① $\xi \sim R[0, \Theta]$, выборка объема n
$\Theta \in \Theta = (0; +\infty)$

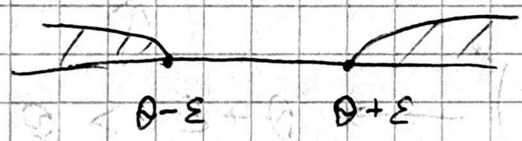
(1) $\tilde{\Theta}_3' = \frac{n+1}{n}\tilde{\Theta}_3$ – исследовать на состоятельность по опред-ю.

(2) $\tilde{\Theta}_3 = x_{max}$ – исследовать на состоятельность по опред-ю.

<u>Решение</u>:

сост-ть: $\forall$ распр-е вер-й модели $\tilde{\theta} \xrightarrow{P} \Theta$
$(\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\tilde{\Theta} - \Theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$

1) Т. е. $\forall \Theta \quad \forall \varepsilon > 0 \quad P(|\tilde{\Theta}_3' - \Theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$$P(|\tilde{\Theta}_3' - \Theta| \geq \varepsilon) = P(\tilde{\Theta}_3' \leq \Theta - \varepsilon) + P(\tilde{\Theta}_3' \geq \Theta + \varepsilon)$$

2) $P(\tilde{\Theta}_3' \leq \Theta - \varepsilon) = P\left(\frac{n+1}{n} \cancel{\theta} \cdot x_{max} \leq \Theta - \varepsilon\right) \textcircled{=}$

Распр-е n-ой статистики – $(F(x))^n$,
а $F(x) = \frac{x}{\Theta}$ $\{[0, \Theta]\}$

распр-е непрер-е (без скачков)

$\textcircled{=}$ $P\left(x_{max} \leq \frac{(\Theta - \varepsilon)n}{(n+1)}\right) = \left(\frac{(\Theta - \varepsilon)n}{\Theta(n+1)}\right)^n = \left(\frac{\Theta - \varepsilon}{\Theta}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$

$$= \Bigl(\underbrace{\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}}_{<1}\Bigr)^n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3) $$P(\tilde{\theta}_3' \geq \theta+\varepsilon) = P\left(\frac{n+1}{n} x_{max} \geq \theta+\varepsilon\right) =$$

$$= P\left(x_{max} \geq \frac{(\theta+\varepsilon)n}{(n+1)}\right) = \cancel{1-\left(\frac{(\theta+\varepsilon)\,n}{\theta\,(n+1)}\right)^n}$$

$$\left\{ F(x) = \begin{cases} 1, & x > \theta \\ 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & x \in [0,\theta] \end{cases} \right\}$$

$$= 1 - \left(F\left(\frac{(\theta+\varepsilon)n}{n+1}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-(1)^n = 0$$

$$\left(\frac{(\theta+\varepsilon)\,n}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta+\varepsilon > \theta \Rightarrow \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$$

$$\hookrightarrow \frac{(\theta+\varepsilon)n}{(n+1)} > \theta$$

Из 2), 3) $\Rightarrow$ $\forall \theta>0\ \forall \varepsilon>0\ \ P(|\tilde{\theta}_3' - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

что и означает состоятельность этой оценки.

4) Рассм-м $\tilde{\theta}_3 = x_{max}$

$$P(|\tilde{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) = P(\tilde{\theta}_3 \leq \theta-\varepsilon) = P(x_{max} \leq \theta-\varepsilon)$$

т.к. $x_{max} \leq \theta$

$$= \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = \Big(\underbrace{1-\frac{\varepsilon}{\theta}}_{<1}\Big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \forall \theta>0 \ \forall \varepsilon>0 \quad P(|\tilde{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ опр-е сост-ти

$\tilde{\theta}_3 = X_{max}$