《电磁场与波 B》课程设计

电子科学与工程学院 傅宣登 (2016030102010)

2018 年 6 月 23 日

关于均匀平面波与圆极化波的性质能否同时满足的探讨

一、均匀平面波

1 一般波动方程

对于电容率为 ε，磁导率为 μ，电导率为 σ 的无源均匀媒质，麦克斯韦方程是

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，$\rho = 0$. 于是有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{8}$$

上述方程只与两个变量 ($\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$) 有关，进一步可得出一个变量的方程.

对式 (5) 两边取旋度得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right) \tag{9}$$

由矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{10}$$

以及 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ 得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{11}$$

在直角坐标系下

$$\nabla^2 = \nabla^2 E_x \boldsymbol{a}_x + \nabla^2 E_y \boldsymbol{a}_y + \nabla^2 E_z \boldsymbol{a}_z \tag{12}$$

其中拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{13}$$

改变对空间和时间微分的顺序，式 (9) 重写为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \boldsymbol{H}]$$

将式 (6) 带入上式得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{14}$$

同理可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{15}$$

上述两个方程即是一般波动方程，支配着无源均匀导电媒质中电磁场的行为.

2　无耗介质中的平面波

令 $\sigma = 0$，得到无耗媒质中的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{17}$$

这两个方程也称为时变赫姆霍兹方程. 式中没有一阶项，表明电磁场在无耗媒质中传播时是不衰减的.

接下来考虑常量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的分量都在与波的传播方向垂直的平面的波，这种波即被称为平面波. 假定波沿 x 方向传播，则 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 场均无纵向分量，即

$$E_x = 0 \quad H_x = 0$$

3　均匀平面波的特点

在平面波中，均匀平面波是最简单和最易理解的一种波. 均匀的意思是在任意时刻在所在的平面中场的大小和方向都是不变的. 所以对于沿 x 方向传播的均匀平面波，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都不是 z 和 y 的函数，即

$$\begin{gathered} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y} = 0 \end{gathered} \tag{18}$$

这表明场分量只是 x(传播方向) 和 t(时间) 的函数，如

$$E_y(x,t) = E_{ym} \cos(\omega t - kx + \phi_y) \tag{19}$$

均匀平面波也可表述为：同相面上，各个点的场强都是相等的.

二、圆极化波

1　极化的概念

一般情况下，沿 x 方向传播的均匀平面波的 E_y 和 E_z 都存在，可以表示为

$$E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kx + \phi_y) \tag{20}$$

$$E_z = E_{zm} \cos(\omega t - kx + \phi_z) \tag{21}$$

合成波电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y E_y+\boldsymbol{e}_z E_z$. 由于 E_y 和 E_z 分量的振幅和相位不一定相同，因此，在空间任意给定点上，合成波电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的大小和方向都可能会随时间变化，这种现象就称为电磁波的极化.

根据电场强度矢量的端点随时间变化的轨迹，可以将极化分为直线极化、圆极化、椭圆极化和随机极化等.

2 圆极化

当电场强度矢量的端点随时间变化的轨迹为圆时，这样的波就称为圆极化波.

例如，两电场分量为

$$E_y(x,t)=E_0\cos\left(\omega t-kx+\phi_y\right) \tag{22}$$

$$E_z(x,t)=E_0\sin\left(\omega t-kx+\phi_z\right) \tag{23}$$

在 $x=0$ 平面中，它们是

$$E_y(0,t)=E_0\cos\left(\omega t+\phi_y\right) \tag{24}$$

$$E_z(0,t)=E_0\sin\left(\omega t+\phi_z\right) \tag{25}$$

两式平方后相加即得

$$E_y^2(0,t)+E_z^2(0,t)=E_0^2 \tag{26}$$

显然，这是圆的方程.

三、同时满足两种性质的波

考虑两列振幅相等、传播方向相同、偏振方向互相垂直、相位差 $\frac{\pi}{2}$ 的均匀平面波的叠加.

不失一般性，设波的两个分量 E_z 和 E_y 为

$$E_z(x,t)=\cos\left(\omega t+kx\right) \tag{27}$$

$$E_y(x,t)=\cos\left(\omega t+kx+\frac{\pi}{2}\right) \tag{28}$$

合场强 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z E_z+\boldsymbol{e}_y E_y \tag{29}$$

1 满足平面波的特征

先来验证这个波是个平面波.

将合场强分别对 y 和 z 求偏微分得

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}=0 \tag{30}$$

上式满足方程 (18)，所以该波是一个平面波. 在等相面 $\omega t+kx=C$ 上每个点的场强都是一样的.

2 是圆极化波

考虑 $x = 0$ 的平面，场强的两个分量为

$$E_z(0,t) = \cos\omega t \tag{31}$$

$$\begin{aligned} E_y(0,t) &= \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= -\sin\omega t \end{aligned} \tag{32}$$

显然有

$$E_z^2(0,t) + E_y^2(0,t) = 1 \tag{33}$$

这是圆的方程，于是该波是一个圆极化波.