omega=\{+,-,++,+-,-+,--,+++,\cdots\}$ 是加号和减号的有限序列的集合，而 $f:\Omega\to\Omega$ 是一个变换，将元素 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\in\Omega$ 对应到 $\omega'=\omega_1\dot{\omega}_1\omega_2\dot{\omega}_2\cdots\omega_n\dot{\omega}_n$，其中若 $\omega_k=+$，则 $\dot{\omega}_k=-$，若 $\omega_k=-$，则 $\dot{\omega}_k=+$. 证明在 $f(f\omega)$ 的长度 >4 的任意区间内包含 $++$ 或 $--$.

证明. 设

$$f(f\omega) = \omega_0\omega_1\omega_2\cdots\omega_n \tag{1.5.1}$$

由定义易知，

$$\forall k \geq 0, \omega_{4k+1} = \omega_{4k+2} \tag{1.5.2}$$

对于任意长度 > 4 的区间，一定包含连续的两项形如 $\omega_{4k+1}\omega_{4k+2}$.
即一定包含相等的连续两项. □

第 2 题

由法则 $n \to n^2$ 给出的映射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 有右逆吗? 给出 f 的两个左逆.

假设 f 有右逆 g，即

$$fg = e_{\mathbb{N}} \tag{1.5.3}$$

由引理 1.5.1 得，f 是满的，与题设矛盾. 故 f 不存在右逆.

给出两个左逆如下

$$h_1(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.5.4}$$

$$h_2(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ 是完全平方数;} \\ 2, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.5.5}$$

第 3 题

设 $f : X \to Y$ 是一个映射，且 S, T 都是 X 的子集.
证明

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T), \quad f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T).$$

试举一例，说明后一个式子中的包含关系一般来说不能换成相等关系.

第一个式子

证明.

$$\forall y \in f(S \cup T), \exists x \in S \cup T, f(x) = y. \tag{1.5.6}$$

1. $x \in S$，则 $y = f(x) \in S$;
2. $x \in T$，则 $y = f(x) \in T$.

于是

$$f(S \cup T) \subset f(S) \cup f(T). \tag{1.5.7}$$

$$\forall y \in f(S) \cup f(T), \text{ 要么 } y \in f(S), \text{ 要么 } y \in f(T). \tag{1.5.8}$$

1. $y \in f(S)$，则 $\exists x \in S \subset S \cup T, f(x) = y$，于是 $y \in f(S \cup T)$;
2. $y \in f(T)$，则 $\exists x \in T \subset S \cup T, f(x) = y$，于是 $y \in f(S \cup T)$.

所以

$$f(S) \cup f(T) \subset f(S \cup T). \tag{1.5.9}$$

综上所述

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T) \tag{1.5.10}$$

□

第二个式子

证明.

$$\forall y \in f(S \cap T), \exists x \in S \cap T, f(x) = y. \tag{1.5.11}$$

此时 $x \in S$ 且 $x \in T$, 所以 $f(x) \in f(S)$ 且 $f(x) \in f(T)$, 即 $y = f(x) \in f(S) \cap f(T)$.

故而

$$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T). \tag{1.5.12}$$

□

一个反例 考虑映射 $f: n \mapsto n^2$，以及 $\mathbb{Z}$ 的子集 $S=\{-1,0\}, T=\{0,1\}$.

那么

$$S \cap T=\{0\}, \quad f(S \cap T)=\{0\}, \tag{1.5.13}$$

同时

$$f(S)=\{1,0\}, f(T)=\{0,1\}, \quad f(S) \cap f(T)=\{0,1\}. \tag{1.5.14}$$

在这种情况下，$f(S) \cap f(T) \nsubseteq f(S \cap T)$. 所以包含关系不能换成相等关系.

第 4 题

集合 S 的全体子集的集合记做

$$\mathcal{P}(S)=\{T | T \subset S\}$$

假如若 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 是含有 n 个元素的有限集，则 $\mathcal{P}(S)$ 由空集 $\varnothing$, n 个单元集 $\{s_1\},\{s_2\}, \cdots,\{s_n\}$, $n(n-1)/2$ 个二元集 $\{s_i, s_j\}, 1 \leq i<j \leq n$, 等等，直到全集 $T=S$ 组成. 集合 $\mathcal{P}(S)$ 的基数是多少?

$\mathcal{P}(S)$ 的基数即为 S 的不同子集的个数，也是从 S 中选取若干个元素出来的方案数.

每次选择对每个元素来说有选与不选两种可能，于是总的方案数为 2^n，即

$$|\mathcal{P}(S)|=2^n. \tag{1.5.15}$$

第 5 题

设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射, 且设对某个元素 $a \in X, b=f(a)$. 原像

$$f^{-1}(b)=f^{-1}(f(a))=\{x | f(x)=f(a)\}$$

叫作元素 $b \in \operatorname{Im} f$ 上的纤维. 证明集合 X 是互不相交的纤维的并（也就是说，给出了 X 的一个划分）.

证明. 设任意 $b_1, b_2 \in \mathrm{Im} f$ 且 $b_1 \neq b_2$，则 $f^{-1}(b_1) \cap f^{-1}(b_2) = \varnothing$，否则将有 $b_1 = b_2$，与前述矛盾.

下面证明

$$X = \bigcup_{b \in \mathrm{Im} f} f^{-1}(b)$$

1. $X \subset \bigcup_{b \in \mathrm{Im} f} f^{-1}(b)$:

   设任意 $x \in X$，取 $b = f(x) \in \mathrm{Im} f$，显然有

   $$x \in f^{-1}(b) \subset \bigcup_{b \in \mathrm{Im} f} f^{-1}(b), \tag{1.5.16}$$

   于是 $X \subset \bigcup_{b \in \mathrm{Im} f} f^{-1}(b)$.

2. $\bigcup_{b \in \mathrm{Im} f} f^{-1}(b) \subset X$:

   记

   $$S = \bigcup_{b \in \mathrm{Im} f} f^{-1}(b). \tag{1.5.17}$$

   设任意 $s \in S$，那么

   $$\exists b \in \mathrm{Im} f, s \in f^{-1}(b), \tag{1.5.18}$$

   也就是

   $$f(s) = b, \tag{1.5.19}$$

   所以

   $$s \in X. \tag{1.5.20}$$

   故

   $$S \subset X. \tag{1.5.21}$$

综上所述，$X = \bigcup_{b \in \mathrm{Im} f} f^{-1}(b)$，且 $f^{-1}(b)$ 间互不相交. □

第 6 题

证明有限个可数集的笛卡尔积也是可数集.

引理 1.5.2. 设映射 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ 都是双射，则 gf 是 $X \to Z$ 的双射.

引理的证明是显然的，下面是原题的证明.

证明. 设集合

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \quad (n \geq 2)$$

都是可数集. 存在 n 个双射

$$f_i : X_i \to \mathbb{N}, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{1.5.22}$$

下面构造它们的笛卡尔积 $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射

$$f : X \to \mathbb{N}.$$

定义

$$\pi^{(n)}(k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + 1) + k_2, & n = 2; \\ \pi^{(2)}(\pi^{(n-1)}(k_1, \ldots, k_{n-1}), k_n), & n > 2. \end{cases} \tag{1.5.23}$$

则 $\pi^{(n)}$ 是 $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ 的双射（参见 Cantor pairing function）.

设 $X \to \mathbb{N}^n$ 的映射

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)) \tag{1.5.24}$$

由于每个 $f_i (1 \leq i \leq n)$ 都是双射，于是 g 也是双射.

令 $f = \pi^{(n)} g$，由引理 1.5.2 得，f 是 $X \to \mathbb{N}$ 上的双射. X 是可数集. □

第 7 题

符号 $S\Delta T$ 表示两个集合 S 与 T 的对称差: $S\Delta T = (S \backslash T) \cup (T \backslash S)$. 证明 $S\Delta T = (S \cup T) \backslash (S \cap T)$.

引理 1.5.3. 设有集合 A, B, C，若 $A \cap C = \varnothing$ 且 $B \cap C = \varnothing$，则

$$(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \backslash B.$$

引理 1.5.4.

$$A \backslash B = A \backslash (A \cap B).$$

引理 1.5.5. 设有集合 A, B, C，若 $A \cap C = \varnothing$，则

$$(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \backslash (A \cap B).$$

上述三个引理的证明都是显然的，下面是原题的证明.

证明. 易知

$$S\cap(T\backslash S)=\varnothing, \tag{1.5.25}$$

由引理 1.5.5 得

$$\begin{aligned} S\Delta T &= (S\backslash T)\cup(T\backslash S)\\ &= (S\cup(T\backslash S))\backslash(S\cap T)\\ &= (S\cup T)\backslash(S\cap T). \end{aligned} \tag{1.5.26}$$

□

§6 等价关系. 商映射

第 1 题

设 $\mathbb{R}^2/\sim$ 是图 8（图见原书）中给出的商集，l 是与 OX 轴相交的任意直线，试给出 $\mathbb{R}^2/\sim$ 的元素与 l 的点之间的一一对应.

定义

$$P(\xi)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=\xi\}. \tag{1.6.1}$$

由题意

$$\mathbb{R}^2/{\sim}=\{P(\xi)|\xi\in\mathbb{R}\}. \tag{1.6.2}$$

这里认为 l 与 OX 轴不重合，于是

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\quad |P(\xi)\cap l|=1. \tag{1.6.3}$$

可以给出如下双射

$$f:P(\xi)\mapsto Q^{(\xi)}, \tag{1.6.4}$$

其中 $Q^{(\xi)}\in P(\xi)\cap l$.

第 2 题

令实坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两点 $P(x,y)\sim P(x',y')$，当且仅当 $x'-x\in\mathbb{Z}$ 且 $y-y'\in\mathbb{Z}$. 证明 $\sim$ 是等价关系，且商集可以几何地表示为环面（例如小面包圈的表面）上的点集.

证明. 先来证明 $\sim$ 是等价关系.

reflexive 设任意 $P(x,y)\in\mathbb{R}^2$，显然有

$$x-x=0\in\mathbb{Z}\qquad y-y=0\in\mathbb{Z}\tag{1.6.5}$$

所以 $P(x,y)\sim P(x,y)$.

symmetric 设任意 $P(x,y)\sim P(x',y')$，则

$$x'-x\in\mathbb{Z}\qquad y'-y\in\mathbb{Z}\tag{1.6.6}$$

那么显然

$$x-x'=-(x'-x)\in\mathbb{Z}\qquad y-y'=-(y'-y)\in\mathbb{Z}\tag{1.6.7}$$

所以 $P(x',y')\sim P(x,y)$.

transitive 设任意 $P(x,y)\sim P(x',y'),P(x',y')\sim P(x'',y'')$，则

$$x'-x\in\mathbb{Z}\qquad y'-y\in\mathbb{Z}\tag{1.6.8}$$

$$x''-x'\in\mathbb{Z}\qquad y''-y'\in\mathbb{Z}\tag{1.6.9}$$

所以

$$x''-x=(x''-x')+(x'-x)\in\mathbb{Z}\tag{1.6.10}$$

$$y''-y=(y''-y')+(y'-y)\in\mathbb{Z}\tag{1.6.11}$$

故而 $P(x,y)\sim P(x'',y'')$.

所以 $\sim$ 是等价关系.

商集可以用 $[0,1)\times[0,1)$ 上的点来表示，将这个正方形对边粘上就成了一个环面.

□

第 3 题

证明 2 元、3 元和 4 元集分别有 $2,5$ 和 15 个不同的商集.

第 5 题

画出下述偏序集的图解:

1. $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$;
2. 整数 24 的全体因子的几何（偏序关系由整除给出）.