《电磁场与波 B》课程设计

电子科学与工程学院 傅宣登 (2016030102010)

2018 年 6 月 23 日

关于均匀平面波与圆极化波能否同时存在的探讨

一、均匀平面波

1 一般波动方程

对于电容率为 ε，磁导率为 μ，电导率为 σ 的无源均匀媒质，麦克斯韦方程是

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$，$\rho = 0$. 于是有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{8}$$

上述方程只与两个变量 ($\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$) 有关，进一步可得出一个变量的方程.

对式 (5) 两边取旋度得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu\nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right) \tag{9}$$

由矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} \tag{10}$$

以及 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ 得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{11}$$

在直角坐标系下

$$\nabla^2 = \nabla^2 E_x\boldsymbol{a}_x + \nabla^2 E_y\boldsymbol{a}_y + \nabla^2 E_z\boldsymbol{a}_z \tag{12}$$

其中拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{13}$$

改变对空间和时间微分的顺序，式 (9) 重写为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \boldsymbol{H}]$$

将式 (6) 带入上式得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{14}$$

同理可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{15}$$

上述两个方程即是一般波动方程，支配着无源均匀导电媒质中电磁场的行为.

2　无耗介质中的平面波

令 $\sigma = 0$，得到无耗媒质中的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{17}$$

这两个方程也称为时变赫姆霍兹方程. 式中没有一阶项，表明电磁场在无耗媒质中传播时是不衰减的.

接下来考虑常量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的分量都在与波的传播方向垂直的平面的波，这种波即被称为平面波. 假定波沿 z 方向传播，则 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 场均无纵向分量，即

$$E_z = 0 \quad H_z = 0$$

二、圆极化波

1　极化的概念

2　圆极化

三、同时满足两种性质