问题1

数学模型

盘入螺线方程

设螺距为 d，采用极坐标形式，设极角为 θ，极径为 r。由等距螺线的性质，极角每增加一圈，极径增加 d，二者呈线性关系。由初始条件，$\theta = 16 \cdot 2\pi$ 时，$r = 16d$，确定螺线方程为

$$r = \frac{d}{2\pi}\theta$$

直接递推关系（未使用）

设龙头前把手位置为 P_0，其后各把手依次为 $P_1, P_2, \cdots, P_N$，N 为龙队节数。在极坐标系中，设 P_i 的极角和极径分别为 θ_i 和 r_i。设龙队各节前后把手距离分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_N$，则由余弦定理

$$r_i^2 + r_{i+1}^2 - 2r_i r_{i+1}\cos(\theta_i - \theta_{i+1}) = l_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$$

带入 $r = \frac{d}{2\pi}\theta$，整理得

$$\theta_i^2 + \theta_{i+1}^2 - 2\theta_i\theta_{i+1}\cos(\theta_i - \theta_{i+1}) = 4\pi^2\frac{l_{i+1}^2}{d^2}, \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$$

在已知 θ_i 的情况下求解 θ_{i+1}，该方程具有非常多零点。为获得正确零点，只需根据龙队运行方向，限定 θ_{i+1} 的范围为 $(\theta_i - \pi, \theta_i)$ 或 $(\theta_i, \theta_i + \pi)$。
由于问题4需要处理复合曲线，该递推关系式失效，实际计算中并未使用。需寻找更统一的求解方式。

螺线弧长公式

考虑螺线

$$r = \frac{d}{2\pi}\theta$$

记 $L(\theta)$ 为螺线上，极角在 $[0, \theta]$ 的弧长，则

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \int_0^\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{2\pi}\int_0^\theta \sqrt{\theta^2 + 1}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{4\pi}\left[\theta\sqrt{\theta^2 + 1} + \ln\left(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}\right)\right]
\end{aligned}$$

L 是 θ 的单调函数，存在反函数 L^{-1}。L^{-1} 可通过牛顿迭代法快速求解。

旋转矩阵

为便于后续表述，设左乘后，将向量逆时针旋转 ω 的旋转矩阵为

$$\mathbf{T}(\omega)=\begin{bmatrix}\cos(\omega) & -\sin(\omega)\\ \sin(\omega) & \cos(\omega)\end{bmatrix}$$

设 x，y 轴方向的单位向量为 $\mathbf{e}_x$，$\mathbf{e}_y$。
旋转矩阵的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=\begin{bmatrix}-\sin(\omega) & -\cos(\omega)\\ \cos(\omega) & -\sin(\omega)\end{bmatrix}=\mathbf{T}(\omega+\frac{\pi}{2})$$

设 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 为向量，旋转矩阵具有如下性质，

1. $\mathbf{T}(\omega)^{-1}=\mathbf{T}(-\omega)$；
2. $\mathbf{T}(\omega_1)\mathbf{T}(\omega_2)=\mathbf{T}(\omega_1+\omega_2)$；
3. $(\mathbf{T}(\omega_1)\mathbf{a})\cdot(\mathbf{T}(\omega_2)\mathbf{b})=(\mathbf{T}(\omega_1)\mathbf{a})^T(\mathbf{T}(\omega_2)\mathbf{b})=\mathbf{a}^T\mathbf{T}(\omega_1)^T\mathbf{T}(\omega_2)\mathbf{b}=\mathbf{a}^T\mathbf{T}(\omega_2-\omega_1)\mathbf{b}$

把手位置的自然坐标表示

记 s_0 为龙头在螺线上的自然坐标，$s_1,s_2,\cdots,s_N$ 分别为龙头后各把手的自然坐标。以问题一中设定的龙头初始位置 $(r,\theta)=(16d,32\pi)$ 为自然坐标原点， 以龙队行进方向，即顺时针方向为自然坐标正方向。记 $\mathbf{r}_i$ 为第 i 个把手的位置矢量。
设 $\theta_{max}=32\pi$，为自然坐标起点在螺线上的极角。由自然坐标以曲线弧长为度量方式的性质，有

$$s=L(\theta_{max})-L(\theta)$$

记 $L_{max}=L(\theta_{max})=L(32\pi)$ 于是 θ 可表示为 s 的函数

$$\theta(s)=L^{-1}\left(L_{max}-s\right)$$

$\theta(s)$ 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}&=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1}\\&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[L(\theta_{max})-L(\theta)]\right)^{-1}\\&=\left(-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\right)^{-1}\\&=-\left(\frac{d}{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\right)^{-1}\\&=-\frac{2\pi}{d}\frac{1}{\sqrt{1+\theta(s)^2}}\end{aligned}$$

记向量值函数 $\mathbf{r}(s)=[x,y]^T$ 表示：螺线上自然坐标为 s 的点的位置矢量，则

$$\mathbf{r}(s)=\begin{bmatrix}x(s)\\ y(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r(s)\cos(\theta(s))\\ r(s)\sin(\theta(s))\end{bmatrix}=\frac{d}{2\pi}\theta(s)\begin{bmatrix}\cos(\theta(s)) & -\sin(\theta(s))\\ \sin(\theta(s)) & \cos(\theta(s))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{d}{2\pi}\theta(s)\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{e}_x$$

$\mathbf{r}(s)$ 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{d}{2\pi}\theta(s)\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{e}_x\right] \\ &= \frac{d}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(\theta(s)) + \theta(s)\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}(\theta(s))}{\mathrm{d}s}\right]\mathbf{e}_x \\ &= \frac{d}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}\left[\mathbf{T}(\theta(s)) + \theta(s)\mathbf{T}(\theta(s)+\frac{\pi}{2})\right]\mathbf{e}_x \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+\theta(s)^2}}\left[\mathbf{T}(\theta(s)) + \theta(s)\mathbf{T}(\theta(s)+\frac{\pi}{2})\right]\mathbf{e}_x\end{aligned}$$

展开 x，y 分量计算，可得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s) = -\frac{1}{\sqrt{1+\theta(s)^2}}\begin{bmatrix}\cos(\theta(s)) - \theta(s)\sin(\theta(s)) \\ \sin(\theta(s)) + \theta(s)\cos(\theta(s))\end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{1+\theta(s)^2}}\mathbf{T}(\theta(s))\begin{bmatrix}1 \\ \theta(s)\end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{b}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}[1,x]^T$，则 $\mathbf{b}(x)$ 恰好为单位向量，且上式可简记为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s) = -\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{b}(\theta(s))$$

$\mathbf{b}(x)$ 也可进一步统一写为

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{T}(\arctan(x))\mathbf{e}_x$$

但这种表示方式会降低计算效率，实际并未使用。
至此，已经完全用自然坐标表示了把手的位置矢量。这种表示方法能极大提高计算效率，并可以直接适配问题4、5的情景。

基于自然坐标的递推关系

方程推导
在已知前一个把手的自然坐标 s_i 的情况下，为了求解下一个把手的自然坐标 s_{i+1} ，只需求解方程

$$\|\mathbf{r}(s_{i+1}) - \mathbf{r}(s_i)\| = l_{i+1}$$

其中，$l_i(1 \le i \le N)$ 为第 i 条板凳前后把手之间的距离。
该方程同样有众多零点。本问题中，自然坐标系的定义决定了必然有 $s_{i+1} < s_i$，因此只需求解小于 s_i 的最大零点。设龙队各节前后把手距离分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_N$，递推关系可表示为

$$s_{i+1} = \max\{s| \ \| \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_i) \| = l_{i+1} \text{ 且 } s < s_i\}$$

方程求解
为求解方程，作如下辅助函数

$$f(s, s_i, l_{i+1}) = \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_i)\|^2 - l_{i+1}^2 = [\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_i)]^2 - l_{i+1}^2$$

原方程与 f 具有相同的零点。
f 对 s 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}=2[\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_i)]\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s)$$

可使用牛顿迭代法求解，选取 s_{i+1} 的迭代初值为 $s_i-\pi l_{i+1}$。

模型总结

令 d 为螺距；
令 v 为笼头速度；
令 l_i 为各节龙身前后把手距离；
令 $L(\theta)=\frac{d}{4\pi}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1}+\ln\left(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right)\right]$；
令 $\theta(s)=L^{-1}\left(L_{max}-s\right)$，其中 $L_{max}=L(32\pi)$；
位置矢量关于自然坐标的函数为

$$\mathbf{r}(s)=\frac{d}{2\pi}\theta(s)\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{e}_x$$

令 $\mathbf{b}(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}[1,x]^T$，位置矢量关于自然坐标的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s)=-\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{b}(\theta(s))$$

令

$$f(s,s_i,l_{i+1})=[\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_i)]^2-l_{i+1}^2$$

f 对 s 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}=2[\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_i)]\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s)$$

各把手自然坐标的递推式为

$$\begin{cases}s_0=vt\\ s_{i+1}=\max\left\{s|f(s,s_i,l_{i+1})=0\text{ 且 }s<s_i\right\},\ i=0,1,\cdots,N\end{cases}$$

上述递推方程可通过牛顿迭代法求解，选取 s_{i+1} 的迭代初值为 $s_i-\pi l_{i+1}$，即可完全保证得到需要的零点。

问题2

数学模型

板凳顶点位置

设板凳前后把手到前后沿的距离为 h_1，设把手到板凳左右边缘的距离为 h_2。
以龙头为第 1 条板凳，前后把手位置矢量分别为 $\mathbf{r}(s_0)$，$\mathbf{r}(s_1)$。以此类推，第 $i(1\leq i\leq N)$ 条板凳的前后把手的位置矢量分别为 $\mathbf{r}(s_{i-1})$，$\mathbf{r}(s_i)$。
第 i 条板凳的方向为 $\mathbf{r}(s_i)-\mathbf{r}(s_{i+1})$，设 $\mathbf{n}_i$ 为指向第 i 条板凳正前方的单位向量，则

$$\mathbf{n}_i=\frac{\mathbf{r}(s_i)-\mathbf{r}(s_{i+1})}{\|\mathbf{r}(s_i)-\mathbf{r}(s_{i+1})\|}=\frac{1}{l_i}[\mathbf{r}(s_i)-\mathbf{r}(s_{i+1})]$$

为描述板凳的四个顶点，还需求板凳的正右侧方向，令

$$\mathbf{m}_i=\mathbf{T}(-\frac{\pi}{2})\mathbf{n}_i$$

则 $\mathbf{m}_i$ 为 $\mathbf{n}_i$ 沿顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后的单位向量，即指向第 i 条板凳的正右方的单位向量。
第 i 条板凳的四个顶点位置矢量分别为

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{i,\text{左前}}&=\mathbf{r}(s_{i-1})+h_1\mathbf{n}_i-h_2\mathbf{m}_i\\
\mathbf{p}_{i,\text{右前}}&=\mathbf{r}(s_{i-1})+h_1\mathbf{n}_i+h_2\mathbf{m}_i\\
\mathbf{p}_{i,\text{左后}}&=\mathbf{r}(s_i)-h_1\mathbf{n}_i-h_2\mathbf{m}_i\\
\mathbf{p}_{i,\text{右后}}&=\mathbf{r}(s_i)-h_1\mathbf{n}_i+h_2\mathbf{m}_i
\end{aligned}$$

碰撞判断

由于各节龙身的长度相同，在前进过程中，各节龙身都会经历和第一节龙身相同的过程，无需重复判断龙身是否会发生碰撞。
对与长方体之间的碰撞，由于互不平行，碰撞形式必然是定点与边的碰撞。
又因为第一节龙身的后顶点和龙头的后顶点会经历相同的过程，故最终只需考虑龙头的前后顶点、第一节龙身的前顶点。由于右侧顶点靠内，盘入时不会发生碰撞，故只需考虑左侧的前三个顶点： $\mathbf{p}_{1,\text{左前}}$、 $\mathbf{p}_{1,\text{左后}}$、 $\mathbf{p}_{2,\text{左前}}$， 下记为 $\mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_2$、$\mathbf{p}_3$。
经过以上分析，只需考虑三个顶点与第二节龙身及之后的板凳的位置关系。
对第 i 条板凳，记板凳长向轴线分别与板凳的前、后边交点的位置矢量分别为 $\mathbf{a}_i$，$\mathbf{b}_i$。
则

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_i&=\mathbf{r}(s_{i-1})+h_1\mathbf{n}_i\\
\mathbf{a}_i&=\mathbf{r}(s_i)-h_1\mathbf{n}_i
\end{aligned}$$

由于前两节板凳不会相互碰撞，只需考虑 $i\geq 3$ 的情况。
以 c_{ij} 表示 $\mathbf{p}_j(j=1,2,3)$ 与第 $i(i\geq 3)$ 条板凳的距离。
当 $(\mathbf{p}_j-\mathbf{a}_i)\cdot(\mathbf{b}_i-\mathbf{a}_i)\leq 0$ 或 $(\mathbf{p}_j-\mathbf{b}_i)\cdot(\mathbf{a}_i-\mathbf{b}_i)\leq 0$ 时，点 $\mathbf{p}_j$ 到 $\mathbf{a}_i$，$\mathbf{b}_i$ 连线的垂足在 $\mathbf{a}_i$，$\mathbf{b}_i$ 的外部，此时必然不会发生碰撞，令 $c_{ij}=+\infty$。
当 $(\mathbf{p}_j-\mathbf{a}_i)\cdot(\mathbf{b}_i-\mathbf{a}_i)\geq 0$ 且 $(\mathbf{p}_j-\mathbf{b}_i)\cdot(\mathbf{a}_i-\mathbf{b}_i)\geq 0$ 时，点 $\mathbf{p}_j$ 到 $\mathbf{a}_i$，$\mathbf{b}_i$ 连线的垂足在 $\mathbf{a}_i$，$\mathbf{b}_i$ 的内部，距离 c_{ij} 可表示为

$$c_{ij}=\frac{\|(\mathbf{p}_j-\mathbf{a}_i)\times(\mathbf{b}_i-\mathbf{a}_i)\|}{\|(\mathbf{b}_i-\mathbf{a}_i)\|}-h_2$$

发生碰撞时，存在 $c_{ij}\leq 0$，令

$$c_{min}=\min\{c_{ij}|1\leq i\leq N,1\leq j\leq 3\}$$

则发生的时刻对应了 $c_{min}=0$ 的时刻。
由问题1中的递推关系式 c_{min} 以龙头坐标 s_0 为唯一变量。又因为 $s_0=vt$，c_{min} 也是 t 的函数，可写作 $c_{min}(t)$。记第一次碰撞的时刻为 t_0，则 t_0 为方程 $c_{min}(t)=0$ 最小的零点，于是

$$t_0=\min\{t|c_{min}(t)=0\}$$

问题3

数学模型

约束条件

设掉头区域半径为 R。
对于任意螺距 d，龙头的极径 c_{min} 可视作时刻 t 与螺距 d 的函数，由于每个 t 对应了唯一的龙头极径 r_0，故 c_{min} 可也表示为 r_0 与 d 的函数，记为 $c_{min}(r_0, d)$。
r_0 与 t 的关系如下

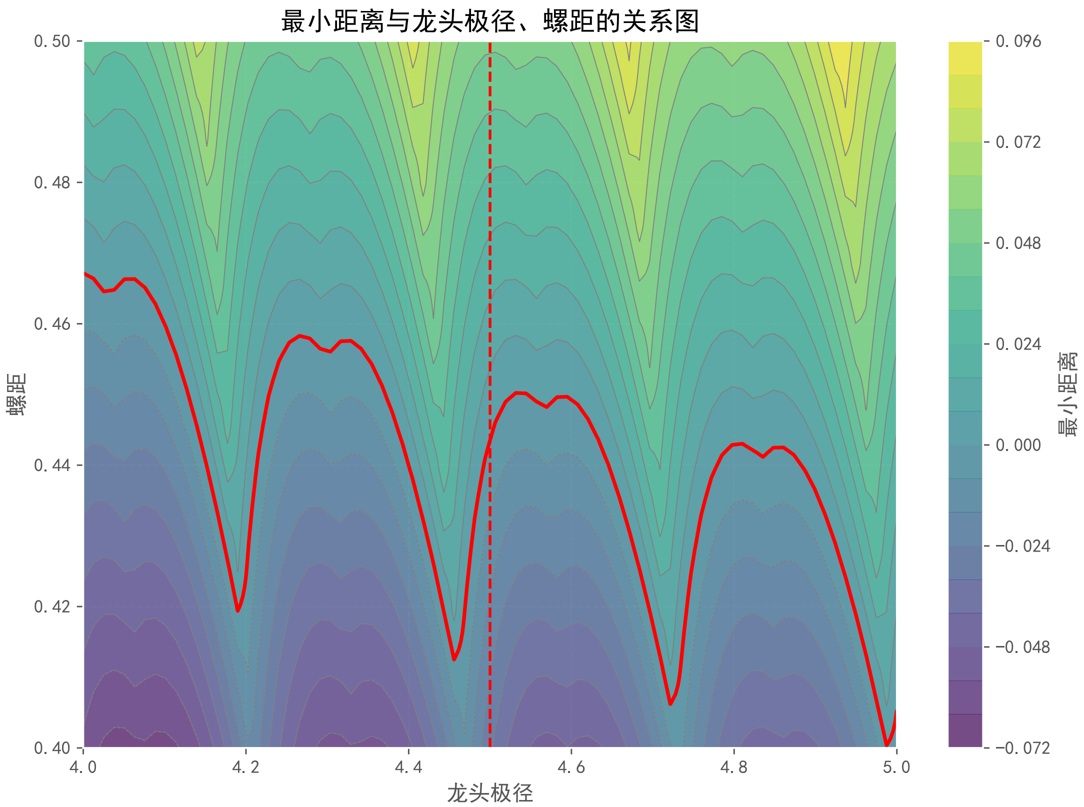
$$r_0 = \frac{d}{2\pi}\theta_0 = \frac{d}{2\pi}L^{-1}\left(L_{max} - vt\right)$$

$$t = \frac{L_{max} - \frac{2\pi r_0}{d}}{v}$$

为保证在龙头到达掉头区域前，队伍不发生碰撞，d 需满足：当$r_0 \geq R$ 时，$c_{min}(r_0, d)$ 恒大于 0。

求解过程

绘制函数 $c_{min}(r_0, d)$，的着色图，如下所示



在实际运动时，螺距为固定值，极径将由大变小。上图中，表示队伍状态的点将从右至左沿水平线运动。图中红实线表示 $c_{min}(r_0, d) = 0$ 的等高线，红色虚线表示 $r_0 = R$，为使碰撞不发生，表示队伍状态的点在从右侧水平运动到红色虚线的过程中，必须保持在红色实线上方。

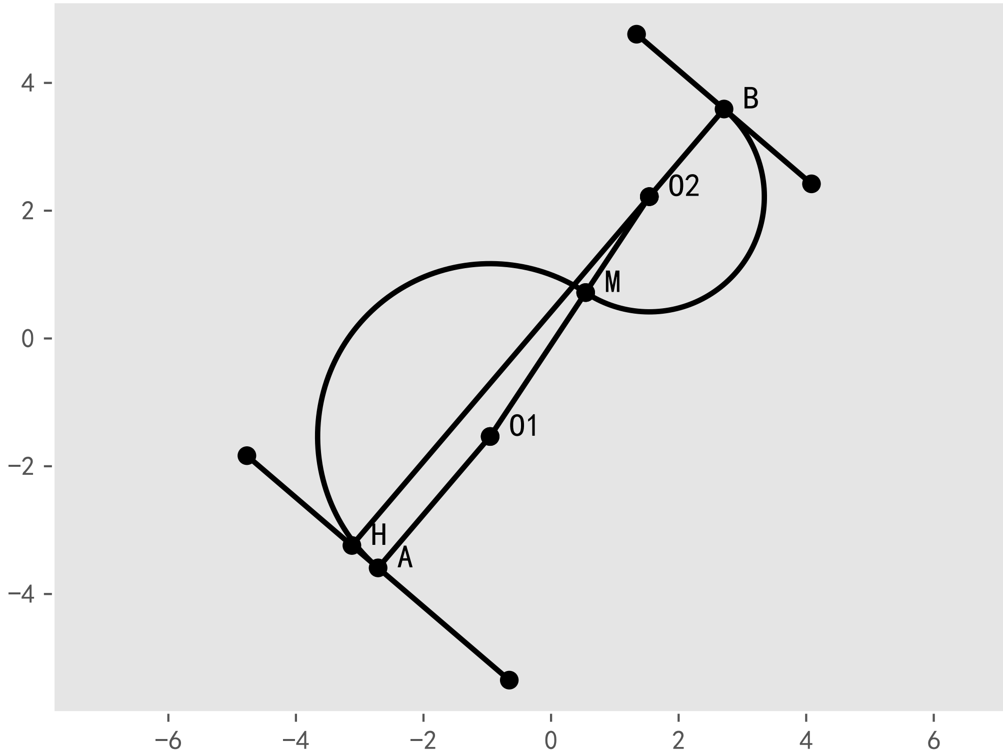
上图中的红色实线对应了一个 d 关于 r_0 的单值函数，记为 $D(r_0)$，注意到在红色虚线右侧附近 $D(r_0)$ 为上凸函数，容易求得极大值 D_{max}，此极大值即为最小允许的螺距 d_{min}。

问题4

数学模型

弧线长与半径比例的关系

记掉头开始和结束的点分别为 A，B，圆弧交界点为 M，记两圆的圆心分别为 O_1，O_2。作 OH 垂直点 A 处的切线，交切线于点 H。
如下图所示



为简单证明弧长不变，记 $R_1 = O_1M$，$R_2 = O_2M$，有

$$
\begin{aligned}
BH &= (R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)\cos(\angle HO_2O_1) \\
AH &= (R_1 + R_2)\sin(\angle HO_2O_1)
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{gathered}
R_1 + R_2 = \frac{AH^2 + BH^2}{2BH} \\
\angle HO_2O_1 = 2\arctan\frac{AH}{BH}
\end{gathered}
$$

两段圆弧长度的和为

$$
C = 2(R_1 + R_2)(\pi - \angle HO_2O_1) = \frac{AH^2 + BH^2}{2BH}\left(\pi - 2\arctan\frac{AH}{BH}\right)
$$

为定值。

曲线的拼接

队伍的轨迹由四段不同的曲线拼接而成，现需要重新定义运动轨迹的自然坐标。
现以点 A 为运动曲线自然坐标的坐标原点，以队伍行进方向为自然坐标正方向。
整条运动曲线由四部分拼接而成，以下分别讨论。

第一段曲线

第一段曲线上，$s \le 0$，把手在在螺线上。
掉头区域半径为 R，记螺线和掉头区域圆周相交的点为 A，记由原点 O 到 A 的螺线的弧长为 L_{min}，记点 A 的极角和极径为 θ_{min}、r_{min}，则

$$\begin{aligned}
r_{min} &= R \\
\theta_{min} &= \frac{2\pi}{d} r_{min} = \frac{2\pi}{d} R \\
L_{min} &= L(\theta_{min})
\end{aligned}$$

由于 A 为自然坐标原点，A 的位置矢量为 $\mathbf{r}(0)$。
记把手的角和极径分别为 θ，r，则在第一段曲线上，θ 可视为 s 的函数，记作 $\theta(s)$。
由

$$s = -(L(\theta) - L_{min}) = L_{min} - L(\theta)$$

有

$$\theta(s) = L^{-1}(L_{min} - s)$$

使用重新定义的 $\theta(s)$，与问题1中相同，把手的位置矢量表示为

$$\mathbf{r}(s) = \frac{d}{2\pi}\theta(s)\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{e}_x, \quad s \le 0$$

单位切向量为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s) = -\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{b}(\theta(s)), \quad s \le 0$$

其中，$\mathbf{b}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}[1, x]^T$。

第二、三段曲线

第二、三段曲线均为圆弧，设两条圆弧所在圆的圆心分别为 O_1，O_2，半径分别为 R_1，R_2，且令

$$R_1 : R_2 = \lambda_1 : \lambda_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

在问题4的情景中，$\lambda_1 = \frac{2}{3}$，$\lambda_2 = \frac{1}{3}$。
第一段圆弧的起点为 A，A 点的自然坐标为 0，位置矢量为

$$\mathbf{r}(0) = \frac{d}{2\pi}\theta(0)\mathbf{T}(\theta(0))\mathbf{e}_x = \frac{d}{2\pi}\theta_{min}\mathbf{T}(\theta_{min})\mathbf{e}_x = R\mathbf{T}(\theta_{min})\mathbf{e}_x$$

令 $\mathbf{n} = \mathbf{T}(\theta_{min})\mathbf{e}_x$，$\mathbf{n}$ 为单位向量，且

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}(0) = R\mathbf{n}$$

A 点的切向单位矢量为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(0) = -\mathbf{T}(\theta(0))\mathbf{b}(0) = -\mathbf{T}(\theta_{min})\mathbf{b}(\theta_{min})$$

第二段圆弧的终点为 B，B 与 A 关于原点对称，位置矢量相反、切向矢量相同。$\overrightarrow{AO_1}$ 指向 A 点切向矢量的正右侧，于是 $\overrightarrow{AO_1}$ 方向的单位向量为

$$\mathbf{m} = \mathbf{T}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(0) = -\mathbf{T}\left(\theta_{min} - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{b}(\theta_{min}) = \mathbf{T}\left(\theta_{min} + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{b}(\theta_{min})$$

两圆的半径分别为 R_1，R_2，于是

$$\overrightarrow{AO_1} = R_1\mathbf{m}$$
$$\overrightarrow{BO_2} = -R_2\mathbf{m}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{O_2O_1}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{AO_1} - \overrightarrow{BO_2} - \overrightarrow{AB}\right\|^2 \\ &= (R_1+R_2)^2\mathbf{m}^2 - 2(R_1+R_2)\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= (R_1+R_2)^2 - 2(R_1+R_2)\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

因为两圆弧相切，$\|O_1O_2\| = R_1 + R_2$，于是

$$(R_1+R_2)^2 = (R_1+R_2)^2 - 2(R_1+R_2)\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$$

解得

$$R_1 + R_2 = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}{2\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AB}}$$

由 A，B 关于原点对称 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO} = -2R\mathbf{n}$，带入化简可得

$$\begin{aligned}R_1 + R_2 &= \frac{(2R\mathbf{n})^2}{-2\mathbf{m}\cdot 2R\mathbf{n}} \\ &= -\frac{R}{\left[\mathbf{T}\left(\theta_{min}+\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{b}(\theta_{min})\right]\cdot\left[\mathbf{T}(\theta_{min})\mathbf{e}_x\right]} \\ &= -\frac{R}{\mathbf{b}(\theta_{min})^T\mathbf{T}\left(-\theta_{min}-\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{T}(\theta_{min})\mathbf{e}_x} \\ &= \frac{R}{\mathbf{b}(\theta_{min})^T\mathbf{e}_y} \\ &= \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 + R^2}\end{aligned}$$

由 $R_1 : R_2 = \lambda_1 : \lambda_2$，且满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$，有

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{\lambda_1}{\mathbf{b}(\theta_{min})\mathbf{e}_y} R = \lambda_1 \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 + R^2} \\
R_2 &= \frac{\lambda_2}{\mathbf{b}(\theta_{min})\mathbf{e}_y} R = \lambda_2 \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 + R^2}
\end{aligned}
$$

综合以上等式，可得两圆圆心和交点的位置矢量分别为

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OO_1} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO_1} = R\mathbf{n} + R_1\mathbf{m} \\
\overrightarrow{OO_2} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO_2} = -R\mathbf{n} - R_2\mathbf{m} \\
\overrightarrow{OM} &= \lambda_2\overrightarrow{OO_1} + \lambda_1\overrightarrow{OO_2} = (\lambda_2 - \lambda_1)R\mathbf{n}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \mathbf{T}(\theta_{min})\mathbf{e}_x \\
\mathbf{m} &= \mathbf{T}\left(\theta_{min} + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{b}(\theta_{min})
\end{aligned}
$$

由几何平行关系，两端圆弧圆心角相等，均为

$$
\beta = \angle MO_1A = 2\arctan\left(\frac{\overrightarrow{O_1M} \times \overrightarrow{O_1A}}{\overrightarrow{O_1M} \cdot \overrightarrow{O_1A}}\right)
$$

化简得到

$$
\beta = 2\arctan\theta_{min} = 2\arctan\left(\frac{2\pi R}{d}\right)
$$

两段圆弧长分别为

$$
C_1 = \beta R_1 = 2\lambda_1 \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 + R^2}\arctan\left(\frac{2\pi R}{d}\right)
$$

$$
C_2 = \beta R_2 = 2\lambda_2 \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 + R^2}\arctan\left(\frac{2\pi R}{d}\right)
$$

圆弧长度之和为

$$
C = C_1 + C_2 = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 + R^2}\arctan\left(\frac{2\pi R}{d}\right)
$$

在第二段曲线上，$0 < s \leq C_1$，把手在圆弧上顺时针运动，走过的圆心角为 $\frac{s}{R_1}$，位置矢量 $\mathbf{r}$ 可表示为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \overrightarrow{OO_1} + \mathbf{T}\left(-\frac{s}{R_1}\right)\overrightarrow{O_1A} \\
&= R\mathbf{n} + R_1\mathbf{m} - \mathbf{T}\left(-\frac{s}{R_1}\right)R_1\mathbf{m}
\end{aligned}
$$

单位切向量为

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s) = \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{R_1}\right)\mathbf{m}
$$

在第三段曲线上，$C_1 < s < C_1 + C_2$，把手在圆弧上逆时针运动，距离 B 点的圆心角为 $\frac{C_1+C_2-s}{R_1}$，同理，位置矢量 $\mathbf{r}$ 可表示为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(s) &= \overrightarrow{OO_2} + \mathbf{T}\left(-\frac{C_1+C_2-s}{R_2}\right)\overrightarrow{O_2B} \\
&= -R\mathbf{n} - R_2\mathbf{m} + \mathbf{T}\left(-\frac{C_1+C_2-s}{R_2}\right)R_2\mathbf{m}
\end{aligned}
$$

单位切向量为

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s) = -\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C_1+C_2-s}{R_2}\right)\mathbf{m}
$$

第四段曲线

在第四段曲线上，$s \geq C_1 + C_2$，把手由内至外绕盘出螺线运动，令 $s' = C_1 + C_2 - s$，与第一段曲线同理，可得

$$
\mathbf{r}(s) = -\frac{d}{2\pi}\theta(C_1+C_2-s)\mathbf{T}(\theta(C_1+C_2-s))\mathbf{e}_x, \quad s \geq C_1 + C_2
$$

单位切向量为

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s) = \mathbf{T}(\theta(C_1+C_2-s))\mathbf{b}(\theta(C_1+C_2-s)), \quad s \geq C_1 + C_2
$$

至此，完成了所有曲线信息的计算：

- 第一段曲线为盘入螺线，对应的自然坐标范围为 $(-\infty, 0]$；
- 第二段曲线为以 O_1 为圆心的圆弧 AM，对应的自然坐标范围为 $(0, C_1)$；
- 第三段圆弧为以 O_2 为圆心的圆弧 MB，对应的自然坐标范围为 $[C_1, C_2)$；
- 第四段圆弧为盘出螺线，对应的自然坐标范围为 $[C_2, +\infty)$。

递推关系

同问题1，有递推关系

$$
\begin{cases}
s_0 = vt \\
s_{i+1} = \max\{s | f(s, s_i, l_{i+1}) = 0 \text{ 且 } s < s_i\},\ i = 0, 1, \cdots, N
\end{cases}
$$

其中

$$
f(s, s_i, l_{i+1}) = [\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_i)]^2 - l_{i+1}^2
$$

由于曲线上各点的位置和单位切向量已知，且位置和单位切向量均连续，故同样可通过牛顿迭代法求解。

模型总结

令 d 为螺距；令 R 为掉头半径；令 v 为龙头速度；
令 l_i 为各节龙身前后把手距离；
令 λ_1，λ_2 为两段圆弧半径的比例，满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$；
令 R_1，R_2 分别为掉头区域两端圆弧的半径，则

$$R_1=\lambda_1\sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2+R^2},\quad R_2=\lambda_2\sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2+R^2}$$

令 β 为两端圆弧的圆心角，则

$$\beta=2\arctan\left(\frac{2\pi R}{d}\right)$$

令 C_1，C_2 分别为两端圆弧的长度，则

$$C_1=\beta R_1,\quad C_2=\beta R_2$$

令 $L(\theta)=\frac{d}{4\pi}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1}+\ln\left(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right)\right]$；
令 $\theta_{min}=\frac{2\pi R}{d}$，$L_{min}=L(\theta_{min})$；
令 $\theta(s)=L^{-1}(L_{min}-s)$；
令 $\mathbf{T}(\omega)$ 为旋转 ω 的矩阵；
令 $\mathbf{b}(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}[1,x]^T$；
令 $\mathbf{n}$，$\mathbf{m}$ 分别为

$$\mathbf{n}=\mathbf{T}(\theta_{min})\mathbf{e}_x,\quad \mathbf{m}=\mathbf{T}\left(\theta_{min}+\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{b}(\theta_{min})$$

则 $\mathbf{n}$，$\mathbf{m}$ 均为单位向量，且均为常量；
以开始进入掉头区域的位置为自然坐标原点，以龙队行进方向为自然坐标正方向，建立自然坐标系。
位置矢量关于自然坐标的函数为

$$\mathbf{r}(s)=\begin{cases}\frac{d}{2\pi}\theta(s)\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{e}_x & ,s\le 0\\ R\mathbf{n}+R_1\mathbf{m}-R_1\mathbf{T}\left(-\frac{s}{R_1}\right)\mathbf{m} & ,0\le s\le C_1\\ -R\mathbf{n}-R_2\mathbf{m}+R_2\mathbf{T}\left(-\frac{C_1+C_2-s}{R_2}\right)\mathbf{m} & ,C_1\le s\le C_1+C_2\\ -\frac{d}{2\pi}\theta(C_1+C_2-s)\mathbf{T}(\theta(C_1+C_2-s))\mathbf{e}_x & ,C_1+C_2\le s\end{cases}$$

位置矢量关于自然坐标的函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s)=\begin{cases}-\mathbf{T}(\theta(s))\mathbf{b}(\theta(s)) & ,s\le 0\\ \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{s}{R_1}\right)\mathbf{m} & ,0\le s\le C_1\\ -\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C_1+C_2-s}{R_2}\right)\mathbf{m} & ,C_1\le s\le C_1+C_2\\ \mathbf{T}(\theta(C_1+C_2-s))\mathbf{b}(\theta(C_1+C_2-s)) & ,C_1+C_2\le s\end{cases}$$

令

$$f(s,s_i,l_{i+1})=[\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_i)]^2-l_{i+1}^2$$

f 对 s 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}=2[\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_i)]\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s)$$

各把手自然坐标的递推式为

$$\begin{cases}s_0=vt\\ s_{i+1}=\max\{s|f(s,s_i,l_{i+1})=0\text{ 且 }s<s_i\},\ i=0,1,\cdots,N\end{cases}$$

使用牛顿迭代法完成求解。计算 s_{i+1} 时，选取的迭代初值为 $s_i-\pi l_{i+1}$。

问题5

数学模型

速度递推关系

对于问题4中的各个 $s_i(0\le i\le N)$，s_i 均可视为时间 t 的函数。
问题4中，已经求解了曲线所有部分的位置和位置关于自然坐标的导数，因此，可以设

$$\begin{aligned}&x_i=x(s_i),\ y_i=y(s_i)\\&x_i'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}(s_i),\ y_i'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}(s_i)\\&x_{i+1}=x(s_{i+1}),\ y_{i+1}=y(s_{i+1})\\&x_{i+1}'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}(s_{i+1}),\ y_{i+1}'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}(s_{i+1})\end{aligned}$$

由等式

$$(x(s_{i+1})-x(s_i))^2+(y(s_{i+1})-y(s_i))^2-l_{i+1}^2=0$$

两端同时微分可得

$$(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}'\mathrm{d}s_{i+1}-x_i'\mathrm{d}s_i)+(y_{i+1}-y_i)(y_{i+1}'\mathrm{d}s_{i+1}-y_i'\mathrm{d}s_i)=0$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}s_{i+1}}{\mathrm{d}s_i}=-\frac{(x_{i+1}-x_i)x_i'+(y_{i+1}-y_i)y_i'}{(x_{i+1}-x_i)x_{i+1}'+(y_{i+1}-y_i)y_{i+1}'}$$

由 $v_i=\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}t}$，$v_{i+1}=\frac{\mathrm{d}v_{i+1}}{\mathrm{d}t}$，有

$$\frac{v_{i+1}}{v_i}=\frac{\frac{\mathrm{d}s_{i+1}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}s_{i+1}}{\mathrm{d}s_i}$$

设龙头速度为 v，于是有递推关系式

$$\frac{v_{i+1}}{v_i}=-\frac{(x_{i+1}-x_i)x_i'+(y_{i+1}-y_i)y_i'}{(x_{i+1}-x_i)x_{i+1}'+(y_{i+1}-y_i)y_{i+1}'},\ i=0,1,\cdots,N$$

速度最大值描述

由递推关系式，速度的比值仅与各点的位置有关，而与时间无关，故队列中各把手的速度 $v_i(1\le i\le N)$ 可视为龙头坐标 s_0 与龙头速度 v_0 的函数。记队列中最大的速度为 v_{max}，v_{max} 也为 s_0 和 v_0 的函数，且有

$$v_{max}(s_0,v_0)=\max\{v_i(s_0,v_0)|1\le i\le N\}$$

当 s_0 固定时，$v_i(1\le i\le N)$ 与 v_0 的比值恒为定值，于是 v_{max} 与 v_0 的比值也恒为定值

$$\frac{v_{max}(s_0,v_0)}{v_0}=\frac{v_{max}(s_0,1)}{1}$$

$$v_0=\frac{v_{max}(s_0,v_0)}{v_{max}(s_0,1)}$$

题目给出了 $v_{max}(s_0,v_0)$ 被允许的最大值，记为 v_{quemax}。为求 v_0 被允许的最大值，只需计算 $v_{max}(s_0,1)$ 最大值，从而保证

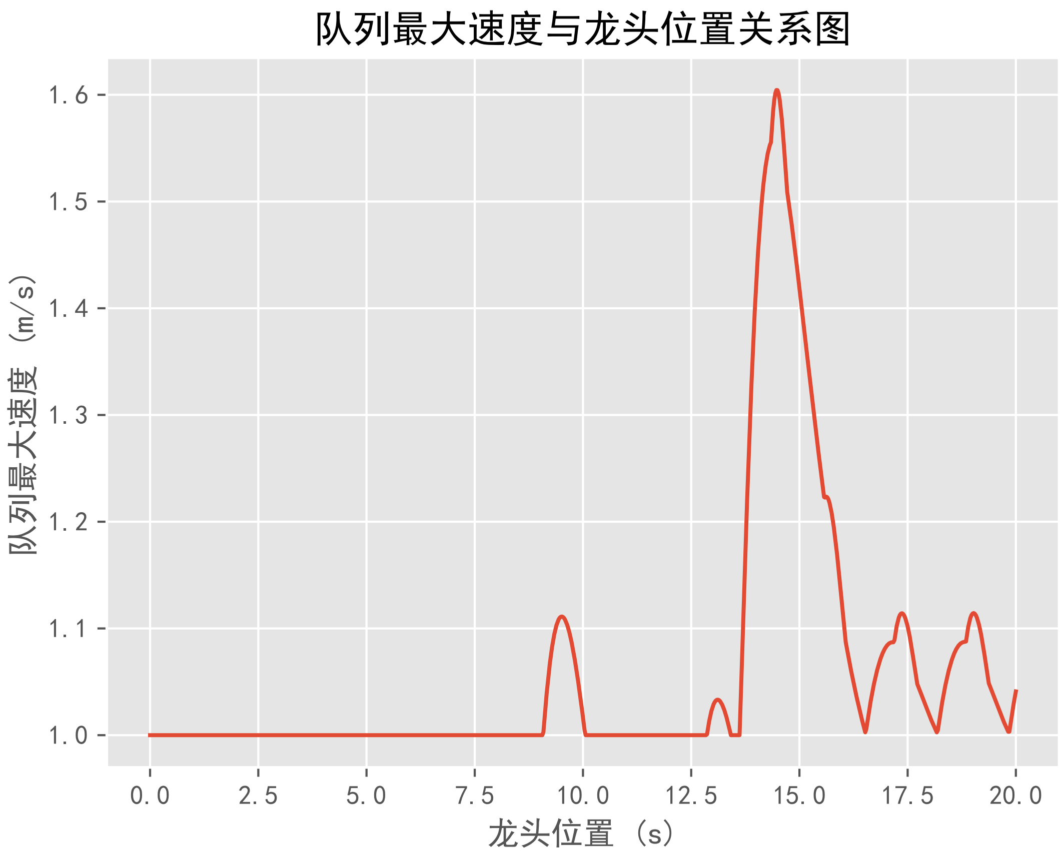
$$v_0\max\{v_{max}(s_0,1)|s_0\in\mathbb{R}\}\le v_{quemax}$$

则 v_0 的最大值

$$v_{0max}=\frac{v_{quemax}}{\max\{v_{max}(s_0,1)|s_0\in\mathbb{R}\}}$$

龙头速度为 1 时，队列最大速度的计算

$v_{max}(s_0, 1)$ 是仅与 s_0 有关的函数，初步绘制其图像，如下图所示



在 $s_0 \geq 16$ 的范围内，图像呈近似的周期变化，且极值点逐步略微增大，但明显小于 $s_0 < 16$ 范围内的极值点。
注意到该函数的极大值点在区间 $[14, 15]$ 内，且函数在该区域内是上凸的，容易求得 $v_{max}(s_0, 1)$ 的极大值。
由公式

$$v_{0max} = \frac{v_{quemax}}{\max\left\{v_{max}(s_0, 1) | s_0 \in \mathbb{R}\right\}}$$

可计算被允许的龙头最大速度。